

MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT PULMONARY TUBERCULOSIS DENGAN PENGUNAAN MASKER MEDIS

Mathematical Models of Spread Pulmonary Tuberculosis Disease with Use of Medical Mask

Nur Inayah¹, Muhammad Manaqib^{2*}, Nina Fitriyati², Ikhwal Yupinto⁴

^{1,2,3,4} Prodi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta
Jl. Ir. H. Djuanda No. 95, Tangerang Selatan, 15412, Indonesia

e-mail: ¹nur.inayah@uinjkt.ac.id; ^{2*}muhammad.manaqib@uinjkt.ac.id ;
³nina.fitriyati@uinjkt.ac.id; ⁴iyupinto@gmail.com

Corresponding author*

Abstrak

Penelitian ini mengembangkan model penyebaran penyakit tuberkulosis menggunakan model SIR yang ditambahkan dengan faktor penggunaan masker medis. Pembentukan model diawali dengan membuat diagram kompartemen alur penyebaran penyakit tuberkulosis melalui kontak antar individu dengan menggunakan masker medis. Kemudian dibentuk sistem persamaan diferensial nonlinear berdasarkan diagram kompartemen tersebut. Berdasarkan sistem tersebut, dicari titik ekuilibrium bebas penyakit, titik ekuilibrium endemik, dan bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0). Analisis kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit menggunakan linierisasi dan titik ekuilibrium bebas penyakit yang diperoleh bersifat stabil asimtotik saat $\mathcal{R}_0 < 1$. Hasil simulasi menunjukkan bahwa nilai $\mathcal{R}_0 < 1$. Hal ini berarti bahwa penyakit tuberkulosis dalam waktu mendatang akan menghilang. Namun jika nilai parameter dengan menggunakan masker medis dikurangi dan nilai parameter kontak penyebaran penyakit tuberkulosis dinaikkan, maka nilai $\mathcal{R}_0 > 1$. Hal ini berarti penyakit tuberkulosis akan menjadi endemik.

Kata Kunci : Tuberkulosis, Kestabilan Titik Tetap, Bilangan Reproduksi Dasar

Abstract

This research developed a model of tuberculosis disease spread using the SIR model with addition of the medical mask usage factor. First, we create a diagram of the tuberculosis disease spread compartment through contact between individuals with medical mask usage. After that, we construct a system of nonlinear differential equations based on the compartment diagram and then find the disease-free equilibrium point, the endemic equilibrium point, and the initial reproduction number (\mathcal{R}_0). We use linearization to analyze of the disease-free equilibrium point. The disease-free equilibrium point obtained is asymptotically stable at $\mathcal{R}_0 < 1$. The simulation result shows that the value of $\mathcal{R}_0 < 1$. It means that tuberculosis disease in the future will disappear. But if we reduce the value of medical mask usage and increase the value of tuberculosis disease spread, the value $\mathcal{R}_0 > 1$. It means that tuberculosis diseases can become an outbreak.

Keywords: Tuberculosis, Equilibrium Point Stability, Basic Reproduction Number

Submitted: 04th Agustus 2020

Accepted: 30th August 2020

This is an open access article under the [CC-BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license



1. PENDAHULUAN

Tuberculosis (TB) adalah penyakit sindrom pernafasan yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium Tuberculosis* yang menyerang saluran pernapasan mulai dari yang ringan sampai yang berat. Masuknya *Mycobacterium Tuberculosis* kedalam organ paru menyebabkan infeksi pada paru-paru dan akan terjadi pertumbuhan koloni bakteri yang berbentuk bulat (globular) dengan reaksi imunologis. Penyakit ini bisa menyebar dari individu ke individu lain melalui udara [1]. Penyakit TB masih menjadi masalah kesehatan yang signifikan bagi penduduk di seluruh dunia. diperkirakan 75 % penderita penyakit TB berada di usia produktif. Beberapa penyakit bisa dikaitkan dengan TB karena menurunnya imunitas, seperti tekanan darah tinggi, hepatitis, bahkan pasien dengan penyakit *diabetes mellitus* 2-3 kali lebih rentan terkena penyakit TB [1].

Pasien dengan TB positif merupakan sumber penularan penyakit tuberculosis. Batuk atau bersin dari pasien TB akan menyebarkan kuman ke udara dalam bentuk *droplet nuclei* (percikan dahak). Kurang lebih 3000 percikan dahak dihasilkan pada waktu sekali batuk. Percikan dahak yang berada pada waktu yang lama dalam suatu ruangan akan memudahkan terjadinya penularan penyakit TB. Jumlah percikan dapat dikurangi dengan adanya ventilasi atau aliran udara yang cukup dan kuman *Mycobacterium Tuberculosis* akan mati apabila terkena sinar matahari secara langsung. Dalam keadaan gelap dan lembab, percikan dahak dapat bertahan selama beberapa jam [1]. Kedaruratan TB bagi kemanusiaan secara global dinyatakan oleh WHO sejak tahun 1993. Pada tahun 2009 WHO menyatakan bahwa diprediksikan masih ada sekitar 9,5 juta kasus TB baru dan di seluruh dunia kasus meninggal dunia akibat TB sebanyak 0,5 juta orang [12]. Ko-infeksi TB/HIV, TB *multi drug resistant* dan kasus lain dengan derajat kompleksitas yang tinggi merupakan tantangan yang harus dihadapi oleh upaya pengendalian penyakit TB [1].

Salah satu pendekatan untuk menjelaskan solusi dari permasalahan yang terjadi dalam dunia nyata adalah memodelkan atau merumuskan permasalahan nyata dalam bahasa matematika. Setelah model matematika diperoleh maka dapat diselesaikan secara matematis, dan dapat diaplikasikan kembali dalam masalah nyata [11]. Pemodelan matematika banyak diterapkan diberbagai bidang untuk menyelesaikan masalah sehari-hari, diantaranya sektor pertanian [14][15][16], ekonomi [3], sosial [4], hingga kesehatan. Dalam bidang kesehatan pemodelan matematika banyak dipakai pada permasalahan epidemiologi penyakit, seperti model dasar epidemiologi penyakit yang dikembangkan oleh [6][11].

