

APLIKASI DISTRIBUSI DERET PANGKAT PADA BEBERAPA JENIS DISTRIBUSI KHUSUS
Power Series Distribution Applications in Several Types of Special Distributions

MOZART WINSTON TALAKUA
Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
e-mail: ocat_08@yahoo.com

ABSTRACT

This research about the definition and theorem of power series distribution according to its analytical characteristics. Then it discusses about the application to another distribution, and discusses about the relation between it, but it especially discusses about the application of power series distribution on some other special distribution, such as the negative logarithm distribution, the divided logarithm distribution, and inverse sinus distribution.

Keywords: *Distribution, power series, negative logarithm, divided logarithm, inverse sinus*

PENDAHULUAN

Peluang (*probabilitas*) berawal dari sebuah perjudian yang dilakukan oleh matematikawan dan fisikawan Italy, yaitu Girolamo Cardan (1501 – 1576) yang ditulis dalam bukunya yang berjudul *Liber de Ludo Aleae* (Book On Games Of Changes) pada tahun 1565 yang banyak membahas tentang masalah perjudian. Peluang kemudian dibahas oleh para ahli hingga sekarang.

Distribusi normal adalah karya dari Abraham de Moivre yang diperkenalkan pertama kali pada tahun 1737, kemudian ditulis ulang pada tahun 1738 dengan judul *The Doctrine Of Chances* yang membahas tentang pendekatan distribusi binomial untuk n yang besar, kemudian dilanjutkan oleh Laplace dalam bukunya yang berjudul *Analytical Theory Of Probability* pada tahun 1812, yang sekarang dikenal dengan *Teorema De Moivre-Laplace*. Distribusi kemudian dibahas hingga sekarang, yang dijelaskan oleh Peneliti dalam mengidentifikasi karakteristik parameter untuk model distribusi deret pangkat.

Dalam penelitian ini akan dikaji tentang momen, fungsi pembangkit momen, aplikasi pada beberapa distribusi khusus seperti distribusi deret negatif logaritma, distribusi deret log pembagian, distribusi deret invers sinus (Arcsinus) dari distribusi deret pangkat, serta sifat-sifat analitik meliputi Ekepektasi dan variansi.

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam ilmu statistika matematika, teori peluang (*probability theory*) merupakan dasar dan pengantar untuk penyusunan statistika lebih jauh, dimana dipakai pada penentuan selang untuk distribusi peluang yang terbagi atas distribusi peluang diskrit dan distribusi peluang kontinu (Bain, 1991).

Sebelum membahas lebih jauh tentang fungsi peluang deret pangkat, maka terlebih dahulu diperkenalkan apa yang dinamakan fungsi peluang itu sendiri. Misalkan Ω suatu himpunan (disebut ruang sampel), dan titik $\omega \in \Omega$ disebut kejadian dasar (unsur). Kemudian misalkan $P(A)$ adalah fungsi peluang untuk setiap kejadian $A \subseteq \Omega$ yang berkaitan dengannya suatu bilangan $P(A)$ sedemikian sehingga $P(A) \geq 0$ dan $P(\Omega) = 1$ (Kreyszig, 1993).

Model fungsi peluang lain yang perlu diperkenalkan dan dipelajari dalam statistika adalah deret pangkat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = a_0 X^0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + \dots$$

yang hanya ditemukan pada analisis metode dan bagian penentuan fungsi peluang deret pangkat (Dudewicz, 1995).

1. Deret Pangkat.

Definisi 1

Diketahui z_1, z_2, \dots, z_m barisan bilangan riil, didefinisikan barisan jumlah parsial yaitu:

$$S_1 = z_1$$

$$S_2 = z_1 + z_2$$

⋮

$$S_m = z_1 + z_2 + \dots + z_m$$

Jumlah parsial deret ini boleh tak hingga atau biasa disebut deret dan ditulis :

$$\sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + \dots$$

dalam hal ini z_m disebut suku dari deret tersebut.

