SIFAT-SIFAT INTEGRAL RIEMANN-STIELTJES
(*Properties Of Riemann-Stieltjes Integral*)

FRANCIS Y RUMLAWANG[1], **HARIMANUS BATKUNDE**[2]
[1] *Staf Jurusan Matematika, FMIPA,UNPATTI*
[2] *Calon Staf Jurusan Matematika, FMIPA,UNPATTI*
Jl. Ir. M. Putuhenam, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
E~Mail: ocat_08@yahoo.com

ABSTRACT
If $f:[a,b]\rightarrow\Re$ is limited and $\alpha:[a,b]\rightarrow\Re$ Monotone increase in $[a,b]$, is Riemann-Stieltjes integral able to α on $[a,b]$ simply written by $f \in RS[\alpha]$ if $I = J$. With $I=\underline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha\,(x)$ is called Riemann Stieltjes lower integral f to α and $J=\overline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha\,(x)$ is called Riemann Stieltjes upper integral f to α. Then $I=J=\int_a^b f(x)\,d\alpha\,(x)$ is called Riemann Stieltjes upper integral f to α on $[a,b]$. if f ang g is Riemann Stieltjes integralable, and, $k \in R$ then $f + g$, kf, and fg is also Riemann Stieltjes integralable. But if f and α have united discontinue point then f is not Riemann Stieltjes integralable on α

Keywords: *Rieman-Stieltjes, Riemann-Stieltjes Integral*

PENDAHULUAN

Salah satu konsep dasar dalam matematika analisis adalah integral atau antiturunan atau antiderivatif. Ide integral sebenarnya telah muncul pada zaman Archimedes. Tetapi jika dikatakan Teori integral, maka pertama kali ditemukan pada pertengahan abad ke-19. Teori integral klasik pertama kali diperkenalkan oleh Cauchy dan Riemann.

Pada Tahun 1584 George F. Bernard Riemann memberikan syarat-syarat perlu dan cukup dari sebuah fungsi terbatas sehingga menjadi terintegralkan. Saat ini, sebuah fungsi demikian dikenal sebagai fungsi yang terintegral Riemann, dan sebagian besar mahasiswa yang mengambil kalkulus akan mempelajari bentuk integral Riemann ini. Riemann mendominasi kasus-kasus pengintegralan sampai 1894 ketika seorang berkebangsaan Belanda bernama Thomas Joannes Stieltjes mengembangkan Integral Riemann-Stieltjes. T. J. Stieltjes mengembangkan tipe integral ini ketika menyelidiki sebuah masalah khusus yang di fokuskan pada massa balok yang terdistribusi *nonuniform* (tidak seragam). Masalah khusus ini disebut pengembangan dari perluasan pertama Integral Riemann.

Dengan demikian dikatakan bahwa Integral Riemann Stieltjes ini merupakan generalisasi dari integral Riemann. Nama Integral Riemann Stieltjes ini diambil dari nama penemunya yaitu Thomas Joannes Stieltjes yang mengembangkan integral Riemann. Pada umumnya teori yang sering diajarkan adalah Integral Riemann, padahal integral Riemann hanyalah merupakan bentuk khusus dari integral Riemann Stieltjes.

TINJAUAN PUSTAKA

Kalkulus berhasil ditemukan sekitar tahun 1670, dan tokoh-tokoh matematika yang berperan dalam penemuan Kalkulus adalah Newton dan Leibniz (Gordon, R, A, 1994). Kedua tokoh ini berhasil mengembangkan teorema fundamental, yaitu mengenai antiderivatif. Kemudian A. Cauchy (1789-1857) mulai mengembangkan teori tersebut, dan berhasil meneliti tentang integral dari fungsi kontinu (Jain, P. K. and Gupta, V. P, 1986). Pada tahun 1584, Benhard Riemann mulai memperhalus definisi yang digunakan oleh Cauchy, dan Riemann pun mengadakan penelitian tentang integral fungsi diskontinu (Royden, H, L, 1989). Dari penelitian tersebut Riemann berhasil menemukan suatu metode khusus dari integral yang sangat sederhana untuk didefinisikan, sehingga metode integral itu disebut Integral Riemann (Soeparna, 2006). Kemudian pada tahun 1875 Darboux berhasil memodifikasi Integral Riemann dengan mendefinisikan integral atas dan integral bawah sehingga terdefinisi suatu integral baru yang ekuivalen dengan Integral Riemann. Konsep umlah Riemann dan jumlah Darboux pada dasarnya adalah sama (Muslich, 2005). Meskipun ada beberapa jenis teori integral tetapi Riemannlah yang banyak memberi inspirasi pembentukan integral lain dan sudah banyak pemakaiannya di bidang matematika maupun di bidang lainnya.

