Barekeng, Juni 2007. hal.9-11 Vol. 1. No. 1

KONSEP DASAR SEMIGRUP REGULER REDUKTIF

(*Basic Concepts of Regular Reductive Semigroups*)

ELVINUS R. PERSULESSY

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura Ambon

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

ABSTRACT

In this paper, we consider the properties of reductive semigroups, with two congruence relations defined on them, which gave a characterization for regular reductive semigroups.

Keywords: *Regular Semigrup, Reductive Semigrup*

PENDAHULUAN

Howie (1976) mendefinisikan semigrup S sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi operasi biner $\bullet$ yang bersifat asosiatif. Semigrup S selanjutnya disebut semigrup reguler jika setiap elemennya adalah elemen reguler, yaitu jika $a \in S$ maka a disebut elemen reguler jika terdapat $x \in S$ sehingga $a = axa$. Pada suatu semigrup reguler S, relasi ekuivalensi Green $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ dan $\mathcal{H}$ didefinisikan sebagai a $\mathcal{L}$ b jika Sa = Sb, a $\mathcal{R}$ b jika aS = bS dan a $\mathcal{H}$ b jika a $\mathcal{L}$ b dan a $\mathcal{R}$ b.

Misalkan pada S terdapat relasi kongruensi ρ. Thierrin (1955) menyebut ρ reduktif kanan jika $(at, bt) \in \rho$ maka $(a, b) \in \rho$ dan ρ reduktif kiri jika $(ta, tb) \in \rho$ maka $(a, b) \in \rho$, untuk setiap $a, b, t \in S$. Fattahi dan Vishki (2004) kemudian mendefinisikan S sebagai semigrup reduktif kanan jika at = bt maka a = b dan semigrup reduktif kiri jika ta = tb maka a = b. Selanjutnya, S disebut semigrup reduktif jika S adalah semigrup reduktif kanan dan semigrup reduktif kiri.

LANDASAN TEORI

Definisi 2.1 :
Misalkan S Semigrup. Elemen $a' \in S$ disebut invers dari a jika

$$a = aa'a \text{ dan } a' = a'aa'.$$

Jika S reguler maka $V(a) \neq \emptyset$, $\forall a \in S$ dengan V(a) adalah himpunan semua invers dari elemen a.

Definisi 2.2 :
Misalkan S semigrup reguler dan $a, b \in S$.

(i) $(a, b) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow (\exists a' \in V(a) \;\&\; b' \in V(b))\; a'a = b'b$

(ii) $(a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow (\exists a' \in V(a) \;\&\; b' \in V(b))\; aa' = bb'$

(iii) $(a, b) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow (\exists a' \in V(a) \;\&\; b' \in V(b))\; [a'a = b'b \;\&\; aa' = bb']$

Proposisi 2.3 :
Jika S semigrup reguler maka relasi konguensi ρ pada S adalah *idempotent–separating* jika dan hanya jika $\rho \subseteq \mathcal{H}$.

Lemma 2.4 :
Jika $S = (G \times I \times \wedge)$ dan didefinisikan aturan komposisi pada S sebagai berikut :

$$(a,\ i,\ \lambda)(b,\ j,\ \mu) = \begin{cases} (ap_{\lambda j} \cdot b, i, \mu), & \text{jika } p_{\lambda j} \neq 0 \\ 0, & \text{jika } p_{\lambda j} = 0 \end{cases}$$

dan didefinisikan pula

$$(a, i, \lambda)\ \mathcal{L}\ (b, j, \mu) \Leftrightarrow \lambda = \mu$$
$$(a, i, \lambda)\ \mathcal{R}\ (b, j, \mu) \Leftrightarrow \lambda = \mu$$

Lemma 2.5 :
Jika semigrup S *completely* 0-*simple* maka S reguler.

Konsep Dasar Semigrup Reguler Reduktif

Misalkan S adalah suatu semigrup. Pada S didefinisikan dua relasi kongruensi sebagai berikut :

$$\rho_r = \{(a, b) \in S \times S : (\forall t \in S)\ at = bt\}$$
$$\rho_l = \{(a, b) \in S \times S : (\forall t \in S)\ ta = tb\}$$

Teorema 3.1 :

(i) Semigrup reguler S reduktif kanan jika dan hanya jika $\rho_r \subset \mathcal{L}$.

(ii) Semigrup reguler S reduktif kiri jika dan hanya jika $\rho_l \subset \mathcal{R}$.