Penggunaan masker medis adalah salah satu cara untuk mencegah penyebaran infeksi saluran pernapasan. Individu yang rentan diharapkan memakai masker medis agar tidak terhirup partikel debu yang mengandung mikroorganisme infeksius. Individu yang memiliki gejala infeksi saluran pernapasan juga diharapkan memakai masker medis untuk menurunkan kemungkinan penyebaran penyakit. Pemodelan matematika yang menggunakan masker medis pernah dilakukan oleh Dipo Aldila dkk [2] dan Manaqib dkk [13] yang diterapkan pada mengendalikan penyakit MERS-CoV dengan model SEIR.

Penelitian ini bertujuan untuk membentuk model matematika penyebaran penyakit tuberculosis yang ditambahkan faktor penggunaan masker medis yang selanjutnya dibahas mengenai analisis kestabilan model tersebut. Pemodelan matematika yang dikembangkan dalam penelitian ini adalah model SIR [6] yang ditambahkan penggunaan masker medis pada kompartemen *susceptible* dan kompartemen *infected*. Sehingga kompartemen *susceptible* dibagi kedalam dua subkompartemen yaitu *susceptible without medical mask* dan *susceptible with medical mask*, begitu pula dengan kompartemen *infected* juga dibagi kedalam dua subkompartemen yaitu kompartemen *infected without medical mask* dan *infected with medical mask*. Selanjutnya model akan dianalisis dengan mencari bilangan reproduksi dasar, titik ekuilibrium dan kesatabilannya. Hal ini dilakukan untuk mengetahui bagaimana perbedaan kestabilan model penyebaran penyakit menular tuberculosis pada faktor penggunaan masker medis. Model juga akan disimulasikan menggunakan *software* Maple dengan data penyakit TB di Kota Makasar.

2. METODE PENELITIAN

Secara umum langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini :

1. Formulasi Model

Tahap ini peneliti akan mengkonstruksi model matematika penyebaran penyakit TB dengan menambahkan faktor penggunaan masker medis dari model dasar SIR. Model tersebut berbentuk sistem persamaan diferensial non linear.

2. Titik Ekuilibrium

Model yang diperoleh selanjutnya dicari titik ekuilibrium dan bilangan reproduksi dasar. Peneliti berencana mencari bilangan reproduksi dasar menggunakan metode *next generation matrix*. Bilangan reproduksi dasar diperlukan untuk mencari batas-batas parameter penyakit akan endemik atau mewabah. Selain itu juga dicari hubungan eksistensi titik ekuilibrium dengan bilangan reproduksi dasar.

3. Analisis Kestabilan

Selanjutnya titik ekuilibrium tersebut dicari kestabilannya menggunakan analisis nilai eigen matriks jakobi model matematikanya.

4. Simulasi Numerik

Selain itu dilakukan juga simulasi numerik menggunakan data persebaran penyakit TB di Kota Makasar.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Model Matematika

Model matematika penyakit tuberkulosis yang digunakan dalam penelitian ini dikembangkan dari model *SIR* selanjutnya ditambahkan penggunaan masker medis pada model tersebut. Asumsi pembentukan model penyakit tuberkulosis dengan menambahkan masker medis dalam penyebaran penyakit tuberkulosis dapat disusun sebagai berikut:

1. Bakteri yang menyebabkan penyakit tuberkulosis adalah Bakteri *Mycobacterium Tuberculosis*.
2. Populasi diasumsikan tertutup, artinya tidak ada migrasi masuk ataupun keluar.
3. Tingkat kelahiran alami dan tingkat kematian alami diasumsikan sama.
4. Populasi diasumsikan bercampur secara homogen yang berarti setiap individu mempunyai kemungkinan yang sama dalam melakukan kontak dengan individu lainnya.
5. Manusia yang rentan adalah manusia yang tidak memiliki imun dan belum tertular bakteri.
6. Manusia terinfeksi adalah manusia yang telah tertular bakteri dan dapat menularkan ke individu lain.
7. Penyakit tuberkulosis dalam model ini dapat diasumsikan tidak fatal.
8. Terdapat faktor tingkat kesadaran manusia dalam penanggulangan penyakit tuberkulosis dengan menggunakan masker medis.
9. Terdapat individu rentan yang menggunakan masker medis untuk menanggulangi penyebaran penyakit tuberkulosis.
10. Terdapat individu terinfeksi yang menggunakan masker medis untuk mengurangi penyebaran penyakit tuberkulosis.
11. Diasumsikan tingkat kesembuhan individu terinfeksi terhadap penggunaan masker sama, karena penggunaan masker hanya berfungsi untuk mengurangi penyebaran bakteri tuberkulosis.

