Jurnal Barekeng
Vol. 8 No. 1 Hal. 25 – 30 (2014)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

ANALISIS PERBANDINGAN KOMULAN TERHADAP BEBERAPA JENIS DISTRIBUSI KHUSUS

Analysis of Comulans Comparative on some Types of Special Distribution

ABRAHAM ZACARIA WATTIMENA[1], VICTOR LEKATOMPESSY[2]
[1] *Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura*
Jl. Ir. M. Putuhena, KampusUnpatti, Poka-Ambon, Maluku
[2] *Karyawan BRI Cabang Ambon*
Jl. Diponegoro Ambon, Maluku
e-mail: [1]ampiwattimena@rocketmail.com

ABSTRAK

Dalam penelitian ini adalah berbicara tentang Distribusi, khususnya distribusi Kontinu. Dimana akan dicari komulan dari distribusi kontinu khususnya distribusi normal dan distribusi uniform, kemudian setelah mendapat komulan dari masing-masing distribusi, kemudian komulan dari kedua distribusi akan dibandingkan.

Kata kunci: *Distribusi, Distribusi Kontinu, Distribusi Normal, Distribusi Uniform, Komulan.*

PENDAHULUAN

Peluang (probabilitas) berawal dari sebuah perjudian yang dilakukan oleh matematikawan dan fisikawan Italy, yaitu Girolamo Cardan (1501 – 1576) yang ditulis dalam bukunya yang berjudul *Liber de Ludo Aleae* (Book On Games Of Changes) pada tahun 1565 yang banyak membahas tentang masalah perjudian. Peluang kemudian dibahas oleh para ahli hingga sekarang.

Distribusi normal adalah karya dari Abraham de Moivre yang diperkenalkan pertama kali pada tahun 1737, kemudian ditulis ulang pada tahun 1738 dengan judul *The Doctrime Of Chances* yang membahas tentang pendekatan distribusi binomial untuk n yang besar, kemudian dilanjutkan oleh Laplace dalam bukunya yang berjudul *Analytical Theory Of Probability* pada tahun 1812, yang sekarang dikenal dengan Teorema *De Moivre–Laplace*.

Berbeda dengan peluang yang berawal dari perjudian, statistika sendiri berawal dari kegiatan pengumpulan data yang dilakukan oleh John Grannt di Eropa pada tahun 1662, hal ini merupakan awal munculnya Statistika Deskriptif. Pada awal abad ke-19 diperkenalkan arti dari Statistika yakni ilmu mengenai pengumpulan dan klasifikasi data. Nama dan arti Statistika pertama kali diperkenalkan dalam bahasa Inggris oleh Sir John Sinclair, yang kemudian muncullah jenis-jenis distribusi yang lain yang salah satunya adalah distribusi uniform yang merupakan salah satu distribusi dengan bentuk distribusi diskrit maupun kontinu.

Dalam statistik, distribusi chi square termasuk dalam statistik nonparametrik. Distribusi nonparametrik adalah distribusi dimana besaran-besaran populasi tidak diketahui. Distribusi ini sangat bermanfaat dalam melakukan analisis statistik jika kita tidak memiliki informasi tentang populasi atau jika asumsi-asumsi yang dipersyaratkan untuk penggunaan statistik parametrik tidak terpenuhi. Sedangkan distribusi Normal adalah distribusi probabilitas yang paling banyak digunakan dalam berbagai analisis statistika, distribusi ini juga dijuluki kurva lonceng.

Distribusi normal dan distribusi uniform kerap digunakan dalam aplikasi-aplikasi statistik di dalam kehidupan sehari-hari. Dalam aplikasinya harus memenuhi ketentuan-ketentuan tertentu untuk menentukan jenis distribusi yang dipakai. Perbedaan antara distribusi normal dan distribusi uniform membuat tertarik peneliti untuk mengangkat masalah ini dalam penelitian dengan judul “Analisis Perbandingan Komulan Terhadap beberapa Distribusi Kontinu”.

TINJAUAN PUSTAKA

Istilah statistika awalnya berarti sekumpulan bilangan. Dewasa ini statistika merupakan istilah yang luas, yang keluasannya akan sulit dibayangkan oleh para perumus istilah. Kumpulan bilangan yang asli sekarang disebut data dan statistika berarti ilmu pengambilan keputusan (Dudewicz 1995).

Dalam ilmu statistika matematika, teori peluang (*probability theory*) merupakan dasar dan pengantar untuk penyusunan statistika lebih jauh, dimana dipakai pada penentuan selang untuk distribusi peluang yang terbagi atas distribusi peluang diskrit dan distribusi peluang kontinu (Bain 1991).

