Jurnal Barekeng
Vol. 7 No. 1 Hal. 31 – 35 (2013)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

ALJABAR-*C** KOMUTATIF

Commutative C-algebra*

HARMANUS BATKUNDE
Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Maluku
e-mail: batkunde@yahoo.com

ABSTRACT

These notes in this paper will discuss about *C**-algebras commutative and its properties. The theory of algebra-*, Banach-* algebra, *C**-algebras and *-homomorphism are included. We also give some examples of commutative *C**-algebras. We shall prove and discuss some important properties of commutative *C**-algebras and *-homomorphism.

Keywords : **-homomorphism, C*-algebras, commutative C*-algebras*.

PENDAHULUAN

Banyak konsep dalam analisis fungsional maupun aljabar telah memberikan banyak sumbanagan dalam pengembangan ilmu matematika, baik yang diterapkan langsung maupun yang memperkaya teori-teori matematika yang terus dipakai dalam pengembangan teori lainnya.

Aljabar-*C** (dibaca: aljabar C bintang/star) adalah salah satu konsep lanjut yang dihasilkan dari tinjauan-tinjauan lanjut dari konsep-konsep pada analisis fungsional dan konsep operator aljabar. Lebih lanjut berbagai teori dasar dari aljabar-*C** akan turut dijelaskan dalam penulisan ini, salah satunya adalah aljabar-C* komutatif. Beberapa sifat maupun syarat suatu aljabar-C* dapat dikelompokan dalam aljabar-C* komutatif akan dibahas sekaligus akan ditunjukkan beberapa contoh dari aljabar-C* komutatif.

TINJAUAN PUSTAKA

Penelitian mengenai aljabar-C* dimulai dengan oleh Werner Heisenberg dan dalam suatu pengembangan lebih lanjut yang lebik matematik dari Pasqal Jordan sekitar tahun 1933. [4]

Selanjutnya John Von Neumann mencoba menyusun kerangka umum aljabar ini yang kemudian diterbitkan dalam kumpulan tulisan pada operator ring. Tulisan ini disebut sebagai kelas khusus dari aljabar-*C** yang dikenal sebagai aljabar Von Neumann. [7]

Sekitar tahun 1940an, C. E. Rickart mendeskripsikan aljabar-B* yang kemudian dikenal sebagai aljabar Banach-* [9]. Kemudian di tahun yang sama yaitu tahun 1943, penelitian dari Israel Gelfam dan Mark Naimark menghasilkan suatu karakterisasi abstrak dari aljabar-*C**, yang kemudian berlanjut dengan aljabar-C* komutatif. [3]

Definisi 1. (Ruang norm, ruang Banach)

Misalkan X adalah suatu ruang vektor. Suatu fungsi $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi:

1) $\|x\| \geq 0$; untuk setiap $x \in X$;
   $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$;
2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$; untuk setiap $x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$;
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; untuk setiap $x, y \in X$;

disebut **norm** pada X dan pasangan $(\|\cdot\|, X)$ disebut **ruang norm**. Lebih lanjut, ruang norm yang lengkap (terhadap normnya) disebut **ruang Banach.**

Definisi 2. (Fungsional linear terbatas, ruang dual)

Suatu **fungsional linear** f adalah suatu pemetaan linear dengan domain suatu ruang vector X dan *range*-nya berupa lapangan K, dengan demikian :

$$f : D(f) \to K.$$

Di sini, $K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$. Jika ada $c \in \mathbb{R}$

sehingga $|f(x)| \leq c\|x\|$ dengan $x \in X$ maka f disebut **fungsional linear terbatas**.

Himpunan semua fungsional linear terbatas di X membentuk suatu ruang norm dengan norm yang didefinisikan oleh

$$\|f\| = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\in X, \|x\|=1} |f(x)|.$$

Himpunan ini disebut **ruang dual** dari X dan dinotasikan dengan X^*

Definisi 3. (Aljabar, aljabar komutatif)

Aljabar A atas lapangan K dengan sifat

$$x, y \in A, \text{ maka } xy \in A,$$

yang memenuhi sifat-sifat:

(1) $(xy)z = x(yz)$;

(2) $x(y+z) = xy + xz$;
$(x+y)z = xy + yz$;

(3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$;

untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $\alpha \in K$. Dalam hal ini $K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$.