Variabel dan parameter untuk model penyebaran penyakit tuberkulosis disajikan pada Tabel 1 dan Tabel 2

Tabel 1. Daftar variabel model penyebaran penyakit tuberkulosis melalui kontak antar individu

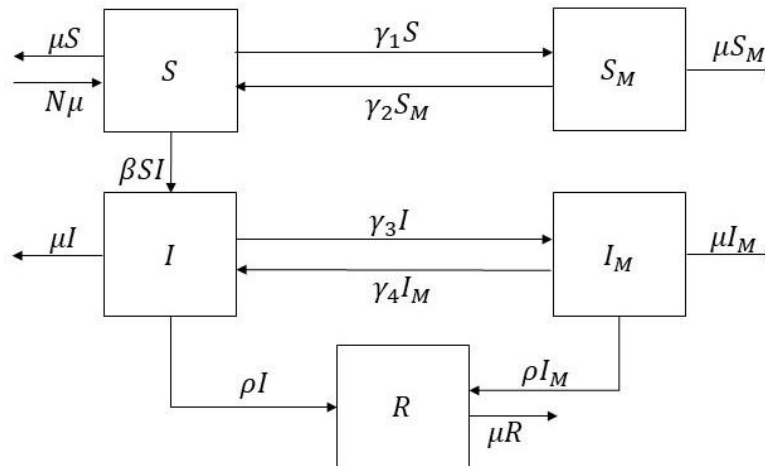
No.	Variabel	Definisi	Syarat	Satuan
1.	$S_M(t)$	Jumlah individu rentan yang menggunakan masker medis pada waktu ke- t .	$S_M(t) \geq 0$	$\frac{\text{individu}}{\text{km}^2}$
2.	$I_M(t)$	Jumlah individu terinfeksi yang menggunakan masker medis pada waktu ke- t .	$I_M(t) \geq 0$	$\frac{\text{individu}}{\text{km}^2}$
3.	$S(t)$	Jumlah individu rentan yang tidak menggunakan masker medis pada waktu ke- t .	$S(t) \geq 0$	$\frac{\text{individu}}{\text{km}^2}$
4.	$I(t)$	Jumlah individu terinfeksi yang tidak menggunakan masker medis pada waktu ke- t .	$I_E(t) \geq 0$	$\frac{\text{individu}}{\text{km}^2}$
5.	$R(t)$	Jumlah individu sembuh pada waktu ke- t	$R(t) \geq 0$	$\frac{\text{individu}}{\text{km}^2}$

Tabel 2. Daftar parameter model penyebaran penyakit tuberkulosis melalui kontak antar individu

No	Parameter	Definisi	Syarat	Satuan
1.	μ	Tingkat kelahiran / kematian alami populasi individu	$\mu \geq 0$	$(km^2 \text{ hari})^{-1}$
2.	β	Laju kontak individu terinfeksi dengan bakteri tuberkulosis	$\beta \geq 0$	$\frac{\text{individu}}{km^2 \text{ hari}}$
3.	ρ	Tingkat kesembuhan individu setelah terinfeksi	$\rho \geq 0$	$\frac{\text{individu}}{km^2 \text{ hari}}$
4.	γ_1	Tingkat kesadaran individu rentan dalam menggunakan masker medis	$\gamma_1 \geq 0$	$\frac{\text{individu}}{km^2 \text{ hari}}$
5.	γ_2	Tingkat ketidaksadaran individu rentan dalam menggunakan masker medis	$\gamma_2 \geq 0$	$\frac{\text{individu}}{km^2 \text{ hari}}$
6.	γ_3	Tingkat kesadaran individu terinfeksi dalam menggunakan masker medis	$\gamma_3 \geq 0$	$\frac{\text{individu}}{km^2 \text{ hari}}$
7.	γ_4	Tingkat ketidaksadaran individu terinfeksi dalam menggunakan masker medis	$\gamma_4 \geq 0$	$\frac{\text{individu}}{km^2 \text{ hari}}$

Berdasarkan Tabel 1 populasi manusia dibagi menjadi lima kompartemen, yaitu kompartemen populasi rentan (S), kompartemen populasi terinfeksi (I), kompartemen populasi rentan pengguna masker medis (S_M), kompartemen populasi terinfeksi pengguna masker medis (I_M) dan kompartemen populasi sembuh (R). Individu rentan dapat menjadi individu terinfeksi akibat kontak langsung dengan individu terinfeksi dengan laju sebesar β . Kesadaran individu rentan maupun individu terinfeksi dalam mengurangi penyebaran tuberkulosis dengan menggunakan masker dengan laju sebesar γ . Setiap kompartemen akan mengalami kematian dan kelahiran secara alami dengan laju sebesar μ . Kematian yang terjadi akibat tuberkulosis diasumsikan tidak ada. Tingkat kesembuhan individu ditandai dengan laju sebesar ρ .

Skema penyebaran penyakit tuberkulosis dengan menggunakan masker medis adalah sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram transfer penyebaran penyakit tuberkulosis dengan menggunakan masker medis

Berdasarkan penjelasan di atas, maka penyebaran penyakit tuberkulosis dengan menggunakan masker medis dapat dimodelkan menjadi sistem persamaan diferensial biasa nonlinear sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \mu N + \gamma_2 S_M - \mu S - \gamma_1 S - \beta SI \\
\frac{dI}{dt} &= \beta SI + \gamma_4 I_M - \gamma_3 I - \rho I - \mu I \\
\frac{dS_M}{dt} &= \gamma_1 S - \gamma_2 S_M - \mu S_M \\
\frac{dI_M}{dt} &= \gamma_3 I - \gamma_4 I_M - \mu I_M - \rho I_M \\
\frac{dR}{dt} &= \rho I + \rho I_M - \mu R,
\end{aligned} \tag{1}$$

dan $N = S + I + R + S_M + I_M$ serta variabel dan parameter yang digunakan dijelaskan pada Tabel 1 dan Tabel 2. Dari sistem (1) diperoleh $\frac{dN}{dt} = 0$, sehingga $N(t) = k$ untuk k bilangan real positif, karenanya terbukti $N(t)$ konstan.