Definisi 2

Deret pangkat dari $(z - z_0)$ berhubungan dengan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots,$$

$|z - z_0| < R$, dengan z adalah peubah dan a_0, a_1, a_2, \dots adalah konstanta yang di namakan koefisien dari deret tersebut, z_0 adalah konstanta pusat deret. Jika $z_0 = 0$,

maka didapat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$

2. Penurunan Deret Pangkat

Pada deret pangkat diperbolehkan menurunkan suku demi suku deret tersebut, sebagaimana Definisi 2. Penurunan ini dinamakan turunan pertama dari deret pangkat pada Definisi 2 yaitu ;

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots, \quad |z| < R$$

Teorema 1

Suatu deret pangkat dengan jari-jari kekonvergenan R yang tidak nol menggunakan suatu fungsi didalam daerah interior universal kekonvergenannya. Turunan fungsi ini diperoleh dengan mendiferensialkan deret asalnya suku demi suku. Semua deret yang diperoleh dengan cara ini menggunakan jari-jari kekonvergenan yang sama dengan deret asalnya.

$$\frac{d\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(a_n z^n)}{dz}, \quad |z| < R$$

Bukti

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)}{dz} &= \frac{d(a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \dots)}{dz} \\ &= \frac{d}{dz}(a_0 z^0) + \frac{d}{dz}(a_1 z^1) + \frac{d}{dz}(a_2 z^2) + \dots \end{aligned}$$

$$\frac{d\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz}(a_n z^n) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz}(a_n z^n) &= \frac{d}{dz}(a_0 z^0) + \frac{d}{dz}(a_1 z^1) + \frac{d}{dz}(a_2 z^2) + \dots \\ &= \frac{d}{dz}(a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \dots) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz}(a_n z^n) = \frac{d\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)}{dz} \quad (2)$$

dari (1) dan (2) maka terbukti bahwa

$$\frac{d\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(a_n z^n)}{dz} \quad \blacksquare$$

3. Fungsi Distribusi

Definisi 3

Jika himpunan semua kemungkinan nilai peubah acak x adalah himpunan hingga x_1, x_2, \dots, x_n atau tak hingga x_1, x_2, \dots maka x , disebut peubah acak deret, fungsi $f(x) = P(X = x)$, $x = x_1, x_2, x_3, \dots$ yang dianggap peluang untuk setiap himpunan nilai X , yang akan disebut fungsi distribusi peluang.

4. Fungsi Pembangkit Momen

Definisi 4

Jika X peubah acak diskrit maka momen ke- t

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} P(X)$$

disebut fungsi pembangkit momen dari X , jika nilai harapannya ada untuk semua nilai t pada interval $-h < t < h$ dan $h > 0$.

Teorema 3

Jika fungsi pembangkit momen $M_x(t)$ dari peubah acak X ada untuk $|t| < h$ dan $h > 0$, maka $E(X^k)$ ada dan

$$E(X^k) = \left. \frac{dM_x^k(t)}{dt^k} \right|_{t=0}$$

Bukti

Karena $M_x(t)$ ada untuk $|t| < h$ maka dapat mengambil turunannya secara berurutan dengan menurunkannya di dalam tanda integral secara terurut, jadi ;

$$\begin{aligned} M_x^{(k)}(t) &= \frac{d^k}{dt^k} M_x(t) = E\left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} e^{tX}\right] \\ &= E[X^k e^{tX}] \end{aligned}$$

Jika dimasukan $t = 0$, diperoleh $M_x^{(k)}(0) = E(X^k) \quad \blacksquare$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Suatu deret pangkat sesuai Definisi 2 yang seluruhnya terhitung bisa berhingga atau tak berhingga sesuai Definisi 5 yaitu :

$$f(z) = \sum_x a_x z^x \tag{3}$$

dengan $f(z)$ hingga (positif) dan terdefinisi, dan selanjutnya berdasarkan Teorema 2 didapatkan suatu fungsi peluang diskrit $P(X)$ yaitu :

$$P(X=x) = \frac{a_x z^x}{f(z)}, a_x > 0, z > 0, x=0,1,2,\dots \tag{4}$$

dengan demikian $P(X)$ merupakan suatu fungsi peluang distribusi yaitu (Persamaan 4) yang dinamakan distribusi deret pangkat.

