DIAGONALISASI MATRIKS UNTUK MENYELESAIKAN MODEL MANGSA-PEMANGSA

ELVINUS R PERSULESSY
Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI Ambon

ABSTRACT

Diagonalization of a square matrix *A* is based on the process of finding an invertible matrix *P* such that $P^{-1}AP = D$, where *D* is diagonal matrix. Matrix *P* is construct of eigenvectors which corresponding to every eigenvalue of *A*. The purpose of diagonalization technique is to make the computing process to solve a predator-prey model more easier.

Keywords: *Discriminant Analysis, Logistic Regression, Neural Network, Multivariate Adaptive Regression Spline*

PENDAHULUAN

Banyak masalah dalam kehidupan sehari-hari yang dapat diselesaikan dengan matematika. Salah satu contoh adalah masalah mangsa-pemangsa. Masalah ini dapat ditransformasi ke dalam bentuk matriks dan diselesaikan dengan menggunakan operasi-operasi matriks. Namun, jika matriks yang digunakan berukuran besar (elemen-elemennya banyak) maka proses perhitungannya akan menjadi sulit, khususnya untuk operasi perkalian, pangkat ataupun pencarian invers.

Masalah di atas akan menjadi lebih mudah jika matriks yang digunakan adalah matriks diagonal. Karena akan sangat mudah mencari hasil kali, pangkat ataupun invers dari matriks-matriks diagonal.

Salah satu cara yang dapat dipakai untuk menyelesaikan masalah di atas adalah teknik diagonalisasi. Teknik ini didasarkan pada proses pencarian matriks diagonal *D* dari suatu matriks *A*.

Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membahas bagaimana proses mendiagonalkan suatu matriks, apa saja syarat-syaratnya dan penggunaannya untuk menyelesaikan model mangsa-pemangsa.

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bukunya yang berjudul *Elementary Linear Algebra* (1st *Edition*), W. K. Nicholson menggambarkan bahwa pencarian pangkat dari suatu matriks diagonal akan sangat mudah dilakukan dibandingkan dengan mencari pangkat dari sebarang matriks kuadrat *A*. Oleh karena itu, W. K. Nicholson berusaha menyajikan sebarang matriks kuadrat *A* sebagai hasil perkalian dari matriks diagonal sehingga proses perhitungan menjadi lebih mudah.

Selanjutnya dengan merujuk pada buku Aljabar Linier Elementer oleh Howard Anton dan Chris Rorres yang memberikan syarat-syarat serta langkah-langkah untuk mendiagonalisasi matriks *A*, maka penulis mencoba menyusun sebuah penulisan dengan harapan dapat mudah dimengerti

Kombinasi Linier Dan Bebas Linier

Definisi 1
Sebuah vektor **w** dinamakan kombinasi linier dari vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ jika vektor **w** dapat sajikan sebagai

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n$$

dimana $k_1, k_2, \ldots, k_n$ adalah skalar.

Definsi 2.
Vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ dikatakan bebas linier jika terdapat skalar $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ yang memenuhi

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Nilai Eigen Dan Vektor Eigen

Definisi 3
Jika *A* adalah matriks $n \times n$, maka vektor taknol **x** di dalam R^n dinamakan **vektor eigen** (*eigenvector*) dari *A* jika *A*x adalah kelipatan skalar dari **x**, yakni $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan **nilai eigen** (*eigenvalue*) dari *A* dan **x** dikatakan vektor eigen **yang bersesuaian** dengan λ.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Diagonalisasi Matriks

Matriks kuadrat *A* dinamakan **dapat didiagonalisasi** (*diagonalizable*) jika terdapat matriks *P* yang dapat dibalik sehingga $P^{-1}AP = D$ ………..(1)
dimana *D* matriks diagonal.
Matriks *P* dikatakan **mendiagonalisasi** matriks *A*.

Berdasarkan definisi di atas dapat diketahui bahwa syarat-syarat agar matriks *A* dapat didiagonalisasi adalah
(a). Matriks *A* harus berukuran $n \times n$.

(b). Dapat ditemukan matriks P yang dapat dibalik. Ini berarti bahwa P juga berukuran $n \times n$ dan $\det(P) \neq 0$.

Disamping syarat-syarat di atas, terdapat syarat-syarat yang lain yang harus dipenuhi oleh matriks A. Teorema berikut akan menyiratkan langkah-langkah mendiagonalisasi matriks A dan syarat-syarat apa saja yang harus dipenuhi oleh matriks A, agar dapat didiagonalisasi.

Teorema 1

Jika matriks A yang berukuran $n \times n$ maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen satu sama lain.

(a). A dapat didiagonalisasi.

(b). A mempunyai n vektor eigen bebas linier.

Bukti :

($\Rightarrow$). Diketahui A dapat didiagonalisasi.

Akan ditunjukkan A mempunyai n vektor eigen bebas linier.

Karena matriks A dapat didiagonalisasi, maka sesuai Definisi 3.1 terdapat matriks P yang dapat dibalik sehingga memenuhi Persamaan 3.1.