Sistem (1) dibentuk dalam model *non-dimensional*, untuk menyederhanakan sistem (1). Proporsi banyaknya individu masing-masing kompartemen dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$s = \frac{S}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}, s_M = \frac{S_M}{N}, i_M = \frac{I_M}{N}. \tag{2}$$

Dari persamaan (2) diperoleh:

$$s + i + r + s_M + i_M = \frac{S}{N} + \frac{I}{N} + \frac{R}{N} + \frac{S_M}{N} + \frac{I_M}{N} = 1.$$

Sehingga sistem persamaan (1) dapat dibentuk dalam model *non-dimensional* menjadi:

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= \mu + \gamma_2 s_M - \mu s - \gamma_1 s - \beta si \\
\frac{di}{dt} &= \beta si + \gamma_4 i_M - \gamma_3 i - \rho i - \mu i \\
\frac{ds_M}{dt} &= \gamma_1 s - \gamma_2 s_M - \mu s_M \\
\frac{di_M}{dt} &= \gamma_3 i - \gamma_4 i_M - \mu i_M - \rho i_M \\
\frac{dr}{dt} &= \rho i + \rho i_M - \mu r.
\end{aligned} \tag{3}$$

Selanjutnya tidak ada satuan individu maupun vektor bernilai negatif. Variabel s, i, r, s_M, i_M berturut-turut adalah proporsi individu rentan, terinfeksi, sembuh, individu rentan memakai masker dan terinfeksi memakai masker, sehingga dapat didefinisikan dengan himpunan

$$\Gamma = \{(s, i, r, s_M, i_M) \geq 0 \mid s + i + r + s_M + i_M = 1\}$$

adalah himpunan tertutup. Sistem (3) variabel r tidak muncul pada persamaan lain. Hal ini menunjukkan bahwa jumlah individu pada kompartemen r tidak mempengaruhi laju perubahan jumlah individu pada kompartemen yang lain, maka persamaan r untuk sementara dapat diabaikan dari sistem. Sehingga sistem (3) dapat ditulis:

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= \mu + \gamma_2 s_M - \mu s - \gamma_1 s - \beta si \\
\frac{di}{dt} &= \beta si + \gamma_4 i_M - \gamma_3 i - \rho i - \mu i \\
\frac{ds_M}{dt} &= \gamma_1 s - \gamma_2 s_M - \mu s_M \\
\frac{di_M}{dt} &= \gamma_3 i - \gamma_4 i_M - \mu i_M - \rho i_M.
\end{aligned} \tag{4}$$

Sistem (4) merupakan sistem persamaan differensial nonlinear yang mempresentasikan model penyebaran penyakit *tuberculosis* dengan penggunaan masker kesehatan.

3.2. Analisis Model

Analisa model dilakukan dengan menganalisis kestabilan titik ekuilibrium model. Titik ekuilibrium diperoleh dengan cara membuat persamaan pada sistem (4) sama dengan nol sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\mu + \gamma_2 s_M - \mu s - \gamma_1 s - \beta si &= 0 \\
\beta si + \gamma_4 i_M - \gamma_3 i - \rho i - \mu i &= 0 \\
\gamma_1 s - \gamma_2 s_M - \mu s_M &= 0 \\
\gamma_3 i - \gamma_4 i_M - \mu i_M - \rho i_M &= 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Titik ekuilibrium bebas penyakit adalah titik ekuilibrium pada saat tidak ada penyakit dalam populasi. Terpenuhinya keadaan bebas penyakit adalah tidak ada satu individupun yang terinfeksi penyakit, sehingga $i = i_M = 0$. Selanjutnya dengan mensubstitusikan $i = i_M = 0$ ke Persamaan (5) diperoleh titik ekuilibrium

$$\text{bebas penyakit } E_1 = \left(\frac{\gamma_2 + \mu}{\gamma_1 + \gamma_2 + \mu}, 0, \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2 + \mu}, 0 \right).$$

Selanjutnya akan dicari titik ekuilibrium endemik yaitu titik ekuilibrium saat kelas terinfeksi tidak ada atau saat penyakit menyebar dalam populasi. Endemik penyakit artinya di dalam populasi selalu terdapat individu yang terserang penyakit, sehingga diperoleh I pada titik ekuilibrium endemik penyakit yaitu $i^* > 0$ dan $i_M^* > 0$. Diperoleh titik ekuilibrium endemik sistem (3) adalah $E_2 = (s^*, i^*, s_M^*, i_M^*)$

$$\begin{aligned}
s^* &= \frac{\mu(\gamma_2 + \mu)}{\mu^2 + \mu\gamma_1 + \mu\beta i^* + \mu\gamma_2 + \gamma_2\beta i^*} \\
i^* &= \frac{\mu(\gamma_4 + \mu + \rho)}{(\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \mu + \rho) - \gamma_3\gamma_4} - \frac{\mu(\gamma_2 + \mu + \gamma_1)}{\beta(\gamma_2 + \mu)} \\
s_M^* &= \frac{\mu\gamma_1}{\mu^2 + \mu\gamma_1 + \mu\beta i^* + \mu\gamma_2 + \gamma_2\beta i^*} \\
i_M^* &= \frac{\gamma_3 i^*}{\mu + \gamma_4 + \rho}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Selanjutnya akan ditentukan bilangan reproduksi dasar menggunakan matriks generasi berikutnya (*next generation matrices*). Penentuan bilangan reproduksi awal Sistem (4) dengan cara [7][8][9]

1. Lakukan pelinieran terhadap subsistem terinfeksi pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Maka diperoleh matriks jacobian dari persamaan i dan i_M yaitu,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{d(\beta si + \gamma_4 i_M - \gamma_3 i - \rho i - \mu i)}{di} & \frac{d(\beta si + \gamma_4 i_M - \gamma_3 i - \rho i - \mu i)}{di_M} \\ \frac{d(\gamma_3 i - \gamma_4 i_M - \rho i_M - \mu i_M)}{di} & \frac{d(\gamma_3 i - \gamma_4 i_M - \rho i_M - \mu i_M)}{di_M} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta s - \gamma_3 - \rho - \mu & \gamma_4 \\ \gamma_3 & -\gamma_4 - \rho - \mu \end{pmatrix}.$$

