Jurnal Barekeng
Vol. 6 No. 1 Hal. 19 – 22 (2012)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

ALJABAR-C^* DAN SIFATNYA

The Properties of C^*-algebras

HARMANUS BATKUNDE[1], ELVINUS RICHARD PERSULESSY[2]
[1,2] *Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI*
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
e-mail: batkunde@yahoo.com; richardelvinus@yahoo.com

ABSTRACT

These notes in this paper form an introductory of C^*-algebras and its properties. Some results on more general Banach algebras and C^*-algebras, are included. We shall prove and discuss basic properties of Banach Algebras, C^*-algebras, and commutative C^*-algebras. We will also give important examples for Banach Algebras, C^*-algebras, and commutative C^*-algebras.

Keywords: *Banach algebras, C^*-algebras, commutative C^*-algebras.*

PENDAHULUAN

Tak dapat dipungkiri bahwa konsep-konsep dalam analisis fungsional maupun aljabar banyak memberikan masukkan penting dalam mengembangkan ilmu matematika, baik dalam penerapan langsung maupun dalam menyediakan berbagai alat yang dapat dipakai dalam pengembangan konsep-konsep matematika yang lebih lanjut.

Aljabar-C^* (dibaca: aljabar C bintang/star) sendiri adalah salah satu konsep lanjut yang dihasilkan dari tinjauan-tinjauan lanjut pada konsep-konsep dalam analisis fungsional dan konsep operator aljabar. Konsep inilah yang akan dikenalkan dan diulas dalam penulisan ini.

Lebih lanjut berbagai teori dasar dari aljabar-C^* akan turut dijelaskan dalam penulisan ini, mulai dari teori norm, aljabar-* (dibaca: aljabar bintang/star) aljabar Banach, aljabar Banach-*, aljabar-C^*, aljabar-C^* dengan elemen satuan juga aljabar-C^* komutatif. Selain teori dasar, beberapa contoh aljabar-C^* juga akan dilihat dalam tulisan ini.

TINJAUAN PUSTAKA

Aljabar-C^* dipercaya sebagai konsep pertama yang dipertimbangkan untuk digunakan dalam mekanika kuantum untuk memodelkan aljabar dari bentuk fisik yang dapat diamati. Garis penelitian ini dimulai dengan mekanika matriks Werner Heisenberg dan dalam suatu pengembangan lebih lanjut yang lebik matematik dari Pasqal Jordan sekitar tahun 1933. (Emch, 1972)

Sesudah itu John Von Neumann mencoba menyusun kerangka umum untuk aljabar-aljabar ini yang puncaknya diterbitkan dalam kumpulan tulisan pada operator ring. Tulisan ini disebut sebagai kelas khusus dari aljabar-C^* yang dikenal sebagai aljabar Von Neumann. (Neumann, 1961)

Sekitar tahun 1940an, C. E. Rickart mendeskripsikan aljabar-B* yang kemudian dikenal sebagai aljabar Banach-* (Rickart, 1946). Kemudian di periode tahun yang sama yaitu tahun 1940an, penelitian dari Israel Gelfam dan Mark Naimark menghasilkan suatu karakterisasi abstrak dari aljabar-C^*. (Doran & Belfi, 1986)

Definisi 1. (Ruang norm, ruang Banach)
Misalkan X adalah suatu ruang vektor. Fungsi $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi:

1) $\|x\| \geq 0$; untuk setiap $x \in X$;
2) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$;
3) $\|\alpha x\| = \alpha\|x\|$; untuk setiap $x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$;
4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; untuk setiap $x, y \in X$;

merupakan **norm** pada X dan pasangan $(\|\cdot\|, X)$ disebut **ruang norm**. Lebih lanjut, ruang norm yang lengkap disebut **ruang Banach.**

