REGULARISASI SISTEM SINGULAR DENGAN OUTPUT UMPAN BALIK *u = Fy + v*

(*Regularization of a Singular System by Feedback Output u = Fy + v*)

ELVINUS RICHARD PERSULESSY
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura Ambon
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti Ambon

ABSTRACT

(E,A,B,C,D) as a singular system is given. E, A, B and C are real constant matrices if E=I, I is a identify matrix, then (E,A,B,C) is a normal system. A unique solution of a singular system exists if (E,A) is regular. A singular system which is regular and the index is not more than one can be simplified to a normal system.

The regularization of a singular system by feedback output *u* = *Fy* + *v* is investigated in this paper. Furthermore a sufficient and necessary condition of the existence of F such that (E, A+BFC) is regular and the index is not more than one is represented.

Keywords : *singular system, regular system, normal system*

PENDAHULUAN

Diberikan sistem linier singular *time invariant*

$$E\,\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$
$$y(t) = C\,x(t) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

dengan variabel state $x(t) \in R^n$, variabel input $u(t) \in R^m$, variabel output $y(t) \in R^p$, $E, A \in R^{nxn}$, $B \in R^{nxm}$, $C \in R^{pxn}$ dan $m \le n$, $p \le n$. Sistem (1) dapat ditulis sebagai (E, A, B, C).

Eksistensi dan ketunggalan penyelesaian dari sistem (1) terjamin jika matriks pencil (E, A) regular, yaitu terdapat skalar $\alpha \in C$ sehingga $|\alpha E - A| \neq 0$. Menurut Dai (1989:7), kondisi yang diperlukan agar matriks (E, A) regular adalah dapat ditemukannya dua matriks tak singular Q dan P yang memenuhi

$$QEP = diag(I_{n_1}, N)$$
$$QAP = diag(A_1, I_{n_2}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

dengan $n_1 + n_2 = n,\ A_1 \in R^{n_1 x n_1}$ dan $N \in R^{n_2 x n_2}$ adalah matriks nilpoten berindeks h yaitu $N^h = 0,\ N^{h-1} \neq 0$. Indeks sistem (1), dilambangkan dengan ind(E, A), didefinisikan sebagai indeks matriks N.

Diberikan umpan balik berbentuk

$u = Fy + v$ ....(3)

Jika (3) disubsitusikan ke (1) diperoleh sistem

$E\,\dot{x} = (A + BFC)x + B\,v$ ....(4)

dengan matriks pencil $(E, A + BFC)$.

Sistem (1) yang regular dan berindeks tidak lebih dari 1, mempunyai penyelesaian $x(t) = P\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ dengan

$$x_1(t) = e^{A_1 t}\, x_0 + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau)\, d\tau,$$
$$x_2(t) = -B_2 u$$

dan syarat awal $x_1(0) = x_0$.

Selanjutnya akan ditinjau suatu kondisi yang menjamin eksistensi matriks F sehingga $(E, A + BFC)$ regular dan ind$(E, A + BFC) \le 1$.

LANDASAN TEORI

Jika A adalah matriks berukuran mxn dengan rank r_a maka terdapat S_A yaitu matriks yang kolom-kolomnya membangun ruang null A dan S_A merupakan matriks dengan rank kolom penuh. Untuk matriks A terdapat R dan S sedemikian sehingga $RAS = \begin{bmatrix} I_{r_a} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dapat dipilih $S_A = S^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-r_a} \end{bmatrix}$.

Defenisi 2.1 (Goldberg, 1991: 391)

Misalkan A matriks real berukuran $m \times n$.

Bilangan real taknegatif σ disebut nilai singular dari matriks A jika ada vektor taknol $u \in R^m$ dan $v \in R^n$ sehingga $Av = \sigma u$ dan $A^T u = \sigma v$.

Teorema 2.2 (Goldberg, 1991: 395)

Jika A matriks real berukuran $m \times n$ maka terdapat matriks orthogonal $U \in R^{m\times m}$ dan $V \in R^{n\times n}$ sedemikian hingga

$$A = USV^T$$

dengan $S \in R^{m\times n}$ berbentuk

$S = diag(\Sigma, 0) = diag(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)$

dimana $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ adalah nilai-nilai singular dari A.

