Jurnal Barekeng
Vol. 5 No. 1 Hal. 33 – 39 (2011)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

KARAKTERISASI ELEMEN IDEMPOTEN *CENTRAL*

HENRY W. M. PATTY[1], **ELVINUS RICHARD PERSULESSY**[2], **RUDI WOLTER MATAKUPAN**[3]
[1,2,3] *Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI*
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
e-mail: henry_4t00@yahoo.com, richardelvinus@yahoo.com, rwmatakupan@yahoo.com

ABSTRAK

Elemen idempoten e dalam suatu ring R dengan elemen satuan disebut idempotent *central* jika untuk sebarang $r \in R$ berlaku $er = re$. Selanjutnya dibentuk ring eRe yang merupakan subring dengan elemen satuan e. Dimotivasi dari struktur ring eRe akan diselidiki sifat-sifat dalam ring dan modul diantaranya, *indecomposable*, homomorfisma dan radikal Jacobson, dalam kaitannya dengan elemen idempotent *central*. Dalam tulisan ini akan dipelajari karakterisasi

Kata kunci: *indecomposable, homomorfisma, radikal Jacobson, idempoten central*

PENDAHULUAN

Dalam struktur ring R yang komutatif, jika dipunyai suatu elemen idempoten $e \in R$ maka ring R tersebut dapat didekomposisikan (*decomposable*) menjadi hasil kali langsung dari ring Re dan $R(1-e)$. Dilain pihak, terdapat ring yang tidak dapat dinyatakan sebagai hasil kali langsung dari dua ring yang tak nol. Ring ini disebut ring yang tidak dapat didekomposisikan (*indecomposable*). Dalam ring yang *indecomposable* ini, hanya 0 dan 1 yang merupakan elemen idempoten atau sering disebut idempoten trivial.

Sebaliknya dalam teori ring nonkomutatif, elemen idempoten dikenal dengan sebutan idempoten *central*. Hal ini berarti suatu ring R yang tak nol disebut *indecomposable* jika ring tersebut tidak memiliki elemen idempoten *central* yang nontrivial. Selanjutnya untuk memahami struktur ring *indecomposable* ini, diperlukan pengetahuan tentang karakteristik elemen idempoten *central* yang dalam perkembangannya lebih banyak berperan dalam teori ring nonkomutatif dibandingkan dalam teori ring komutatif. Oleh karena itu dalam tulisan ini akan dibahas karakteristik elemen idempoten khususnya elemen idempoten *central*.

TINJAUAN PUSTAKA

Untuk mempelajari karakteristik elemen idempoten *central* ini diperlukan beberapa pengetahuan dasar tentang ring dan modul diantaranya ideal maksimal, homomorfisma, radikal Jacobson dan jumlah langsung (*direct sum*) yang dikaji dari Malik (1997) dan Fuller (1992). Selanjutnya dalam bukunya yang berjudul *A first Course in Noncommutative Rings*, Tsit Yuen Lam (1991) menjelaskan beberapa sifat elemen idempoten *central* dan peranannya dalam struktur ring dan modul. Ring yang dibicarakan dalam tulisan ini adalah ring dengan elemen satuan. Jadi, tidak harus komutatif terhadap operasi pergandaan. Berikut ini diberikan beberapa definisi dan sifat yang melandasi karakterisasi elemen idempoten *central*.

Definisi 1
Suatu elemen $e \in R$ disebut elemen idempoten jika $e^2 = e$.

Selanjutnya diberikan beberapa sifat dalam ideal kanan eR dan $(1-e)R$ dengan asumsi analog untuk ideal kiri Re dan $R(1-e)$.

Proposisi 1.
Misalkan $e \in R$ elemen idempoten dalam *R*. Suatu ideal kanan eR dan $(1-e)R$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$eR = \{er \mid r \in R\} \text{ dan } (1-e)R = \{(1-e)r \mid r \in R\}$$

Selanjutnya didefinisikan hasil tambah langsung (*direct sum*) dari ideal kanan eR dan $(1-e)R$ sebagai berikut.

Definisi 2.
Misalkan eR dan $(1-e)R$ ideal kanan dalam *R* maka *R* disebut *direct sum* dari ideal kanan eR dan $(1-e)R$, dinotasikan $R = eR \oplus (1-e)R$, jika $R = eR + (1-e)R$ dan $eR \cap (1-e)R = \{0\}$.

Berikut ini diberikan definisi dan beberapa sifat dari ideal kanan maksimal dalam suatu ring *R* dengan asumsi bahwa definisi dan sifat-sifat tersebut juga berlaku untuk ideal kiri maksimal.