Lebih lanjut A disebut komutatif jika perkaliannya komutatif, yaitu untuk setiap $xy \in A$ berlaku:

$$xy = yx,$$

dan A disebut aljabar dengan elemen satuan jika terdapat suatu $e \in A$ sehingga untuk setiap $y \in A$ berlaku:

$$ex = xe = x,$$

e merupakan elemen satuan.

Definisi 4. (Aljabar bernorm, aljabar Banach)

Misalkan A adalah suatu ruang norm, jika A adalah aljabar, maka A disebut aljabar bernorm. Dimana A merupakan suatu aljabar, sedemikian hingga untuk setiap $x, y \in A$, berlaku:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|,$$

dan jika A memiliki elemen satuan e,

$$\|e\| = 1.$$

Aljabar bernorm yang lengkap (terhadap normnya) disebut **aljabar Banach.**

Definisi 5. (involusi, aljabar-*, aljabar Banach-*)

Suatu pemetaan $* : A \to A$ $(a \mapsto a^*)$, dengan A adalah ruang vektor atas lapangan K, disebut **involusi** jika memenuhi sifat:

1. $x^{**} = x$;
2. $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha} x^* + \bar{\beta} y^*$;
3. $(xy)^* = y^* x^*$;

untuk setiap $x, y \in A$ dan $\alpha, \beta \in K$.

Suatu aljabar yang dilengkapi involusi disebut aljabar-* (baca: aljabar bintang/star) **.**

Sedangkan aljabar Banach yang dilengkapi dengan involusi dan memenuhi sifat:

4. $\|x^*\| = \|x\|$,

disebut **Aljabar Banach-***.

Definisi 6.

Misalkan A adalah aljabar-*. Maka $x \in A$ disebut

Self-adjoint jika $x = x^*$.

Normal jika $xx^* = x^*x$.

Proyeksi jika x self adjoint dan $x^2 = x$.

Isometri parsial jika x^*x adalah proyeksi.

Isometri jika $x^*x = 1$.

Coisometri jika $xx^* = 1$.

Uniter jika x adalah isometri dan coisometri.

Definisi 7.

Suatu **fungsional linear multiplikatif** pada suatu aljabar Banach tak nol A adalah homomorfisma tak nol dari A ke $\mathbb{C}$. Himpunan semua funsional linear multiplikatif pada A disebut **ruang ideal maksimal**, dan dinotasikan dengan $\Omega(A)$.

Teorema 8.

Misalkan A adalah aljabar Banach komutatif dengan elemen satuan,

1) Jika $\phi \in (A)$, maka $\|\phi\| = 1$.
2) Ruang $\Omega(A)$ tak kosong, dan pemetaan $\phi \mapsto ker(\phi)$ adalah suatu bijeksi dari $\Omega(A)$ pada pada himpunan semua ideal maksimal dari A.

Bukti.

1) Andaikan $\phi \in \Omega(A)$ dan $a \in$ A sedemikian hingga $\|a\| < 1 = \phi(a)$. Misalkan $b = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$. Maka $a + ab = b$, dan
$$\phi(b) = \phi(a) + \phi(a)\phi(b) = 1 + \phi(b).$$
Hal ini tidaklah mungkin. Jadi, $\|\phi\| \leq 1$. Karena $\phi(1) = 1$, maka terbukti bahwa $\|\phi\| = 1$.