1. Hubungan Antara Momen

Hubungan antara momen dapat diperoleh dengan menggunakan :

Teorema 4

Jika M'_k momen ke- k dan M'_1 momen pertama maka momen ke- $(k+1)$ atau $M'_{k+1} = M'_1 M'_k + z \frac{dM'_k}{dz}$

Bukti

Perhatikan $M'_k = \frac{1}{f(z)} \sum_{x=1}^n x^k a_x z^x$,

selanjutnya didiferensialkan terhadap z

$$\begin{aligned} \frac{dM'_k}{dz} &= \frac{1}{f(z)} \sum_{x=1}^n x^k a_x x z^{x-1} - \frac{f'(z)}{f^2(z)} \sum_{x=1}^n x^k a_x z^x \\ z \frac{dM'_k}{dz} &= \frac{1}{f(z)} \sum_{x=1}^n x^k a_x x z^x - \frac{f'(z)}{f^2(z)} \sum_{x=1}^n x^k a_x z^{x+1} \\ &= \frac{1}{f(z)} \sum_{x=1}^n x^{k+1} a_x z^x - \frac{f'(z)}{f^2(z)} \sum_{x=1}^n x^k a_x z^x z \\ &= \frac{1}{f(z)} \sum_{x=1}^n x^{k+1} a_x z^x - \frac{f'(z)}{f^2(z)} \sum_{x=1}^n x^k a_x z^x z \\ &= M'_{k+1} - \frac{f'(z)}{f(z)} M'_k z \\ M'_{k+1} &= z \frac{f'(z)}{f(z)} M'_k + z \frac{dM'_k}{dz} \\ &= E(X) M'_k + z \frac{dM'_k}{dz} \\ M'_{k+1} &= M'_1 M'_k + z \frac{dM'_k}{dz} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2. Momen Sentral

Momen sentral distribusi deret pangkat dapat diproses dengan berdasar pada Definisi 4, momen sentral ke- k yaitu $M_k = \frac{1}{f(z)} \sum_x (x - M'_1)^k a_x z^x$

dari persamaan di atas diperoleh momen-momen sebagai berikut :

$$M_0 = 1, \text{ sebab } \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x (x - M'_1)^0 z^x = 1 \tag{5}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x (x - M'_1)^1 z^x \\ &= \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x x z^x - \frac{1}{f(z)} M'_1 \sum_x a_x z^x \\ &= M'_1 - \frac{1}{f(z)} M'_1 \sum_x a_x z^x \\ &= \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x x z^x - \frac{1}{f(z)} M'_1 \sum_x a_x z^x \\ &= M'_1 - \frac{1}{f(z)} M'_1 \sum_x a_x z^x \end{aligned}$$

$$M_1 = M'_1 \left(1 - \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x z^x \right) = 0 \tag{6}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x (x - M'_1)^2 z^x \\ &= \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x (x^2 - 2xM'_1 + M_1'^2) z^x \\ &= \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x x^2 z^x - \frac{2M'_1}{f(z)} \sum_x a_x x z^x + \frac{M_1'^2}{f(z)} \sum_x a_x z^x \\ &= M_2' - 2M'_1 M_1' + M_1'^2 \end{aligned}$$

$M_2 = M_2' - M_1'^2$, jika disubstitusikan nilai dari M'_1 dan M_2' diperoleh

$$\begin{aligned} M_2 &= \text{Var}(X) \\ &= \frac{1}{f^2(z)} (z^2 f''(z) f(z) + z f'(z) f'(z) - z^2 f'^2(z)) \tag{7} \end{aligned}$$

dengan cara yang sama diperoleh

$$\begin{aligned} M_3 &= M_3' - 3M_2' M_1' + 2M_1'^3 \\ M_3 &= \frac{1}{f^3(z)} (f^2(z) [z^3 f'''(z) + 3z^3 f'(z) f''(z) \\ &\quad + 2f'(z) f''(z)] - \frac{1}{f^2(z)} (3z^2 f'^2(z) + 3z^3 f'(z) f''(z)) \\ &\quad + 2 \frac{z^3 f'^3(z)}{f^3(z)}) \tag{8} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$M_k = E(X - M'_1)^k = \sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{k}{s} M_1'^j M_{k-s}' \tag{9}$$

akibat dari momen sentral diatas didapatkan momen jika dicari momen sentralnya sebagai berikut :

$$\begin{aligned} M_2' &= M_2 + M_1'^2 \\ M_3' &= M_3 + 3M_1' M_2 + M_1'^3 \\ &\vdots \\ M_k' &= E(X - M'_1 + M_1')^k = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} M_1'^j M_{k-s}' \end{aligned}$$

3. Hubungan Antara Momen Sentral

Hubungan antara momen sentral diperoleh dengan menggunakan Teorema 5 di bawah ini.

