Jurnal Barekeng
Vol. 5 No. 2 Hal. 45 – 47 (2011)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

SEMIRING
(*Semiring*)

SUSAN RIALITA LISAPALY[1]**, ELVINUS RICHARD PERSULESSY**[2]
[1]*Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura*
[2]*Staf Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura*
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
email: susan_lisapaly@yahoo.com; richardelvinus@yahoo.com

ABSTRAK

Dalam aljabar, semiring merupakan suatu struktur yang serupa dengan ring, tetapi tanpa syarat bahwa setiap elemen harus memiliki invers terhadap operasi penjumlahan. Jika pada ring, $\langle R,+\rangle$ adalah grup komutatif atau grup abelian maka pada semiring, $\langle S,+\rangle$ hanya membentuk monoid komutatif, yang berarti setiap elemennya tidak perlu memiliki invers terhadap operasi penjumlahan.

Keywords: *Grup Komutatif, Monoid Komutatif, Ring, Semiring.*

PENDAHULUAN

Himpunan $R \neq \varnothing$ merupakan ring jika terhadap operasi penjumlahan, R grup abelian, terhadap operasi pergandaan R tertutup dan asosiatif, serta memenuhi distributif kiri dan kanan.

Jika pada ring R, dilepas satu aksioma yaitu keberadaan elemen invers terhadap operasi penjumlahan, maka diperoleh struktur baru yang dikenal dengan nama semiring.

Walaupun hanya dilepaskan satu aksioma, namun hal ini membuat perbedaan yang sangat mendasar antara ring dan semiring. Hal-hal tersebut yang melatarbelakangi penelitian ini.

TINJAUAN PUSTAKA

Istilah ring pertama kali diperkenalkan oleh David Hilbert (1862-1943), tetapi sebatas pendekatan definisi yang masih abstrak. Himpunan R dikatakan ring jika terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan padanya, R memenuhi sifat-sifat yaitu terhadap operasi penjumlahan, R adalah grup abelian, terhadap operasi pergandaan R memenuhi sifat tertutup dan asosiatif serta terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan R memenuhi sifat distributif kiri dan distributif kanan. (Fraleigh, 2000)

Dari ring R dapat dibentuk struktur baru yang dinamakan semiring jika dilepaskan satu sifat yaitu keberadaan elemen invers terhadap operasi penjumlahan. (Kandasamy, 2002). Semua ring adalah semiring, tapi sebaliknya belum tentu berlaku. (Kandasamy, 2002).

Definisi 1 (Semigrup)
Himpunan $S \neq \varnothing$ merupakan semigrup terhadap operasi biner $"*"$ jika memenuhi sifat tertutup dan asosiatif. Himpunan S yang membentuk semigrup terhadap operasi biner $"*"$ dinotasikan dengan $\langle S,*\rangle$.

Definisi 2 (Semigrup Komutatif)
Diberikan himpunan $S \neq \varnothing$. Himpunan S merupakan semigrup komutatif jika $\langle S,*\rangle$ memenuhi sifat komutatif terhadap operasi $"*"$.

Definisi 3 (Monoid)
Himpunan $\langle S,*\rangle$ merupakan semigrup dengan elemen identitas jika S memuat elemen netral terhadap operasi $"*"$, yaitu

$$(\exists e \in S)(\forall s \in S)[e * s = s * e = s]$$

Selanjutnya, $\langle S,*\rangle$ disebut monoid.

Definisi 4 (Ring)
Himpunan $R \neq \varnothing$ dengan dua operasi biner, penjumlahan $"+"$ dan pergandaan $"\cdot"$ disebut mempunyai struktur suatu ring, selanjutnya R disebut Ring (Gelanggang) jika memenuhi aksioma-aksioma:

I. Terhadap penjumlahan $\langle R,+\rangle$ merupakan grup abelian, yaitu
1. Tertutup
   $(\forall\ a,b \in R)\ (\exists!\, c \in R\ )\ a+b=c$
2. Asosiatif
   $(\forall\ a,b,c \in R)(a+b)+c=a+(b+c)$
3. Ada elemen netral
   $(\exists\ e \in R\ )(\forall\ a \in R)\ e+a=a+e$
4. Setiap elemen R mempunyai invers
   $(\forall\ a \in R)(\exists -a \in R)\ a+(-a)=(-a)+a=0$
5. Komutatif
   $(\forall\ \ a,b \in R)\ a+b=b+a$