Bukti :

(i) $\Rightarrow$) Diketahui S semigrup reguler reduktif kanan.
Ambil sebarang $(a, b) \in \rho_r$ dengan $(a, b) \in S \times S$ dan $at = bt$, $\forall t \in S$.
Karena S reduktif kanan maka diperoleh a = b.
Selanjutnya karena S reguler maka Sa = Sb atau $(a, b) \in \mathcal{L}$.
Terbukti $\rho_r \subset \mathcal{L}$.

$\Leftarrow$) Diketahui $\rho_r \subset \mathcal{L}$ dan S reguler.
Ambil sembarang $a, b \in S$ dengan $(a, b) \in \rho_r$ atau $at = bt$, $\forall t \in S$.
Karena $\rho_r \subset \mathcal{L}$ maka $(a, b) \in \mathcal{L}$.
Dengan menggunakan Definisi 2.2, dapat ditemukan $a' \in V(a)$ dan $b' \in V(b)$ sehingga $a'a = b'b$.
Akibatnya,

$$a = aa'a = ba'a = bb'b = b$$

Jadi diperoleh $(\forall a, b, t \in S)[at = bt \Rightarrow a = b]$ atau S reduktif kanan.

(ii) $\Rightarrow$) Diketahui S semigrup reguler reduktif kiri.
Ambil sebarang $(a, b) \in \rho_l$ dengan $(a, b) \in S \times S$ dan $ta = tb$, $\forall t \in S$.
Karena S reduktif kiri maka diperoleh a = b.

Selanjutnya, karena S reguler maka aS = bS atau $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Terbukti $\rho_l \subset \mathcal{R}$.

$\Leftarrow$) Diketahui $\rho_l \subset \mathcal{R}$ dan S reguler.

Ambil sebarang $a, b \in S$ dengan $(a, b) \in \rho_l$ atau $ta = tb$, $\forall t \in S$.

Karena $\rho_l \subset \mathcal{R}$ maka $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Dengan menggunakan Definisi 2.2, dapat ditemukan $a' \in V(a)$ dan $b' \in V(b)$ sehingga $aa' = bb'$.

Akibatnya,

$$a = aa'a = aa'b = bb'b = b$$

Jadi diperoleh $(\forall a, b, t \in S)[ta = tb \Rightarrow a = b]$ atau S reduktif kiri.

Sifat 3.2 :

Jika S semigrup reguler maka $\rho_r \subset \mathcal{R}$ dan $\rho_l \subset \mathcal{L}$.

Bukti :

Ambil sebarang $(a, b) \in \rho_r$ berarti $(a, b) \in S \times S$ dengan $at = bt$, $\forall t \in S$.

Akibatnya aS = bS atau $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Terbukti $\rho_r \subset \mathcal{R}$.

Ambil sebarang $(a, b) \in \rho_l$ berarti $(a, b) \in S \times S$ dengan $ta = tb$, $\forall t \in S$.

Akibatnya Sa = Sb atau $(a, b) \in \mathcal{L}$.

Terbukti $\rho_l \subset \mathcal{L}$.

Sifat 3.3 :

Semigrup reguler S bersifat

a) reduktif kanan jika dan hanya jika ρ_r *idempotent-separating*.

b) reduktif kiri jika dan hanya jika ρ_l *idempotent-separating*.

Bukti :

a) $\Rightarrow$) Diketahui S semigrup reguler yang reduktif kanan.

Menurut Teorema 3.1.(i), maka $\rho_r \subset \mathcal{L}$.

Dari Sifat 3.2, diperoleh $\rho_r \subset \mathcal{R}$.

Jadi $\rho_r \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{H}$.

Karena $\rho_r \subset \mathcal{H}$ maka ρ_r *idempotent-separating*.

$\Leftarrow$) Diketahui S semigrup reguler dan ρ_r *idempotent-separating*.

Jadi, $\rho_r \subset \mathcal{H}$.

Akibatnya $\rho_r \subset \mathcal{L}$.

Menurut Teorema 3.1.(i) maka S adalah semigrup reguler yang reduktif kanan.

b) $\Rightarrow$) Diketahui S semigrup reguler yang reduktif kiri.

Menurut Teorema 3.1.(ii), maka $\rho_l \subset \mathcal{R}$.

Dari Sifat 3.2, diperoleh $\rho_l \subset \mathcal{L}$.

