

ANALISA ANALITIS KARATERISTIK ARUS MOTOR DC YANG DISUPLAI PENYEARAH DIODA SATU FASA

Vicky Salamena

Teknik Elektro Politeknik Negeri Ambon
vickysalamena@yahoo.com

ABSTRAK

This study intends to look at the characteristics of current drawn by the dc motor when supplied by a single-phase diode rectifier. Characteristics of this current will depend on the output of a single-phase sinusoidal rectifier and electrical characteristics of dc motors.

Assessments carried out by modeling a single-phase diode rectifier in order to obtain output voltage equation. Next modeled as a series dc motor electric ekuivalen thus obtained mathematical model. By using Kirchoff Voltage Law is obtained first order differential equation is not homogeneous due to the excitation voltage ac source. This equation contains the parameters of the current as a function of time.

Electric current equation is then simulated to obtain the dc motor input current curve as a function of time or current dc motor moment.

The result is a instantaneous current characteristic curve dc motor function of time, steady-state current at $t = 0$, and the average current which is a dc currents.

Keywords: rectifier diode, dc motor model, the flow characteristics

ABSTRACT

This study intends to look at the characteristics of current drawn by the dc motor when supplied by a single-phase diode rectifier. Characteristics of this current will depend on the output of a single-phase sinusoidal rectifier and electrical characteristics of dc motors.

Assessments carried out by modeling a single-phase diode rectifier in order to obtain output voltage equation. Next modeled as a series dc motor electric ekuivalen thus obtained mathematical model. By using Kirchoff Voltage Law is obtained first order differential equation is not homogeneous due to the excitation voltage ac source. This equation contains the parameters of the current as a function of time.

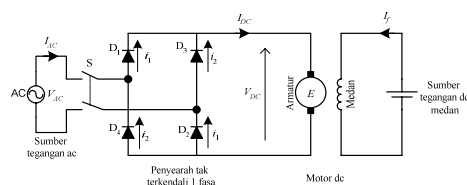
Electric current equation is then simulated to obtain the dc motor input current curve as a function of time or current dc motor moment.

The result is a instantaneous current characteristic curve dc motor function of time, steady-state current at $t = 0$, and the average current which is a dc currents.

Keywords: rectifier diode, dc motor model, the flow characteristics

Pendahuluan

Penyearah satu fasa adalah rangkaian dioda yang menyearahkan sumber tegangan ac satu fasa menjadi tegangan dc. Ada beberapa penyearah satu fasa, tetapi yang sering digunakan adalah penyearah gelombang penuh sistem jembatan. Penyearah jembatan ini mempunyai keluaran dc yang cukup baik sehingga memperkecil harmonisa dan menghasilkan nilai tegangan rata-rata yang maksimal. Rangkaian kendali motor dc dengan menggunakan penyearah tak terkendali satu fasa ditunjukkan oleh Gambar 1.



Rangkaian kendali penyearah tak terkendali 1 fasa

Pengendalian motor dc dengan penyearah tak terkendali satu fasa yang ditunjukkan oleh Gambar 1 merupakan pengendalian motor on/off untuk motor dc. Penyearah hanya menyediakan sumber dc dengan amplitudo tegangan tetap kepada motor dc. Bila diinginkan untuk melakukan proses asutan (*starting*), maka dipasang resistor variabel yang seri dengan armatur sehingga arus armatur tergantung dari besar nilai resistor variabel. Untuk suplai ke motor dc sumber tegangan ac dikendalikan oleh empat buah dioda, setengah perioda positif disalurkan oleh dioda D_1 dan D_2 dan selanjutnya setengah perioda negatif disalurkan oleh dioda D_3 dan D_4 ke motor dc. Demikian juga arus yang mengalir disalurkan oleh dua pasang dioda tersebut. Armatur motor dc merupakan belitan yang dapat dinyatakan dengan suatu rangkaian RL seri. Bila rotor telah berputar maka akan timbul tegangan induksi armatur yang sebanding dengan putaran, bila putaran telah mencapai suatu nilai tunak (*steady-state*) yang konstan maka nilai tegangan induksi juga konstan sebesar E . Diagram ekuivalen armatur motor dc ditunjukkan oleh Gambar 2.

