Jurnal Barekeng
Vol. 8 No. 2 Hal. 1 – 7 (2014)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

HASIL KALI LANGSUNG *S-NEAR-RING* DAN *S-NEAR-RING* BEBAS

Smarandache Direct Product and Smarandache Free Near-Rings

HENRY W. M. PATTY
Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
E-mail: henrywmpatty81@gmail.com

ABSTRAK

Hasil kali langsung *near-ring* Smarandache $\underset{i \in I}{X} N_i$ dikembangkan dari hasil kali langsung *near-ring* dengan kondisi khusus jika paling sedikit terdapat satu anggota dari N_i merupakan *near ring* Smarandache (S-*near-ring*). Sedangkan *near-ring* Smarandache bebas didefinisikan dengan bantuan homomorfisma *near-ring* Smarandache.

Kata kunci : *near-ring, hasil kali langsung, S-near ring, S-near ring bebas*

PENDAHULUAN

Sebagaimana diketahui, struktur aljabar dibangun oleh tiga komponen utama yaitu suatu himpunan tak kosong, operasi biner dan aksioma. Jika pada himpunan tak kosong tersebut dilengkapi dengan operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma maka akan muncul kelas baru dalam aljabar yang mempunyai karakteristik tertentu. Salah satu kelas dalam aljabar adalah *near-ring* yang merupakan himpunan tak kosong serta dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan (+) dan pergandaan (.). Struktur *near-ring* merupakan generalisasi dari ring tanpa harus memenuhi sifat distributif kiri dan komutatif terhadap penjumlahan. Sejalan dengan perkembangan teori aljabar banyak penilitian tentang *near-ring* yang sampai sekarang ini menjadi objek menarik untuk diteliti. Jelas bahwa himpunan bilangan bulat Z merupakan contoh *near-ring* yang paling sederhana. Namun setiap bilangan bulat tidak memiliki invers terhadap operasi pergandaan. Sehingga pembahasan mengenai *near-ring* menjadi terbatas dalam bentuk maupun sifatnya. Oleh karena itu dikembangkan atau disyaratkan suatu kondisi dimana setiap elemen tak nol dalam *near-ring* tersebut memiliki invers terhadap operasi pergandaan. Struktur ini yang sekarang dikenal sebagai *near-field*.

Dalam aljabar, konsep *near-ring* dan *near-field* sering dipahami secara terpisah dan dapat dikarakterisasi. Namun jika dipunyai suatu *near-ring* dengan himpunan bagian sejatinya yang merupakan *near-field* maka diperoleh struktur aljabar yang disebut *near-ring* Smarandache (dinotasikan *S-near-ring*). Konsep *S-near-ring* ini, telah diperkenalkan Florentin Smarandache dan telah dibahas oleh Vasantha Kandasamy pada tahun 2002 dalam tulisannya yang berjudul *Smarandache near-rings*. *Near-ring* ini sering disebut *S-near-ring* tingkat 1 dan merupakan *near-ring* kanan (hanya memenuhi sifat distributif kanan). Dalam tulisan ini akan dijelaskan definisi *S-near-ring* serta beberapa contohnya namun diutamakan pada hasil kali langsung *S-near-ring* dan *S-near-ring* bebas.

TINJAUAN PUSTAKA

Hasil kali langsung *near-ring* Smarandache (*direct product S-near-ring*) dan *S-near-ring* bebas yang di bahas dalam tulisan ini menggunakan konsep *near-ring* sebagai landasan utama. Pengertian dan klasifikasi dari *near-ring* mengacu pada tulisan Gunter Pilz pada tahun 1977 tentang *near-rings*. Dijelaskan karakteristik *near-ring* berupa definisi, contoh, klasifikasi dan hasil kali *near-ring*. Namun berbicara konsep *near-ring* tetap berkaitan dengan semigrup *near-ring*. Dalam bagian ini juga akan diperkenalkan bentuk semigrup Smarandache (*S*-semigrup) dan Smarandache subsemigrup (*S*-subsemigrup) yang tetap merujuk pada tulisan W.B. Vasantha Kandasamy tahun 2002 tentang *Smarandache near-rings*. Diharapkan pembahasan *S-near-ring* dan *near-ring* bebas akan lebih mudah dipahami.

Berikut ini diberikan definisi dan contoh semigrup Smarandache (*S*-semigrup) dan subsemigrup Smarandache (*S*-subsemigrup).