Sementara integral Riemann-Stieltjes yang merupakan perluasan integral Riemann pertama kali diperkenalkan oleh Thomas Joannes Stieltjes.

Sifat-sifat yang berlaku pada integral Riemann Stieltjes akan berlaku juga pada Integral Riemann setelah dilakukan pengkhususan.

Perbedaan besar antara Integral Riemann dan Integral Riemann Stieltjes sendiri terletak pada bentuk fungsi turunannya. Misalkan pada Integral Riemann Stieltjes bentuk umum fungsi yaitu $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$ maka Integral Riemann memiliki bentuk umum $\int_a^b f(x)\,dx$, sehingga terlihat jelas bahwa Integral Riemann Stieltjes akan sama dengan Integral Riemann jika $\alpha(x)=x$

Definisi 1 (Kekontinuan fungsi di titik *a*)
Fungsi f dikatakan kontinu di titik a jika dan hanya jika ketiga syarat berikut terpenuhi :

1. $f(a)$ ada
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ ada
3. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

Jika salah satu syarat dari ketiga syarat di atas tidak terpenuhi maka fungsi f dikatakan tidak kontinu di titik a

Definisi 2 (Kekontinuan fungsi di pada suatu selang)
Suatu fungsi dikatakan kontinu pada suatu selang terbuka jika dan hanya jika fungsi tersebut kontinu di setiap titik pada selang terbuka tersebut.

Definisi 3 (Fungsi kontinu di selang tertutup)
Suatu fungsi f yang daerah asalnya memuat selang tertutup $[a,b]$ dikatakan kontinu pada $[a,b]$ jika dan hanya jika fungsi tersebut kontinu pada selang terbuka (a,b) dan juga kontinu kanan di a dan kontinu kiri di b

Definisi 4 (fungsi kontinu seragam)
Fungsi $f : D_f \subset \Re \to \Re$ dikataan kontinu seragam (*uniformlly continous*) pada himpunan $S \subset D_f$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ yang tak bergantung pada titik $x \in S$ sehingga untuk setiap $y \in N_\delta(x) \cap S$ (untuk setiap $x, y \in D_f$ dan $|x-y| < \delta$) berakibat

Teorema 1

(i). Jika $a \ge b$ dan $c \ge 0$, maka $ca \ge cb$
(ii). Jika $a \ge b$ dan $c \le 0$, maka $ca \le cb$

Bukti :

(i). Jika $a \ge b$ berarti $a-b \in P \cup \{0\}$. Jika $c \ge 0$ maka $c \in P \cup \{0\}$ Sehingga $c(a-b) \in P \cup \{0\}$ atau $ca - cb \in P \cup \{0\}$ yang berarti $ca \ge cb$. ■

(ii). Jika $a \ge b$ berarti $a-b \in P \cup \{0\}$. Jika $c \le 0$ maka $-c \ge 0$ maka $-c \in P \cup \{0\}$ Sehingga $(-c)(a-b) \in P \cup \{0\}$ atau $cb - ca \in P \cup \{0\}$ yang berarti $ca \le cb$ ■

Supremum dan Infimum
Berikut ini akan diberikan pengertian dasar tentang batas atas dan batas bawah, serta supremum (batas atas terkecil) dan infimum (batas bawah terbesar). Misal sembarang $A \subset \Re$ dikatakan terbatas ke atas jika terdapat suatu bilangan $N \in \Re$ sedemikian sehingga $x \le N$, untuk setiap $x \in A$, selanjutnya N disebut batas atas untuk A, dan $A \subset \Re$ dikatakan terbatas ke bawah jika terdapat suatu bilangan $M \in \Re$ sedemikian sehingga $M \le x$, untuk setiap $x \in A$, selanjutnya M disebut batas bawah untuk A. Berdasarkan pengertian tersebut maka diberikan definisi berikut ini.