Substitusikan $E_1 = \left(\frac{\gamma_2 + \mu}{\gamma_1 + \gamma_2 + \mu}, 0, \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2 + \mu}, 0 \right)$. ke matriks \mathbf{J} sehingga diperoleh

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \beta \frac{\gamma_2 + \mu}{\gamma_2 + \mu + \gamma_1} - \gamma_3 - \rho - \mu & \gamma_4 \\ \gamma_3 & -\gamma_4 - \rho - \mu \end{pmatrix}.$$

2. Dekomposisi matriks Jacobi \mathbf{J} menjadi matriks transmisi \mathbf{F} dan matriks Transisi \mathbf{V}

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \beta \frac{\gamma_2 + \mu}{\gamma_2 + \mu + \gamma_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_3 + \rho + \mu & -\gamma_4 \\ -\gamma_3 & \gamma_4 + \rho + \mu \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{F} - \mathbf{V}.$$

Hitung \mathbf{V}^{-1}

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_3 + \rho + \mu & -\gamma_4 \\ -\gamma_3 & \gamma_4 + \rho + \mu \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\gamma_4 + \rho + \mu}{(\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3 \gamma_4} & \frac{\gamma_4}{(\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3 \gamma_4} \\ \frac{\gamma_3}{(\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3 \gamma_4} & \frac{\gamma_3 + \rho + \mu}{(\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3 \gamma_4} \end{pmatrix}.$$

3. R_0 diperoleh dengan cara menghitung radius spektral (ρ) dari \mathbf{FV}^{-1} yaitu dengan mencari akar karakteristik terbesar dari \mathbf{FV}^{-1} .

$$\mathbf{FV}^{-1} = \begin{pmatrix} \beta \frac{\gamma_2 + \mu}{\gamma_2 + \mu + \gamma_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\gamma_4 + \rho + \mu}{(\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3 \gamma_4} & \frac{\gamma_4}{(\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3 \gamma_4} \\ \frac{\gamma_3}{(\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3 \gamma_4} & \frac{\gamma_3 + \rho + \mu}{(\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3 \gamma_4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\beta(\gamma_2 + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu)}{((\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3 \gamma_4)(\gamma_2 + \mu + \gamma_1)} & \frac{\gamma_4 \beta(\gamma_2 + \mu)}{((\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3 \gamma_4)(\gamma_2 + \mu + \gamma_1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dengan menyelesaikan persamaan $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{FV}^{-1}) = 0$ atau

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{\beta(\gamma_2 + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu)}{((\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3 \gamma_4)(\gamma_2 + \mu + \gamma_1)} & \frac{\gamma_4 \beta(\gamma_2 + \mu)}{((\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3 \gamma_4)(\gamma_2 + \mu + \gamma_1)} \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda - \frac{\beta(\gamma_2 + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu)}{((\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3 \gamma_4)(\gamma_2 + \mu + \gamma_1)} \right) \lambda = 0$$

diperoleh $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = \frac{\beta(\gamma_2 + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu)}{((\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3 \gamma_4)(\gamma_2 + \mu + \gamma_1)}$.

R_0 diperoleh dari radius spektral atau nilai terbesar dari nilai eigen, maka didapat

$$R_0 = \frac{\beta(\gamma_2 + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu)}{((\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3\gamma_4)(\gamma_2 + \mu + \gamma_1)} \tag{7}$$

Teorema 1

- (1) . Jika $R_0 < 1$ maka sistem (4) hanya memiliki satu titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit E_1 .
- (2) Jika $R_0 > 1$ maka sistem (4) hanya memiliki dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit E_1 dan titik ekuilibrium endemik E_2 .

Bukti Untuk membuktikan teorema 1 perlu ditunjukkan jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium E_2 ada. Eksistensi suatu titik ekuilibrium ditunjukkan dengan setiap elemennya positif sesuai syarat pembentukan model ini. Diperhatikan bahwa s^* , s_M^* , dan i_M^* pada titik ekuilibrium $E_2 = (s^*, i^*, s_M^*, i_M^*)$ persamaan (6) positif jika dan hanya jika i^* positif, sehingga perlu ditunjukkan $i^* > 0$.

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\beta(\gamma_2 + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu)}{((\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3\gamma_4)(\gamma_2 + \mu + \gamma_1)} > 1 \\ \Leftrightarrow \frac{(\gamma_4 + \rho + \mu)}{((\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3\gamma_4)} &> \frac{(\gamma_2 + \mu + \gamma_1)}{\beta(\gamma_2 + \mu)} \\ \Leftrightarrow \frac{\mu(\gamma_4 + \rho + \mu)}{((\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3\gamma_4)} &> \frac{\mu(\gamma_2 + \mu + \gamma_1)}{\beta(\gamma_2 + \mu)} \\ \Leftrightarrow \frac{\mu(\gamma_4 + \rho + \mu)}{((\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3\gamma_4)} - \frac{\mu(\gamma_2 + \mu + \gamma_1)}{\beta(\gamma_2 + \mu)} &> 0 \end{aligned}$$

□

Teorema 2 Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit E_1 sistem (4) stabil asimtotik lokal.