Lemma 2.3 (Chu et.al, 1998)

Matriks pencil $(E,A)\,regular$ dan $ind(E,A)\le 1$ jika dan hanya jika

$$rank\left[E \;\; AS_E\right]=n.$$

Lemma 2.4 (Chu et.al, 1998)

Jika $E\in R^{n\times n}$ dan $B\in R^{n\times m}$ dan $rank(B)=r_b\le n$ maka terdapat matriks-matriks orthogonal Q, U dan V sedemikian hingga

$$UEV=\begin{bmatrix}\Sigma_1 & 0 & 0\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad UBQ=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \Sigma_B & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

dengan $E_{22}\in R^{r_b x(r_e+r_b-r_{eb})}$ mempunyai rank kolom penuh dan $\sum_1\in R^{(r_{eb}-r_b)x(r_{eb}-r_b)}$, $\sum_B\in R^{r_b x r_b}$ adalah matriks diagonal definit positif.

Regularisasi Sistem Singular dengan Output Umpan Balik $u=Fy+v$.

Jika

$r_{eb}=rank\left[E \;\; B\right]$, $r_{ec}=rank\begin{bmatrix}E\\ C\end{bmatrix}$, $r_b=rank(B)$ dan $r_{ebc}=rank\begin{bmatrix}E & B\\ C & 0\end{bmatrix}$

maka generalisasi dari Lemma 2.4 adalah

Teorema 3.1

Diberikan $E\in R^{n\times n}$, $B\in R^{n\times m}$, $C\in R^{p\times n}$.

Terdapat matriks-matriks orthogonal U , V , Q dan W sedemikian hingga

$$UEV=\begin{bmatrix}\Sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ \Sigma_{21} & \Sigma_2 & \Sigma_{23} & 0\\ \Sigma_{31} & 0 & \Sigma_{33} & 0\\ \Sigma_{41} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$UBQ=\begin{bmatrix}0 & 0\\ B_1 & 0\\ B_2 & 0\\ B_3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\; WCV=\begin{bmatrix}C_{11} & 0 & \Sigma_C & 0\\ C_{21} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Dengan $\sum_1,\sum_2,\sum_C$ matriks yang masing-masing berukuran $(r_{eb}-r_b)x(r_{eb}-r_b)$, $(r_b+r_{ec}-r_{ebc})x(r_b+r_{ec}-r_{ebc})$ dan $(r_{ebc}-r_{eb})x(r_{ebc}-r_{eb})$, E_{33} matriks dengan rank baris penuh berukuran $(r_e+r_{ebc}-r_{eb}-r_{ec})x(r_{ebc}-r_{eb})$, $\left[B_1^T \;\; B_2^T \;\; B_3^T\right]$ adalah matriks taksingular berukuran $r_b\,x\,r_b$, dan $\left[C_{11}^T \;\; C_{21}^T\right]$ adalah matriks berukuran $p\,x(r_{eb}-r_b)$.

Bukti :

Diberikan $E\in R^{n\times n}$, $B\in R^{n\times m}$.

Menurut Lemma 2.4, terdapat matriks-matriks orthogonal $\hat{U},\hat{V}$ dan Q yang masing-masing berukuran $n\,x\,n$, $n\,x\,n$ dan $m\,x\,m$ sehingga

$$\hat{U}E\hat{V}=\begin{bmatrix}\Sigma_1 & 0 & 0\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\; \hat{U}BQ=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \Sigma_B & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

dengan $\hat{E}_{22}\in R^{r_b x(r_e+r_b-r_{eb})}$ matriks dengan rank kolom penuh, $\sum_1\in R^{(r_{eb}-r_b)x(r_{eb}-r_b)}$ dan $\sum_B\in R^{r_b x r_b}$.