Jadi $\rho_l \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{H}$.

Karena $\rho_l \subset \mathcal{H}$ maka ρ_l *idempotent-separating*.

$\Leftarrow$) Diketahui S semigrup reguler ρ_l *idempotent-separating*.

Jadi $\rho_l \subset \mathcal{H}$.

Akibatnya $\rho_l \subset \mathcal{R}$.

Menurut Teorema 3.1.(ii), maka S adalah semigrup reguler yang reduktif kiri.

Akibat 3.4 :

Misalkan $S = \mathcal{M}^0[G; I, \wedge; P]$ adalah semigrup *completely* 0-*simple*.

(i) S dikatakan reduktif kanan jika dan hanya jika tidak ada baris dari $P = (p_{\lambda i})$ yang merupakan hasil pergandaan baris-baris lain.

(ii) S dikatakan reduktif kiri jika dan hanya jika tidak ada kolom dari $P = (p_{\lambda i})$ yang merupakan hasil pergandaan kolom-kolom lain.

Bukti :

(i) Karena S semigrup *completely* 0-*simple* maka S reguler.

Ambil sebarang $e, f \in S$ dengan $e = (p_{\lambda i}^{-1}, i, \lambda)$ dan $f = (p_{\mu j}^{-1}, j, \mu)$ adalah elemen-elemen idempoten di S dan $(e, f) \in \rho_r$.

Akibatnya untuk setiap $t = (x, k, v) \in S$ berlaku

$$\begin{aligned} et = ft &\Leftrightarrow (p_{\lambda i}^{-1}, i, \lambda)(x, k, v) = (p_{\mu j}^{-1}, j, \mu)(x, k, v) \\ &\Leftrightarrow (p_{\lambda i}^{-1} p_{\lambda k} x, i, v) = (p_{\mu j}^{-1} p_{\mu k} x, j, v) \\ &\Leftrightarrow p_{\lambda i}^{-1} p_{\lambda k} = p_{\mu j}^{-1} p_{\mu k} \quad \text{dan } i = j \\ &\Leftrightarrow p_{\lambda k} = (p_{\lambda i} p_{\mu i}^{-1}) p_{\mu k}, \forall k \in I. \end{aligned}$$

Tampak bahwa $\lambda \neq \mu$ jika dan hanya jika baris ke-λ merupakan hasil pergandaan baris ke-μ.

(ii) Karena S semigrup *completely* 0-*simple* maka S reguler.

Ambil sebarang $e, f \in S$ dengan $e = (p_{\lambda i}^{-1}, i, \lambda)$ dan $f = (p_{\mu j}^{-1}, j, \mu)$ adalah elemen-elemen idempoten di S dan $(e, f) \in \rho_l$.

Akibatnya untuk setiap $t = (x, k, v) \in S$, berlaku

$$\begin{aligned} te = tf &\Leftrightarrow (x, k, v)(p_{\lambda i}^{-1}, i, \lambda) = (x, k, v)(p_{\mu j}^{-1}, j, \mu) \\ &\Leftrightarrow (x p_{vi} p_{\lambda i}^{-1}, k, \lambda) = (x p_{vj} p_{\mu j}^{-1}, k, \mu) \\ &\Leftrightarrow p_{vi} p_{\lambda i}^{-1} = p_{vj} p_{\mu j}^{-1} \quad \text{dan } \lambda = \mu \\ &\Leftrightarrow p_{vi} = p_{vj} (p_{\lambda j}^{-1} p_{\lambda i}), \forall v \in \wedge. \end{aligned}$$

Tampak bahwa $i \neq j$ jika dan hanya jika kolom ke-i merupakan hasil pergandaan kolom ke-j.

KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

Pendefinisian relasi kongruensi dan pengaruh ekuivalensi Green pada suatu semigrup reguler sangat menentukan karakterisasi dari suatu semigrup reguler reduktif.

DAFTAR PUSTAKA

Clifford, A. H., Preston, G. B.: *The Algebraic Theory of Semigroups*.Mathematical Surveys, No. 7, Vol. 1. American Mathematical Society. Providence. RI. 1961.

Fattahi, A., Vishki, H. R. E.: A Note on Reductive Semigroups, SEAMS 28 : 261-264, 2004.

Howie, J. M.: *An Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press. New York. 1976.

Thierrin, G.: *Contribution a la theorie des equivalences dans les demigroup*. Bull. Soc. Math. France 83, 103 – 159. 1955.