Dalam penelitian ini lebih ditekankan pada distribusi peluang kontinu khususnya pada distribusi normal dan distribusi *Chi Square.*

1. Deret Taylor

Bentuk umum:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \cdots$$

2. Deret Mclaurin

Deret Mclaurin merupakan deret taylor dengan $z_0 = 0$. Bentuk umum deret Mclaurin:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)z + \frac{f''(z_0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!}z^3 + \cdots$$

3. Fungsi Distribusi

Definisi 1

Jika himpunan semua kemungkinan nilai peubah acak *x* adalah himpunan hingga $x_1, x_2, ..., x_n$ atau tak hingga $x_1, x_2, ...$ maka *x*, disebut peubah acak deret, fungsi $f(x) = P(X = x)$, $x = x_1, x_2, x_3 ...$ yang dianggap peluang untuk setiap himpunan nilai *X*, yang akan disebut fungsi distribusi peluang.

Teorema 1

Suatu fungsi $P(X)$ adalah suatu fungsi peluang jika dan hanya jika memenuhi sifat-sifat berikut :

1. $0 \le P(X) \le 1$, untuk semua $x \in X$
2. $\sum_{i=1}^{\infty} P(X_i) = 1$, $P(X) = 0$, jika $\forall x \notin (x_1, x_2, ...)$

Definisi 2

Bila *X* suatu peubah acak, fungsi distribusinya didefinisikan sebagai :

$$F(x) = P(X \le x), \text{ untuk semua } x.$$

Teorema 2

Bila *X* suatu peubah acak, maka fungsi distribusi khususnya *F*(*x*), mempunyai sifat sebagai berikut :

1. $F(x)$ tidak turun yaitu $F(x) \le F(y)$, bila $x \le y$
2. $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ dan $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
   karena $P(X < \infty) = 1$ jadi $P(X < \infty) = 1$
3. $F(x)$ kontinu dari kanan yaitu:

$$\lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x), \forall x$$

3.1. Distribusi Normal

Distribusi normal sering disebut juga dengan distribusi Gauss, inilah distribusi peluang kontinu yang terpenting dan paling banyak digunakan. Grafiknya disebut kurva normal, berbentuk seperti lonceng. Pada tahun 1733, De Moivre menemukan persamaan matematika untuk kurva normal yang menjadi dasar dalam banyak teori statistika induktif.

Definisi 3

Suatu peubah acak x berdistribusi normal z dengan rata-rata μ dan variansi σ^2 mempunyai fungsi densitas:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

dimana $-\infty < X < \infty$

Distribusi normal dilambangkan dengan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dimana nilai dari distribusi normal z ditentukan oleh:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$$

Dengan mentransformasikan fungsi densitas terhadap z diperoleh fungsi densitas yang berbentuk:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(z^2)}$$

Untuk z dalam daerah $-\infty < z < \infty$

Berkaitan dengan sifat yang berlaku untuk sebuah fungsi densitas, dalam distribusi normal berlaku pula:

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1$

ii) $P(a < X < b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$

3.2. Distribusi Uniform

Definisi 4

Jika x peubah acak yang berdistribusi uniform, jika hanya jika x mempunyai fungsi densitas sebagai berikut:

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{, untuk } a \le x \le b \\ 0 & \text{, untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Dimana $-\infty < X < \infty$

Distribusi uniform dilambangkan dengan $X \sim UNIF\ (a, b)$

4. Mean Dan Variansi

Definisi 5

Jika *X* peubah acak kontinu dengan fungsi distribusi *F*(*x*), maka nilai harapan (mean) dari *X* diperoleh :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x P(X) dx$$

Teorema 3

Jika *X* peubah acak dengan fungsi distribusi *P*(*X*) dan *g*(*x*) adalah fungsi bernilai real, maka

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) P(X) dx$$

Definisi 6

Misalkan *X* peubah acak kontinu dengan fungsi distribusi *P*(*X*) maka momen ke-*k* dari *X* didefinisikan sebagai,

$$M_k^{'} = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k P(X) dx$$

Definisi 7
Misalkan X peubah acak kontinu dengan fungsi distribusi $P(X)$ maka momen pusat ke-k dari X didefinisikan sebagai :

$$M_k = E\left(X - E(X)\right)^k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(X - E(X)\right)^k P(X)dx$$