Definisi 3.
Ideal kanan $M \subseteq R$ disebut ideal kanan maksimal jika $M \neq R$ dan tidak terdapat suatu ideal kanan $I \subset R$ sedemikian sehingga $M \subset I \subset R$. Selanjutnya, suatu ideal kanan $N \subset R$ disebut ideal kanan minimal jika $N \neq \{0\}$ dan tidak terdapat ideal kanan $J \subset R$ sedemikan hingga $\{0\} \neq J \subset N \subset R$.

Berikut ini diberikan pengertian radikal Jacobson dari suatu ring dalam kaitannya dengan ideal kanan maksimal dengan asumsi yang analog untuk ideal kiri maksimal.

Definisi 4.
Radikal Jacobson dari suatu ring *R* (dinotasikan *Jac*(*R*)) adalah irisan dari semua ideal kanan maksimal dalam *R*. Jadi,

$$Jac(R) = \bigcap \{M \mid M \text{ ideal kanan maksimal dalam } R\}$$

Berdasarkan Definisi 3, dapat dipahami bahwa ideal kanan $M \subseteq R$ disebut ideal kanan maksimal jika terdapat suatu ideal kanan $I \subseteq R$ yang memenuhi sifat $M \subseteq I \subseteq R$ maka berlaku $I = M$ atau $I = R$. Selanjutnya, suatu ideal $I \subseteq R$ disebut ideal sejati jika $I \neq R$.

Selain itu radikal Jacobson dari suatu ring *R* dapat dipahami dengan bantuan elemen unit dalam ring tersebut, seperti yang termuat dalam sifat berikut ini.

Teorema 1. Jika $y \in Jac(R)$ maka $1-xy$ merupakan unit kiri untuk setiap $x \in R$.

Bukti: Diambil sebarang $y \in Jac(R)$. Akan ditunjukkan $1-xy$ merupakan unit kiri dalam *R*. Diandaikan terdapat $1-xy$ yang bukan unit kiri dalam *R*. Artinya $R.(1-xy) \subset R$ dan $R.(1-xy) \neq R$. Karena ideal $R.(1-xy) \subset R$ termuat dalam suatu ideal maksimal $M \subset R$. Akibatnya, $1-xy \in M$ dan $y \in M$ sehingga diperoleh $1 \in M$. Timbul kontradiksi dengan *M* sebagai ideal maksimal, maka $1-xy$ merupakan unit kiri dalam *R*. □

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bagian ini akan dibahas beberapa sifat elemen idempoten *central* sebagai berikut.

Karakterisasi Elemen Idempoten *Central*

Misalkan *R* ring dengan elemen satuan. Jika ideal Re dan $(1-e)R$ berturut-turut merupakan ideal kanan yang dibangun oleh elemen idempoten *e* dan $1-e$ maka ring *R* dapat dinyatakan sebagai dekomposisi dari eR dan $(1-e)R$, seperti yang dijelaskan dalam proposisi berikut ini.

Proposisi 2.
Misalkan *R* ring dengan elemen satuan. Elemen *e* dan $1-e$ idempoten di *R*, maka berlaku:

(1) eR dan $(1-e)R$ ideal kanan dalam *R*.

(2) $R = eR \oplus (1-e)R$.

Bukti:

(1) Diambil sebarang $er_1, er_2 \in eR$ dan $s \in R$. Akan ditunjukkan eR ideal kanan dalam *R*. Diperoleh,
$er_1 - er_2 = e(r_1 - r_2) \in eR$ dan $er.s = e(rs) \in eR$.
Terbukti eR merupakan ideal kanan dalam *R*. Analog untuk $(1-e)R$.

(2) Diambil sebarang $a \in R$ dan diketahui *e* elemen idempoten dalam *R*. Akan ditunjukkan $R = eR \oplus (1-e)R$. Diperoleh

$$a = ea + a - ea = ea + (1-e)a$$

dengan $ea \in eR$ dan $(1-e)a \in (1-e)R$. Hal ini berarti $R = eR + (1-e)R$. Selanjutnya diambil sebarang $b \in eR \cap (1-e)R$ yang artinya $b = ec$ dan $b = (1-e)d$ untuk suatu $c, d \in R$. Jika digandakan dengan $e \in R$ akan diperoleh $eb = e^2c = ec = b$ dan $eb = e(1-e)d = (e-e^2)d = (e-e)d = 0$. Dengan demikian $b = eb = 0$ atau $eR \cap (1-e)R = \{0\}$. Terbukti $R = eR \oplus (1-e)R$. □

Berdasarkan Proposisi 2 dapat dinyatakan bahwa, suatu ring *R* juga merupakan jumlah langsung dari ideal-ideal kiri dalam *R* yang dibangun oleh elemen idempoten *e* dan $1-e$ (dinotasikan $R = Re \oplus R(1-e)$). Sedangkan untuk ring $R \neq 0$ yang tidak dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung dari sebarang dua ideal yang tak nol disebut ring *indecomposable*. Ring tersebut hanya memiliki elemen idempoten yang trivial yaitu 0 dan 1.