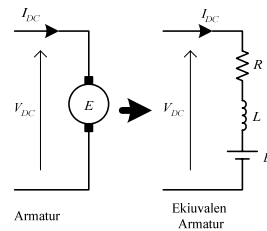
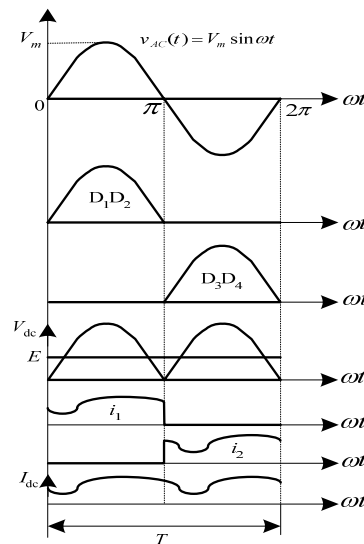


Diagram ekuivalen armatur motor dc

Bentuk dan karakteristik penyearah dioda jembatan dan rangkaian ekuivalen motor dc akan mempengaruhi bentuk gelombang tegangan dan arus. Diagram dari bentuk tegangan dan arus ditunjukkan oleh Gambar 3.

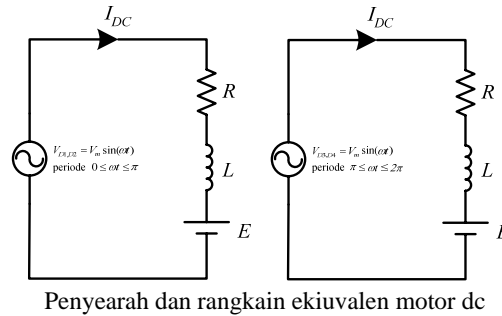


Bentuk tegangan dan arus dari rangkaian Gambar 3.10

Tegangan yang masuk ke motor terdiri dari setengah periode pertama yaitu $0 \leq \omega t \leq \pi$ dan setengah periode kedua $\pi \leq \omega t \leq 2\pi$. Tegangan rata-rata atau tegangan dc untuk satu periode T adalah:

$$\begin{aligned} V_{DC} &= \frac{1}{T} \int_0^T V_m \sin(\omega t) d(\omega t) \\ &= \frac{2V_m}{\pi} \end{aligned} \quad (1)$$

Arus yang mengalir ke motor diperoleh dengan bantuan rangkaian ekuivalen penyearah dan motor seperti Gambar 4.



Karena rangkaian ekuivalen untuk setengah periode pertama dan kedua sama, maka persamaan hukum kirchoff tegangan untuk ke duanya adalah:

$$v_s(t) = V_R + V_L + E$$

atau

$$V_m \sin(\omega t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + E \quad (2)$$

Pembahasan

Persamaan (2) mempunyai suku-suku dengan derajat turunan pertama atau biasa disebut sebagai persamaan diferensial orde satu. Persamaan yang diturunkan dari hukum kirchoff tegangan ini mengandung parameter arus sebagai fungsi waktu yang secara sistem dieksitasi (diteral) oleh tegangan sumber keluaran penyearah $v_s(t) = V_m \sin \omega t$ sehingga dalam bentuk matematis dinyatakan sebagai persamaan diferensial orde satu tak-homogen. Bentuk umum dari persamaan (2) menurut Soedjo P. (1995) adalah:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = r(x) \quad (3)$$

dan solusinya adalah:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} r(x) dx + c \right] \quad (4)$$

dengan $\int p(x)dx$ adalah faktor integrasi dan c adalah konstanta gabungan dari hasil integrasi.