Bukti Nilai eigen matriks Jacobi dari sistem (4) pada titik ekuilibrium bebas penyakit E_1 diperoleh dari persamaan berikut $det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}_{(E_1)}) = 0$

$$\mathbf{J}_{(E)} = \begin{pmatrix} -\mu - \gamma_1 - \beta i & -\beta s & \gamma_2 & 0 \\ \beta i & \beta s - \gamma_3 - \rho - \mu & 0 & \gamma_4 \\ \gamma_1 & 0 & -\gamma_2 - \mu & 0 \\ 0 & \gamma_3 & 0 & -\gamma_4 - \mu - \rho \end{pmatrix}_{s, i, s_M, i_M}$$

$$\begin{aligned} &|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}_{(E_1)}| = 0 \\ \Leftrightarrow &\begin{vmatrix} \lambda + \mu + \gamma_1 & \beta \frac{\gamma_2 + \mu}{\gamma_1 + \gamma_2 + \mu} & -\gamma_2 & 0 \\ 0 & \lambda - \beta \frac{\gamma_2 + \mu}{\gamma_1 + \gamma_2 + \mu} + \gamma_3 + \rho + \mu & 0 & -\gamma_4 \\ -\gamma_1 & 0 & \lambda + \gamma_2 + \mu & 0 \\ 0 & -\gamma_3 & 0 & \lambda + \gamma_4 + \mu + \rho \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow &(\lambda + \mu)(\lambda + \mu + \gamma_1 + \gamma_2)P = 0, \end{aligned}$$

nilai

$$P = \lambda^2 + \lambda \left((\gamma_4 + 2\mu + 2\rho + \gamma_3) - \frac{\beta(\gamma_2 + \mu)}{\gamma_1 + \gamma_2 + \mu} \right) + (\gamma_4 + \mu + \rho) \left(\frac{\beta(\gamma_2 + \mu)}{\gamma_1 + \gamma_2 + \mu} + \rho + \mu \right) + (\mu + \rho)\gamma_3. \quad (8)$$

Diperoleh $\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = -(\mu + \gamma_1 + \gamma_2)$, karena seluruh parameter yang digunakan positif maka jelas bahwa $\lambda_3 < 0$ dan $\lambda_4 < 0$. Selanjutnya tanda dari bagian real nilai eigen λ_3 dan λ_4 dianalisis dengan kriteria Routh-Hurwitz.

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, semua nilai eigen (8) akan bernilai negatif jika dan hanya jika $a_0 = 1, a_1 = (\gamma_4 + 2\mu + 2\rho + \gamma_3) - \frac{\beta(\gamma_2 + \mu)}{\gamma_1 + \gamma_2 + \mu}, a_2 = (\gamma_4 + \mu + \rho) \left(\frac{\beta(\gamma_2 + \mu)}{\gamma_1 + \gamma_2 + \mu} + \rho + \mu \right) + (\mu + \rho)\gamma_3,$

dan Δ_1, Δ_2 dari matriks Routh Hurwitz bernilai positif, dengan $\Delta_1 = |a_1|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix}.$

Karena semua nilai parameter positif jelas bahwa $a_0 > 0$ dan $a_2 > 0$ maka perlu ditunjukkan $a_1 > 0$. Perhatikan

$$\begin{aligned} & \frac{\beta(\gamma_2 + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu)}{((\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3\gamma_4)(\gamma_2 + \mu + \gamma_1)} < 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{\beta(\gamma_2 + \mu)}{(\gamma_2 + \mu + \gamma_1)} < \frac{((\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu) - \gamma_3\gamma_4)}{(\gamma_4 + \rho + \mu)} \\ & < \frac{(\gamma_3 + \rho + \mu)(\gamma_4 + \rho + \mu)}{(\gamma_4 + \rho + \mu)} = \gamma_3 + \rho + \mu < (\gamma_4 + 2\mu + 2\rho + \gamma_3) \\ \Leftrightarrow & \frac{\beta(\gamma_2 + \mu)}{(\gamma_2 + \mu + \gamma_1)} < (\gamma_4 + 2\mu + 2\rho + \gamma_3) \\ \Leftrightarrow & (\gamma_4 + 2\mu + 2\rho + \gamma_3) - \frac{\beta(\gamma_2 + \mu)}{(\gamma_2 + \mu + \gamma_1)} > 0 \\ \Leftrightarrow & a_1 > 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Selanjutnya berdasarkan (9) maka $\Delta_1 = |a_1| > 0$. Untuk $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2$ karena $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$

maka $\Delta_2 > 0$. Sehingga dapat disimpulkan determinan matriks Routh Hurwitz Δ_1 dan Δ_2 bernilai positif jika $R_0 < 1$. Dengan demikian persamaan (8) mempunyai akar-akar yang bagian realnya negatif. Sehingga dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit E_1 merupakan stabil asimtotik lokal.

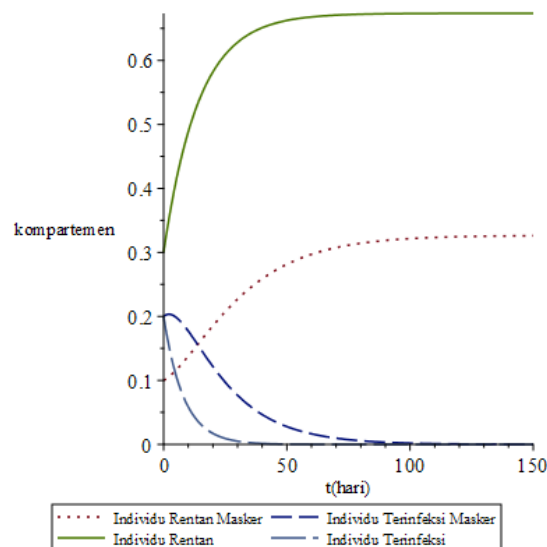
3.3. Simulasi Model

Simulasi model penyebaran penyakit tuberkulosis melalui kontak antar individu dilakukan dengan menggunakan parameter dari beberapa penelitian. Sumber-sumber pengambilan nilai-nilai parameter [1][10]. Kota Makassar merupakan ibu kota dari Provinsi Sulawesi Selatan di Indonesia yang luasnya mencapai $175,77 km^2$. Kota Makassar terletak di pesisir barat daya Pulau Sulawesi. Berdasarkan data dari Dinas Kesehatan Kota Makassar total penduduk Kota Makassar pada tahun 2015 sebanyak 1.449.401 jiwa [5]. Selanjutnya berdasarkan data [1],[5] dan [10] dapat dihitung parameter untuk simulasi numerik persebaran penyakit TB di Kota Makassar, secara ringkas disajikan dalam Tabel 3.