Selanjutnya, jika *e* elemen idempoten *central* maka ring $eRe=\{ere|r\in R\}$ merupakan subring dengan elemen satuan *e*. Namun sebelumnya diberikan definisi elemen idempoten *central* sebagai berikut.

Definisi 5.
Suatu elemen idempoten $e\in R$ disebut central jika untuk sebarang $r\in R$ berlaku $er=re$. Himpunan semua elemen idempoten central dinotasikan dengan $C(R)$.

Proposisi 3.
Jika R ring dengan elemen idempoten central e maka $eRe=\{ere|r\in R\}$ merupakan subring dengan elemen satuan *e*.

Bukti:
Diambil sebarang $x_1,x_2\in eRe$ dengan $x_1=er_1e$ dan $x_2=er_2e$, untuk suatu $r_1,r_2\in R$. Akan ditunjukkan eRe merupakan subring dengan elemen satuan *e*.

(i) $x_1-x_2=er_1e-er_2e=e(r_1-r_2)e\in eRe$

(ii) $x_1.x_2=(er_1e)(er_2e)=er_1e^2r_2e=e(r_1er_2)e=e(r_1r_2)e\in eRe$

Dari (i) dan (ii) terbukti eRe merupakan subring. Misalkan $e\in eRe$ dengan $e=e.1.e$ maka untuk setiap $x\in eRe$ dengan $x=ere$ diperoleh

$ex=e(ere)=e^2re=ere=x$

dan

$xe=(ere)e=ere^2=ere=x$.

Terbukti eRe subring dengan elemen satuan *e*. □

Berdasarkan Proposisi 3. maka suatu ring eRe dan fRf dapat dinyatakan sebagai berikut.

(i) $eRe=\{er=r=re|r\in R\}$ dan

(ii) $fRf=\{fr=r=rf|r\in R\}$ (1)

dengan *e* dan $f=1-e$ berturut-turut merupakan elemen idempoten *central* sekaligus merupakan elemen satuan. Selanjutnya, diberikan proposisi tentang elemen idempoten *central* yang ditinjau dari (1).

Proposisi 4.
Suatu elemen idempoten *e* merupakan idempoten central ($e\in C(R)$) jika dan hanya jika $eRf=fRe=\{0\}$.

Bukti: Diambil sebarang $r\in R$ dan diberikan $e,f\in C(R)$ dengan $f=1-e$. Akan ditunjukkan $eRf=fRe=\{0\}$. Diperoleh

$erf=er(1-e)=er-ere=er-er=0$

dan

$fre=(1-e)re=re-ere=re-re=0$.

Terbukti $eRf=\{0\}=fRe$.

Sebaliknya, diberikan $eRf=fRe=\{0\}$. Akan ditunjukkan untuk setiap $r\in R$ berlaku $e\in C(R)$ atau $er-re=0$. Jika $erf=0$ dengan $f=1-e$ maka berlaku $er(1-e)=0$ atau $er-ere=0$. Akibatnya, $er=ere$. Selanjutnya, jika $fre=0$ maka berlaku $(1-e)re=0$ atau $re-ere=0$. Akibatnya, $re=ere$. Terbukti, $re=ere=er$.□

Dalam suatu ring R yang memiliki sebarang elemen idempoten e dan e', dapat ditentukan $Hom_R(eR,e'R)$ sebagai homomorfisma dari eR ke $e'R$. Berikut ini diberikan suatu isomorfisma antara eR dan $e'R$ dengan suatu ring $e'Re$.

Proposisi 5.
Jika diberikan sebarang elemen idempoten e dan e' dalam suatu ring R dan M_R modul kanan atas ring R maka terdapat suatu isomorfisma grup aditif $\lambda:Hom_R(eR,M_R)\to M_Re$.

Bukti: Diberikan suatu homomorfisma modul, $\theta:eR\to M_R$. Untuk setiap $r\in R$ dengan $r\neq e$ diperoleh $\theta(er)=m$ sedangkan untuk $r=e$ juga diperoleh $\theta(ee)=m$. Karena e elemen idempoten maka $\theta(e)=m$ sehingga berlaku $\theta(er)=m=\theta(e)$. Selanjutnya, didefinisikan suatu pemetaan $\lambda:Hom_R(eR,M_R)\to M_Re$ dengan $\lambda(\theta)=me$, untuk setiap $m\in M_R$. Jika $\theta(e)=m$ maka diperoleh $me=\theta(e)e=\theta(e^2)=\theta(e)=m$ atau dengan kata lain $m=me\in M_Re$, sehingga berlaku $\lambda(\theta)=me=m=\theta(e)$.