Untuk persamaan (2) dapat dinyatakan dalam bentuk umum persamaan diferensial orde satunya seperti persamaan (3) adalah:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_m \sin(\omega t) - E$$

atau

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{V_m \sin(\omega t) - E}{L} \quad (5)$$

Untuk persamaan (5) arus sebagai fungsi waktu yaitu $i(t)$, sehingga $p(t)$ dan $r(t)$ adalah sebagai berikut,

$$p(t) = \frac{R}{L} \quad \text{dan} \quad r(t) = \frac{V_m \sin \omega t - E}{L}$$

dan penyelesaian dari faktor integrasi adalah:

$$\int p(t)dt = \int \frac{R}{L} dt = \frac{R}{L}t$$

Penentuan Persamaan Arus

Solusi untuk persamaan (5) menurut persamaan (4) dapat ditulis sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 i(t) &= e^{-\int p(t)dt} \left[\int e^{\int p(t)dt} r(t) dt + c \right] \\
 &= e^{-\frac{R}{L}t} \left[\frac{V_m}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt - \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} + c \right] \quad (6)
 \end{aligned}$$

dengan bentuk $\int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt$ diselesaikan dengan bentuk parsial $\int u dv = u.v - \int v du$,

$$\text{dengan memisalkan : } u = e^{\frac{R}{L}t} \quad du = \frac{R}{L} e^{\frac{R}{L}t} dt$$

sehingga diperoleh:

$$\int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt = e^{\frac{R}{L}t} \left(-\frac{1}{\omega} \cos \omega t \right) - \int -\frac{1}{\omega} \cos \omega t \cdot \frac{R}{L} e^{\frac{R}{L}t} dt$$

Bentuk $-\int -\frac{1}{\omega} \cos \omega t \cdot \frac{R}{L} e^{\frac{R}{L}t} dt$ adalah merupakan integral dari perkalian dua fungsi maka dapat diselesaikan dengan persamaan parsial seperti di atas, sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}
 -\int -\frac{1}{\omega} \cos \omega t \cdot \frac{R}{L} e^{\frac{R}{L}t} dt &= \frac{R}{\omega L} \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t dt \\
 &= \frac{R}{\omega L} \left[\frac{1}{\omega} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t - \frac{R}{\omega L} \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt \right]
 \end{aligned}$$

dengan mensubstitusi (**) ke (*) diperoleh,

$$\begin{aligned}
 \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt &= -\frac{1}{\omega} e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t + \frac{R}{\omega L} \left[\frac{1}{\omega} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t - \frac{R}{\omega L} \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt \right] \\
 &= -\frac{1}{\omega} e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t + \frac{R}{\omega^2 L} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t - \frac{R^2}{(\omega L)^2} \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt
 \end{aligned}$$

Selanjutnya bentuk di atas diatur lagi dengan mengumpulkan bentuk $\int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt$ disalah satu ruas maka diperoleh,

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt + \frac{R^2}{(\omega L)^2} \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt &= -\frac{1}{\omega} e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t + \frac{R}{\omega^2 L} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t \\
 \frac{R^2 + (\omega L)^2}{(\omega L)^2} \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt &= -\frac{1}{\omega} e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t + \frac{R}{\omega^2 L} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t
 \end{aligned}$$

Setelah memisahkan bentuk integral perkaliannya sendiri maka diperoleh hasilnya sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt &= \frac{-\frac{1}{\omega} e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t + \frac{R}{\omega^2 L} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t}{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{(\omega L)^2}} \\
 &= \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \left(R e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t - \omega L e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t \right)
 \end{aligned}$$

Menurut Kreyszig E. (1993) ada identitas trigonometri yaitu:

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \pm \delta) \quad \text{dengan } \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{A}{B}$$

Setelah menerapkan identitas tersebut pada (***) diperoleh,

$$\int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \left(R e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t - \omega L e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t \right)$$

$$\text{dan } \theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \text{ dan } \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = Z$$

maka

$$\begin{aligned} \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt &= \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin(\omega t - \theta) e^{\frac{R}{L}t} \\ &= \frac{L}{Z} \sin(\omega t - \theta) e^{\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