Teorema 2
Diberikan S adalah himpunan terbatas di $\Re$ dan $S_0 \ne \phi$ dengan $S_0 \subset S$ dengan demikian berlaku :

$$\inf S \le \inf S_0 \le \sup S_0 \le \sup S$$

Bukti :
S adalah himpunan terbatas, dengan demikian, S memiliki infimum dan supremum.
Karena $S_0 \subset S$ maka S_0 juga terbatas dan memiliki infimum serta supremum
Misalkan m adalah infimum untuk S maka :

(i). m batas bawah untuk S.
(ii). Tidak ada bilangan lebih kecil dari m yang merupakan batas bawah untuk S.

Misalkan l adalah infimum S_0 maka

(i). l batas bawah untuk S_0.
(ii). Tidak ada bilangan lebih kecil dari l yang merupakan batas bawah untuk S_0.

Karena $S_0 \subset S$ maka

$m \le l$ atau $\inf S \le \inf S_0$ ………..(1)

Misalkan M adalah supremum untuk S maka :

(i). M batas atas untuk S.
(ii). Tidak ada bilangan lebih besar dari M yang merupakan batas atas untuk S.

Misalkan L adalah supremum S_0 maka

(i). L batas atas untuk S_0.
(ii). Tidak ada bilangan lebih besar dari L yang merupakan batas atas untuk S_0.

Karena $S_0 \subset S$

maka $L \le M$ atau $\sup S_0 \le \sup S$ ………..(2)

Dari (1) dan (2) diperoleh
$\inf S \le \inf S_0 \le \sup S_0 \le \sup S$ ■

Integral Riemann
Pada bagian ini akan dijabarkan secara singkat mengenai Integral Riemann, karena integral Riemann-stieltjes yang akan dibahas merupakan keadaan umum

dari integral Riemann. Dengan demikian sangat penting untuk dikaji kembali tentang partisi dan integral Riemann untuk mendukung dan memperjelas pembahasan selanjutnya.

Jika $a,b \in \Re$ dengan $a < b$ maka terdapat bilangan riil x_1 sehingga $a < x_1 < b$. karena $x_1 < b$ tentu terdapat bilangan riil x_2 sehingga memenuhi $x_1 < x_2 < b$. proses ini jika diteruskan akan diperoleh bilangan-bilangan $x_1, x_2, ..., x_n$ sehingga $a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b$

Jadi untuk setiap $[a,b]$ dapat dibentuk himpunan $D = \{a = x_1, x_2, ..., x_n = b\}$ dengan

$a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b$

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Integral Riemann Stieltjes

Diberikan fungsi $\alpha : [a,b] \to \Re$ naik monoton pada $[a,b]$ dan terbatas pada $[a,b]$. Untuk setiap partisi $P = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$ pada $[a,b]$ didefinisikan:

$$\Delta_i \alpha = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}), \quad i = 1,2,3,...,n$$

Diberikan fungsi $f : [a,b] \to \Re$, kemudian didefinisikan:

$m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ dan

$M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$

$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ dan

$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

Perlu diperhatikan bahwa jika *f* terbatas ke bawah pada $[a,b]$ maka m dan m_i ada, demikian pula jika fungsi *f* terbatas ke atas pada $[a,b]$ maka M dan M_i ada. Selanjutnya dibentuk jumlahan-jumlahan sebagai berikut.

$$L(f,P,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i \alpha,$$

$$U(f,P,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i \alpha,$$

$$S(f,P,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta_i \alpha,$$

dengan $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ untuk setiap $i = 1,2,3,...,n$ notasi $L(f,P,\alpha)$ disebut jumlah Riemann Stieltjes bawah, $U(f,P,\alpha)$ disebut jumlah Riemann Stieltjes atas, dan $S(f,P,\alpha)$ disebut jumlah Riemann Stieltjes fungsi *f* pada $[a,b]$ terhadap partisi *P*. Karena selalu berlaku : $m_i \le f(x_i^*) \le M_i$, untuk setiap $i = 1,2,3,...,n$ diperoleh teorema sebagai berikut :