Definisi 2. (Fungsional linear terbatas, ruang dual)
Suatu **fungsional linear** f adalah suatu pemetaan linear dengan domain suatu ruang vector X dan *range*-nya berupa lapangan K, dengan demikian :

$$f : D(f) \to K.$$

Di sini, $K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$. Jika ada $c \in \mathbb{R}$ sehingga

$$|f(x)| \le c\|x\| \text{ dengan } x \in X$$

maka f disebut **fungsional linear terbatas**. Himpunan semua fungsional linear terbatas di X membentuk suatu ruang norm dengan norm yang didefinisikan oleh

$$\|f\| = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\in X, \|x\|=1} |f(x)|.$$

Himpunan ini disebut **ruang dual** dari X dan dinotasikan dengan X'.

Definisi 3. (Aljabar, aljabar komutatif)
Suatu aljabar A atas lapangan K adalah suatu ruang vector A atas lapangan K yang bersifat tertutup terhadap perkalian yakni $x, y \in A$, maka $xy \in A$, yang didefinisikan dengan memenuhi sifat-sifat:

(1) $(xy)z = x(yz)$;
(2) $x(y + z) = xy + xz$;
$(x + y)z = xy + yz$;
(3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$;

untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $\alpha \in K$. Dalam hal ini $K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$.
Lebih lanjut A disebut komutatif jika perkaliannya komutatif, yaitu untuk setiap $xy \in A$ berlaku:

$$xy = yx, \tag{4}$$

dan A disebut aljabar dengan elemen satuan jika terdapat suatu $e \in A$ sehingga untuk setiap $y \in A$ berlaku:

$$ex = xe = x. \tag{5}$$

Definisi 4. (Aljabar bernorm, aljabar Banach)
Suatu **aljabar bernorm** A adalah ruang norm yang merupakan suatu aljabar, sedemikian hingga untuk setiap $x, y \in A$, berlaku:

$$\|xy\| \le \|x\|\|y\|,$$

dan jika A memiliki elemen satuan e,

$$\|e\| = 1.$$

Aljabar bernorm yang lengkap (terhadap normnya) disebut **aljabar Banach.**

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 5. (involusi, aljabar-*, aljabar Banach-*)
Suatu **involusi** adalah suatu pemetaan $* : A \to A$ $(a \mapsto a^*)$, dengan A adalah ruang vector atas lapangan K yang memenuhi sifat:

1. $x^{**} = x$;
2. $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha}x^* + \bar{\beta}y^*$;
3. $(xy)^* = y^*x^*$;

untuk setiap $x, y \in A$ dan $\alpha, \beta \in K$. Disini $K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$.
Aljabar-* adalah suatu aljabar yang dilengkapi involusi**.**
Suatu aljabar Banach yang dilengkapi dengan involusi dan memenuhi sifat:

4. $\|x^*\| = \|x\|$,

disebut **Aljabar Banach-*.**

Definisi 6. (aljabar -*C)**
Suatu aljabar Banach-* yang memenuhi:

$$\|x^*x\| = \|x\|^2, \tag{6}$$

disebut **aljabar -*C****.

Persamaan (6) disebut aksioma-C* atau kondisi -C*.

Definisi 7.
Misalkan A_1 dan A_2 masing-masing adalah aljabar-C*, suatu **homomorfisma-*** $\phi: A_1 \to A_2$ adalah suatu homomorfisma aljabar sedemikian sehingga

$$\phi(x^*) = \phi(x)^*; x \in A_1.$$

Suatu **isomorfisma-*** dari A_1 ke A_2 adalah suatu homomorfisma-* bijektif.

Secara mudah dapat dilihat bahwa untuk suatu aljabar Banach-* A, involusinya adalah isometrik, yaitu:

$$\|x - y\| = \|(x - y)^*\| = \|x^* - y^*\|. \tag{7}$$

Contoh 8.