Kemudian memasukan (***) ke (6) sehingga diperoleh persamaan arus sebagai berikut,

$$i(t) = e^{\frac{R}{L}t} \left[\frac{V_m}{L} \left(\frac{L}{Z} \sin(\omega t - \theta) e^{\frac{R}{L}t} \right) - \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} + c \right]$$

atau

$$i(t) = \frac{V_m}{Z} \sin(\omega t - \theta) - \frac{E}{R} + c e^{\frac{R}{L}t} \quad (7)$$

dengan: $Z = R + j(2\pi fL)$ dan $\theta = \tan^{-1} \frac{2\pi fL}{R}$

Penentuan Nilai Batas c dengan Kondisi Awal

Menurut Rashid M. H. (1999) Untuk kasus arus beban kontinu, konstanta c pada persamaan (7) dapat ditentukan dengan kondisi $\omega t = \pi$ sehingga $i(t) = i(\pi / \omega) = I_1$, selanjutnya diperoleh,

$$I_1 = \frac{V_m}{Z} \sin(\pi - \theta) - \frac{E}{R} + c e^{\frac{R}{L}(\frac{\pi}{\omega})} \quad \text{untuk } t = \pi / \omega$$

Sesuai identitas trigonometri $\sin(\pi - \theta) = \sin \pi \cos \theta - \cos \pi \sin \theta$, kemudian nilai $\sin \pi = 0$; $\cos \pi = -1$ dan $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ diperoleh,

$$I_1 = \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) - \frac{E}{R} + c e^{\frac{R}{L}(\frac{\pi}{\omega})}$$

dengan demikian c dapat dinyatakan:

$$c = \left(I_1 + \frac{E}{R} - \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) \right) e^{\frac{R}{L}(\frac{\pi}{\omega})}$$

Arus masukan motor persamaan (7) dapat ditulis kembali dengan mensubstitusi bentuk c , maka

$$i(t) = \frac{V_m}{Z} \sin(\omega t - \theta) + \left(I_1 + \frac{E}{R} - \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) \right) e^{\frac{R}{L}(\frac{\pi}{\omega} - t)} - \frac{E}{R} \quad (8)$$

Sesuai dengan perioda tegangan yang ditunjukkan pada Gambar 3 maka pada kondisi tunak $i(t = 0) = i(t = \pi / \omega)$, yaitu $i(t = 0) = I_1$ dengan demikian dapat dicari persamaan arus I_1 sebagai berikut,

$$I_1 = i(t = 0) = \frac{V_m}{Z} \sin((0) - \theta) - \frac{E}{R} + \left(I_1 + \frac{E}{R} - \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) \right) e^{\frac{R}{L}(\frac{\pi}{\omega} - (0))}$$

penyelesaian bentuk tersebut didapat,

$$I_1 = i(t = 0) = -\frac{V_m}{Z} \sin(\theta) - \frac{E}{R} + \left(I_1 + \frac{E}{R} - \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) \right) e^{\frac{R}{L}(\frac{\pi}{\omega})}$$

Kemudian menyatakan $I_1 = i(t = \pi / \omega)$,

$$I_1 = i(t = \pi/\omega) = \frac{V_m}{Z} \sin(\pi - \theta) - \frac{E}{R} + \left(I_1 + \frac{E}{R} - \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) \right) e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} - \frac{\pi}{\omega} \right)}$$

diperoleh penyelesaian sebagai berikut,

$$I_1 = i(t = \pi/\omega) = \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) - \frac{E}{R} + \left(I_1 + \frac{E}{R} - \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) \right)$$

Dengan menyelesaikan $i(t = 0) = i(t = \pi/\omega)$ diperoleh,

$$-\frac{V_m}{Z} \sin(\theta) - \frac{E}{R} + \left(I_1 + \frac{E}{R} - \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) \right) e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)} = \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) - \frac{E}{R} + \left(I_1 + \frac{E}{R} - \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) \right)$$

Diperoleh bentuk I_1 sebagai berikut,

$$I_1 = \frac{-\frac{2V_m}{Z} \sin(\theta) - \left(\frac{E}{R} - \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) \right) \cdot \left(1 - e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)} \right)}{\left(1 - e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)} \right)}$$

dan kemudian menyederhanakan bentuk tadi menjadi

$$I_1 = \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) \left(1 - \frac{2}{1 - e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)}} \right) - \frac{E}{R} \quad (9)$$