Teorema 2

Diberikan fungsi $f : [a,b] \to \Re$ dan $\alpha : [a,b] \to \Re$ naik monoton pada $[a,b]$. Jika P partisi pada $[a,b]$ maka berlaku

$$L(f,P,\alpha) \le S(f,P,\alpha) \le U(f,P,\alpha)$$

Khususnya jika f terbatas pada $[a,b]$ yaitu $m \le f(x) \le M$ untuk setiap $x \in [a,b]$ maka berlaku

$$m(\alpha(b) - \alpha(a)) \le L(f,P,\alpha) \le S(f,P,\alpha)$$
$$\le U(f,P,\alpha) \le M(\alpha(b) - \alpha(a))$$

Bukti :

Misalkan $P = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$ partisi pada $[a,b]$ dan $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ dan $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ untuk setiap $i = 1,2,3,...,n$ maka berlaku

$$m_i \le f(x_i^*) \le M_i$$

Sehingga dapat ditulis

$m_1 + m_2 + ... + m_n \le f(x_1^*) + f(x_2^*) + ... + f(x_n^*)$ atau $\le M_1 + M_2 + ... + M_n$

$\sum_{i=1}^{n} m_i \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \le \sum_{i=1}^{n} M_i$ dan jika dikalikan $\Delta_i \alpha$ pada tiap ruas dengan $\Delta_i \alpha$ >0

Diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i \alpha \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta_i \alpha \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i \alpha$$

yang sama artinya dengan

$$L(f, P, \alpha) \le S(f, P, \alpha) \le U(f, p, \alpha)$$

Dengan memperhatikan pertidaksamaan $m \le m_i \le f(x_i^*) \le M_i \le M$ maka diperoleh

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} m \Delta_i \alpha \le \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i \alpha \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta_i \alpha \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i \alpha \le \sum_{i=1}^{n} M \Delta_i \alpha$$

$$\Leftrightarrow m((\alpha(x_1) - \alpha(x_0)) + (\alpha(x_2) - \alpha(x_1)) + ... + (\alpha(x_n) - \alpha(x_{n-1})))$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i \alpha \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta_i \alpha \le$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i \alpha \le M$$
$$((\alpha(x_1) - \alpha(x_0)) + (\alpha(x_2) - \alpha(x_1)) + ... + (\alpha(x_n) - \alpha(x_{n-1})))$$
$$\Leftrightarrow m(\alpha(x_n) - \alpha(x_0)) \le \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i \alpha$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta_i \alpha \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i \alpha \le M(\alpha(x_n) - \alpha(x_0))$$
$$\Leftrightarrow m(\alpha(b) - \alpha(a)) \le L(f,P,\alpha)$$
$$\le S(f,P,\alpha) \le U(f,P,\alpha) \le M(\alpha(b) - \alpha(a))$$

Teorema 3

Diberikan fungsi $f:[a,b]\to\Re$ dan $\alpha:[a,b]\to\Re$ naik monoton pada $[a,b]$. Jika P_1 dan P_2 masing-masing partisi pada $[a,b]$ dan $P_1\subset P_2$ maka

$$L(f,P_1,\alpha)\le L(f,P_2,\alpha)\le U(f,P_2,\alpha)\le U(f,P_1,\alpha)$$

Bukti :

Dibentuk jumlah Rieman Stieltjes atas dan jumlah Rieman Stieltjes bawah untuk tiap partisi P_1 dan P_2 pada $[a,b]$ dengan $P_1\subset P_2$

$$L(f,P_1,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} m_{i1}\Delta_i\alpha,$$

$$L(f,P_2,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} m_{i2}\Delta_i\alpha,$$

$$U(f,P_1,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} M_{i1}\Delta_i\alpha,$$

$$U(f,P_2,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} M_{i2}\Delta_i\alpha,$$

Dimana

$m_{i1}=\inf\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\subset P_1\}$ dan

$M_{i1}=\sup\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\subset P_1\}$

$m_{i2}=\inf\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\subset P_2\}$ dan