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

dan

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, jika Persamaan 1 dikalikan dengan matriks P dari kiri maka diperoleh

$$P\left(P^{-1}AP\right) = PD$$

$$\left(PP^{-1}\right)AP = PD$$

$$I\left(AP\right) = PD$$

$$AP = PD$$

Jadi,

$$AP = PD$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{2n} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{x}_1 & \lambda_2 \mathbf{x}_2 & \cdots & \lambda_n \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \quad \text{.........(2)}$$

Berdasarkan operasi perkalian matriks maka kolom-kolom AP berturut-turut adalah $A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, ..., A\mathbf{x}_n$.

Jadi dari Persamaan 2 diperoleh

$$A\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1,\ A\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2,\ ...,\ A\mathbf{x}_n = \lambda_n \mathbf{x}_n \quad \text{.......(3)}$$

Selanjutnya, karena P dapat dibalik, maka vektor-vektor kolomnya semuanya taknol. Sehingga berdasarkan Persamaan 3 dapat dikatakan bahwa $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen matriks A, dan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen matriks A.

Berdasarkan Teorema diperoleh bahwa $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ bebas linier atau dengan kata lain terbukti bahwa A mempunyai n vektor eigen bebas linier.

Diketahui A mempunyai n vektor eigen bebas linier.

Akan ditunjukkan A dapat didiagonalisasi.

Karena diketahui A mempunyai n vektor eigen bebas linier, maka misalkan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen matriks A, misalkan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Misalkan

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya jika kalikan A dengan P dari kanan maka kolom-kolom AP berturut-turut adalah $A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, ..., A\mathbf{x}_n$. Disamping itu, karena $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ maka diperoleh

$$A\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1,\ A\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2,\ ...,\ A\mathbf{x}_n = \lambda_n \mathbf{x}_n \quad \text{.......(4)}$$

Dari Persamaan 4 dapat diperoleh

$$\begin{aligned} AP &= \begin{bmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & \cdots & A\mathbf{x}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \lambda_2\mathbf{x}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{x}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{2n} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= PD \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $AP = PD$ …..(5)

dimana D adalah matriks diagonal yang elemen-elemen pada diagonal utamanya adalah nilai-nilai eigen matriks A, yakni $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Selanjutnya, karena vektor-vektor kolom dari matriks P bebas linier maka berdasarkan Teorema 2.1 dapat dikatakan bahwa P dapat dibalik (mempunyai invers). Sehingga jika Persamaan 3.5 dikalikan dengan P^{-1} dari kiri diperoleh

$$\begin{aligned} P^{-1}(AP) &= P^{-1}(PD) \\ P^{-1}AP &= \left(PP^{-1}\right)D \\ P^{-1}AP &= D \end{aligned} \qquad …..(6)$$

Persamaan 6 menunjukkan bahwa terdapat matriks P yang dapat dibalik sehingga memenuhi $P^{-1}AP = D$, jadi berdasarkan Definisi 3.1 terbukti bahwa A dapat didiagonalisasi.

Berdasarkan Teorema 1 dapat disimpulkan bahwa syarat lain yang harus dipenuhi adalah harus terdapat n vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen matriks A. n vektor eigen inilah yang akan membentuk matriks P.

Selain itu, berdasarkan Teorema 1 dapat disusun langkah-langkah untuk mendiagonalisasikan matriks A. Berikut ini diberikan langkah-langkah untuk mendiagonalisasikan matriks A

1. Tentukan nilai-nilai eigen dari matriks A (misalkan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$).
2. Tentukan vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen yang telah diperoleh (misalkan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$).
3. Bentuk matriks $P = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$ dan hitung P^{-1}.
4. Tentukan matriks diagonal D dengan Persamaan 3.1.

Mencari Pangkat Matriks Bujursangkar

Mencari pangkat sebuah matriks bujursangkar sebarang (dalam hal ini matriks berukuran besar) dengan menggunakan cara biasa mungkin sedikit sulit. Namun, jika matriksnya berupa matriks diagonal, maka akan lebih memudahkan mencari pangkatnya. Karena yang akan dipangkatkan hanyalah elemen-elemen diagonal utamanya. Oleh karena itu, berikut ini akan diperkenalkan cara mencari pangkat sebuah matriks dengan menggunakan bantuan diagonalisasi.