Teorema 5

Jika M_k momen sentral ke- k dan M_{k-1} momen sentral ke- $(k-1)$, maka momen sentral ke- $(k-1)$ yaitu :

$$M_{k+1} = z \left(\frac{dM_k}{dz} + k \frac{dM_1}{dz} M_{k-1} \right), \text{ dengan } k \text{ positif}$$

Bukti

Dengan menggunakan nilai dari M_k (momen sentral ke-

$$k) \text{ yaitu : } M_k = \frac{1}{f(z)} \sum_x (x - M_1)'^k a_x z^x$$

selanjutnya didiferensialkan terhadap z maka didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{dM_k}{dz} &= \frac{1}{f(z)} \sum_x (x - M_1)'^k a_x x z^{x-1} - \frac{1}{f(z)} k \frac{dM_1}{dz} \\ &\quad \sum_x (x - M_1)'^{k-1} - \frac{f'(z)}{f^2(z)} \sum_x (x - M_1)'^k a_x z^x \\ \frac{z dM_k}{dz} &= \frac{1}{f(z)} \sum_x (x - M_1)'^k a_x x z^x \\ &\quad - z \frac{f'(z)}{f^2(z)} \sum_x (x - M_1)'^k a_x z^x \\ &\quad - \frac{1}{f(z)} z^k \frac{dM_1}{dz} \sum_x (x - M_1)'^{k-1} a_x z^x \\ &= \frac{1}{f(z)} \sum_x (x - M_1)'^k a_x z^x \left(x - z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{f(z)} z^k \frac{dM_1}{dz} \sum_x (x - M_1)'^{k-1} a_x z^x \\ &= \frac{1}{f(z)} \sum_x (x - M_1)'^k a_x z^x (x - M_1) \\ &\quad - z^k \frac{dM_1}{dz} \frac{1}{f(z)} \sum_x (x - M_1)'^{k-1} a_x z^x \\ &= \frac{1}{f(z)} \sum_x (x - M_1)'^k a_x z^x (x - M_1) \\ &\quad - z^k \frac{dM_1}{dz} \frac{1}{f(z)} M_{k-1} \\ &= \frac{1}{f(z)} \sum_x (x - M_1)'^{k+1} a_x z^x - z^k \frac{dM_1}{dz} \frac{1}{f(z)} M_{k-1} \\ &= M_{k+1} - z^k \frac{dM_1}{dz} \frac{1}{f(z)} M_{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= z^k \frac{dM_1}{dz} M_{k-1} + \frac{z dM_k}{dz} \\ M_{k+1} &= z \left(\frac{dM_k}{dz} + k \frac{dM_1}{dz} M_{k-1} \right) \blacksquare \end{aligned}$$

Akibat 1

Jika M_k momen sentral ke- k , M_2 momen sentral ke-2 dan M_{k-1} momen sentral ke- $(k-1)$ maka

$$M_{k+1} = z \frac{dM_k}{dz} + k M_2 M_{k-1}$$

Bukti

Dengan $k=1$ dari Teorema 3, diperoleh :

$$M_2 = z \left(\frac{dM_1}{dz} + \frac{dM_1}{dz} M_0 \right)$$

karena $M_1=0$ dan $M_0=1$ maka, diperoleh

$$M_2 = z \frac{dM_1}{dz}$$

dengan demikian persamaan pada Teorema 3 dapat ditulis seperti berikut

$$M_{k+1} = z \frac{dM_k}{dz} + k M_2 M_{k-1} \blacksquare$$

4. Momen Faktorial

Fungsi pembangkit momen faktorial $G_x(t)$, dari model distribusi deret pangkat diperoleh dengan menggunakan

$$G_x(t) = E(t^X) = \sum_x t^x P(X = x) \tag{10}$$

sehingga didapatkan,

$$\begin{aligned} G_x(t) &= \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x t^x z^x \\ &= \frac{1}{f(z)} (a_1 t z + a_2 (t z)^2 + a_3 (t z)^3 + \dots) \\ &= \frac{t}{f(z)} (a_1 z + a_2 t z^2 + a_3 t^2 z^3 + \dots) \\ &= \frac{t}{f(z)} \sum_x a_x t^{(x-1)} z^x = \frac{f(z t)}{f(z)} \end{aligned}$$