Definisi 1.
Diberikan semigrup *S*, semigrup *S* disebut semigrup Smarandache (S-semigrup) jika memuat himpunan bagian sejati *A*, sedemikian hingga *A* merupakan grup terhadap operasi yang sama di *S*.

Contoh 1:
Diketahui $Z_{12} = \{0,1,2,\ldots,11\}$ merupakan semigrup dengan operasi pergandaan modulo 12. Dapat diambil

$$P = \{4,8\} \subset Z_{12}, P \neq Z_{12}$$

dan merupakan grup terhadap operasi pergandaan modulo 12. Jadi Z_{12} merupakan *S*-semigrup

Contoh 2:
Diketahui $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ merupakan semigrup dengan operasi pergandaan modulo 4. Dapat diambil

$$P = \{1,3\} \subset Z_4, P \neq Z_4$$

dan merupakan grup terhadap operasi pergandaan modulo 4. Jadi Z_4 merupakan S-semigrup

Definisi 2.
Misalkan *S* adalah *S*-semigrup. Suatu himpunan bagian sejati *P* dari *S* $(P \subset S, P \neq S)$ disebut subsemigrup Smarandache (*S*-subsemigrup) jika *P* adalah *S*-semigrup dengan operasi yang sama di *S*.

Contoh 3:
Diketahui $Z_{24} = \{0,1,2,\ldots,23\}$ merupakan *S*-semi grup dengan operasi pergandaan modulo 24. Dapat diambil $P = \{0,2,4,\ldots,22\}$ dan merupakan *S*-subsemigrup terhadap operasi pergandaan modulo 24 dengan $A = \{8,16\}$ merupakan subgrup di *P*.

Selanjutnya diberikan definisi dan contoh dari *near-ring* sebagai berikut

Definisi 3.
Diberikan himpunan $N \neq \emptyset$. Pada *N* didefinisikan operasi biner $"+"$ dan $"\cdot"$. Himpunan *N* disebut *near-ring* terhadap kedua operasi biner tersebut, jika memenuhi :
(i) $(N,+)$; grup
(ii) $(N, \cdot)$; semigrup
(iii) Distributif Kanan:
$(\forall a,b,c \in N)(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$

Himpunan *N* terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan padanya disebut *near-ring* dan dinotasikan dengan $(N,+,\cdot)$.

Contoh 4:
Diketahui $(Z,+)$ grup. Pada *Z* didefinisikan operasi $"\cdot"$ sebagai berikut

$$(\forall a,b \in Z) a.b = a$$

Jelas bahwa $(Z,+,\cdot)$ merupakan *near-ring.*

Contoh 5:
Misalkan $Z_{12} = \{0,1,2,\ldots,11\}$. Diketahui $(Z_{12},+)$ grup atas operasi penjumlahan modulo 12. Didefinisikan operasi $"\cdot"$. Pada Z_{12} didefinisikan operasi $"\cdot"$ sebagai berikut

$$(\forall a,b \in Z_{12}) a.b = a$$

Maka $(Z_{12},+,\cdot)$ merupakan *near-ring.*

Berikut ini diberikan beberapa definisi yang menunjukkan klasifikasi dari ring.

Definisi 4.
Suatu near-ring *N* dikatakan near-ring abelian jika *N* memenuhi sifat komutatif terhadap operasi $"+"$, yaitu

$$(\forall a,b \in N) a+b = b+a$$

Definisi 5.
Suatu near-ring *N* dikatakan near-ring distributif jika *N* memenuhi sifat distributif kiri, yaitu

$$(\forall a,b \in N) a\,(b+c) = a.b + a.c$$

Definisi 6.
Suatu near-ring *N* dikatakan near-ring komutatif jika *N* memenuhi sifat komutatif terhadap operasi $"\cdot"$, yaitu

$$(\forall a,b \in N) a\cdot b = b\cdot a$$

Definisi 7.
*S*uatu near-ring *N* dikatakan near-ring dengan elemen satuan jika *N* memuat elemen satuan terhadap operasi ".", yaitu

$$(\exists e \in N)(\forall a \in N) ae = ea = a$$

Definisi 8.
Near-ring $(M,+,\cdot)$ disebut *near-field* jika
i. $(M,+,\cdot)$ adalah near-ring dengan elemen satuan
ii. Setiap elemen tak nol di *M* mempunyai invers terhadap pergandaan di

$$M : (\forall a \in M)[a \neq 0 \Rightarrow (\exists a^{-1} \in M) aa^{-1} = a^{-1}a = e]$$

Dalam pembahasan akan dijelaskan tentang hasil kali langsung *S-near-ring* dan *S-near-ring* bebas. . Oleh karena itu dibutuhkan bahasan tentang hasil kali langsung *near-ring*, kondisi ore, *near-ring* hasil bagi dan *near-ring* bebas.