2) Misalkan $\phi \in \Omega(A)$, berlaku bahwa $M = ker\phi$ adalah suatu ideal tutup dari kodimensi 1 pada A, dengan demikan merupakan maksimal. Jika $\phi_1, \phi_2 \in \Omega(A)$ dan $ker\phi_1 = ker\phi_2$, maka untuk setiap $a \in A, a - \phi_2(a) \in ker\phi_1$. Hal ini mengakibatkan $\phi_1(a - \phi_2(a)) = 0$ atau $\phi_1(a) = \phi_2(a)$. Ini menunjukkan bahwa pemetaan ini satu-satu.
Sebaliknya, jika M adalah ideal maksimal, maka $d(M, 1) \geq 1$ karena bola buka satuan dengan pusat 1, memuat elemen-elemen yang dapat dibalik, sehingga closure dari M tetap tidak memuat 1.
Kemudian, dapat dilihat bahwa closure juga merupakan ideal, lebih lanjut merupakan ideal sejati. Disimpulkan bahwa M sendiri tutup. Jadi kuosien A/M adalah aljabar Banach komutatif sederhana, dan

karena satu-satunya aljabar Banach komutatif sederhana adalah $\mathbb{C}$ maka pemetaan kuosien ϕ memberikan suatu homomorfisma kontinu dari $A \to \mathbb{C}$. Lebih lanjut, pemetaan ini bijektif.
Untuk melihat bahwa $\Omega(A)$ tak kosong, kita asumsikan $A \neq \mathbb{C}$, (jika tidak, identifikasi A dengan $\mathbb{C}$ menghasilkan homomorfisma tak nol) jadi A tidak sederhana.
Misalkan I adalah suatu ideal sejati dari A. Karena A memiliki identitas, maka terdapat suatu ideal sejati maksimal dari A yang memuat I. ■

Definisi 9. (aljabar -*C)**

Suatu aljabar Banach-* yang memenuhi:

$$\|x^*x\| = \|x\|^2,$$

disebut **aljabar -*C****.
Persamaan (6) disebut aksioma-C* atau kondisi -C*.

Lebih lanjut dapat dilihat bahwa untuk suatu aljabar Banach-* A, involusinya adalah isometrik, yaitu:

$$\|x - y\| = \|(x - y)^*\| = \|x^* - y^*\|.$$

Contoh 10.

1. Diberikan suatu ruang Hilbert kompleks H dan $\mathcal{B}(H)$ adalah himpunan semua operator linier terbatas pada H. $\mathcal{B}(H)$ adalah aljabar-C*. Lebih lanjut, setiap subaljabar-* dari $\mathcal{B}(H)$ yang tertutup terhadap normnya merupakan aljabar-C*, aljabar-C* ini disebut aljabar-C* konkrit.
2. Misalkan X adalah suatu ruang Hausdorff kompak local dan $C_0(X)$ adalah himpunan semua fungsi-fungsi kontinu yang bernilai 0 saat menuju tak hingga. Definisikan $f^*(t) = \overline{f(t)}$ (untuk $t \in X$). Maka $C_0(X)$ adalah aljabar-*. Dengan $\|f\| = \mathrm{Sup}_{t\in X}|f(t)|$, $C_0(X)$ adalah aljabar-C*. Lebih lanjut, $C_0(X)$ memiliki elemen satuan jika dan hanya jika X kompak.

Definisi 11. (Homomorfisma-*)

Jika A_1 dan A_2 masing-masing adalah aljabar-C*, suatu **homomorfisma-*** $\phi: A_1 \to A_2$ adalah suatu homomorfisma aljabar sedemikian sehingga

$$\phi(x^*) = \phi(x)^*; x \in A_1.$$

Lebih lanjut, homomorfisma-* yang bijektif dari A_1 ke A_2 disebut **isomorfisma.**

Proposisi 12.

Jika A adalah aljabar-C*, maka proyeksi taknol memiliki norm 1. Lebih lanjut jika x uniter, maka

$$\sigma(x^{-1}) = \{\lambda^{-1}: \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Bukti.

Jika x adalah proyeksi taknol, maka $\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|x^2\| = \|x\|$, dengan demikian $\|x\| = 1$. Jika x uniter maka $xx^* = 1$ (ini adalah invertible dengan involusi sebagai inversnya) ■

Proposisi 13.

Terdapat paling banyak satu norm pada suatu aljabar-* A yang membuat A menjadi suatu aljabar-C*.

Bukti.