Akan ditunjukkan λ isomorfisma grup aditif atau $Hom_R(eR,M_R)\cong M_Re$.

(i) Akan ditunjukkan λ terdefinisi.

Diambil sebarang $\theta_1,\theta_2\in Hom_R(eR,M_R)$ dengan $\theta_1=\theta_2$. Akan ditunjukkan $\lambda(\theta_1)=\lambda(\theta_2)$. Jika $\theta_1=\theta_2$ atau dengan kata lain $\theta_1-\theta_2=0$ maka untuk suatu elemen idempoten $e\in R$ diperoleh $(\theta_1-\theta_2)e=0$. Selanjutnya, karena θ suatu homomorfisma modul maka berlaku $\theta_1(e)-\theta_2(e)=0$ atau $\theta_1(e)=\theta_2(e)$. Mengingat definisi $\theta(e)=\lambda(\theta)$ maka untuk $\theta_1(e)=\theta_2(e)$ diperoleh $\lambda(\theta_1)=\lambda(\theta_2)$. Terbukti, λ terdefinisi.

(ii) Akan ditunjukkan λ homomorfisma grup.

Diambil sebarang $\theta_1,\theta_2\in Hom_R(eR,M_R)$.

Diperoleh

$$\lambda(\theta_1+\theta_2)=(\theta_1+\theta_2)e=\theta_1(e)+\theta_2(e)=\lambda(\theta_1)+\lambda(\theta_2).$$

Terbukti, λ homomorfisma grup.

(iii) Akan ditunjukkan λ injektif.

Diambil sebarang $\lambda(\theta_1),\lambda(\theta_2)\in M_R e$ dengan $\lambda(\theta_1)=\lambda(\theta_2)$. Akan ditunjukkan $\theta_1=\theta_2$. Karena $\lambda(\theta_1)=\lambda(\theta_2)$ atau $\lambda(\theta_1)-\lambda(\theta_2)=0$ maka untuk suatu homomorfisma λ diperoleh $\lambda(\theta_1-\theta_2)=0$. Selanjutnya, karena didefinisikan $\lambda(\theta)=\theta(e)$ maka untuk $\lambda(\theta_1-\theta_2)=0$ diperoleh $(\theta_1-\theta_2)e=0$ atau $\theta_1(e)-\theta_2(e)=0$. Akibatnya, $\theta_1(e)=\theta_2(e)$ atau $\theta_1=\theta_2$. Terbukti, λ injektif.

(iv) Akan ditunjukkan λ surjektif.

Diambil sebarang $\theta(e)\in M_R e$. Akan ditunjukkan terdapat $\theta\in Hom_R(eR,M_R)$ sehingga berlaku $\lambda(\theta)=\theta(e)$. Karena $\theta(e)=m=me=\lambda(\theta)$ maka akan selalu ditemukan $\theta\in Hom_R(eR,M_R)$ sehingga $\lambda(\theta)=\theta(e)$. Terbukti, λ surjektif.

Berdasarkan bukti (i)-(iv) terbukti bahwa

$$Hom_R(eR,M_R)\cong M_R e \ \square$$

Berdasarkan Proposisi 5. diperoleh suatu akibat sebagai berikut.

Akibat 1.

Jika diberikan sebarang elemen idempoten e dan e' dalam suatu ring R maka $Hom_R(eR,e'R)\cong e'Re$.

Bukti: Pada Proposisi 5 telah dibuktikan bahwa terdapat suatu isomorfisma grup aditif $\lambda: Hom_R(eR,M_R)\to M_R e$ atau $Hom_R(eR,M_R)\cong M_R e$. Dengan asumsi $M_R=e'R$, maka diperoleh $Hom_R(eR,e'R)\cong e'Re$. $\square$

Dari Akibat 1 diperoleh suatu akibat sebagai berikut.

Akibat 2.

Untuk suatu idempoten $e\in R$ terdapat suatu isomorfisma ring, $End_R(eR)\cong eRe$.