Tabel 3. Nilai-nilai parameter simulasi numerik persebaran penyakit TB di Kota Makasar

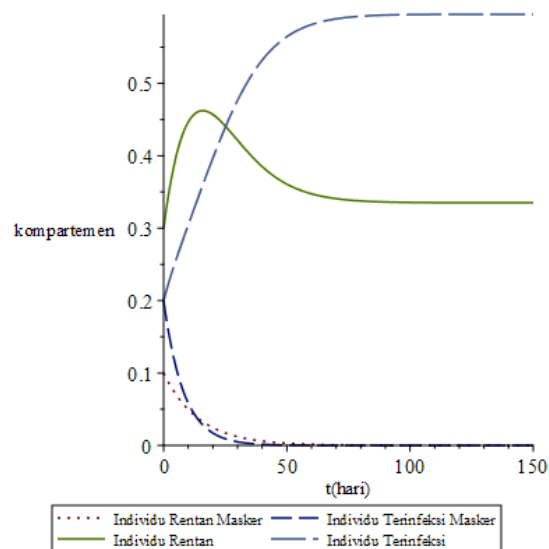
Parameter	Nilai
μ	$4,7442791 \times 10^{-2}$
β	$6,32570545 \times 10^{-4}$
ρ	$5,5556 \times 10^{-3}$
γ_1	$2,3 \times 10^{-2}$
γ_2	$6,6 \times 10^{-8}$
γ_3	7×10^{-2}
γ_4	$1,3 \times 10^{-8}$

Hasil simulasi menggunakan program Maple 2018 dan berdasarkan parameter pada Tabel 3 serta dengan nilai awal $s(0) = 0,3$; $i(0) = 0,2$; $s_M(0) = 0,1$; $i_M(0) = 0,2$ diperoleh $\mathcal{R}_0 = 0,002357476323$ dan disajikan dalam gambar berikut.

**Gambar 2. Simulasi Sistem (3) titik ekuilibrium bebas penyakit E_1**

Berdasarkan Gambar 2 populasi individu rentan meningkat, hingga pada hari ke-50 mencapai titik 0,75 dan stabil pada titik tersebut. Populasi individu terinfeksi menurun, hingga pada hari ke-50 populasi individu terinfeksi mencapai titik 0 dan stabil pada titik tersebut. Populasi individu rentan pengguna masker medis meningkat, hingga pada hari ke-100 mencapai titik 0,3 dan stabil di titik tersebut. Populasi individu terinfeksi pengguna masker medis menurun, hingga pada hari ke-100 mencapai titik 0 dan stabil pada titik tersebut. Kesimpulan yang dapat diperoleh dari simulasi ini penyakit akan menghilang dari populasi setelah hari ke-50 jika $\mathcal{R}_0 < 1$, hasil ini sesuai dengan Teorema 2 yang telah dibentuk sebelumnya. Nilai \mathcal{R}_0 dapat diperkecil dengan meningkatkan kesadaran masyarakat untuk memakai masker baik individu rentan maupun yang sakit.

Selanjutnya akan dilakukan simulasi untuk ($\mathcal{R}_0 > 1$). Jika digunakan parameter pada Tabel 3 dan parameter β , diperbesar 2×10^3 menjadi $6,32570545 \times 10^{-1}$, maka diperoleh bilangan reproduksi awal dari Sistem (3) adalah $\mathcal{R}_0 = 3,236974449$. Menggunakan nilai awal $s(0) = 0,3$; $i(0) = 0,2$; $s_M(0) = 0,1$; $i_M(0) = 0,2$ diperoleh simulasi numerik Gambar 3 berikut.



Gambar 3. Simulasi Sistem (3) titik ekuilibrium bebas penyakit E_2

Berdasarkan Gambar 3 populasi individu rentan meningkat, namun setelah hari ke-10 populasi individu rentan menurun, hingga pada hari ke-100 mencapai titik 0,33 dan stabil pada titik tersebut. Populasi individu terinfeksi meningkat, hingga pada hari ke-100 populasi individu terinfeksi mencapai titik 0,58 dan stabil pada titik tersebut. Populasi individu rentan pengguna masker menurun, namun setelah hari ke-15 populasi individu rentan pengguna masker menurun, hingga pada hari ke-75 mencapai titik 0,002 dan stabil pada titik tersebut. Populasi individu terinfeksi pengguna masker menurun hingga sekitar hari ke-50 mencapai titik 0,0005 dan stabil pada titik tersebut. Kesimpulan yang dapat diperoleh dari simulasi ini adalah penyakit akan menetap pada populasi jika $\mathcal{R}_0 > 1$. Hasil ini sesuai dengan teorema pada [5] yang menyatakan bahwa jika $\mathcal{R}_0 > 1$, penyakit akan menyebar dan menuju titik ekuilibrium endemik.

Berdasarkan Teorema 2 dan hasil simulasi numerik, disimpulkan bahwa penyakit akan menghilang dari populasi jika nilai $\mathcal{R}_0 < 1$. Diperhatikan kembali \mathcal{R}_0 yang diberikan oleh Persamaan (7), supaya $\mathcal{R}_0 < 1$ dapat dilakukan dengan memperkecil pembilang dan memperbesar penyebut, yaitu dengan memperkecil parameter β serta memperbesar parameter ρ , γ_1 dan γ_3 . Sehingga rekomendasi dari penelitian ini untuk mencegah mewabahnya penyakit PB adalah sebagai berikut:

1. Meningkatkan kesadaran individu dalam penggunaan masker (γ_1 dan γ_3) untuk mengurangi penyebaran bakteri *Pulmonary Tuberculosis* melalui udara.
2. Mengurangi tingkat kontak antara individu terinfeksi dengan individu rentan (β). Misalnya tidak memakai alat makan yang sama antara individu rentan dengan individu terinfeksi, edukasi cara batuk yang baik dan benar.
3. Meningkatkan laju kesembuhan individu terinfeksi (ρ). Misalnya dengan membuat obat baru yang dapat menekan laju infeksi Bakteri *Pulmonary Tuberculosis* dalam tubuh.