dengan menyamakan (10) dengan nilai $E(X^1), \dots, E(X^k)$ kemudian didiferensialkan terhadap t didapatkan

$$\begin{aligned} G_x'(t) \Big|_{t=1} &= E(X^{[1]}) = M^{[1]} = \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x x z^x = \frac{z f'(z)}{f(z)} \\ G_x''(t) \Big|_{t=1} &= E(X^{[2]}) = M^{[2]} = \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x x(x-1) z^x \\ &= \frac{z^2 f''(z)}{f(z)} \\ &\dots \end{aligned}$$

maka momen faktorial ke- k adalah

$$\begin{aligned} G_x^k(t) \Big|_{t=1} &= E(X^{[k]}) \\ &= M^{[k]} = \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x x(x-1) \dots (x-(k+1)) z^x \\ &= \frac{z^k f^k(z)}{f(z)} \tag{11} \end{aligned}$$

5. Hubungan Antara Momen Faktorial

Hubungan antara momen faktorial dari distribusi deret pangkat diperoleh dengan menggunakan Teorema 3 dibawah ini.

Teorema 5

Jika $M^{[k]}$ momen faktorial ke- k dan M_1' momen pertama, maka momen faktorial ke- $(k+1)$ yaitu :

$$M^{[k+1]} = \frac{z dM^{[k+1]}}{dz} + M^{[k]} M_1' - kM^{[k]},$$

dengan k bilangan bulat positif.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa Teorema 5 benar.

$$E(X^{(k)}) = M^{[k]} = \frac{1}{f(z)} \sum_{x=1}^{\infty} x^{[k]} a_x z^x$$

selanjutnya didiferensialkan terhadap z , maka didapat :

$$\frac{dM^{[k]}}{dz} = \frac{1}{f(z)} \sum_x x^{[k]} a_x z^{(x-1)} - \frac{f'(z)}{f^2(z)} \sum_x x^{[k]} a_x z^x$$

$$= \frac{1}{z f(z)} \sum_x x^{[k+1]} a_x z^x - k \frac{1}{z f(z)} \sum_x x^{[k]} a_x z^x$$

$$- \frac{f'(z)}{f^2(z)} \sum_x x^{[k]} a_x z^x$$

$$= \frac{1}{z} M^{[k+1]} + k \frac{1}{z} M^{[k]} - \frac{f'(z)}{f(z)} M^{[k]}$$

$$= \frac{1}{z} M^{[k+1]} + M^{[k]} \left(\frac{k}{z} - \frac{f'(z)}{f(z)} \right)$$

$$\frac{1}{z} M^{[k+1]} = \frac{dM^{[k]}}{dz} - M^{[k]} \left(\frac{k}{z} - \frac{f'(z)}{f(z)} \right)$$

$$= z \frac{dM^{[k]}}{dz} - M^{[k]} (k - M_1')$$

$$= z \frac{dM^{[k]}}{dz} - M^{[k]} k + M^{[k]} M_1'$$

$$M^{[k+1]} = z \frac{dM^{[k]}}{dz} - M^{[k]} \left(k - \frac{z f'(z)}{f(z)} \right)$$

$$= z \frac{dM^{[k]}}{dz} - M^{[k]} (k - M_1')$$

$$= z \frac{dM^{[k]}}{dz} - M^{[k]} k + M^{[k]} M_1' \quad \blacksquare$$

6. Aplikasi Deret Pangkat Pada Beberapa Jenis Distribusi Khusus

6.1 Distribusi Deret Negatif Logaritma

Jika diketahui deret sebagai berikut

$$z + \frac{z^2}{z} + \frac{z^3}{z} + \dots = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{t^x}{x} = -\log(1-z) \quad |z| < 1 \quad (12)$$