Misalkan $\|\cdot\|_1$ dan $\|\cdot\|_2$ adalah dua norm di aljabar-* A yang membuatnya menjadi suatu aljabar-C*, maka

$$\|x\|_i^2 = \|x^2x\| = \sup\{|\lambda|: \lambda \in \sigma(x^*x)\}; \mathrm{i} = 1{,}2.$$

Dengan demikian $\|x\|_1$ dan $\|x\|_2$. ■

Proposisi 14.

Misalkan A adalah suatu aljabar-C* dan $x \in A$, dimana x self-adjoint, maka $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$. Jika $u \in A$ uniter, maka $\sigma(u)$ subhimpunan dari suatu lingkaran satuan.

Bukti.

Misalkan u uniter dalam suatu aljabar-C* A dengan elemen satuan dan $\lambda \in \sigma(x)$.
Karena $\|u\|^2$=$\|u^*u\| = \|1\|, |\lambda| \leq 1$. Perhatikan bahwa $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1})$. Karena $u^{-1} = u^*$ uniter, kita simpulkan bahwa $|\lambda| = 1$. Untuk $x \in A$ uniter, dengan mempertimbangkan $\widetilde{A}$, kita asumsikan A memiliki elemen satuan.
Fungsi $\exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}$. Dapat dilihat bahwa $u = \exp(ix)$ uniter (dengan $u^* = \exp(-\mathrm{i}x)$),
Jika $\lambda \in \sigma(x)$ dan $b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^n (x-\lambda)^{n-1}}{n}$, maka

$$e^{ix} - e^{i\lambda} = \left(e^{i(x-\lambda)} - 1\right)e^{i\lambda}$$
$$= (x - \lambda)be^{i\lambda}.$$

Karena b komutatif dengan x, dan $x - \lambda$ tidak invertible, $\exp(ix) - e^{i\lambda}$. Dengan demikian $|e^{i\lambda}| = 1$, dan oleh karena itu $\lambda \in \mathbb{R}$. Dengan kata lain, $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$. ■

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 15.

Misalkan A adalah aljabar Banach komutatif.

1. Jika $\phi \in \Omega(A)$, maka $\|\phi\| = 1$
2. $\Omega(A)$ tak kosong, dan pemetaan $\phi \mapsto \ker(\phi)$ mendefinisikan suatu bijeksi dari $\Omega(A)$ ke himpunan semua ideal maksimal dari A.

Bukti.

1. Andaikan $\phi \in \Omega(A)$ dan $a \in A$ sedemikian sehingga $\|a\| < 1 = \phi(a)$. Misalkan $b = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$.
Maka $a + ab = b$, dan
$$\phi(b) = \phi(a) + \phi(a)\phi(b) = 1 + \phi(b).$$
Kontradiksi, jadi $\|\phi\| \leq 1$. Karena $\phi(1) = 1$, dengan demikian terbukti bahwa $\|\phi\| = 1$.

2. Misalkan $\phi \in \Omega(a)$, maka berlaku bahwa $M = \ker(\phi)$ adalah ideal tutup kodimensi 1 dari A, dengan demikian merupakan suatu maksimal.
   Jika $\phi_1, \phi_2 \in \Omega(A)$ dan $\ker(\phi_1) = \ker(\phi_2)$, maka untuk setiap $a \in A, a - \phi_2(a) \in \ker(\phi_1)$. Hal ini mengakibatkan $\phi_1(a) = \phi_2(a)$, atau pemetaannya satu-satu.
   Sebaliknya, jika M adalah suatu maksimal ideal, maka $(M, 1) \geq 1$. Karena bola buka satuan dengan pusat 1 hanya memuat elemen-elemen yang memiliki invers, maka berlaku bahwa closure dari M tidak termuat.
   Perhatikan bahwa closure adalah sebuah ideal, jadi merupakan ideal sejati.
   Dengan demikian disimpulkan bahwa M tutup, sehingga A/M adalah suatu aljabar Banach komutatif sederhana.
   Diketahui bahwa $A/M = \mathbb{C}$. Jadi pemetaaan quotient membrikan suatu homomorfisma dari $A \to \mathbb{C}$ dengan $\ker(\phi) = M$. Lebih lanjut pemetaan ini bijektif. Selanjutnya dapat dilihat bahwa $\Omega(A)$ tak kosong. ■

Proposisi 16.