Misalkan $\hat{V}=\left[\hat{V}_1 \;\; \hat{V}_2\right]$ dengan $\hat{V}_1\in^{n\,x(r_{eb}-r_b)}$, $\hat{V}_2\in^{n\,x(n-r_{eb}+r_b)}$, $\hat{E}=\left[\hat{E}_{22} \;\; 0\right]$ dan $\hat{B}=C\hat{V}_2$ dengan $\hat{E}\in^{r_b\,x(n-r_{eb}+r_b)}$ dan $\hat{B}\in^{p\,x(n-r_{eb}+r_b)}$.

Menurut Lemma 2.4, terdapat matriks orthogonal U^* berukuran $r_b\,x\,r_b$, V^* matriks $(n-r_{eb}+r_b)x(n-r_{eb}+r_b)$ dan W matriks pxp sehingga

$$\left(V^*\right)^T\left(\hat{E}\right)^T\left(U^*\right)^T=\begin{bmatrix}\Sigma_2^T & 0 & 0\\ \Sigma_{23}^T & \Sigma_{33}^T & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

atau $U^*\hat{E}V^*=\begin{bmatrix}\Sigma_2 & \Sigma_{23} & 0\\ 0 & \Sigma_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$$\left(V^*\right)^T\left(\hat{E}\right)^T\left(U^*\right)^T=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \Sigma_C^T & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

atau $W\hat{B}V^*=\begin{bmatrix}0 & \Sigma_C & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

dengan matriks E_{33}^T mempunyai rank kolom penuh dan berukuran

$$\left(rank\hat{B}\right)x\left(rank\hat{E}+rank\hat{B}-rank\begin{bmatrix}\hat{E}\\ \hat{B}\end{bmatrix}\right)$$

matriks $\sum_C$ berukuran $rank\hat{B}\,x\,rank\hat{B}.$

Jika diambil

$$y_1=rank\begin{bmatrix}\hat{E}\\ \hat{B}\end{bmatrix}-rank\left(\hat{B}\right),$$

$$z_C=rank\left(\hat{B}\right),$$

$$y_2=rank\left(\hat{E}\right)-y_1$$

maka $\sum_2 \in^{y_1 x y_1}$, $\sum_C \in^{z_C x z_C}$ adalah matriks-matriks diagonal definit positif dan $E_{33}^T \in^{z_C x y_2}$ matriks dengan rank kolom penuh.

Jadi, jika diambil $U = diag\left(I, U^*, I\right)\hat{U}$ dan $V = \hat{V}\, diag\left(I, V^*\right)$ maka

$$UEV = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & U^* & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \hat{U} E \hat{V} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & V^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ U^*\hat{E}_{21} & U^*\hat{E}V^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{21} & \Sigma_2 & \Sigma_{23} & 0 \\ \Sigma_{31} & 0 & \Sigma_{33} & 0 \\ \Sigma_{41} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$UBQ = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & U^* & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \hat{U} BQ$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & U^* & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ U^*\Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena U^* orthogonal dan $\sum_B$ taksingular maka

$U^*\Sigma_B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$ taksingular dan berukuran $r_b \, x \, r_b$.

Selanjutnya

$$WCV = WC\hat{V} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & V^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & \Sigma_C & 0 \\ C_{21} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan $WC\hat{V}_1 = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix}$ matriks berukuran $p\, x\left(r_{eb} - r_b\right)$.

Karena

$$r_{ebc} = rank \begin{bmatrix} E & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

$$= rank \begin{bmatrix} \hat{U} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V} & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

$$= rank \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{E}_{21} & E_2 & \Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C\hat{V}_1 & \hat{B} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= rank \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{B} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= rank \, \Sigma_1 + rank \, \Sigma_B + rank \hat{B}$$

maka $z_c = rank\, \hat{B} = r_{ebc} - \left(r_{eb} - r_b\right) - r_b = r_{ebc} - r_{eb}$.

Karena $UEV = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ \hat{E}_{21} & \hat{E} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ berakibat

$r_e = rank\, \Sigma_1 + rank\, \hat{E}$.

Selanjutnya $rank\, \hat{E} = r_e - rank\, \Sigma_1 = r_e - r_{eb} + r_b$.