Didapat distribusi

$$P(X=x) = -\frac{z^x}{x \log(1-z)}, \quad 0 < t < 1, \quad x = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Maka diperoleh

$$a_x = \frac{1}{x}, \quad f(z) = -\log(1-z) = \log(1-z)^{-1} \quad (14)$$

Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen didapatkan

$$M_x(t) = \frac{e^t}{-\log(1-z)} \sum_x \frac{1}{x} e^{t(x-1)} z^x$$

$$= -\frac{e^t}{\log(1-z)} \sum_x \frac{1}{x} e^{t(x-1)} z^x \quad (15)$$

$$= \frac{\log(1-z e^t)}{\log(1-z)} \quad t < -\log(z) \quad (16)$$

Selanjutnya diturunkan terhadap t maka berdasarkan (11) didapat

$$\left. \frac{M_x'(t)}{dt} \right|_{t=0} = E(X) = \frac{z f'(z)}{f(z)}$$

Karena $f(z) = -\log(1-z)$ maka

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)} \quad (17)$$

Jadi

$$\left. \frac{M_x'(t)}{dt} \right|_{t=0} = E(X) = \frac{z \frac{1}{(1-z)}}{-\log(1-z)}$$

$$E(X) = -\frac{z}{(1-z) \log(1-z)} \quad (18)$$

$$\left. \frac{M_x''(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = E(X^2) = \frac{z f'(z) + z^2 f''(z)}{f(z)}$$

Karena $f'(z) = \frac{1}{1-z}$ maka

$$f''(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \quad (19)$$

Maka

$$\left. \frac{M_x''(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = E(X^2) = \frac{z \left(\frac{1}{(1-z)} \right) + z^2 \left(\frac{1}{(1-z)^2} \right)}{-\log(1-z)}$$

$$= \frac{1}{(1-z)^2} \left((z(1-z)) + z^2 \right) = \frac{1}{-\log(1-z)}$$

$$E(X^2) = -\frac{z}{(1-z)^2 \log((1-z))} \quad (20)$$

Jadi

$$Var(X) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$= -\frac{z}{(1-z)^2 \log(1-z)} - \left(-\frac{z}{(1-z) \log(1-z)} \right)^2$$

$$= -\frac{z^2 + z \log(1-z)}{(1-z)^2 \log^2(1-z)} \quad (21)$$

Selanjutnya dari persamaan (10) diperoleh

$$G_x(t) = \frac{t}{-\log(1-z)} \sum_x \frac{1}{x} t^{(x-1)} z^x \quad (22)$$

$$= \frac{\log(1-zt)}{\log(1-z)} \Big|_{t < \frac{1}{z}} \quad (23)$$

Kemudian dari menyamakan persamaan (10) didapat

$$\left. \frac{G'_x(t)}{dt} \right|_{t=1} = E(X) = \mu_1 = \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{z(1-z)^{-1}}{-\log(1-z)} \quad (24)$$

$$E(X) = -\frac{z}{(1-z)\log(1-z)} \quad (25)$$

Selanjutnya moment faktorial ke-k

$$\left. \frac{G_x^k(t)}{dt^k} \right|_{t=1} = E(X^{(k)}) = -\frac{(k-1)!z^k}{(1-z)^k \log(1-z)} \quad (26)$$

6.2 Distribusi Deret Log Pembagian

Diketahui deret

$$2 \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \dots \right) = 2 \sum_x \left(\frac{z^{2x+1}}{2x+1} \right) = \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right), \quad |z| < 1 \quad (27)$$

Didapatkan distribusi

$$P(X=2x+1) = \frac{2z^{2x+1}}{(2x+1)\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \quad (28)$$

Untuk $0 < z < 1$, $x = 0, 1, 2, \dots$

Didapat

$$a_x = \frac{2}{2x+1}, \quad f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \quad (29)$$

Dari definisi fungsi pembangkit momen didapat

$$\begin{aligned} M_x(t) &= \frac{e^t}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \sum_x \frac{2}{2x+1} e^{t(x-1)} z^{2x+1} \\ &= \frac{2e^t}{\log(1+z)} \sum_x \frac{e^{t(x-1)} z^{2x+1}}{2x+1} \\ &= \frac{\log\left(\frac{1+ze^t}{1-ze^t}\right)}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}, \quad t < -\log z \end{aligned} \quad (30)$$

Kemudian diturunkan terhadap t diperoleh

$$\left. \frac{M'_x(t)}{dt} \right|_{t=0} = E(X) = \frac{z \frac{2}{(1-z^2)}}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

Sebab

$$f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \quad (31)$$

$$f'(z) = \frac{1}{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \frac{2}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^2} \quad (32)$$

$$\left. \frac{M''_x(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = E(X^2) = \frac{2f'(z) + z^2 f''(z)}{f(z)}$$