Definisi 9.
Diberikan $\{N_i\}$ adalah keluarga *near-ring* $(i \in I, I\ himpunan\ indeks, I = \{1,2,\ldots,r\})$. $N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_R = XN_i$ yang didefinisikan terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan disebut hasil kali langsung near-ring N_i.

Contoh 6.
Diketahui $Z_2 = \{0,1\}$ *near-field* dan *Z* *near-ring*. Dibentuk $N = Z \times Z_2 = \{(z,p) | z \in Z, p \in Z_2\}$ maka *N* merupakan hasil kali langsung *near-ring*. Jika diselidiki

N juga merupakan *near-ring* dengan operasi penjumlahan '+' dan '.' di *N*.

Definisi 10.
Suatu subnear-ring dari $\underset{i\in I}{X} N_i$ dimana jumlah setiap elemen berhingganya sama dengan nol disebut jumlah langsung eksternal (dinotasikan $\bigoplus_{i\in I} N_i$) dari setiap N_i.

Secara umum setiap *subnear-ring* N dari $\underset{i\in I}{X} N_i$ dimana setiap pemetaan proyektif $\pi_i (i \in I)$ adalah surjektif (dengan kata lain untuk setiap $i \in I$ dan untuk setiap $n_i \in N_i$; n_i merupakan elemen ke-*i* dari sebarang elemen di *N*) disebut sub hasil kali langsung dari setiap N_i.

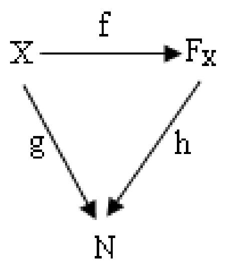
Definisi 11.
Suatu *near-ring N* dikatakan memenuhi kondisi ore kiri (kanan) dalam kaitannya dengan suatu subsemigrup *S* dari (*N*, .) jika untuk setiap $(s, n) \in S \times N$ berlaku

$$ns_1 = sn_1 \quad (s_1 n = n_1 s)$$

Definisi 12.
Jika $S = \{s \in N \,|\, s \text{ dapat dikanselasi}\}$ maka N_s disebut near-ring hasil bagi kiri (kanan) dari *N*

Misalkan *V* himpunan semua jenis *near-ring* (*near-ring*, *near ring* abelian, *near-ring* dengan elemen satuan, atau *near-ring* distributif) dan *X* himpunan bagian tak kosong.

Definisi 13.
Suatu near-ring $F_X \in V$ disebut near-ring bebas di *V* atas *X* jika terdapat suatu pemetaan $f: X \to F$ (dengan X sebarang himpunan tak kosong) untuk setiap $N \in V$ dan untuk setiap $g: X \to N$ maka terdapat suatu homomorfisma $h \in Hom(F_X, N)$: $h \circ f = g$



Gambar 1. Homomorfisma *near-ring*

Setelah membahas tentang *near-ring*, berikut ini diberikan definisi dan contoh dari *near-ring* Smarandache (*S-near-ring*) yang diklasifikasikan dalam *S-near-ring* tingkat 1.

Definisi 14.
Diberikan himpunan $N \neq \emptyset$ dengan A himpunan bagian sejati dari N atau $(A \subset N \text{ dan } A \neq N)$. Pada N didefinisikan operasi-operasi biner $"+"$ dan $"\cdot"$. Himpunan N disebut near-ring Smarandache (S-near-ring) terhadap kedua opreasi biner, jika memenuhi :

i. $(N, +, \cdot)$ adalah near-ring
   a. $(N, +)$ adalah grup
   b. $(N, \cdot)$ adalah semigrup
   c. Distributif Kanan;
   $$(\forall a, b, c \in N)(a + b).c = a.c + b.c$$

ii. $(A, +, \cdot)$ adalah near-field
   a. $(A, +)$ adalah grup
   b. $(A\backslash\{0\}, \cdot)$ adalah grup
   c. Distributif Kanan:
   $$(\forall a, b, c \in A)(a + b).c = a.c + b.c$$

Contoh 6.
Diberikan $(Z_n, +, \cdot)$ ring dan $(Z_2, +, \cdot)$ *near-field* terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan modulo n . Himpunan Z_n dengan $n \geq 2$ merupakan *S-near-ring* dengan Z_2 merupakan himpunan bagian sejati dari Z_n atau $(Z_2 \subset Z_n \; dan \; Z_2 \neq Z_n)$.