Teorema 4
Jika c suatu konstanta dan $g(x)$ dan $h(x)$ nilai harapannya ada maka

1. $E(c) = c$
2. $E(cg(x)) = c\,E(g(x))$
3. $E(g(x) + h(x)) = E(g(x)) + E(h(x))$

Definisi 8
Variansi dari peubah acak X didefinisikan sebagai

$$Var(X) = E(X - E(X))^2$$

Teorema 5
Jika X peubah acak dan nilai harapannya ada maka

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Teorema 6
Jika a, b konstanta-konstanta, maka

1. $Var(a) = 0$
2. $Var(aX) = a^2 Var(X)$
3. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

5. Fungsi Pembangkit Momen

Definisi 9
Jika X peubah acak diskrit maka momen ke-t

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e(X^{tx}P)dx$$

disebut fungsi pembangkit momen dari X, jika nilai harapannya ada untuk semua nilai t pada interval $-h<t<h$ dan $h > 0$.

Teorema 7
Jika fungsi pembangkit momen $M_x(t)$ dari peubah acak X ada untuk $|t| < h$ dan $h > 0$, maka

$$E(X^k) \text{ ada}$$

Dan

$$E(X^k) = \left.\frac{dM_x^k(t)}{dt^k}\right|_{t=0}$$

Teorema 8
Jika a, b sebagai konstanta dan $Y = aX + b$, maka

$$M_y(t) = e^{bt} M_x(at)$$

6. Fungsi Karakteristik

Definisi 10
Fungsi karakteristik dari peubah acak disebut X dan didefinisikan sebagai berikut

$$\phi_x(t) = E(e^{itx})$$
$$= E(\cos tX) + i\,E(\sin tX)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx\, P(X)dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \sin tx\, P(X)dx$$

untuk semua t

Teorema 9

1. Fungsi konstanta peubah acak X selalu ada
2. $\varphi_x(0) = 1,\ \varphi_x(t) = \overline{\varphi_x}(-t)$
3. $|\varphi_x(t)| \le 1$, untuk semua t

Teorema 10
Untuk sembarang konstanta a dan b berlaku

$$\varphi_{(ax+b)}(t) = e^{ibt}\varphi_x(at)$$

7. Komulan

Definisi 11
Untuk suatu peubah acak X dengan fungsi φ_x, maka komulan ke-j ditulis $\mathbf{K}_j$ dan X, didefinisikan sebagai koefisien dari $\frac{(it)^j}{j!}$ dengan ekspansi Taylor dari deret pangkat

$$\log(\varphi_x(t))$$

dimana

$$\varphi_x(t) = \exp\left(\mathbf{K}_1(it) + \frac{\mathbf{K}_2(it)^2}{2!} + \ldots + \frac{\mathbf{K}_j(it)^j}{j!} + \ldots\right)$$

$$\log(\varphi_x(t)) = \sum_{j>0} \frac{\mathbf{K}_j(it)^j}{j!}$$

dengan menggunakan deret pangkat $\exp(x)$ dimana :

$$x = it\,X$$

maka didapatkan

$$\varphi_x(t) = E(\exp(it\,X))$$
$$= E\left(1 + it\,X + \frac{(it\,X)^2}{2!} + \ldots\right)$$
$$= 1 + E(X)it + \frac{E(X^2)(it)^2}{2!} + \ldots$$

$$\varphi_x(t) = 1 + \sum_{j>0} \frac{E(X^j)(it)^j}{j!}$$

Jadi didapat

$$\log(\varphi_x(t)) = \log\left(1 + \sum_{j>0} \frac{E(X^j)(it)^j}{j!}\right)$$

dengan menggunakan persamaan Taylor, maka deret

$$\log(1 + X),$$

yaitu:

$$\log(1 + X) = \sum_{k>0} \frac{1}{k}(-1)^{k+1} x^k$$

maka dengan mengambil

$$x = \sum_{j>0} \frac{E(X^j)(it)^j}{j!}$$

didapatkan kesamaan

$$\log\left(\phi_x(t)\right)=\sum_{k>0}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\sum_{j>0}\frac{E(X^j)(it)^j}{j!}\right)^k$$

Dari Definisi 11, maka komulan dapat diturunkan dengan menyatakan koefisien persamaan berikut masing-masing untuk $j = 1,2,...$ dan $t = 0$

$$\sum_{j>0}\frac{\mathbf{K}_j(it)^j}{j!}=\sum_{k>0}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left\{\sum_{j>0}\frac{E(X^j)(it)^j}{j!}\right\}^k$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hubungan Antara Komulan dan Momen Suatu Fungsi Distribusi

Komulan dari suatu peubah acak x pada suatu fungsi distribusi memiliki hubungan dengan momen dari fungsi distribusi tersebut. Hubungan ini dapat dilihat pada Lemma 1. dan Lemma 2.