Diketahui

$$\begin{aligned} f'(z) &= 2(1-z^2)^{-1} \\ f''(z) &= 2(-1)(1-z^2)^{-2}(-2z) = \frac{4z}{(1-z^2)^2} \end{aligned} \quad (33)$$

Maka

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{z \frac{2}{(1-z^2)} + z^2 \frac{4z}{(1-z^2)^2}}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{(1-z^2)^2} (2z(1-z^2) + 4z^3)}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \\ &= \frac{(2z - 2z^3 + 4z^3)}{(1-z^2)^2 \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \\ E(X^2) &= \frac{2(z^3 + z)}{(1-z^2)^2 \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \end{aligned} \quad (34)$$

Jadi

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X) - (E(X))^2 \\ &= \frac{2(z^3 + z)}{(1-z^2)^2 \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} - \left(\frac{2z}{(1-z)\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \right)^2 \end{aligned}$$

$$Var(X) = 2z \frac{(1+z^2) \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}{(1+z^2)^2 \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \tag{35}$$

Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen faktorial didapat

$$G_x(t) = \frac{t}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \sum_x \frac{2}{(2x+1)} t^{(x-1)} z^{(2x+1)} \tag{36}$$

$$= \frac{\log\left(\frac{1+zt}{1-zt}\right)}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \quad |t| < \frac{1}{2} \tag{37}$$

Berdasarkan dengan menyamakan persamaan (10) didapat

$$\left. \frac{G'_x(t)}{dt} \right|_{t=1} = E(X^{(1)}) = \mu_1 = \frac{z2(1-z^2)^{-1}}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \tag{38}$$

$$E(X^{(1)}) = \frac{2z}{(1-z^2) \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

$$\left. \frac{G''_x(t)}{dt^2} \right|_{t=1} = E(X^2) = \mu_2 = \frac{z^2 \left(\frac{4z}{(1-z^2)^2} \right)}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

$$E(X^2) = \frac{4z^3}{(1-z^2)^2 \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \tag{39}$$

$$\left. \frac{G'''_x(t)}{dt^3} \right|_{t=1} = E(X^3) = \mu_3 = \frac{z^3 f'''(z)}{f(z)}$$

$$= \frac{z^3 \frac{4}{(1-z^2)^3} (1+3z^2)}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

$$= \frac{4z^3 (1+3z^2)}{(1-z^2)^3 \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

$$E(X^3) = \frac{2z^2 (2z+6z^3)}{(1-z^2)^3 \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \tag{40}$$

6.3 Distribusi Deret Invers Sinus (Arcsinus)

Diketahui deret invers sinus

$$z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{z^5}{5} + \dots = z + \sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2x-1)}{2 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2x)} z^{2x+1}$$

$$z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{z^5}{5} + \dots = \sin^{-1} z, \quad |z| < 1 \tag{41}$$

Dapat ditulis

$$P(X = 2x+1) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2x-1)}{2 \cdot 4 \dots (2x)} \cdot \frac{z^{2x+1}}{2x+1} (\sin^{-1} z)^{-1} \tag{42}$$

untuk $0 < z < 1, \quad x = 1, 2, \dots$

Didapat

$$a_x = \frac{1 \cdot 3 \dots (2x-1)}{2 \cdot 4 \dots (2x)} \cdot \frac{1}{2x+1}$$

$$f(z) = \sin^{-1} z$$

Dari definisi fungsi pembangkit momen didapat

$$M_x(t) = \frac{e^t}{\sin^{-1} z} \cdot \sum_x \frac{1 \cdot 3 \dots (2x-1)}{2 \cdot 4 \dots (2x)} \cdot \frac{1}{2x+1} \cdot e^{t(x-1)} z^{2x+1}$$

$$= e^t (\sin^{-1})^{-1} \sum_x \frac{1 \cdot 3 \dots (2x-1)}{2 \cdot 4 \dots (2x)} \cdot \frac{1}{(2x+1)} \cdot e^{t(x-1)} z^{2x+1}$$

$$M_x(t) = \frac{\sin^{-1}(ze^t)}{\sin^{-1} z}, \quad t < -\log z \tag{43}$$

Selanjutnya ditunjukkan terhadap t . Maka berdasarkan hasil dari (43) didapatkan

$$\left. \frac{M'_x(t)}{dt} \right|_{t=0} = E(X) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