$M_{i2}=\sup\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\subset P_2\}$

Seperti diketahui bahwa $P_1\subset P_2$ maka partisi P_1 akan termuat dalam P_2 sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i1}\Delta_i\alpha\le\sum_{i=1}^{n} m_{i2}\Delta_i\alpha\le\sum_{i=1}^{n} M_{i2}\Delta_i\alpha\le\sum_{i=1}^{n} M_{i1}\Delta_i\alpha$$

atau

$$L(f,P_1,\alpha)\le L(f,P_2,\alpha)\le U(f,P_2,\alpha)\le U(f,P_1,\alpha)$$

Definisi 5

Jika fungsi $f:[a,b]\to\Re$ terbatas dan $\alpha:[a,b]\to\Re$ naik monoton pada $[a,b]$ maka:

i). Batas atas terkecil (bat) L (f,α) atau $\sup\{L(f,P,\alpha):P\in\pi[a,b]\}$ ditulis singkat dengan $I=\underline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x)$ disebut integral bawah Riemann Stieltjes fungsi *f* terhadap α

ii). Batas bawah terbesar (bbt) U (f,α) atau $\inf\{U(f,P,\alpha):P\in\pi[a,b]\}$ ditulis singkat dengan $J=\overline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x)$ disebut integral atas Riemann Stieltjes fungsi *f* terhadap α

2. Syarat Fungsi Terintegral Riemann Stietjes

Definisi 6

Jika fungsi $f:[a,b]\to\Re$ terbatas dan $\alpha:[a,b]\to\Re$ naik monoton pada $[a,b]$, dikatakan terintegral Riemann-Stieltjes terhadap α pada $[a,b]$ ditulis singkat dengan $f\in RS[\alpha]$ jika $I=J$

Selanjutnya nilai $I=J=\int_a^b f(x)\,d\alpha\,(x)$ disebut Integral Riemann Stieltjes fungsi *f* terhadap α pada $[a,b]$ cukup ditulis $RS[\alpha]$. Jika diambil $\alpha[x]=x$ maka Integral Riemann merupakan kejadian khusus dari Integral Riemann Stieltjes.

Sifat-sifat Dasar Integral Riemann Stieltjes

Teorema 4 (Sifat Linear)

Jika *f* dan $g\in RS(\alpha)$ pada $[a,b]$ dan k bilangan riil maka $k\,f\in RS(\alpha)$ dan $f+g\in RS(\alpha)$ pada $[a,b]$, dan berlaku

(i). $\int_a^b kf\,d\alpha=k\int_a^b f\,d\alpha$

(ii). $\int_a^b (f+g)\;d\alpha(x)=\int_a^b f\;d\alpha+\int_a^b g\;d\alpha$

Bukti :

Diberikan sembarang $\varepsilon>0$. Karena $f,g\in RS(\alpha)$ pada $[a,b]$ maka terdapat partisi P_1 dan P_2 pada $[a,b]$ sehingga

$$U(f,P_1,\alpha)-L(f,P_1,\alpha)<\frac{\varepsilon}{2(|k|+1)}\text{ dan}$$

$$U(g,P_2,\alpha)-L(g,P_2,\alpha)<\frac{\varepsilon}{2}$$

Ambil $P=P_1\cup P_2$ maka P merupakan partisi penghalus P_i, $i=1,2$ pada $[a,b]$ sehingga berlaku

$$L(f,P_1,\alpha)\le L(f,P,\alpha)\le U(f,P,\alpha)\le U(f,P_1,\alpha)$$

$$L(f,P_2,\alpha)\le L(f,P,\alpha)\le U(f,P,\alpha)\le U(f,P_2,\alpha)$$

Oleh karena itu diperoleh

(i).
$$\begin{aligned}U(kf,P)-L(kf,P)&\le U(kf,P_1)-L(kf,P_1)\\&\le|k|(U(f,P_1)-L(f,P_1))\\&<|k|\frac{\varepsilon}{2(|k|+1)}<\varepsilon\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $k\,f\in RS(\alpha)$ pada $[a,b]$ dan berlaku

$$\int_a^b kf\,d\alpha = \sup\{L(kf,P,\alpha): P\in\pi[a,b]\}$$
$$= k\cdot\sup\{L(f,P,\alpha): P\in\pi[a,b]\}$$
$$= k\cdot\int_a^b f\,d\alpha \text{ jika } k>0$$

$$\int_a^b kf\,d\alpha = \sup\{L(kf,P,\alpha): P\in\pi[a,b]\}$$
$$= k\cdot\inf\{U(f,P,\alpha): P\in\pi[a,b]\}$$
$$= k\cdot\int_a^b f\,d\alpha \text{ jika } k<0$$