II. Terhadap pergandaan $\langle R,\cdot\rangle$ memenuhi sifat
6. Tertutup
   $(\forall\ a,b \in R)\ (\exists!\, c \in R\ )\ a\cdot b=c$
7. Asosiatif
   $(\forall\ \ a,b,c \in R)\ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

III. Distributif
8. Distributif kiri
   $(\forall\ a,b,c \in R)\ a\cdot(b+c)=\ a\cdot b+a\cdot c$
9. Distributif kanan
   $(\forall\ a,b,c \in R)\ (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Semiring

Definisi 1
Diberikan himpunan $S \neq \varnothing$. Pada S didefinisikan operasi-operasi biner $"+"$ dan $"\cdot"$. Himpunan S disebut semiring terhadap kedua operasi biner tersebut jika memenuhi :

i. $\langle S,+\rangle$ adalah monoid komutatif.

ii. $\langle S,\cdot\rangle$ adalah semigrup.

iii. Distributif kanan dan kiri.

Himpunan S yang membentuk semiring terhadap operasi $"+"$ dan $"\cdot"$ dinotasikan $(S,+,\cdot)$.

Contoh 1
Himpunan semua bilangan riil positif dan nol merupakan semiring terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan bilangan riil.
Bukti :

Misalkan R^0 himpunan semua bilangan riil positif dan nol.

i. $\langle R^0,+\rangle$ adalah monoid komutatif

a. Tertutup
   $(\forall r_1,r_2 \in R^0)[\,r_1+r_2 \in R^0\,]$

b. Asosiatif
   $(\forall r_1,r_2,r_3 \in R^0)[(r_1+r_2)+r_3=r_1+(r_2+r_3)]$

c. Terdapat elemen identitas
   $(\exists 0 \in R^0)(\forall r \in R^0)[0+r=r+0=r]$

d. Komutatif
   $(\forall r_1,r_2 \in R^0)[\,r_1+r_2=r_2+r_1\,]$

ii. $\langle R^0,\cdot\rangle$ semigrup

a. Tertutup
   $(\forall r_1,r_2 \in R^0)[\,r_1\cdot r_2 \in R^0\,]$

b. Asosiatif
   $(\forall r_1,r_2,r_3 \in R^0)[(r_1\cdot r_2)\cdot r_3=r_1\cdot(r_2\cdot r_3)]$

iii. Hukum distributif

a. Distributif kiri
   $(\forall r_1,r_2,r_3 \in R^0)[\,r_1\cdot(r_2+r_3)=r_1\cdot r_2+r_1\cdot r_3\,]$

b. Distributif kanan
   $(\forall r_1,r_2,r_3 \in R^0)[(r_1+r_2)\cdot r_3=r_1\cdot r_3+r_2\cdot r_3\,]$

Definisi 2
Semiring $(S,+,\cdot)$ disebut semiring komutatif jika semigrup $\langle S,\cdot\rangle$ adalah semigrup komutatif.

Contoh 2
Himpunan pada Contoh 1 merupakan semiring komutatif, karena pada himpunan semua bilangan riil positif dan nol, sifat komutatif berlaku terhadap operasi pergandaan.