Diperoleh,

$$r_{ec} = rank \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} \hat{U} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} \hat{V}$$

$$= rank \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ \hat{E}_{21} & \hat{E} \\ 0 & 0 \\ C\hat{V}_1 & \hat{B} \end{bmatrix}$$

$$= rank\, \Sigma_1 + rank \begin{bmatrix} \hat{E} \\ \hat{B} \end{bmatrix}$$

Akibatnya, $rank \begin{bmatrix} \hat{E} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = r_{ec} - rank\, \Sigma_1 = r_{ec} - r_{eb} + r_b$.

Jadi diperoleh

$$y_1 = rank \begin{bmatrix} \hat{E} \\ \hat{B} \end{bmatrix} - rank\left(\hat{B}\right)$$

$$= r_{ec} - r_{eb} + r_b - r_{ebc} + r_{eb} = r_{ec} + r_b - r_{ebc}.$$

$$y_2 = rank\left(\hat{E}\right) - y_1$$

$$= r_e - r_{eb} + r_b - r_{ec} - r_{eb} + r_{ebc}$$

$$= r_{eb} - r_{ec} - r_{ebc}$$

Karakterisasi rank matriks $E + BGC$ diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 3.2

Jika $E \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$, maka untuk sebarang bilangan bulat r yang memenuhi

$r_{eb} - r_{ec} - r_{ebc} \le r \le \min\{r_{eb}, r_{ec}\}$ ada $G_0 \in R^{m\,x\,p}$ sehingga

$$rank\left(E + BG_0C\right) = r$$

Atau, ekuivalen dengan

$$\left\{rank\left(E + BGC\right) \setminus G \in R^{m\,x\,p}\right\} = S_{ebc}$$

dimana $S_{ebc} = \left\{r \mid r \in Z, r_{eb} - r_{ec} - r_{ebc} \le r \le \min\left(r_{eb}, r_{ec}\right)\right\}$.

Bukti :

Menurut teorema 3.1, untuk $E \in R^{n\,x\,n}$, $B \in R^{n\times m}$, $C \in R^{p\times n}$ terdapat matriks orthogonal U, V, Q dan W sehingga

$$UEV = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{21} & \Sigma_2 & \Sigma_{23} & 0 \\ \Sigma_{31} & 0 & \Sigma_{33} & 0 \\ \Sigma_{41} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad UBQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_1 & 0 \\ B_2 & 0 \\ B_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$WCV = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & \Sigma_C & 0 \\ C_{21} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk sebarang $G \in R^{m\,x\,p}$, misalkan $\hat{G} = Q^T G W^T = \begin{bmatrix} \hat{G}_1 & \hat{G}_2 \\ \hat{G}_3 & \hat{G}_4 \end{bmatrix}$ maka

$$rank\left(E + BGC\right) = rank\begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}$$

$$= rank\begin{bmatrix} UEV & UBQ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q^T G W^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ WCV \end{bmatrix}$$

$$= rank\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{21} + B_1\hat{G}_1C_{11} + B_1\hat{G}_2C_{21} & \Sigma_2 & \Sigma_{23} + B_1\hat{G}_1C_C & 0 \\ \Sigma_{31} + B_2\hat{G}_1C_{11} + B_2\hat{G}_2C_{21} & 0 & \Sigma_{33} + B_2\hat{G}_1C_C & 0 \\ \Sigma_{41} + B_3\hat{G}_1C_{11} + B_3\hat{G}_2C_{21} & 0 & B_3\hat{G}_1C_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena Σ_1 dan Σ_2 tak singular maka diperoleh

$$rank\left(E + BGC\right) = rank\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{33} + B_2\hat{G}_1C_C & 0 \\ 0 & 0 & B_3\hat{G}_1C_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Menurut teorema 3.1, $rank\,\Sigma_1 = r_{eb} + r_b$ dan $rank\,\Sigma_2 = r_b + r_{ec} - r_{ebc}$.