Lemma 1

1) $\mathbf{K}_1=E(X)$

2) $\mathbf{K}_2=E(X^2)-(E(X))^2$

3) $\mathbf{K}_3=E(X^3)-3E(X)E(X^2)+2(E(X))^3$

4) $\mathbf{K}_4=E(X^4)-4E(X)E(X^3)-3(E(X^2))^2$
$+12E(X^2)(E(X))^2-6E(X^4)$

Bukti

Dengan menggunakan Definisi 10 dan dengan menggunakan koefisien persamaan komulan, masing-masing $j = 1,2,3,...$ dan $t = 0$, diperoleh:

$$\sum_{j>0}\frac{k_j}{j!}(it)^j=\sum_{k>0}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left\{\sum_{j>0}\frac{E(X^j)(it)^j}{j!}\right\}^k$$

Untuk $j = 1$

$$\mathbf{K}_1(it)=\sum_{k>0}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\{E(X)it\}^k$$
$$=E(X)(it)-\frac{1}{2}(E(X)it)^2+...$$
$$\mathbf{K}_1=E(X)-\frac{1}{2}\left(E(x)^2\,it\right)+...$$

$\mathbf{K}_1=E(X)$ ■, untuk $t = 0$

Untuk $j = 2$

$$\mathbf{K}_2\frac{1}{2!}(it)^2=\sum_{k>0}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left\{E(X)it+\frac{E(X^2)(it)^2}{2!}\right\}^k$$
$$=\left(E(X)it+\frac{E(X^2)(it)^2}{2!}\right)-\frac{1}{2}\left(E(X)it+\frac{E(X^2)(it)^2}{2!}\right)^2+...$$
$$=\left(E(X)it+E\frac{E(X^2)(it)^2}{2!}\right)-$$
$$\frac{1}{2}\left((E(X))^2(it)^2+E(X)E(X^2)(it)^2+\left(\frac{E(X^2)(it)^2}{2!}\right)^2\right)+\ldots$$

$\mathbf{K}_2=E(X^2)-(E(X))^2$ ■, untuk $t = 0$

Untuk $j = 3$

$$\mathbf{K}_3\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3!}}(it)^3=\sum_{k>0}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left\{E(X)it+\frac{E(X^2)(it)^2}{2!}+\frac{E(X^3)(it)^3}{3!}\right\}^k$$
$$=E(X)it+\frac{E(X^2)(it)^2}{2!}+\frac{E(X^3)(it)^3}{3!}$$
$$-\frac{1}{2}\left\{E(X)it+\frac{E(X^2)(it)^2}{2!}+\frac{E(X^3)(it)^3}{3!}\right\}^2$$
$$+\frac{1}{3}\left\{E(X)it+\frac{E(X^2)(it)^2}{2!}+\frac{E(X^3)(it)^3}{3!}\right\}+...$$

$\mathbf{K}_3=E(X^3)-3E(X)E(X^2)+2(E(X))^3$ ■, untuk $t = 0$

Dengan cara yang sama diperoleh $k = 4$ dan seterusnya.

Lemma 2

1. $E(X)=K_1$
2. $E(X^2)=K_2+K_1^2$
3. $E(X^3)=K_3+3K_1K_2+K_1^3$
4. $E(X^4)=K_4+K_2^2+4K_1K_3+6K_1^2K_2+K_1^4$

Bukti

1. $E(X)=K_1$ (pembuktiannya jelas);
2. $E(X^2)=K_2+K_1^2$ (pembuktiannya jelas);
3. $E(X^2)=K_2+K_1^2$

$$E(X^3)=K_3+3E(X)E(X^2)-2\left[E(X)\right]^3$$
$$=K_3+3K_1(K_2+K_1^2)-2K_1^3$$
$$E(X^3)=K_3+3K_1K_2+K_1^3$$

4. Dengan cara yang sama pada bagian sebelumnya maka dapat dibuktikan bagian 4.■

Dari Lemma 1 dan Lemma 2, maka diperoleh hubungan antara komulan dan momen sebagai berikut :

$$E(X^k)=M_k'=\sum_{j=i}^{k}\binom{k-1}{j-1}M'_{k-j}K_j$$

4.2. Komulan dari Distribusi Normal

Untuk menentukan komulan ke-n dari distribusi normal, terlebih dahulu harus dihitung setiap momen $E(X^j)$ distribusi tersebut untuk $j = 1,2,....$ Berikut akan dihitung komulan dari distribusi normal untuk $j = 1$ dan $j = 2$ berlaku seterusnya untuk setiap j.