karena

$$f(z) = \sin^{-1} z$$

$$f'(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \tag{44}$$

Maka

$$E(X) = \frac{z \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}}{\sin^{-1} z} = \frac{z}{\sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z} \tag{45}$$

$$\left. \frac{M''_x(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = E(X^2) = \frac{z \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + z^2 \cdot \frac{z}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2}}}{\sin^{-1} z}$$

$$= \frac{\frac{z}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2}} \cdot ((1-z^2) + z^2)}{\sin^{-1} z}$$

$$E(X^2) = \frac{z}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z} \tag{46}$$

Kemudian

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{z}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z} - \left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z} \right)^2$$

$$= \frac{z}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z} - \frac{z^2}{(1-z^2)(\sin^{-1} z)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{z \sin^{-1} z - z^2 \sqrt{1-z^2}}{(1-z^2) \sqrt{1-z^2} (\sin^{-1} z)^2} \\
 \text{Var}(X) &= z \frac{\sin^{-1} z - z \sqrt{1-z^2}}{(1-z^2) \sqrt{1-z^2} (\sin^{-1} z)^2} \quad (47)
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan definisi fungsi pembangkit momen faktorial didapat

$$\begin{aligned}
 G_x(t) &= \frac{t}{\sin^{-1} z} \sum_x \frac{1 \cdot 3 \dots (2x-1)}{2 \cdot 4 \dots (2x)} \left(\frac{1}{(2x+1)} \right) t^{(x-1)} z^{(2x+1)} \\
 &= \frac{\sin^{-1}(zt)}{\sin^{-1} z}, |t| < \frac{1}{z} \quad (48)
 \end{aligned}$$

Sehingga didapat

$$\begin{aligned}
 G'_x(t) \Big|_{t=1} &= E(X^{[1]}) = \mu_1 = \frac{z f'(z)}{f(z)} \\
 &= \frac{z(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sin^{-1} z} \\
 &= \frac{z}{\sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z} \quad (49)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G''_x(t) \Big|_{t=1} &= E(X^{[2]}) = \mu_2 = \frac{z^2 f''(z)}{f(z)} \\
 &= \frac{z^2 \frac{z}{(1-z^2) \sqrt{1-z^2}}}{\sin^{-1} z} \\
 &= \frac{z^3}{(1-z^2) \sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z} \quad (50)
 \end{aligned}$$

$$G'''_x(t) \Big|_{t=1} = E(X^{[3]}) = \frac{z^3 + 2z^5}{(1-z^2)^2 \sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z} \quad (51)$$

KESIMPULAN

Karakteristik parameter untuk model distribusi deret pangkat yang telah dibahas pada bab sebelumnya, ditarik kesimpulan tentang sifat-sifat analitik beberapa distribusi khusus sebagai berikut:

1. Distribusi deret negatif pembagian:

$$E(X) = -\frac{z}{(1-z) \log(1-z)}$$

$$\text{Var}(X) = -\frac{z^2 + z \log(1-z)}{(1-z)^2 \log^2(1-z)}$$

2. Distribusi deret log pembagian:

$$E(X) = \frac{z \frac{2}{(1-z^2)}}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

$$\text{Var}(X) = 2z \frac{(1+z^2) \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}{(1-z^2)^2 \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

3. Distribusi invers sinus (Arcsinus)

$$E(X) = \frac{z}{\sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z}$$

$$\text{Var}(X) = z \frac{\sin^{-1} z - z \sqrt{1-z^2}}{(1-z^2) \sqrt{1-z^2} (\sin^{-1} z)^2}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Bain, L. J; Engelhardt, M., (1991), "Introduction to Probability and Mathematical Statistics" The Duxbury Advanced Series In Statistics And Decision Sciences.
- Dudewicz, E. J; Misra, S. N., (1995), "Statistika Matematika Modern", Penerbit ITB Bandung.
- Kreyszig, E., (1993), *Matematika Telaah Lanjutan* (Statistik lanjutan) edisi ke-6. Penerbit PT Gramedia pustaka, Jakarta
- Purcell, E. J; Varberg, D., (1992), "Kalkulus dan Geometri Analisis". Edisi Kelima, Penerbit Erlangga.