Akibatnya,

$$rank\left(E + BGC\right) = rank\,\Sigma_1 + rank\,\Sigma_2 + rank\begin{bmatrix} \Sigma_{33} + B_2\hat{G}_1C_C \\ B_3\hat{G}_1C_C \end{bmatrix}$$

$$= r_{eb} + r_{ec} - r_{ebc} + rank\begin{bmatrix} \Sigma_{33} + B_2\hat{G}_1C_C \\ B_3\hat{G}_1C_C \end{bmatrix} \quad \ldots(5)$$

Selanjutnya, $\begin{bmatrix} \Sigma_{33} + B_2\hat{G}_1C_C \\ B_3\hat{G}_1C_C \end{bmatrix} = \hat{A} + \begin{bmatrix} B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}\hat{G}_1\Sigma_C$ ..(6)

dengan $\hat{A} = \begin{bmatrix} E_{33} \\ 0 \end{bmatrix}$ berukuran $\left(r_{ebc} - r_{ec}\right) x \left(r_{ebc} - r_{eb}\right)$.

Karena $\begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T & B_3^T \end{bmatrix}^T = U^*\Sigma_B$ dan Σ_C taksingular maka dipilih

$$\hat{G}_1 = \left(U^*\Sigma_B\right)^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{A} \end{bmatrix}\right)\Sigma_C^{-1}$$

$$= \Sigma^{-1}\left(U^*\right)^T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{A} \end{bmatrix}\right)\Sigma_C^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Dengan $X \in R^{\left(r_{ebc} - r_{ec}\right)x\left(r_{ebc} - r_{eb}\right)}$ adalah suatu matriks yang memenuhi

$$0 \le i = rank\,X \le \min\left(r_{ebc} - r_{ec}, r_{ebc} - r_{eb}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

Akibatnya, dari (6), (7) dan $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ diperoleh

$$rank\begin{bmatrix} \Sigma_{33} + B_2\hat{G}_1C_C \\ B_3\hat{G}_1C_C \end{bmatrix}$$

$$= rank\left(\hat{A} + \begin{bmatrix} B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}\Sigma_B^{-1}\left(U^*\right)^T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{A} \end{bmatrix}\right)\Sigma_C^{-1}\Sigma_C\right)$$

$$= rank\left(\hat{A} + \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ X_1 - E_{33} \\ X_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= rank\left(\hat{A} + \begin{bmatrix} X_1 - E_{33} \\ X_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= rank\,X$$

$$= i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

Akibatnya dari (8) dan (9) diperoleh

$$0 \le rank\begin{bmatrix} \Sigma_{33} + B_2\hat{G}_1C_C \\ B_3\hat{G}_1C_C \end{bmatrix}$$

$$\le \min\left(r_{ebc} - r_{ec}, r_{ebc} - r_{eb}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

Dari (5), (10) dan misal $r = rank\left(E + BGC\right)$ diperoleh

$$0 \le r - r_{eb} - r_{ec} + r_{ebc} \le \min\left(r_{ebc} - r_{ec}, r_{ebc} - r_{eb}\right)$$

Dengan kata lain,

$$r_{eb} + r_{ec} - r_{ebc} \le r \le \min\left(r_{ebc} - r_{ec}, r_{ebc} - r_{eb}\right)$$

Diberikan

$$\hat{V} = V\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ -\Sigma_C^{-1}C_{11} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

maka diperoleh :

1. $$UE\hat{V} = UEV\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ -\Sigma_C^{-1}C_{11} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{21} & \Sigma_2 & \Sigma_{23} & 0 \\ \Sigma_{31} & 0 & \Sigma_{33} & 0 \\ \Sigma_{41} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan $\hat{E}_{21} = E_{21} - E_{23}\Sigma_C^{-1}C_{11}$ dan $\hat{E}_{31} = E_{31} - E_{33}\Sigma_C^{-1}C_{11}$

2. $$WC\hat{V} = WCV\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ -\Sigma_C^{-1}C_{11} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & \Sigma_C & 0 \\ C_{21} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya $$UA\hat{V} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{bmatrix}$$

Teorema 3.3

Jika $rank\begin{bmatrix} E & AS_{EC} & B \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} E & AS_{EC} \\ C & 0 \end{bmatrix} = n$ dengan S_{EC} matriks yang kolomnya membangun ruang null dari $\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$ maka A_{54} dan $\begin{bmatrix} \Sigma_1 & A_{14} \\ \hat{E}_{31} & A_{34} \\ E_{41} & A_{44} \\ 0 & A_{54} \\ C_{21} & 0 \end{bmatrix}$ masing-masing matriks dengan baris penuh dan rank kolom penuh.