Bukti: Diambil sebarang idempoten e dan e' dengan $e=e'$. Akan ditunjukkan $End_R(eR)\cong eRe$. Berdasarkan Akibat 1 $Hom_R(eR,e'R)\cong e'Re$. Jika diasumsikan elemen idempoten $e=e'$ maka diperoleh

$$End_R(eR)=Hom_R(eR,eR)\cong eRe.$$

Selanjutnya untuk suatu pemetaan $\theta: eR\to eR$ dengan definisi $\theta(er)=er, \forall r\in R$ serta mengingat Proposisi 5 yaitu $\theta(er)=m=me$ maka untuk suatu pemetaan $\lambda: Hom(eR,eR)\to eRe$ diperoleh

$$\lambda(\theta)=ere=\theta(er)e=me=m.$$

Dapat disimpulkan $m\in eRe$ yang artinya $me=m=em$. Akan dibuktikan λ homomorfisma ring. Diambil sebarang $\theta,\theta'\in End_R(eR)$ maka diperoleh:

(i) $\lambda(\theta+\theta')=(\theta+\theta')e=\theta(e)+\theta'(e)=\lambda(\theta)+\lambda(\theta')$

(ii) $\lambda(\theta'\theta)=\theta'\theta(e)=\theta'(m)=\theta'(em)=\theta'(e)m$
$=\lambda(\theta')\lambda(\theta)$. $\square$

Berikut ini didefinisikan elemen idempoten yang saling ortogonal dan diberikan beberapa sifat *indecomposable* dalam ring.

Definisi 6.

Dua elemen idempoten $\alpha,\beta\in R$ dikatakan saling ortogonal jika $\alpha\beta=\beta\alpha=0$.

Definisi 7.

Suatu ring R disebut *indecomposable* jika ring tersebut tidak memiliki elemen idempoten *central* yang nontrivial atau dengan kata lain hanya 0 dan 1 yang merupakan elemen idempoten *central* dalam R.

Dari sifat ring *indecomposable*, idempoten *central* dan idempoten ortogonal, dapat didefinisikan elemen idempoten yang primitif, namun sebelumnya diberikan suatu proposisi yang mendasari pendefinisian tersebut.

Proposisi 7.

Untuk sebarang idempoten $e\in R$ yang tidak nol, maka beberapa pernyataan berikut ini ekuivalen.

1. eR *indecomposable* sebagai R-modul kanan.
   Re *indecomposable* sebagai R-modul kiri.
2. Ring eRe tidak memiliki idempoten yang non trivial.
3. Elemen e tidak dapat didekomposisikan ke dalam bentuk $\alpha+\beta$ dcngan α, β adalah idempoten tidak nol yang saling ortogonal.

Bukti:

$(1)\Leftrightarrow(2)$ Diketahui eR *indecomposable* sebagai R-modul kanan. Akan ditunjukkan ring eRe tidak memiliki idempoten yang nontrivial. Berdasarkan Akibat 2 $End_R(eR)\cong eRe$ maka ring eRe juga *indecomposable* dengan kata lain ring eRe tidak memiliki idempoten yang nontrivial. Dengan asumsi yang sama dibuktikan untuk pernyataan Re *indecomposable* sebagai R-modul kiri.

$(2)\Rightarrow(3)$ Dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan $e=\alpha+\beta$ dengan α dan β idempoten tak nol yang saling ortogonal maka diperoleh $e\alpha=(\alpha+\beta)\alpha=\alpha^2+\beta\alpha=\alpha+0=\alpha$ dan $\alpha e=\alpha(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta=\alpha+0=\alpha$. Diperoleh $\alpha\in eRe$ dan $\alpha\neq 0$ maka kontradiksi dengan (2) karena eRe memuat idempoten yang nontrivial. Pengandaian diingkari, terbukti $e\neq\alpha+\beta$ dengan dengan α dan β idempoten tak nol yang saling ortogonal.

$(3)\Rightarrow(2)$ Dibuktikan dengan kontradiksi. Diandaikan ring eRe memiliki idempoten α yang nontrivial sehingga untuk suatu komplemen idempoten dari α yaitu $\beta=e-\alpha$ dengan

$\beta \in eRe$, akan dipunyai suatu dekomposisi dari idempoten yang ortogonal yaitu $e=\alpha+\beta$. Akibatnya timbul kontradiksi dengan pernyataan (3), sehingga ring eRe tidak mempunyai elemen idempoten yang nontrivial. □

Berdasarkan Proposisi 7 didefinisikan suatu idempoten primitif sebagai berikut.

Definisi 8.
Suatu elemen idempoten $e \neq 0$ disebut idempoten primitif dari *R*, jika memenuhi salah satu dari kondisi berikut ini

1. eR *indecomposable* sebagai *R*-modul kanan sedangkan Re *indecomposable* sebagai *R*-modul kiri.
2. Ring eRe tidak memiliki idempoten yang non trivial.
3. Elemen *e* tidak dapat didekomposisikan ke dalam bentuk $\alpha+\beta$ dcngan α, β adalah idempoten tak nol yang saling ortogonal.

Selanjutnya, struktur $Jac(eRe)$ dan $\bar{e}\bar{R}\bar{e}$ dapat dipahami dengan memanfaatkan teorema homomorfisma ring

Teorema 1.
Diberikan suatu elemen idempotent *e* dalam *R* dan $J = Jac(R)$. Diperoleh $Jac(eRe) = J \cap (eRe) = eJe$ dan $eRe/Jac(eRe) \cong \bar{e}\bar{R}\bar{e}$.