1. $M_n(\mathbb{C})$ yakni himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ adalah aljabar Banach-* dengan operator norm dan involusi Hermitian. Lebih lanjut $M_n(\mathbb{C})$ adalah aljabar-C* dengan involusi yang sama.

2. Misalkan X adalah suatu ruang Hausdorff kompak local dan $C_0(X)$ adalah himpunan semua fungsi-fungsi kontinu yang bernilai 0 saat menuju tak hingga. Definisikan $f^*(t) = \overline{f(t)}$ (untuk $t \in X$). Maka $C_0(X)$ adalah aljabar-*. Dengan $\|f\| = \text{Sup}_{t\in X} |f(t)|$, $C_0(X)$ adalah aljabar-C*. $C_0(X)$ memiliki elemen satuan jika dan hanya jika X kompak.

3. Misalkan X adalah ruang Hausdorff kompak dan $\mathcal{B}(X)$ adalah himpunan semua fungsi Borel terbatas pada X. Jika didefinisikan $\|f\| = \text{Sup}_{x\in X} |f(x)|$ dan $f^*(t) = \overline{f(t)}$, $\mathcal{B}(X)$ adalah aljabar-C*.

Definisi 9. (Spektrum)
Jika A adalah Aljabar Banach dengan elemen satuan 1_A dan $x \in A$, maka spectrum dari x di A adalah himpunan

$$\sigma_A = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda \cdot 1 \text{ tidak invertible }\}.$$

Jari-jari spectrum dari $x \in A$ didefinisikan sebagai

$$r(x) = \underset{\lambda\in\sigma(x)}{Sup} \{|\lambda|\}.$$

dan $\|1_A\| = 1$.

Definisi 10. (Aljabar-*C satuan dan komutatif)**
Suatu aljabar-C* yang memiliki elemen satuan disebut **aljabar-*C** satuan** dan aljabar-C* yang di dalamnya berlaku sifat komutatif perkalian disebut **aljabar-*C** komutatif.**

Teorema 11.
Misalkan A adalah aljabar Banach -*, maka A memiliki penyatuan $\tilde{A}$ dimana terdapat isomorfik dari A ke suatu subruang dari $\tilde{A}$ (*embedding*). Penyatuan menyatakan bahwa $\tilde{A}$ juga aljabar Banach-* dan A subgrup dari $\tilde{A}$.

Bukti.
Misalkan $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ dengan penjumlahan perkomponen (*componentwise*), dan perkaliannya didefinisikan sebagai

$$(x, \lambda)(y, k) = (xy + \lambda y + \kappa x, \lambda\kappa),$$

dan definisikan

$$\|x, \lambda\| = \|x\| + |\lambda|,$$

dan $(x, \lambda)^* = (x^*, \bar{\lambda})$. *Embedding*-nya didefinisikan oleh $x \mapsto (x, 0)$ dan identitasnya adalah $(0,1)$. ∎

Lebih lanjut, jika A adalah aljabar-C^*, maka norm alternative $\|(x,\lambda)\| = \sup_{\|u\|=1} \{\|xu+\lambda u\|\}$, yang membuat $\tilde{A}$ menjadi suatu aljabar-C^*.

Definisi 12.
Misalkan A adalah aljabar-*. Maka $x \in A$ disebut
Self-adjoint jika $x = x^*$.
Normal jika $xx^* = x^*x$.
Proyeksi jika x self adjoint dan $x^2 = x$.
Isometri parsial jika x^*x adalah proyeksi.
Isometri jika $x^*x = 1$.
Coisometri jika $xx^* = 1$.
Uniter jika x adalah isometri dan coisometri.