(ii). $$U(f+g,P,\alpha)-L(f+g,P,\alpha)=U(f,P,\alpha)$$
$$+U(g,P,\alpha)-\left(L(f,P,\alpha)+L(g,P,\alpha)\right)$$
$$=U(f,P,\alpha)-L(f,P,\alpha)\;+\;U(g,P,\alpha)-L(g,P,\alpha)$$
$$\le U(f,P_1,\alpha)-L(f,P_1,\alpha)+U(g,P_1,\alpha)-L(g,P_1,\alpha)$$
$$<\frac{\varepsilon}{s(|k|+1)}+\frac{\varepsilon}{2}$$
$$<\varepsilon$$

Terbukti bahwa $f+g\in RS(\alpha)$ pada $[a,b]$ dan berlaku

$$\int_a^b (f+g)\,d\alpha = \sup\{L(f+g,P,\alpha): P\in\pi[a,b]\}$$
$$=\sup\{L(f,P,\alpha): P\in\pi[a,b]\}$$
$$+\sup\{L(g,P,\alpha): P\in\pi[a,b]\}$$
$$=\int_a^b f\,d\alpha+\int_a^b g\,d\alpha$$

4. Penghitungan Integral Riemann-Stieltjes

Teorema 5 (Penghitungan Integral Riemann-Stieltjes)

Diasumsikan α naik monoton pada $[a,b]$ dan $\alpha'\in R[a.b]$ dan $f:[a,b]\to\Re$ terbatas. Fungsi $f\in RS(\alpha)$ pada $[a,b]$ jika dan hanya jika $f\alpha'\in R[a,b]$

Bukti :

Diketahui $\alpha'\in R[a,b]$ maka untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat partisi $P=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n=b\}$ pada $[a,b]$ dan berakibat $U(\alpha',P)-L(\alpha',P)<\varepsilon$

Menurut teorema nilai rata-rata maka dapat dipilih $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ sehingga

$$\Delta_i\alpha=\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})=\alpha'(t_i)\Delta_i x$$

Misalkan $m_i^*=\inf\{\alpha'(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}$ dan $M_i^*=\sup\{\alpha'(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}$ maka untuk setiap $s_i^*,t_i\in[x_{i-1},x_i]$ berlaku

$$m_i^*\le\alpha'(s_i^*)\le M_i^* \text{ dan } m_i^*\le\alpha'(t_i)\le M_i^*$$

Sehingga diperoleh

$$\sum_{i=1}^n\left|\alpha'(s_i^*)-\alpha'(t_i)\right|\Delta_i x\le\sum_{i=1}^n\left(M_i^*-m_i^*\right)\Delta_i x$$
$$=U(\alpha',P)-L(\alpha',P)<\varepsilon$$

Diambil $M=\sup\{|f(x)|: x\in[a,b]\}$ dan karena

$$\sum_{i=1}^n f(s_i^*)\Delta_i\alpha \;=\sum_{i=1}^n f(s_i^*)\alpha'(t_i)\Delta_i x$$

Maka diperoleh

$$|U(f,P,\alpha)-U(f\alpha',P)|=\left|\sum_{i=1}^n f(s_i^*)\Delta_i\alpha-\sum_{i=1}^n f(s_i^*)\alpha'(s_i^*)\Delta_i x\right|$$
$$=\left|\sum_{i=1}^n f(s_i^*)\left(\Delta_i\alpha-\alpha'(s_i^*)\Delta_i x\right)\right|$$
$$=\left|\sum_{i=1}^n f(s_i^*)\left(\alpha'(t_i)\Delta_i x-\alpha'(s_i^*)\Delta_i x\right)\right|$$
$$\le M\sum_{i=1}^n\left|\left(\alpha'(s_i^*)-\alpha'(t_i)\right)\right|\Delta_i x$$
$$<M\varepsilon$$