Bukti: Diberikan elemen idempoten $e \in R$ dan $J = Jac(R)$.
Akan ditunjukkan:
1. $Jac(eRe) = J \cap (eRe) = eJe$
2. $eRe/Jac(eRe) \cong \bar{e}\bar{R}\bar{e}$

1. Akan ditunjukkan $Jac(eRe) = J \cap (eRe) = eJe$. Dibuktikan dengan beberapa tahapan sebagai berikut:
   (i) $r \in Jac(eRe) \Rightarrow r \in J$,
   (ii) $r \in J \cap (eRe) \Rightarrow r \in eJe$,
   (iii) $r \in eJe \Rightarrow r \in Jac(eRe)$
   Pembuktian seperti berikut:
   (i) Diambil sebarang $r \in Jac(eRe)$. Akan ditunjukkan $r \in J$. Berdasarkan Teorema 1 jika $r \in J = Jac(R)$ maka $1-yr$ unit dalam *R*, untuk setiap $y \in R$. Dengan asumsi yang sama maka untuk setiap $r \in Jac(eRe)$ dan $y \in eRe$ berlaku $e - eye.r$ yang merupakan unit dalam eRe. Artinya untuk suatu $b \in eRe$ berlaku $b(e-eye.r)=e$, akibatnya $be(1-ye.r)=e$. Karena $b \in eRe$ maka $be=b=eb$ sehingga berlaku $b(1-yer)=e$. Mengingat $y \in eRe$ maka diperoleh $b(1-yr)=e$. Di lain pihak, jika digandakan dengan *yr* dari ruas kiri pada $b(1-yr)=e$ diperoleh $yrb(1-yr) = yre = yr$ akibatnya $yrb - yrb.yr = yr$. Diberikan
   $$(1+yrb), (1-yr) \in R$$
   maka berlaku
   $$(1+yrb)(1-yr) = 1(1-yr) + yrb(1-yr)$$
   $$= 1 - yr + yr = 1.$$
   Terbukti bahwa terdapat $1+yrb \in R$ sehingga berlaku $(1+yrb)(1-yr)=1$ atau dengan kata lain $1-yr$ unit dalam *R*.
   (ii) Diambil sebarang $r \in J \cap eRe$. Akan ditunjukkan $r \in eJe$. Jika $r \in J \cap eRe$ yang artinya $r \in J$ dan $r \in eRe$ maka berlaku $r = ere$. Sedangkan di lain pihak telah diketahui bahwa $r \in J$ dan mengingat bahwa $J \subseteq R$ maka diperoleh $r = ere \in eJe$.
   (iii) Diambil sebarang $r \in eJe \subseteq J$. Akan ditunjukkan $r \in Jac(eRe)$. Berdasarkan Teorema 1 yaitu untuk setiap $y \in eRe$ maka $e - yr$ merupakan unit dalam eRe. Di lain pihak karena $r \in eJe \subseteq J = Jac(R)$ maka $1-yr$ merupakan unit dalam *R*, yang artinya terdapat suatu $x \in R$ sehingga berlaku $x(1-yr)=1$. Diperoleh $e = e.1.e = ex(1-yr)e$
   $= ex(e-yre) = ex(e-yr) = ex(e^2 - eyr)$
   $= exe(e-yr)$.
   Dengan kata lain $exe \in eRe$ adalah invers kiri dari $e-yr$ atau $e-yr$ unit di eRe.

2. Akan ditunjukkan $eRe/Jac(eRe) \cong \bar{e}\bar{R}\bar{e}$. Diberikan suatu pemetaan $\delta : eRe \to \bar{e}\bar{R}\bar{e}$ yang terdefinisi dengan $\delta(ere) = \bar{e}\,\bar{r}\,\bar{e}$. Suatu pemetaan δ merupakan homomorfisma ring dari eRe ke $\bar{e}\bar{R}\bar{e}$, yakni untuk sebarang $er_1e, er_2e \in eRe$ diperoleh :
   (i) $\delta(er_1e + er_2e) = \delta(e(r_1+r_2)e) = \bar{e}\,\overline{(r_1+r_2)}\,\bar{e}$
   $= \bar{e}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)\bar{e} = \bar{e}\,\bar{r}_1\,\bar{e} + \bar{e}\,\bar{r}_2\bar{e}$
   $= \delta(er_1e) + \delta(er_2e)$
   (ii) $\delta(er_1e.er_2e) = \delta(er_1e^2r_2e) = \delta(er_1er_2e)$
   $= \delta(er_1r_2e) = \bar{e}\,\overline{(r_1.r_2)}\,\bar{e} = \bar{e}(\bar{r}_1.\bar{r}_2)\bar{e}$
   $= \bar{e}\,\bar{r}_1\,\bar{e}.\bar{e}\,\bar{r}_2\bar{e} = \delta(er_1e).\delta(er_2e)$