Proposisi 13.
Jika A adalah aljabar-C^*, maka proyeksi taknol memiliki norm 1. Lebih lanjut jika x uniter, maka $\sigma(x^{-1}) = \{\lambda^{-1}: \lambda \in \sigma(x)\}$.
Bukti.
Jika x adalah proyeksi taknol, maka $\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|x^2\| = \|x\|$, dengan demikian $\|x\| = 1$. Jika x uniter maka $xx^* = 1$ (ini adalah invertible dengan involusi sebagai inversnya) ■

Proposisi 14.
Misalkan A adalah aljabar-C^* dan $x \in A$ normal. Maka
$$r(x) = \|x\|.$$
Bukti
Aksioma-C^* mengakibatkan $\|x^*x\| = \|x\|^2$. Perhatikan juga bahwa xx^* adalah self-adjoint. Dengan demikian diperoleh $\|(x^*x)^2\| = \|x^*x\|^2 = \|x\|^4$. Dengan induksi matematika diperoleh $\left\|(x^*x)^{2^n}\right\| = \|x\|^{2^{n+1}}$.

$$\begin{aligned} r(x) &= \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \|x^{2n}\|^{2^{-n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \|x^{2n}\|^{2^{(-n-1)+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\|((x^*)^{2n}x^{2n})^{2^{-n-1}}\right\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\|((x^*x)^{2n})^{2^{-n-1}}\right\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\|(x^*x)^{2^{-1}}\right\| \\ &= \|x^*x\|^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|x\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|x\|. \end{aligned}$$
■

Proposisi 15.
Terdapat paling banyak satu norm pada suatu aljabar-* A yang membuat A menjadi suatu aljabar-C^*.
Bukti
Misalkan $\|\cdot\|_1$ dan $\|\cdot\|_2$ adalah dua norm di aljabar-* A yang membuatnya menjadi suatu aljabar-C^*, maka
$$\|x\|_i^2 = \|x^2x\| = \sup\{|\lambda|: \lambda \in \sigma(x^*x)\}; \mathrm{i} = 1,2.$$
Dengan demikian $\|x\|_1$ dan $\|x\|_2$. ■

Proposisi 16.
Misalkan A adalah suatu aljabar-C^* dan $x \in A$, dimana x self-adjoint, maka $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$. Jika $u \in A$ uniter, maka $\sigma(u)$ subhimpunan dari suatu lingkaran satuan.

Bukti
Misalkan u uniter dalam suatu aljabar-C^* A dengan elemen satuan dan $\lambda \in \sigma(x)$.
Karena $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|1\|, |\lambda| \leq 1$. Perhatikan bahwa $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1})$. Karena $u^{-1} = u^*$ uniter, kita simpulkan bahwa $|\lambda| = 1$. Untuk $x \in A$ uniter, dengan mempertimbangkan $\tilde{A}$, kita asumsikan A memiliki elemen satuan. Fungsi $\exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}$. Dapat dilihat bahwa $u = \exp(ix)$ uniter (dengan $u^* = \exp(-\mathrm{i}x)$), Jika $\lambda \in \sigma(x)$ dan $b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^n(x-\lambda)^{n-1}}{n}$, maka
$$\begin{aligned} e^{ix} - e^{i\lambda} &= \left(e^{i(x-\lambda)} - 1\right)e^{i\lambda} \\ &= (x-\lambda)be^{i\lambda}. \end{aligned}$$
Karena b komutatif dengan x, dan $x - \lambda$ tidak invertible, $\exp(ix) - e^{i\lambda}$. Dengan demikian $\left|e^{i\lambda}\right| = 1$, dan oleh karena itu $\lambda \in \mathbb{R}$. Dengan kata lain, $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.

Definisi 17.
Suatu **fungsional linear multiplikatif** pada suatu aljabar Banach tak nol A adalah homomorfisma tak nol dari A ke $\mathbb{C}$. Himpunan semua funsional linear multiplikatif pada A disebut **ruang ideal maksimal**, dan dinotasikan dengan $\Omega(A)$.