4. KESIMPULAN

1. Berdasarkan asumsi-asumsi yang telah ditetapkan pada penelitian ini, model penyebaran penyakit tuberkulosis *SIR* dapat dikembangkan dengan menambahkan kompartemen sub populasi rentan pengguna masker medis (S_M) dan kompartemen sub populasi terinfeksi pengguna masker medis (I_M). Model yang diperoleh berupa sistem persamaan diferensial biasa.

2. Model matematika penyebaran penyakit tuberkulosis melalui kontak antar individu dengan menggunakan masker medis memiliki satu titik ekuilibrium bebas penyakit $E_1 = \left(\frac{\gamma_2 + \mu}{\gamma_1 + \gamma_2 + \mu}, 0, \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2 + \mu}, 0 \right)$. yang memiliki kestabilan titik ekuilibrium stabil asimtotik lokal saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dan satu titik ekuilibrium endemik $E_2 = (s^*, i^*, s_M^*, i_M^*)$ ada jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

3. Diperoleh bilangan reproduksi awal dengan parameter-parameter yang berpengaruh adalah tingkat kontak infeksi individu rentan dengan individu terinfeksi, tingkat kontak infeksi individu rentan pengguna masker dengan individu rentan, tingkat kelahiran dan kematian alami manusia, tingkat kesembuhan dari penyakit tuberkulosis, dan tingkat kontak infeksi individu terinfeksi dengan individu terinfeksi pengguna masker.
4. Berdasarkan analisis kestabilan titik ekuilibrium dan simulasi numerik disimpulkan penyakit akan hilang jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan akan menetap pada populasi jika $\mathcal{R}_0 > 1$. Berdasarkan hal tersebut, langkah yang dapat dilakukan agar penyakit tidak menjadi wabah adalah mengurangi kontak antar individu rentan dengan individu terinfeksi, memperbanyak kesadaran dalam penggunaan masker medis, dan meningkatkan laju kesembuhan

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Agustina S., dan Wahjuni C. U., "Knowledge and Preventive Action of Pulmonary Tuberculosis Transmission in Household Contacts", *Jurnal Berkala Epidemiologi*, vol. 5, no. 1, pp.85-94, 2017.
- [2] Aldila H. P., Khotimah K., Desjwiandra B., and Tasman H., "Analyzing The Mers Disease Control Strategy Through An Optimal Control Problem," *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, vol. 28, no. 1, pp. 169–184, 2018.
- [3] Alshami M. and Muley A., "Economic Ordering Policy for VAR Deterioration Model with Non-stationary Two-warehouse Inventory and Demand", *Inprime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 02, no 2, pp. 79-86, 2020.
- [4] Arlina A. and Liebenlito M., "Sequential Topic Modelling: A Case Study on Indonesian LGBT Conversation on Twitter", *Inprime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 01, no 1, pp. 17-31, 2019.
- [5] Badan Pusat Statistik Kota Makassar, 2018, Kota Makassar dalam Angka, <https://makassarkota.bps.go.id/> (diakses pada tanggal 3 April 2019).
- [6] Blyuss K. B. and Kyrchko Y. N., "On a basic model of a two-disease epidemic," *Appl. Math. Comput.*, vol. 160, no. 1, pp. 177–187, 2005.
- [7] Diekmann O., Heesterbeek J.A.P., dan Roberts M.G., "The Construction of Next-Generation Matrices for Compartmental Epidemic Models", *The Royal Society Interface*, vol. 7, no. 47, pp.1-13, 2009.
- [8] Driessche P. V.D., and Watmough J., "Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission," *Math. Biosci.*, vol. 180, pp. 29–48, 2002.
- [9] Driessche P. Van D dan Watmough J., "Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission", *Mathematical Biosciences*, vol. 180, no. 1, pp.29-48, 2002.
- [10] Endahyani S.N., Kusworo A., dan Anam C., "Histogram dan Nilai Derajat Keabuan Citra Thoraks Computed Radiography (CR) untuk Penderita Tuberculosis (TB) Paru-paru", *Jurnal Sains & Matematika, Jakarta*, vol. 18, no. 4, p.118-122, 2010.
- [11] Hethcote H. W., "The Mathematics of Infectious Disease", *SIAM: Vol. 42 No. 4*, p.599-653, 2000.
- [12] Liebenlito M, Irene Y, and Hamid A., "Classification of Tuberculosis and Pneumonia in Human Lung Based on Chest X-Ray Image Using Convolutional Neural Network", *Inprime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 02, no 1, pp. 97-109, 2019.
- [13] Manaqib M., "Mathematical Model for MERS-COV Disease Transmission with Medical Mask Usage and Vaccination", *Inprime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 01 no2, pp. 97-109, 2019.
- [14] Manaqib M., "Pemodelan Matematika Infiltrasi Air pada Saluran Irigasi Alur", *J. Mat. Mantik*, vol. 3, no. 1, pp. 23-29, Oct. 2017.
- [15] Nurhasanah A., Manaqib M., and Fauziah I., "Analysis Infiltration Waters in Various Forms of Irrigation Channels by Using Dual Reciprocity Boundary Element Method", *J. Mat. Mantik*, vol. 6, no. 1, pp. 52-65, May 2020.
- [16] Taufiq I and Agustito D., "Application of Mathematical Models Two Predators and Infected Prey by Pesticide Control in Nilaparvata Lugens Spreading in Bantul Regency", *Inprime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 02, no 1, pp. 97-109, 2019.