Diberikan peubah acak x dengan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ berdasarkan Definisi 3 diperoleh fungsi densitas

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

untuk x dalam daerah $-\infty < x < \infty$. Untuk nilai distribusi normal z

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

dapat dibentuk suatu fungsi karakteristik

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \text{dan } -\infty < z < \infty.$$

Dapat dilihat fungsi karakteristik $\phi(z)$ merupakan fungsi genap dengan

$$\phi(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-z)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \phi(z)$$

berdasarkan bentuk ini diperoleh

$$\phi'(z) = -z\phi(z)$$
$$\phi''(z) = (z^2-1)\phi(z)$$

Selanjutnya dapat dihitung nilai $E(Z)$ dan $E(Z^2)$ untuk kemudian dapat memudahkan dalam perhitungan momen distribusi normal.

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} z\phi(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} -(-z\phi(z))dz \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} (-z\phi(z))dz \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(z)dz \\
&= -\phi(z)|_{-\infty}^{\infty} \\
&= -\phi(\infty) - (-\phi(-\infty)) \\
&= -\phi(\infty) - (-\phi(\infty)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Z^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} z^2\phi(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} ((z^2-1)+1)\phi(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (z^2-1)\phi(z)dz + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi''(z)dz + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)dz \\
&= \phi'(z)|_{-\infty}^{\infty} + 1 \\
&= 0 + 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Untuk $j = 1,2$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

dengan mentransformasikan nilai z terhadap x diperoleh

$$x = \sigma z + \mu$$

dan

$$dx = \sigma dz$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + \mu)\phi(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma z\phi(z)dz + \int_{-\infty}^{\infty} \mu\phi(z)dz \\
&= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} z\phi(z)dz + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)dz \\
&= \sigma.0 + \mu.1 \\
&= 0 + \mu \\
&= \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + \mu)^2\phi(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma^2 z^2 + 2\sigma\mu z + \mu^2)\phi(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 z^2\phi(z)dz + \int_{-\infty}^{\infty} 2\sigma\mu z\phi(z)dz \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2\phi(z)dz \\
&= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} z^2\phi(z)dz + 2\sigma\mu \int_{-\infty}^{\infty} z\phi(z)dz \\
&\quad + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)dz \\
&= \sigma^2.1 + 2\sigma\mu.0 + \mu^2.1 \\
&= \sigma^2 + \mu^2
\end{aligned}$$

Berdasarkan Lemma 1 maka:

Untuk $j = 1$

$$\mathbf{K}_1 = E(X) = \mu$$

Untuk $j = 2$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_2 &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= (\mu^2 + \sigma^2) - (\mu)^2 \\
&= \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

4.3. Komulan dari Distribusi Uniform

Untuk menentukan komulan ke-n dari distribusi uniform, terlebih dahulu harus dihitung setiap momen $E(X^j)$ distribusi tersebut untuk $j = 1,2, \ldots$. Berikut akan dihitung komulan dari distribusi uniform untuk $j = 1$ dan $j = 2$ berlaku seterusnya untuk setiap j.

Diberikan peubah acak x dengan $X \sim UNIF(a,b)$ berdasarkan Definisi 4 diperoleh fungsi densitas

$$f(x;a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & untuk\ a \le x \le b \\ o, & untuk\ x\ yang\ lain \end{cases}$$

Untuk $j = 1,2$

$$E(X) = \int_a^b x\left(\frac{1}{b-a}\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{b-a}\right)\frac{x^2}{2}\Big|_b^b$$
$$= \left(\frac{1}{b-a}\right)\frac{(b^2-a^2)}{2}$$
$$= \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)}$$
$$= \frac{a+b}{2}$$
$$E(X^2) = \int_a^b x^2\left(\frac{1}{b-a}\right)dx$$
$$= \left(\frac{1}{b-a}\right)\frac{x^3}{3}\Big|_b^b$$
$$= \left(\frac{1}{b-a}\right)\frac{(b^3-a^3)}{3}$$
$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$
$$= \frac{(b^2+ab+a^2)(b-a)}{3(b-a)}$$
$$= \frac{(b^2+ab+a^2)}{3}$$