Bentuk eksponensial dalam kurung dapat disederhanakan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{1 - e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)}} \right) &= \frac{1 - e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)} - 2}{1 - e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)}} = \frac{-1 - e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)}}{1 - e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)}} : \frac{-e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)}}{-e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)}} \\ &= \frac{-1}{-e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)}} + 1 = \frac{1 + e^{-\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)}}{-e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)} + 1} = \frac{1 + e^{-\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)}}{1 - e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)}} \end{aligned}$$

dari penyelesaian di atas dan disubstitusikan ke persamaan (9) diperoleh:

$$I_1 = \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) \frac{1 + e^{-\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)}}{1 - e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)}} - \frac{E}{R} \quad (10)$$

Selanjutnya persamaan (10) disubstitusikan ke persamaan $i(t)$ diperoleh:

$$i(t) = \frac{V_m}{Z} \sin(\omega t - \theta) - \frac{E}{R} + \left(\frac{V_m}{Z} \sin(\theta) \frac{1 + e^{-\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)}}{1 - e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)}} - \frac{E}{R} + \frac{E}{R} - \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) \right) e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} - t \right)}$$

atau

$$i(t) = \frac{V_m}{Z} \sin(\omega t - \theta) + \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) \left(\frac{e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} - t \right)} + e^{-\frac{R}{L} t}}{1 - e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)}} - e^{\frac{R}{L} \left(\frac{\pi}{\omega} - t \right)} \right) - \frac{E}{R}$$

kemudian bentuk eksponensial dalam kurung diselesaikan menjadi,

$$\left(\frac{e^{\frac{R(\pi-t)}{L}} + e^{-\frac{R}{L}t}}{1 - e^{-\frac{R(\pi)}{L}}} - e^{\frac{R(\pi-t)}{L}} \right) = \frac{2e^{-\frac{R}{L}t}}{1 - e^{-\frac{R(\pi)}{L}}}$$

maka

$$i(t) = \frac{V_m}{Z} \sin(\omega t - \theta) + \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) \left(\frac{2e^{-\frac{R}{L}t}}{1 - e^{-\frac{R(\pi)}{L}}} \right) - \frac{E}{R}$$

atau

$$i(t) = \frac{V_m}{Z} \left(\sin(\omega t - \theta) + \frac{2}{1 - e^{-\frac{R(\pi)}{L}}} \sin(\theta) e^{-\frac{R}{L}t} \right) - \frac{E}{R} \quad (11)$$

Persamaan (11) merupakan persamaan arus yang ditarik oleh motor dc selama perioda $0 \leq \omega t \leq \pi$ dengan $i(t) \geq 0$

Arus rms diode dapat ditentukan dari persamaan (11) sebagai berikut,

$$\begin{aligned} I_r &= \sqrt{\frac{1}{2} \int_0^\pi (i(t))^2 d\omega t} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\frac{V_m}{Z} \left(\sin(\omega t - \theta) + \frac{2}{1 - e^{-\frac{R(\pi)}{L}}} \sin(\theta) e^{-\frac{R}{L}t} \right) - \frac{E}{R} \right]^2 d\omega t} \quad (12) \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (12) pertama menyelesaikan dahulu $[i(t)]^2$, dengan menyederhanakan konstanta-konstanta yang ada dalam persamaan menjadi suatu simbol tertentu sebagai berikut,

$$i(t) = \frac{V_m}{Z} \sin(\omega t - \theta) + \frac{2V_m}{Z \left(1 - e^{-\frac{R(\pi)}{L}} \right)} \sin(\theta) e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{E}{R}$$

dengan inialisasi sebagai berikut,

$$A = \frac{V_m}{Z} \quad B = \frac{2V_m}{Z \left(1 - e^{-\frac{R(\pi)}{L}} \right)} \sin(\theta) \quad c = \frac{R}{L} \quad D = \frac{E}{R}$$