Di lain pihak $\delta : eRe \to \bar{e}\bar{R}\bar{e}$ juga merupakan suatu epimorfisma karena untuk setiap $\bar{e}\,\bar{r}\,\bar{e} \in \bar{e}\bar{R}\bar{e}$ dengan masing-masing $\bar{e}$ dan $\bar{r}$ adalah bayangan dari *e* dan *r* sehingga berlaku
$$\bar{e}\,\bar{r}\,\bar{e} = (e+J)(r+J)(e+J) = ere + J \in \bar{e}\bar{R}\bar{e}.$$
Hal ini berarti untuk setiap $\bar{e}\,\bar{r}\,\bar{e} \in \bar{e}\bar{R}\bar{e}$ dapat ditemukan $ere \in eRe$ sehingga berlaku

$\delta(ere) = \bar{e}\,\bar{r}\,\bar{e}$. Diperoleh, untuk setiap $ere \in eRe$ berlaku

$$\mathrm{Im}(\delta) = \left\{ \bar{e}\,\bar{r}\,\bar{e} \in \bar{e}\bar{R}\bar{e} \,\middle|\, \delta(ere) = \bar{e}\,\bar{r}\,\bar{e} \right\} = \bar{e}\bar{R}\bar{e}$$

dan

$$\begin{aligned} Ker(\delta) &= \left\{ ere \in eRe \,\middle|\, \delta(ere) = \bar{0} \right\} \\ &= \left\{ ere \in eRe \,\middle|\, \bar{e}\,\bar{r}\,\bar{e} = \bar{0} \right\} \\ &= \left\{ ere \in eRe \,\middle|\, ere + J = 0 + J \right\}. \end{aligned}$$

Jika $eRe \in J$ dan $ere \in eRe$ maka $ere \in J \cap eRe$.

Selanjutnya, mengingat bukti (1.i) dan (1.ii), jika $J \cap (eRe) = eJe$ maka $ere \in eJe$ dan $Ker(\delta) = eJe = rad(eRe)$. Dengan mengingat teorema utama homomorfisma ring diperoleh

$$eRe / Ker(\delta) \cong \mathrm{Im}(\delta).$$

Terbukti $eRe / Jac(eRe) \cong \bar{e}\bar{R}\bar{e}$. □

Berikut ini diberikan proposisi yang mendasari definisi isomorfisma antara dua elemen idempoten dalam suatu ring *R*.

Proposisi 8.
Diberikan elemen idempoten $e, f \in R$, maka pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen

1. $eR \cong fR$ sebagai *R*-modul kanan.
   $Re \cong Rf$ sebagai *R*-modul kiri.
2. Terdapat elemen $a \in eRf$ dan $b \in fRe$ sedemikian sehingga $e = ab$ dan $f = ba$.
3. Terdapat elemen $a, b \in R$ sedemikian sehingga $e = ab$ dan $f = ba$.

Bukti:

$1 \Rightarrow 2$ Diberikan $Re \cong Rf$ sebagai modul kanan atas *R*. Akan ditunjukkan $e = ab$ dan $f = ba$. Berdasarkan Proposisi 5, untuk sebarang elemen idempoten *e* dan *f*, dengan $eR \cong fR$ dapat ditemukan suatu isomorfisma $\theta : eR \to fR$ atau $Hom_R(eR, fR) \cong fRe$ dengan definisi $\theta(e) = b \in fRe$ .Sebaliknya untuk suatu pemetaan invers $\theta^{-1} : fR \to eR$ atau $Hom_R(fR, eR) \cong eRf$ didefinisikan $\theta^{-1}(f) = a \in eRf$. Karena $b \in fRe$ dengan *f*, *e* yang juga merupakan elemen satuan maka berlaku $fb = b = be$ dan untuk setiap $a \in eRf$ berlaku $ea = a = af$ diperoleh

$$\begin{aligned} (\theta^{-1}\theta)(e) &= \theta^{-1}(\theta(e)) = \theta^{-1}(b) = \theta^{-1}(fb) \\ &= \theta^{-1}(f)b = ab, \end{aligned}$$

$$\theta(\theta^{-1}(f)) = \theta(a) = \theta(ea) = \theta(e)a = ba.$$

Dari hasil komposisi, elemen *e* dipetakan ke *ab* dan elemen *f* dipetakan ke *ba*. Karena $\theta^{-1}\theta = 1$ dan $\theta\theta^{-1} = 1$ maka terbukti *e*=*ab* dan *f*=*ba*.