Sehingga $U(f,P,\alpha)\le U(f\alpha',p)+M\varepsilon$

Dan berakibat $\overline{\int_a^b} f\,d\alpha\le\overline{\int_a^b} f\,\alpha'\,dx+M\varepsilon$

Dan berlaku untuk setiap $\varepsilon>0$ maka

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha=\overline{\int_a^b} f\,\alpha'\,dx$$

Demikian juga berlaku $\underline{\int_a^b} f\,d\alpha\le\underline{\int_a^b} f\,\alpha'\,dx+M\varepsilon$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon>0$ maka

$$\underline{\int_a^b} f\,d\alpha=\underline{\int_a^b} f\,\alpha'\,dx$$

Dari (1) dan (2) maka $\int_a^b f\,d\alpha=\int_a^b f\,\alpha'\,dx$ yaitu $f\in RS(\alpha)$ pada $[a,b]$ jika dan hanya jika $f\alpha'\in R[a,b]$ ∎

Teorema 6 (Integral Parsial Rieman-Stiltjes)

Diberikan $F,G:[a,b]\to\Re$ yang berturut-turut mempunyai turunan pada $[a,b]$. Jika $F'=f\in R[a,b]$ dan $G'=g\in R[a,b]$ maka:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Bukti :

Didefinisikan fungsi $H(x) = F(x)G(x)$, karena *F* dan *G* mempunyai turunan, maka :

i. dan G kontinu pada $[a,b]$ sehingga $F, G \in R[a,b]$, dan

ii. mempunyai turunan pada $[a,b]$ dengan $H' = FG' + F'G = Fg + fG$

Menurut teorema fundamental kalkulus berakibat

$$\int_a^b (F(x)g(x) + f(x)G(x))dx = H(b) - H(a)$$

$$= F(b)G(b) - F(a)G(a)$$

Berakibat

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx$$

Dengan demikian teorema terbukti. ■

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan maka kesimpulan dalam penelitian ini adalah:

1. Integral Riemann Stieltjes adalah perluasan dari integral Riemann, dimana Integral Riemann merupakan pengkhususan dari integral Riemann Stieltjes.
2. Fungsi *f* terintegral Riemann Stieltjes pada α jika $f : [a,b] \to \Re$ dan $\alpha : [a,b] \to \Re$ naik monoton pada $[a,b]$ dan fungsi *f* kontinu.
3. Jika fungsi *f* dan *g* terintegral Riemann Stieltjes, dan $k \in \Re$ maka fungsi $f + g$, kf dan fg terintegral Riemann Stieltjes.
4. Jika fungsi *f* dan α memiliki titik diskontinu berserikat maka *f* tidak terintegral Riemann Stieltjes terhadap α

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G., (1994), *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons, USA

Gordon, R, A., (1994), *The Integrals Of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock., Graduate Studies In Mathematics 4*, Volume 4., American Mathematical Society,USA.

Hutahaean, E., (1989), *Analisis Real II*, Penerbit Karunika, Universitas Terbuka, Jakarta.

Hutahaean, Leithold., (1986), *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik,* edisi kelima jilid 1. Erlangga, Jakarta.

Jain, P. K. and Gupta, V. P., (1986), *Lebesgue Measure and Integration*. Wiley Eastern Limited, New Delhi.

Muslich., (2005), *Analisis Real II*, Lembaga Pengembangan Pendidikan,Surakarta.

Purcell, Edwin J, Varberg, Rigdon., (2003). *Kalkulus,* edisi kedelapan jilid 1. Erlangga, Jakarta.

Royden, H, L., (1989), *Real Analysis*, Third Edition, Macmillan Publishing Company, New York.

Soeparna, D., (2006), *Pengantar Analisis Real*, Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Soeparna, D., (2006), *Pengantar Analisis Abstrak*, Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Soemantri, R., (1988), *Analisis Real I*, Karunia, Jakarta.