Pada contoh ini, ternyata tidak semua near-ring Z_n merupakan *near-field* jika $n = 2$ (bilangan prima) maka Z_2 merupaka *near-field*. Sehingga n bilangan prima maka Z_n merupakan *near-field*. Analog dengan sifat di lapangan (*field*), bahwa himpunan bilangan bulat modulo n merupakan lapangan jika n prima.

Selain itu, contoh ini hanya memberikan gambaran umum mengenai struktur *near-ring* Smarandache namun belum menunjukkan karakter khusus struktrur *near-ring* sendiri dan himpunan bagiannya yang *near-field* dengan Z_n dan Z_2 masing-masing ternyata memenuhi sifat distributif kanan.

Contoh selanjutnya akan menunjukkan struktur *S-near-ring* lainnya.

Contoh 7.
Diberikan $Z_2 = \{0,1\}$ dan sebarang grup G terhadap operasi pergandaan Z_2 adalah *near-ring* terhadap operasi penjumlahan $"+"$ didefinisikan seperti penjumlahan modulo Z_2 dan terhadap operasi pergandaan $"\cdot"$ didefinisikan sebagai berikut :

$$(\forall a, b \in Z_2) \; a.b = a$$

Z_2G adalah grup *near-ring* dari grup G atas *near-field* Z_2 . Grup *near-ring* Z_2G juga adalah *S-near-ring* dengan

$$(Z_2 \subset Z_2G \; dan \; Z_2 \neq Z_nG)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Hasil Kali Langsung *Near-Ring* Smarandache

Definisi 15.
Misalkan $\{N_i\}$ adalah keluarga near-ring $(i \in I, I \text{ himpunan indeks})$ dengan operasi "+" dan "." yang didefinisikan di setiap N_i . Jika $\{N_i\}$ memiliki paling

sedikit satu S-near-ring maka hasil kali langung $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_r = \underset{i \in I}{X} N_i$ disebut hasil kali langsung dari near-ring Smarandache $\mathrm{N_i}$ (hasil kali langsung S-near-ring)

Teorema 1.
Hasil kali langsung *S-near-ring* adalah *S-near-ring*

Bukti

Diketahui $N = \underset{i=1}{X} N_i = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_r$ merupakan hasil kali langsung dari *near-ring* Smarandache N_i
Akan ditunjukan $(N, +,\cdot)$ merupakan *S-near-ring*

i) $(N, +,\cdot)$ *near-ring*

I. $(N, +)$ adalah grup

i. Tertutup
Ambil sebarang $a, b \in N$
Akan ditunjukkan $a + b \in N$
Karena $a, b \in N$ maka $a = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ dengan $a_1 \in N_1, a_2 \in N_2, \ldots, a_r \in N_r$
$b = (b_1, b_2, \ldots, b_r)$ dengan $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, \ldots, b_r \in N_r$
Sehingga
$a + b = (a_1, a_2, \ldots, a_r) + (b_1, b_2, \ldots, b_r)$
$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_r + b_r)$
dengan $a_1 + b_1 \in N_1, a_2 + b_2 \in N_2, \ldots,$
$a_r + b_r \in N_r$

ii. Asosiatif
Ambil sebarang $a, b, c \in N$
Akan ditunjukkan $(a + b) + c = a + (b + c)$
$a = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ dengan $a_1 \in N_1, a_2 \in N_2, \ldots, a_r \in N_r$
$b = (b_1, b_2, \ldots, b_r)$ dengan $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, \ldots, b_r \in N_r$
$c = (c_1, c_2, \ldots, c_r)$ dengan $c_1 \in N_1, c_2 \in N_2, \ldots, c_r \in N_r$
Sehingga