Teorema 18.
Misalkan A adalah aljabar Banach komutatif dengan elemen satuan,
1) Jika $\phi \in (A)$, maka $\|\phi\| = 1$.
2) Ruang $\Omega(A)$ tak kosong, dan pemetaan $\phi \longmapsto ker(\phi)$ adalah suatu bijeksi dari $\Omega(A)$ pada pada himpunan semua ideal maksimal dari A.

Bukti
1) Andaikan $\phi \in \Omega(A)$ dan $a \in \mathrm{A}$ sedemikian hingga $\|a\| < 1 = \phi(a)$. Misalkan $b = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$. Maka $a + ab = b$, dan
$$\phi(b) = \phi(a) + \phi(a)\phi(b) = 1 + \phi(b).$$
Hal ini tidaklah mungkin. Jadi, $\|\phi\| \leq 1$. Karena $\phi(1) = 1$, maka terbukti bahwa $\|\phi\| = 1$.
2) Misalkan $\phi \in \Omega(A)$, berlaku bahwa $M = ker\phi$ adalah suatu ideal tutup dari kodimensi 1 pada A, dengan demikan merupakan maksimal. Jika $\phi_1, \phi_2 \in \Omega(A)$ dan $ker\phi_1 = ker\phi_2$, maka untuk setiap $a \in A, a - \phi_2(a) \in ker\phi_1$. Hal ini mengakibatkan $\phi_1(a - \phi_2(a)) = 0$ atau $\phi_1(a) = \phi_2(a)$. Ini menunjukkan bahwa pemetaan ini satu-satu.

   Sebaliknya, jika M adalah ideal maksimal, maka $d(M,1) \geq 1$ karena bola buka satuan dengan pusat 1, memuat elemen-elemen yang dapat dibalik, sehingga closure dari M tetap tidak memuat 1. Dapat dilihat bahwa closure juga merupakan ideal, lebih lanjut merupakan ideal sejati. Disimpulkan bahwa M sendiri tutup. Jadi kuosien A/M adalah aljabar Banach komutatif sederhana, dan karena satu-satunya aljabar Banach komutatif sederhana adalah $\mathbb{C}$ maka pemetaan kuosien ϕ memberikan suatu homomorfisma kontinu dari $A \to \mathbb{C}$. Lebih lanjut, pemetaan ini bijektif.

   Untuk melihat bahwa $\Omega(A)$ tak kosong, kita asumsikan $A \neq \mathbb{C}$, (jika tidak, identifikasi A dengan $\mathbb{C}$ menghasilkan homomorfisma tak nol) jadi A tidak sederhana. Misalkan I adalah suatu ideal sejati dari A.

Karena A memiliki identitas, maka terdapat suatu ideal sejati maksimal dari A yang memuat I. ■

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, kesimpulan yang dapat diambil yakni, Suatu aljabar Banach-* yang yang dilengkapi sifat $\|x^*x\| = \|x\|^2$ disebut aljabar -C*. Paling banyak hanya ada satu norm pada aljabar-* yang dapat membuatnya menjadi suatu aljabar-C*. Suatu homomorfisma-* dari suatu aljabar-C* ke yang lainnya merupakan suatu homomorfisma aljabar.

Konsep aljabar-C* dapat ditinjau lebih luas lagi dengan menggunakan transformasi Gelfand, dimana hal ini akan sangat berperan penting dalam kasus aljabar-C* komutatif maupun nonkomutatif.

DAFTAR PUSTAKA

Emch, G. (1972) Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, Wiley-Interscience

Neumann, J. Von. (1961) Collected works. Vol.III. Rings of Operator, Pergamon Press, New York

Rickart, C. E. (1946) Banach Algebras with an Adjoint Operation. Ann. Of. Math (2) 47:528-550

Doran, Robert S; Belfi, Victor A. (1986), Characterization of C*-algebras: The Gelfand-Neimark Theorems, CRC press

Landsman, N. P. (2003) Lectures Notes on C*-Algebras and K-Theory. Korteweg-de Vries Institute for Mathematics University of Amsterdam.