Bukti

Diketahui $rank\begin{bmatrix} E & AS_{EC} & B \end{bmatrix} = n$, maka

$$rank\begin{bmatrix} E & A\hat{V}\hat{V}^{-1}S_{EC} & B \end{bmatrix}$$
$$= rank\, U\begin{bmatrix} E & A\hat{V}\hat{V}^{-1}S_{EC} & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{V} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix}$$
$$= rank\begin{bmatrix} UE\hat{V} & A\hat{V}\hat{V}^{-1}S_{EC} & UBQ \end{bmatrix}$$
$$= rank\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 & 0 & A_{14} & 0 & 0 \\ \hat{E}_{21} & \Sigma_2 & E_{23} & 0 & A_{24} & B_1 & 0 \\ \hat{E}_{31} & 0 & E_{33} & 0 & A_{34} & B_2 & 0 \\ E_{41} & 0 & 0 & 0 & A_{44} & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{54} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= n.$$

Karena $R = \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T & B_3^T \end{bmatrix}$ dan Σ_1 taksingular dengan $rank\, r_b$ dan $rank\, r_{eb} + r_b$, maka diperoleh

$$rank\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{54} & 0 & 0 \end{bmatrix} = n$$ atau

$rank\,\Sigma_1 + rank\, A_{54} + rank\, R = n$.

Akibatnya, $rank\, A_{54} = n - r_{eb}$ atau A_{54} matriks dengan rank baris penuh, dengan A_{54} matriks berukuran $(n - r_{eb})x(n - r_{eb})$.

Karena diketahui $rank\begin{bmatrix} E & AS_{EC} \\ C & 0 \end{bmatrix} = n$ maka

$$rank\begin{bmatrix} E & A\hat{V}\hat{V}^{-1}S_{EC} \\ C & 0 \end{bmatrix}$$
$$= rank\left(\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & A\hat{V}\hat{V}^{-1}S_{EC} \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{V} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\right)$$
$$= rank\left(\begin{bmatrix} UE\hat{V} & UA\hat{V}\hat{V}^{-1}S_{EC} \\ WC\hat{V} & 0 \end{bmatrix}\right)$$
$$= rank\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 & 0 & A_{14} \\ \hat{E}_{21} & \Sigma_2 & E_{23} & 0 & A_{24} \\ \hat{E}_{31} & 0 & E_{33} & 0 & A_{34} \\ E_{41} & 0 & 0 & 0 & A_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{54} \\ 0 & 0 & \Sigma_C & 0 & 0 \\ C_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= n.$$

Karena $\sum_2$ dan $\sum_C$ tak singular maka

$$rank\begin{bmatrix} \sum_1 & 0 & 0 & 0 & A_{14} \\ \hat{E}_{21} & \sum_2 & E_{23} & 0 & A_{24} \\ \hat{E}_{31} & 0 & E_{33} & 0 & A_{34} \\ E_{41} & 0 & 0 & 0 & A_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{54} \\ 0 & 0 & \sum_C & 0 & 0 \\ C_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = n.$$

Akibatnya, $rank\begin{bmatrix} \sum_1 & A_{14} \\ \hat{E}_{31} & A_{34} \\ E_{41} & A_{44} \\ 0 & A_{54} \\ C_{21} & 0 \end{bmatrix} = n - rank\sum_2 - rank\sum_C$

$$= n - r_b - r_{ec} - r_{eb}$$

Karena matriks $\begin{bmatrix} \sum_1 & A_{14} \\ \hat{E}_{31} & A_{34} \\ E_{41} & A_{44} \\ 0 & A_{54} \\ C_{21} & 0 \end{bmatrix}$ berukuran $(n+p+r_{eb}-r_b-r_{ec})x(n-r_b-r_{ec}-r_{eb})$ maka matriks tersebut merupakan matriks dengan rank kolom penuh.