Bukti $Re \cong Rf$ sebagai *R*-modul kiri dikerjakan secara analog dengan asumsi $Re \cong Rf$ sebagai modul kiri atas *R*.

$2 \Rightarrow 3$ Pernyataan 2 dan 3 adalah pernyataan yang trivial.

$3 \Rightarrow 1$ Diberikan $a, b \in R$ dengan $e = ab$ dan $f = ba$. Akan ditunjukkan $eR \cong fR$ sebagai modul kanan atas *R*.

Dipunyai $be = b(ab) = (ba)b = fb \in fR$ dan $af = a(ba) = (ab)a = ea \in eR$.

Selanjutnya, didefinisikan $\theta : eR \to fR$ dengan $\theta(e) = b \in fR$ sehingga untuk setiap $x \in eR$ diperoleh $\theta(x) = \theta(ex) = \theta(e)x = bx \in fR$.

Didefinisikan juga $\theta^{-1} : fR \to eR$ dengan $\theta^{-1}(f) = a \in eR$ sehingga untuk setiap $y \in R$ berlaku $\theta^{-1}(y) = \theta^{-1}(fy) = \theta^{-1}(f)y = ay \in eR$.

Karena $\theta(e) = b = fb = be$

dan $\theta^{-1}(f) = a = ea = af$

diperoleh

$$\begin{aligned} \theta^{-1}\theta(e) &= \theta^{-1}(\theta(e)) = \theta^{-1}(be) \\ &= a(be) = (ab)e = ee = e^2 = e \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \theta\theta^{-1}(f) &= \theta(\theta^{-1}(f)) = \theta(af) = b(af) \\ &= (ba)f = ff = f^2 = f. \end{aligned}$$

Karena $\theta\theta^{-1} = 1$ dan $\theta^{-1}\theta = 1$,
terbukti $eR \cong fR$. □

Berdasarkan Proposisi 8 dapat didefinisikan isomorfisma antara dua elemen idempoten dalam *R* sebagai berikut.

Definisi 9.
Elemen idempoten *e* dikatakan saling isomorfisma dengan idempoten *f* (dinotasikan $e \cong f$) jika memenuhi salah satu dari kondisi berikut ini.

1. $eR \cong fR$ sebagai modul kanan atas *R* sedangkan $Re \cong Rf$ sebagai modul kiri atas *R*.
2. Terdapat elemen $a \in eRf$ dan $b \in fRe$ sedemikian sehingga $e = ab$ dan $f = ba$.
3. Terdapat elemen $a, b \in R$ sedemikian sehingga $e = ab$ dan $f = ba$.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan maka dapat disimpulkan bahwa beberapa karakteristik dari elemen idempotent *central* adalah sebagai berikut:

1. Syarat perlu dan cukup suatu elemen idempoten *e* merupakan idempoten central adalah
$$eRf = fRe = \{0\}.$$

2. Jika diberikan sebarang elemen idempoten e dan e' dalam suatu ring R dan M_R modul kanan atas ring R maka terdapat suatu isomorfisma grup aditif
$$\lambda : Hom_R(eR, M_R) \to M_R e .$$
4. Untuk sebarang idempoten $e \in R$ yang tidak nol, maka beberapa pernyataan berikut ini ekuivalen yaitu eR (Re) *indecomposable* sebagai R-modul kanan (R-modul kiri), ring eRe tidak memiliki idempoten yang non trivial, elemen e tidak dapat didekomposisikan ke dalam bentuk $\alpha + \beta$ dcngan α, β adalah idempoten tidak nol yang saling ortogonal.
5. Jika diberikan suatu elemen idempoten e dalam R dan $J = Jac(R)$ maka diperoleh $Jac(eRe) = J \cap (eRe)$ $= eJe$ dan $eRe / Jac(eRe) \cong \overline{e}\,\overline{R}\,\overline{e}$.
6. Untuk sebarang elemen idempoten $e, f \in R$, maka beberapa pernyataan berikut ini ekuivalen yaitu: $eR \cong fR$ ($Re \cong Rf$) sebagai R-modul kanan (R-modul kiri), terdapat elemen $a \in eRf$ dan $b \in fRe$ sedemikian sehingga $e = ab$ dan $f = ba$, terdapat elemen $a, b \in R$ sehingga $e = ab$ dan $f = ba$.

DAFTAR PUSTAKA

Anderson, W. dan Fuller, K., 1992, *Ring and Categories of Modules*, Springer Verlag, New York.

Lam, T.Y., 1991, *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer Verlag, New York.

Malik, D.S., Mordeson, J. M., dan Sen, M. K., 1997, *Fundamentals of Abstract Algebra*, The McGraw-Hill Companies, Inc, NewYork.