Persamaan arus, $i(t)$ dapat disusun kembali menjadi:

$$\begin{aligned} i(t) &= A \sin(\omega t - \theta) + B e^{-ct} - D \\ (i(t))^2 &= (A \sin(\omega t - \theta) + B e^{-ct} - D) \times (A \sin(\omega t - \theta) + B e^{-ct} - D) \\ &= A^2 \sin^2(\omega t - \theta) + 2AB \sin(\omega t - \theta) e^{-ct} - 2AD \sin(\omega t - \theta) \\ &\quad + B^2 e^{-2ct} - 2BD e^{-ct} + D^2 \end{aligned}$$

Selanjutnya adalah menarik integral dari masing-masing suku dalam persamaan tersebut. Hasilnya adalah:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (i(t))^2 d(\omega t) &= \int_0^\pi A^2 \sin^2(\omega t - \theta) d(\omega t) + \int_0^\pi 2AB \sin(\omega t - \theta) e^{-ct} d(\omega t) \\ &\quad - \int_0^\pi 2AD \sin(\omega t - \theta) d(\omega t) + \int_0^\pi B^2 e^{-2ct} d(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\int_0^{\pi} 2BD e^{-ct} d(\omega t) + \int_0^{\pi} D^2 d(\omega t) \\
= & \frac{\pi}{2} A^2 + 2AB \frac{\left(1 + e^{-\frac{c}{\omega}\pi}\right)}{\left(1 + \frac{c^2}{\omega^2}\right)} \left(\cos(\theta) - \frac{c}{\omega} \sin(\theta)\right) \\
& - 4AD \cos(\theta) + \frac{\omega B^2}{2c} \left[1 - e^{-2\frac{c}{\omega}\pi}\right] \\
& + 2BD \frac{\omega}{c} \left[e^{-\frac{c}{\omega}\pi} - 1\right] + \pi D^2
\end{aligned}$$

Hasil integrasi dimasukkan kembali pada persamaan (12), sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}
I_r &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} A^2 + 2AB \frac{\left(1 + e^{-\frac{c}{\omega}\pi}\right)}{\left(1 + \frac{c^2}{\omega^2}\right)} \left(\cos(\theta) - \frac{c}{\omega} \sin(\theta)\right) \right.} \\
& \quad \left. - 4AD \cos(\theta) + \frac{\omega B^2}{2c} \left[1 - e^{-2\frac{c}{\omega}\pi}\right] + 2BD \frac{\omega}{c} \left[e^{-\frac{c}{\omega}\pi} - 1\right] + \pi D^2 \right]} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{4} A^2 + AB \frac{\left(1 + e^{-\frac{c}{\omega}\pi}\right)}{\left(1 + \frac{c^2}{\omega^2}\right)} \left(\cos(\theta) - \frac{c}{\omega} \sin(\theta)\right)} \\
& \quad \sqrt{-2AD \cos(\theta) + \frac{\omega B^2}{4c} \left[1 - e^{-2\frac{c}{\omega}\pi}\right] + BD \frac{\omega}{c} \left[e^{-\frac{c}{\omega}\pi} - 1\right] + \frac{\pi}{2} D^2} \quad (13)
\end{aligned}$$

Arus rata-rata (dc) yang masuk ke motor adalah:

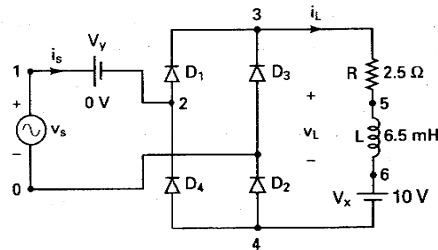
$$\begin{aligned}
I_d &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{V_m}{Z} \left(\sin(\omega t - \theta) + \frac{2}{1 - e^{-\frac{R(\pi)}{L(\omega)}}} \sin(\theta) e^{-\frac{Rt}{L}} \right) - \frac{E}{R} \right] d(\omega t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} A \sin(\omega t - \theta) d(\omega t) + \int_0^{\pi} B e^{-ct} d(\omega t) - \int_0^{\pi} D d(\omega t) \right]
\end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan pengintegralan per setiap suku diperoleh arus rata-rata sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
I_d &= \frac{1}{2\pi} \left[2A \cos(\theta) + B \frac{\omega}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{\omega}\pi}\right) - \pi D \right] \\
&= \frac{V_m}{\pi Z} \left[\cos(\theta) + \frac{\omega L}{R} \sin \theta \right] - \frac{E}{2R} \quad (14)
\end{aligned}$$