$$\begin{aligned}(a + b) + c &= [(a_1, a_2, \ldots, a_r) + (b_1, b_2, \ldots, b_r)] + (c_1, c_2, \ldots, c_r)\\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_r + b_r) + (c_1, c_2, c_r) = [(a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, \ldots), (a_r + b_r) + c_r]\\ &= [a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), \ldots, a_r + (b_r + c_r)]\\ &= (a_1, a_2, \ldots, a_r) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2, \ldots, b_r + c_r)\\ &= (a_1, a_2, \ldots, a_r) + [(b_1, b_2, \ldots, b_r) + (c_1, c_2, \ldots, c_r)]\\ &= a + (b + c)\end{aligned}$$

iii. Terdapat elemen netral
Ambil sebarang $a \in N$
Akan ditunjukkan terdapat $e \in N$ sedemikian hingga

$$a + e = e + a = a$$

Karena $a \in N$ maka maka

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

dengan $a_1 \in N_1, a_2 \in N_2, \ldots, a_r \in N_r$
Misalkan $e \in N$ maka maka

$$e = (e_1, e_2, \ldots, e_r)$$

dengan $e_1 \in N_1, e_2 \in N_2, \ldots, e_r \in N_r$
Sehingga $a + e = a$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_r) + (e_1, e_2, \ldots, e_r) = (a_1, a_2, \ldots, a_r) \quad \text{(i)}$$

$$(-a_1, \ldots, -a_r) + (a_1, \ldots, a_r) + (e_1, \ldots, e_r) = (-a_1, \ldots, -a_r) + (a_1, \ldots, a_r) \quad \text{(ii)}$$

$$(-a_1 + a_1, \ldots, -a_r + a_r) + (e_1, \ldots, e_r) = (-a_1 + a_1, \ldots, -a_r + a_r)$$

$(0,0, \ldots ,0) + (e_1, e_2, \ldots, e_r) = (0,0, \ldots ,0)$
$(0 + e_1, 0 + e_2, \ldots, 0 + e_r) = (0,0, \ldots ,0)$
$(e_1, e_2, \ldots, e_r) = (0,0, \ldots ,0)$
Dengan

$$e_1 = 0 \in N_1, e_2 = 0 \in N_2, \ldots, e_r = 0 \in N_2$$
$$e = (0,0, \ldots ,0)$$

Karena $a_1 \in N_1, a_2 \in N_2, \ldots, a_r \in N_r$
dan $N_1, N_2, \ldots, N_r$ merupakan *near-ring*
maka $-a = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_r)$ dan diperoleh (i) ke (ii)
Analog untuk $e + a = a$

iv. Setiap elemen memiliki invers
Ambil sebarang $a \in N$
Akan ditunjukkan terdapat $a^{-1} \in N$ sedemikian hingga $a + a^{-1} = a^{-1} + a = 0$
Karena $a \in N$ maka maka $a = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ dengan $a_1 \in N_1, a_2 \in N_2, \ldots, a_r \in N_r$
Misalkan $a^{-1} \in N$ maka maka
$a^{-1} = (b_1, b_2, \ldots, b_r)$ dengan $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, \ldots, b_r \in N_r$
Sehingga $a + a^{-1} = 0$

$$(a_1, \ldots, a_r) + (b_1, \ldots, b_r) = (0, \ldots ,0) \quad \text{(i)}$$

$$(-a_1, \ldots, -a_r) + (a_1, \ldots, a_r) + (b_1, \ldots, b_r) = (-a_1, \ldots, -a_r) + (0, \ldots ,0) \quad \text{(ii)}$$

$$(-a_1 + a_1, \ldots, -a_r + a_r) + (b_1, , \ldots, b_r) = (-a_1 + 0, \ldots, -a_r + 0)$$

$(0, \ldots ,0) + (b_1, \ldots, b_r) = (-a_1, \ldots, -a_r)$
$(0 + b_1, \ldots, 0 + b_r) = (-a_1, \ldots, -a_r)$
$(b_1, \ldots, b_r) = (-a_1, \ldots, -a_r)$
$a^{-1} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_r)$
Karena $a_1 \in N_1, a_2 \in N_2, \ldots, a_r \in N_r$
dan $N_1, N_2, \ldots, N_2$ merupakan *near-ring* maka
$-a_1 \in N_1, -a_2 \in N_2, \ldots, -a_r \in N_r$
dan diperoleh (i) ke (ii)
Analog untuk $a^{-1} + a = 0$