Berdasarkan Lemma 1 maka:
Untuk $j = 1$

$$\mathbf{K}_1 = E(X) = \frac{(a+b)}{2}$$

Untuk $j = 2$

$$\mathbf{K}_2 = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= \left(\frac{(b^2+ab+a^2)}{3}\right) - \left(\frac{(a+b)}{2}\right)^2$$
$$= \frac{(b^2+ab+a^2)}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}$$
$$= \frac{4(b^2+ab+a^2) - 3(a+b)^2}{12}$$
$$= \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}$$
$$= \frac{b^2-2ab-a^2}{12}$$
$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

4.4. Perbandingan Komulan dari Distribusi Normal dan Distribusi Uniform

Berdasarkan hasil perhitungan komulan dari distribusi normal pada subbab 4.2. dan hasil perhitungan komulan distribusi uniform pada subbab 4.3. diperoleh masing-masing nilai $\boldsymbol{K}_1$ dan $\boldsymbol{K}_2$ untuk kedua distribusi sebagai berikut:

Distribusi Normal

$$\boldsymbol{K}_1 = \mu \text{ dan } \boldsymbol{K}_2 = \sigma^2$$

dimana nilai $\boldsymbol{K}_1$ merupakan nilai rataan pada distribusi normal dan nilai $\boldsymbol{K}_2$ merupakan nilai variansi pada distribusi normal.

Distribusi Uniform

$$\boldsymbol{K}_1 = \frac{a+b}{2} \text{ dan } \boldsymbol{K}_2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

dimana nilai $\boldsymbol{K}_1$ merupakan nilai rataan pada distribusi uniform dan nilai $\boldsymbol{K}_2$ merupakan nilai variansi pada distribusi uniform.

Jadi nilai $\boldsymbol{K}_1$ pada kedua distribusi tersebut pada dasarnya adalah sama yaitu merupakan nilai rataan pada kedua distribusi, sedangkan yang membedakan hasil akhirnya berdasarkan perbedaan fungsi densitas masing-masing jenis distribusi. Demikian pula hal yang sama berlaku pada nilai $\boldsymbol{K}_2$ yang sama-sama merupakan nilai variansi dari kedua distribusi tersebut, perbedaan yang timbul merupakan akibat dari perbedaan fungsi densitas masing-masing jenis distribusi. Dan berlaku seterusnya pada nilai-nilai komulan yang lain untuk setiap j dengan $j = 1,2, \ldots$.

Perbedaan yang mendasar pada fungsi densitas kedua distribusi tersebut juga menentukan keefektifan perhitungan analisis komulan pada kedua distribusi. Pada distribusi normal dengan fungsi densitas lebih rumit mengharuskan mentransformasikan fungsi densitas x terhadap z membuat proses perhitungan komulan yang lebih panjang, sebaliknya jika dibandingkan dengan fungsi uniform yang fungsi densitasnya sederhana mengakibatkan perhitungan komulan pada fungsi uniform menjadi lebih singkat.

KESIMPULAN

Berdasarkan analisis komulan terhadap distribusi normal dan distribusi uniform yang telah dibahas pada bab sebelumnya, ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Nilai komulan ke-j untuk $j = 1,2, \ldots$ berbeda untuk setiap distribusi, hal ini dikarenakan adanya perbedaan pada fungsi densitas masing-masing distribusi.
2. Untuk distribusi dengan fungsi densitas yang sederhana membuat proses perhitungan komulan menjadi lebih singkat, sebaliknya untuk distribusi dengan fungsi densitas yang rumit membuat proses perhitungan komulan menjadi panjang dan tidak efisien.
3. Berdasarkan hubungan komulan dengan momen pada distribusi, maka momen ke-n dari suatu distibusi dapat dihitung jika telah terlebih dahulu diketahui nilai setiap komulan ke-j untuk $j = 1,2, \ldots, n$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bain Lee J, Max Engelhardt.(1991), "*Introduction To Probability And Mathematical Statistics*" The Duxbury Advanced Series In Statistics And Decision Sciences.

[2] Dudewicz Edward J. Satya N. Misra, (1995), "*Statistika Matematika Modern*", Penerbit ITB Bandung.

[3] Kreyszig, E. (1993), *Matematika telah lanjutan (Statistik lanjutan)* edisi ke-6. penerbit PT Gramedia pustaka, Jakarta

[4] Pursell Edwin J. Dale Varberg, (1992), "*Kalkulus Dan Geometri Analisis*". Edisi Kelima, Penerbit Erlangga.