Implementasi Numeris dan Simulasi

Penyearah gelombang penuh satu fasa seperti Gambar 5 disuplai dengan tegangan ac sinusoidal satu fasa $V_s = 120$ V pada frekuensi 60 HZ yang adalah tegangan *root mean square* (rms). Sebagai beban dipasang sebuah motor dc yang memiliki $L = 6.5$ mH, $R = 2,5$ Ω dan tegangan induksi armatur pada putaran konstan sebesar $E = 10$ V.



Gambar 5 Penyearah satu fasa yang terhubung dengan ekuivalen motor dc

Dari hasil pembahasan yang telah diuraikan sebelumnya dapat diperoleh,

(1) arus beban keadaan tunak pada saat $\omega t = 0$ adalah:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) \frac{1 + e^{-\frac{R}{L}(\frac{\pi}{\omega})}}{1 - e^{-\frac{R}{L}(\frac{\pi}{\omega})}} - \frac{E}{R} \\ &= \frac{\sqrt{2}V_s}{R + j2\pi fL} \sin(\theta) \frac{1 + e^{-\frac{R}{L}(\frac{\pi}{\omega})}}{1 - e^{-\frac{R}{L}(\frac{\pi}{\omega})}} - \frac{E}{R} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot 120}{2,5 + j(2\pi \cdot 60 \cdot 6,5 \cdot 10^{-3})} \sin(44,42^\circ) \frac{1 + e^{-\frac{2,5}{6,5 \cdot 10^{-3}}(\frac{\pi}{2\pi \cdot 60})}}{1 - e^{-\frac{2,5}{6,5 \cdot 10^{-3}}(\frac{\pi}{2\pi \cdot 60})}} - \frac{10}{2,5} \\ &= 32,81\text{-A} \end{aligned}$$

(2) arus beban rata-rata adalah:

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{V_m}{\pi Z} \left[\cos(\theta) + \frac{\omega L}{R} \sin \theta \right] - \frac{E}{2R} \\ &= \frac{V_s \sqrt{2}}{\pi \cdot 3,5} \left[\cos(44,42) + \frac{2\pi \cdot 60 \cdot 6,5 \cdot 10^{-3}}{2,5} \sin(44,42) \right] - \frac{10}{2 \cdot 2,5} \\ &= 19,64\text{-A} \end{aligned}$$

Untuk melihat kurva karakteristik arus $i(t)$ yang ditarik oleh motor dc, maka semua parameter yang telah diketahui dimasukkan pada persamaan (11) sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{169,7}{3,5} \left(\sin(\omega t - 44,42) + \frac{2}{1 - e^{-\frac{2,5}{6,5 \cdot 10^{-3}}(\frac{\pi}{2\pi \cdot 60})}} \sin 44,42 e^{-\frac{2,5}{6,5 \cdot 10^{-3}}t} \right) - \frac{10}{2,5} \\ &= 48,49 (\sin(\omega t - 44,42) + 1,46 e^{-384,62t}) - 4 \\ &= 48,49 \sin(\omega t - 44,42) + 70,78 e^{-384,62t} - 4 \end{aligned}$$

dengan

$$V_m = V_s \cdot \sqrt{2} = 120 \cdot \sqrt{2} = 169,7 \text{ -V}$$

$$Z = R + jX = 2,5 + j2\pi \cdot 60 \cdot 6,5 \cdot 10^{-3} = 3,5 \angle 44,42^\circ \text{ -}\Omega$$

$$\text{Sehingga: } |Z| = 3,5 \text{ dan } \theta = 44,42^\circ = \frac{44,42}{180} \cdot \pi = 0,7753 \text{ -rad}$$