Tinjau kembali Persamaan 1 Persamaan tersebut dapat dirubah menjadi

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= D \\ P\left(P^{-1}AP\right) &= PD \\ \left(PP^{-1}\right)(AP) &= PD \\ I(AP) &= PD \\ (AP)P^{-1} &= PDP^{-1} \\ A\left(PP^{-1}\right) &= PDP^{-1} \\ A &= PDP^{-1} \end{aligned} \qquad ..….(8)$$

Dari Persamaan 8 dapat ditentukan rumus untuk mencari A^2, A^3 ataupun bentuk umum A^k, yakni

$$\begin{aligned} A^2 = \left(PDP^{-1}\right)^2 &= \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) \\ &= (PD)\left(P^{-1}P\right)\left(DP^{-1}\right) \\ &= (PD)\left(DP^{-1}\right) \\ &= PD^2P^{-1} \end{aligned}$$

Dari Persamaan 8 dapat ditentukan rumus untuk mencari A^2, A^3 ataupun bentuk umum A^k, yakni

$$\begin{aligned} A^2 = \left(PDP^{-1}\right)^2 &= \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) \\ &= (PD)\left(P^{-1}P\right)\left(DP^{-1}\right) \\ &= (PD)\left(DP^{-1}\right) \\ &= PD^2P^{-1} \end{aligned} \qquad …….(9)$$

Menyelesaikan Model Mangsa-Pemangsa

Dalam makalah ini, akan ditinjau model mangsa-pemangsa yang digambarkan dengan sistem persamaan berikut

$$\begin{aligned} h_{k+1} &= \quad ph_k + \gamma m_k \\ m_{k+1} &= -\delta h_k + qm_k \end{aligned}$$

untuk $k \geq 0$ dan $p, q, \gamma, \delta \in$ R ....(10)

dimana m_k dan h_k mewakili jumlah populasi mangsa dan pemangsa pada tahun ke-k.

Misalkan diketahui populasi awal (k = 0) maka akan dicari penyelesaian dari model ini untuk sebarang tahun ke-k.

Untuk menyelesaikan model ini, akan diperkenalkan dua cara, yakni

1. dengan menggunakan perpangkatan matriks.
2. dengan menggunakan diagonalisasi matriks.

Tinjau kembali Persamaan 3.10. Persamaan tersebut dapat disajikan dalam bentuk matriks, yakni

$$\begin{bmatrix} h_{k+1} \\ m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & \gamma \\ -\delta & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_k \\ m_k \end{bmatrix}$$

$$V_{k+1} = AV_k \qquad \text{…….(11)}$$

Jika $k = 0$ maka Persamaan 11 menjadi

$$V_1 = AV_0 .$$

Jika $k = 1$ maka persamaan 11 menjadi

$$V_2 = AV_1 = A\left(AV_0\right)$$
$$= A^2V_0$$

Jika $k = 2$ maka Persamaan 11 menjadi

$$V_3 = AV_2 = A\left(A^2V_0\right)$$
$$= A^3V_0$$

Sehingga rumus untuk menghitung V_k pada sebarang tahuk ke-*k* adalah

$$V_k = A^kV_0 \qquad \text{…….(12)}$$

Dengan mensubstitusi rumus A^k dari Persamaan 9 ke Persamaan 3.12, maka diperoleh

$$V_k = \left(PD^kP^{-1}\right)V_0 \qquad \text{…….(13)}$$

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan maka kesimpulan dalam penelitian ini adalah:

1. Syarat-syarat agar matriks *A* dapat didiagonlasisasi adalah
   i). *A* harus berukuran $n\times n$.
   ii). Dapat ditemukan matriks *P* yang dapat dibalik, yang berarti bahwa berarti bahwa *P* juga berukuran $n\times n$ dan $\det\left(P\right) \neq 0$.
   iii). Matriks *A* dan *P* memenuhi persamaan
   $$P^{-1}AP = D$$
   iv). *A* mempunyai *n* vektor eigen bebas linier.
2. Matriks *P* adalah matriks yang dibentuk dari vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen matriks *A*.
3. Perhitungan A^k untuk *k* yang kecil akan lebih mudah jika menggunakan cara biasa. Namun untuk *k* yang besar (*k* takhingga) maka akan lebih mudah jika menggunakan bantuan diagonalisasi.
4. Model mangsa-pemangsa yang digambarkan dengan sistem persamaan
   $$\begin{aligned} h_{k+1} &= ph_k + \gamma m_k \\ m_{k+1} &= -\delta h_k + qm_k \end{aligned}$$
   untuk $k \geq 0$ dan $p, q, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$
   dapat disajikan dalam bentuk matriks
   $$\begin{bmatrix} h_{k+1} \\ m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & \gamma \\ -\delta & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_k \\ m_k \end{bmatrix}$$
   $$V_{k+1} = AV_k$$
   dimana m_k dan h_k mewakili jumlah populasi mangsa dan pemangsa pada tahun ke-*k*.
   Jika diketahui populasi awal V_0, maka perhitungan populasi kedua hewan tersebut pada tahun ke-*k* dapat menggunakan rumus $V_k = A^kV_0$.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 1987. *Aljabar Linier Elementer* (Edisi Kelima). Erlangga. Jakarta.

Nicholson, W.K. 2001. *Elementary Linear Algebra* (1st Edition). Mc Graw-Hill Book Co. Singapore.

Anton, H & Rorres, C. 2004. *Aljabar Linier Elementer* (Edisi Delapan). Erlangga. Jakarta.