Misalkan A adalah aljabar-C* dan $x \in A$ normal. Maka

$$r(x) = \|x\|.$$

Bukti.

Aksioma-C* mengakibatkan $\|x^*x\| = \|x\|^2$. Perhatikan juga bahwa xx^* adalah self-adjoint. Dengan demikian diperoleh $\|(x^*x)^2\| = \|x^*x\|^2 = \|x\|^4$. Dengan induksi matematika diperoleh $\left\|(x^*x)^{2^n}\right\| = \|x\|^{2^{n+1}}$.

$$\begin{aligned}
r(x) &= \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \|x^{2n}\|^{2^{-n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \|x^{2n}\|^{2^{(-n-1)+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\|((x^*)^{2n}x^{2n})^{2^{-n-1}}\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\|((x^*x)^{2n})^{2^{-n-1}}\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\|(x^*x)^{2^{-1}}\right\| \\
&= \|x^*x\|^{\frac{1}{2}} \\
&= (\|x\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|x\|.
\end{aligned}$$
■

Definisi 17. (Aljabar-C* satuan dan komutatif)

Suatu aljabar-C* disebut a**ljabar-C* satuan** jika memiliki elemen satuan. Jika A adalah aljabar-C* dalamnya berlaku sifat komutatif perkalian yakni,

$$xy = yx$$

disebut **aljabar-C* komutatif.**

Contoh 18.

1. $M_n(\mathbb{C})$ yakni himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ adalah aljabar C-* dengan operator norm dan involusi Hermitian. Lebih lanjut. $M_n(\mathbb{C})$ bukan merupakan aljabar-C* komutatif, atau disebut aljabar-C* nonkomutatif.

2. $C_0(X)$ adalah aljabar-C*, dan merupakan aljabar-C* komutatif.

Jika A adalah suatu aljabar-C*, misalkan

$$\widehat{A} = \{\phi: A \to \mathbb{C} \,|\phi \text{ adalah homomorfisma tak nol}\}.$$

Misalkan X kompak lokal dan $x \in X$, maka untuk $\phi_x: C_0(x) \to \mathbb{C}$, yang didefinisikan oleh

$$\phi_x(b) = b(x),$$

adalah suatu homomorfisma. Lebih lanjut, semua homomorfisma dari $C_0(x)$ adalah dalam bentuk ini.

Teorema 19.

Jika A adalah suatu aljabar-C* komutatif, maka $\widehat{A}$ kompak lokal dalam topologi-lemah*. Lebih lanjut, A isomorfik dengan $C_0(\widehat{A})$ terhadap pemetaan

$$f: A \to C_0(\hat{A}),$$

yang didefinisikan oleh

$$f_a(\phi) = \phi(a).$$

Bukti.

Sebagai catatan, perhatikan bahwa $\widehat{A}$ subhimpunan tertutup dari $\mathbb{C}^A$.
Jika A memiliki elemen satuan, maka setiap homomorfisma taknol memiliki norm = 1. Berdasarkan teorema Alaoglu-Birkhoff, maka $\widehat{A}$ kompak dalam topologi-lemah*.
Jika A tidak memiliki elemen satuan

Teorema 20. (Gelfan-Naimark)

Setiap aljabar-C* komutatif isomorfis dengan $C_0(X)$, dengan X adalah suatu ruang Hausdorff kompak.

Definisi 21. (Spektrum)

Misalkan A adalah suatu aljabar-C* satuan. Untuk $a \in A$, **spektrum** didefinisikan oleh

$$sp(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\lambda 1 - a \text{ tidak memiliki invers}\}.$$

Dapat dilihat bahwa $sp(a)$merupakan subhimpunan kompak dari $\mathbb{C}$. Diaktakan a positif jika a self-adjoint dan $sp(a) \subseteq [0, \infty)$. Definisikan suatu urutan parsial pada anggota-anggota self-adjoint dengan $a \leq b$ jika dan hanya jika $a - b$ positif.
Misalkan A adalah suatu himpunan normal ($a \in A, a^*a = aa^*$), dan C*$(a, 1)$ adalah subaljabar yang dibangun oleh a dan elemen satuan 1. Jika $\lambda \in sp(a)$, maka $\phi_\lambda(a) = \lambda$, secara tunggal mendefinisikan suatu homomorfisma-* dari C*$(a, 1)$ ke $\mathbb{C}$.