Definisi 3
Semiring $(S,+,\cdot)$ disebut semiring dengan elemen identitas jika didalam $(S,+,\cdot)$, $\langle S,\cdot\rangle$ monoid, yaitu :

$$(\exists 1 \in S)(\forall s \in S)[1\cdot s=s\cdot 1=s]$$

Contoh 3
$(R^0,+,\cdot)$ merupakan semiring komutatif dengan elemen identitas 1 karena didalam $(R^0,+,\cdot)$, $\langle R^0,\cdot\rangle$ monoid komutatif, yaitu :

a. Terdapat elemen satuan
   $(\exists 1 \in R^0)(\forall r \in R^0)[1\cdot r=r\cdot 1=r]$

b. Komutatif
   $(\forall r_1,r_2 \in R^0)[\,r_1\cdot r_2=r_2\cdot r_1\,]$

Definisi 4
Semiring $(S,+,\cdot)$ disebut semiring berkarakteristik m jika

$$(\forall s \in S \setminus \{0\})[m\cdot s=\underbrace{s+s+...+s}_{m \text{ suku}}=0]$$

Jika tidak ada $m \in Z^{+}$ yang memenuhi maka karakteristik $(S,+,\cdot)$ adalah nol.

Contoh 4
$(R^{0},+,\cdot)$ merupakan semiring berkarakteristik nol.

Bukti :
Telah diketahui $(R^{0},+,\cdot)$ merupakan semiring.

Ambil sebarang $r \in R^{0} \setminus \{0\}$.
Diperoleh

$$m \cdot r = \underbrace{r+r+...+r}_{m\text{ suku}} = 0$$

Karena tidak ada bilangan bulat positif *m* yang memenuhi $m \cdot r = 0$ dimana $r \in R^{+}$ maka karakteristik R^{0} adalah nol. Dengan demikian terbukti $(R^{0},+,\cdot)$ merupakan semiring berkarakteristik nol.

Definisi 5
Misalkan himpunan *S* merupakan semiring dan $P \subseteq S$ dengan $P \neq \varnothing$. Himpunan *P* disebut semiring bagian dari *S* jika *P* merupakan semiring terhadap operasi-operasi yang didefinisikan pada *S*.

Contoh 5
Telah diketahui $(Z^{0},+,\cdot)$, $(Q^{0},+,\cdot)$ dan $(R^{0},+,\cdot)$ masing-masing merupakan semiring berkarakteristik nol dan $Z^{0} \subseteq Q^{0} \subseteq R^{0}$. Dengan demikian Z^{0} merupakan semiring bagian dari Q^{0} dan R^{0}.

Definisi 6
Semiring $(S,+,\cdot)$ disebut *strict semiring* jika

$$(\forall s_1, s_2 \in S)\left[s_1 + s_2 = 0 \Rightarrow s_1 = 0 \wedge s_2 = 0\right]$$

Contoh 6
$(R^{0},+,\cdot)$ merupakan *strict semiring*.

Bukti :
Telah diketahui $(R^{0},+,\cdot)$ merupakan semiring.

Ambil sebarang $r_1, r_2 \in R^{0}$.

Akan ditunjukkan untuk setiap $r_1, r_2 \in R^{0}$ jika $r_1 + r_2 \in R^{0}$ maka $r_1 = 0$ dan $r_2 = 0$.

Andaikan $r_1 \neq 0$ atau $r_2 \neq 0$.

Karena $r_1 \neq 0$ maka $r_1 + r_2 \neq 0$ dan karena $r_2 \neq 0$ maka $r_1 + r_2 \neq 0$

Sehingga kontradiksi dengan $r_1 + r_2 = 0$.

Jadi terbukti jika $r_1 + r_2 = 0$ maka $r_1 = 0$ dan $r_2 = 0$.

KESIMPULAN

Dengan berpegang pada definisi-definisi yang ada dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

Karena terhadap operasi penjumlahan, suatu himpunan yang membentuk semiring hanyalah merupakan monoid komutatif dan bukan grup komutatif atau grup abelian, maka setiap elemen dalam himpunan itu tidak perlu memiliki invers terhadap operasi penjumlahan yang didefinisikan padanya. Sehingga himpunan yang membentuk semiring bukanlah grup.

DAFTAR PUSTAKA

Fraleigh, J.B. 2000. *A First Course In Abstract Algebra.* Sixth Edition. Addison-Wesley Publishing Company, Massachussets.

Kandasamy, V. W. B., 1993, *Semivector Spaces Over Semifields*, American Research Press, USA.

Kandasamy, V. W. B., 2002, *Smarandache Semirings, Semifields, And Semivector Spaces*, American Research Press, USA.