Selanjutnya, kondisi yang menjamin eksistensi umpan balik $u = Fy + v$ diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 3.4

Diberikan E, $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$, $C \in R^{p\times n}$, $m \le n$, $p \le n$ maka terdapat $F \in R^{n\times p}$ sedemikian sehingga $(E, A+BFC)regular$ dan $ind(E, A+\_BFC) \le 1$ jika dan hanya jika

$$rank\begin{bmatrix} E & AS_E & B \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} E & AS_E \\ 0 & CS_E \end{bmatrix} = n.$$

Bukti

Menurut Lemma 2.3 :

$(E, A+BFC)$ regular dan ind $(E, A+\_BFC) \le 1$

$$\Leftrightarrow rank\begin{bmatrix} E & (A+BFC)S_E \end{bmatrix} = n$$

$$\Leftrightarrow rank\begin{bmatrix} E & (AS_E + BFCS_E) \end{bmatrix} = n$$

$$\Leftrightarrow rank\left(\begin{bmatrix} E & AS_E \end{bmatrix} + BF\begin{bmatrix} 0 & CS_E \end{bmatrix}\right) = n$$

Menurut teorema 3.2, terdapat F sedemikian hingga memenuhi $rank\left(\begin{bmatrix} E & AS_E \end{bmatrix} + BF\begin{bmatrix} 0 & CS_E \end{bmatrix}\right) = n$ ekuivalen dengan

$$n \le \min\left(rank\begin{bmatrix} E & AS_{EC} & B \end{bmatrix}, rank\begin{bmatrix} E & AS_E \\ 0 & CS_E \end{bmatrix} \right) \text{............(11)}$$

dan

$$rank\begin{bmatrix} E & AS_{EC} & B \end{bmatrix} + rank\begin{bmatrix} E & AS_E \\ 0 & CS_E \end{bmatrix} - rank\begin{bmatrix} E & AS_E & B \\ 0 & CS_E & 0 \end{bmatrix} \le n.$$

Dari (10) menyatakan bahwa $n \le rank\begin{bmatrix} E & AS_{EC} & B \end{bmatrix}$ dan $n \le rank\begin{bmatrix} E & AS_E \\ 0 & CS_E \end{bmatrix}$.

Karena E berukuran nxn maka $rank\begin{bmatrix} E & AS_{EC} & B \end{bmatrix} \le n$ dan $rank\begin{bmatrix} E & AS_E \\ 0 & CS_E \end{bmatrix} \le n.$

Terbukti bahwa

$$rank\begin{bmatrix} E & AS_E & B \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} E & AS_E \\ 0 & CS_E \end{bmatrix} = n.$$

KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

Untuk sistem singular

$$E\hat{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

dengan $E, A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$, $C \in R^{p\times n}$, $m \le n$, $p \le n$ dan $r_{ec} \le r_{eb}$, berlaku :

terdapat matriks $F \in R^{mxp}$ sedemikian sehingga $(E, A+BFC)regular$, $ind(E, A+\_BFC) \le 1$ jika dan hanya jika $rank\begin{bmatrix} E & AS_{EC} & B \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} E & AS_E \\ 0 & CS_E \end{bmatrix} = n.$

DAFTAR PUSTAKA

Chu, D. L., Chan, H. C., Ho, D. W. C. *Regularization of Singular Systems by Derivative and Proportional Output Feedback* SIAM J. Matrix Anal. Appl., 19 (1998), pp. 21-38.

Cullen, C. G. 1996. *Matrices and Linear Transformations*. London : Addison-Wesley Publishing Company.

Dai, L. 1989. *Singular Control Systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences 118. Berlin : Springer-Verlag.

Goldberg, J. L. 1991. *Matrix Theory with Application*. United States of America: McGraw-Hill Inc.

Olsder, G. J. 1944. *Mathematical System Theory*. Netherlands : Delftse Uitgevers Maatschappij