Teorema 22.

C*(a,1) adalah Aljabar-C* dan isomorfik dengan C$\big(sp(a)\big)$.

Bukti.

Jelas bahwa C*(a,1) adalah aljabar-C*.
Misalkan C*(a,1) $= X$, maka untuk setiap $\phi \in \hat{B}$ secara tunggal ditentukan oleh $\lambda_\phi = \phi(a)$. Lebih lanjut, $\phi(a) = \lambda$, perhatikan bahwa hal ini mengakibatkan $\phi(\lambda 1 - a) = 0$, dengan demikian $\lambda_\phi \in sp(a)$.
Selanjutnya, perhatikan juga untuk Pemetaan C*$(a, 1)$ ke $C\big(sp(a)\big)$; $\big(b \mapsto f_b\big)$, dimana $f_b(\lambda) = \phi_\lambda(b)$.
Jika $b = p(a, a^*)$; dengan p polinomial dua variabel koefisien kompleks, maka $\lambda \mapsto f_b(\lambda) = p\big(\lambda, \bar{\lambda}\big)$ kontinu, lebih lanjut kontinu untuk setiap b. Pemetaan $b \mapsto f_b$ ini adalah suatu homomorfisma-* dan kontinu.
Dengan demikian merupakan fungsi pada karena untuk setiap $\lambda \in sp(a)$ secara tunggal mendefinisikan $\phi_\lambda \in \widehat{B}$

Akibat 23.

Jika a normal, maka $\|a\| = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in sp(a)\}$.

Bukti.

Dari teorema sebelumnya maka dapat dilihat bahwa $f(a) \in A$ untuk setiap a normal dan $f: sp(a) \to \mathbb{C}$ kontinu.
Perhatikan bahwa

$$\lambda 1 - f(a) = (\lambda - f)(a),$$

Dengan demikian $sp\big(f(a)\big) \subseteq \text{range}(f)$. Lebih khusus, jika $\text{range}(f) \subseteq [0.\infty)$, maka $f(\text{a})$ positif. Kemudian karena a^*a selalu normal dan positif, definisikan

$$|a| = \sqrt{(a^*a)}$$

untuk setiap $a \in A$.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, kesimpulan yang dapat diambil yakni, Suatu aljabar-C* disebut **aljabar-*C** komutatif*** jika dalamnya berlaku sifat komutatif perkalian. Selain itu, setiap aljabar-C* komutatif isomorfis dengan $C_0(X)$, dengan X adalah suatu ruang Hausdorff kompak. Lebih lanjut, dengan menggunakan transformasi Gelfand konsep aljabar-C* dapat ditinjau lebih luas lagi terutama untuk aljabar-C* nonkomutatif.

DAFTAR PUSTAKA

Arveson, William, An Invitasion to C*-algebra, Springer-Verlag, New York, 1976, Graduate Text in Mathematics, No. 39.

Davidson, Kenneth R, (1996) C*-algebras by example, Fields Institute Monographs, vol.6, American Mathematical Society, Providence, RI,

Doran, Robert S; Belfi, Victor A. (1986), Characterization of C*-algebras: The Gelfand-Neimark Theorems, CRC press

Emch, G. (1972) Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, Wiley-Interscience

Landsman, N. P. (2003) Lectures Notes on C*-Algebras and K-Theory. Korteweg-de Vries Institute for Mathematics University of Amsterdam.

Lin, Huaxin, An Introductionto the classification of Amenable C*-algebras. World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd

Neumann, J. Von. (1961) Collected works. Vol.III. Rings of Operator, Pergamon Press, New York

Farah, Ilijas. C*-Algebras and Their Representations

Rickart, C. E. (1946) Banach Algebras with an Adjoint Operation. Ann. Of. Math (2) 47:528-550