Demikian pula tegangan sumber:

$$V_m = V_s \cdot \sqrt{2} \sin \omega t = 169,7 \sin \omega t$$

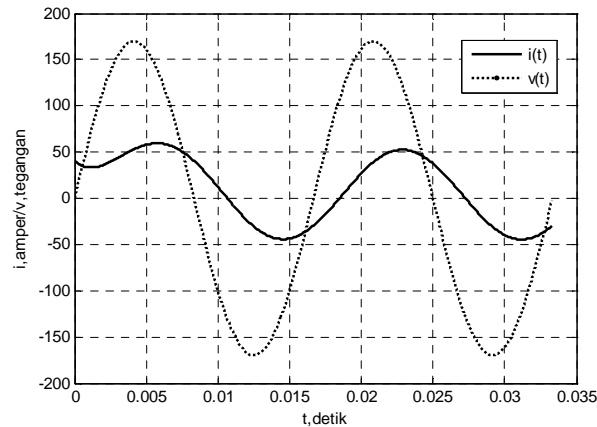
Selanjutnya dengan menggunakan program Matlab diperoleh diagram arus sesaat yang masuk ke beban dan tegangan sumber, Hartanto T.W.D. dan Prasetyo Y.W.A (2003) dengan perintah sebagai berikut ,

```
w=2*pi*60;
t=0:.00001:.0333;
v=169.7*sin(w*t);
```

```

i=48.49*sin(w*t-0.7753)+70.78*exp(-384.62*t)+4;
plot(t,i,'b',t,v,'r');
xlabel('t,detik');
ylabel('i,amper/v,tegangan');
grid;

```



Tegangan dan arus fungsi waktu

Hasil plot yang dilakukan dengan program Matlab memperlihatkan bahwa motor dc yang mengandung beban induktif menyebabkan arus motor yang tertinggal sebesar $44,42^{\circ}$ listrik. Pada saat $t=0$ arus $I_1=32,81$ seperti terlihat pada kurva. Selang plot yang diambil sebesar dua perioda yaitu dari $\omega t = 0$ sampai $\omega t = 4\pi$.

Kesimpulan

Dari hasil pembahasan diperoleh:

1. Persamaan arus sesaat yang masuk ke motor

$$i(t) = \frac{V_m}{Z} \left(\sin(\omega t - \theta) + \frac{2}{1 - e^{-\frac{R}{L}(\frac{\pi}{\omega})}} \sin(\theta) e^{-\frac{R}{L}t} \right) - \frac{E}{R}$$

2. Arus beban kondisi *steady-state* pada saat $\omega t = 0$

$$I_1 = \frac{V_m}{Z} \sin(\theta) \frac{1 + e^{-\frac{R}{L}(\frac{\pi}{\omega})}}{1 - e^{-\frac{R}{L}(\frac{\pi}{\omega})}} - \frac{E}{R}$$

3. Arus rata-rata atau arus dc yang ditarik oleh motor:

$$I_d = \frac{V_m}{\pi Z} \left[\cos(\theta) + \frac{\omega L}{R} \sin \theta \right] - \frac{E}{2R}$$

4. Hasil plot dengan program Matlab menampilkan bahwa motor dc yang mengandung beban induktif menyebabkan arus tertinggal dari tegangan sebesar $44,42^{\circ}$ listrik.

Daftar Pustaka

- Hartanto T.W.D. dan Prasetyo Y.W.A., 2003, Analisis dan Desain Sistem Kontrol dengan Matlab, Penerbit Andi Offset, Yogyakarta
- Kreyszig E., 1993, *Advanced Engineering Mathematics*, Seventh Edition, John Wiley & Sons Inc. Singapore
- Lander C.W., 1993, *Power Electronics*, Third Edition, Mc Graw-Hill New Delhi India
- Rashid M.H., 1999, *Elektronika Daya: Rangkaian, Devais, dan Aplikasinya*, Jilid 1, Penerbit PT Prenhallindo, Jakarta
- Soedjojo E., 1995, *Asas-Asas Matematika Fisika dan Teknik*, Cetakan Pertama, Gajah Mada University Press, Yogyakarta