II. $(N,\cdot)$ semigrup

i. Tertutup
Ambil sebarang $a, b \in N$
Akan ditunjukkan $a \cdot b \in N$
Karena $a, b \in N$ maka
$a = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ dengan $a_1 \in N_1, a_2 \in N_2, \ldots, a_r \in N_r$
$b = (b_1, b_2, \ldots, b_r)$ dengan $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, \ldots, b_r \in N_r$

Sehingga
$a.b = (a_1, a_2, \ldots, a_r) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_r)$
$= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots, a_r \cdot b_r) \in N$
dengan $a_1 \cdot b_1 \in N_1, a_2 \cdot b_2 \in N_2, \ldots, a_r \cdot b_r \in N_r$

ii. Asosiatif
Ambil sebarang $a, b, c \in N$
Akan ditunjukkan $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
$a = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ dengan $a_1 \in N_1, a_2 \in N_2, \ldots, a_r \in N_r$
$b = (b_1, b_2, \ldots, b_r)$ dengan $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, \ldots, b_r \in N_r$
$c = (c_1, c_2, \ldots, c_r)$ dengan $c_1 \in N_1, c_2 \in N_2, \ldots, c_r \in N_r$

Sehingga
$$\begin{aligned}(a \cdot b) \cdot c &= [(a_1, a_2, \ldots, a_r) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_r)] \cdot (c_1, c_2, \ldots, c_r)\\ &= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots, a_r \cdot b_r) \cdot (c_1, c_2, \ldots, c_r)\\ &= [(a_1 \cdot b_1) \cdot c_1, (a_2 \cdot b_2) \cdot c_2, \ldots, (a_r.b_r).c_r]\\ &= [a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1), a_2 \cdot (b_2 \cdot c_2), \ldots, a_r \cdot (b_r \cdot c_r)]\\ &= (a_1, a_2, \ldots, a_r) \cdot (b_1 \cdot c_1, b_2 \cdot c_2, \ldots, b_r \cdot c_r)\\ &= (a_1, a_2, \ldots, a_r) \cdot [(b_1, b_2, \ldots, b_r) \cdot (c_1, c_2, \ldots, c_r)]\\ &= a \cdot (b \cdot c)\end{aligned}$$

III. Distributif Kanan
Ambil sebarang $a, b, c \in N$
Akan ditunjukkan $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
karena $a, b, c \in N$ maka
$a = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$
Dengan
$$a_1 \in N_1, a_2 \in N_2, \ldots, a_r \in N_r$$
$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_r)$$
Dengan
$$b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, \ldots, b_r \in N_r$$
$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_r)$$
dengan
$$c_1 \in N_1, c_2 \in N_2, \ldots, c_r \in N_r$$

Sehingga
$$\begin{aligned}(a + b) \cdot c &= [(a_1, a_2, \ldots, a_r) + (b_1, b_2, \ldots, b_r)] \cdot (c_1, c_2, \ldots, c_r)\\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_r + b_r) \cdot (c_1, c_2, \ldots, c_r)\\ &= [(a_1 + b_1) \cdot c_1, (a_2 + b_2) \cdot c_2, \ldots, (a_r + b_r) \cdot c_r]\\ &= [(a_1.c_1 + b_1 \cdot c_1), (a_2.c_2 + b_2 \cdot c_2), \ldots, (a_r \cdot c_r + b_r \cdot c_r]\\ &= (a_1 \cdot c_1, a_2 \cdot c_2, \ldots, a_r \cdot c_r) + (b_1 \cdot c_1, b_2 \cdot c_2, \ldots, b_r \cdot c_r)\\ &= (a_1, a_2, \ldots, a_r) \cdot (c_1, c_2, \ldots, c_r) + (b_1, b_2, \ldots, b_r) \cdot (c_1, c_2, \ldots, c_r)\\ &= a \cdot c + b \cdot c\end{aligned}$$
Berdasarkan I, II, dan III terbukti $(N, +, \cdot)$ *near-ring*

ii) $(A, +, \cdot)$ *near-field* $A \subset N$ dan $A \neq N$.
Karena $N = \underset{i=1}{X} N_i = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_r$
berdasarkan definisi 15 terdapat paling sedikit himpunan bagian $M \subset N$ dan $M \neq N$ yang merupakan *S-near-ring* maka *N* merupakan *S-near-ring*.

Berdasarkan **i)** dan **ii)** terbukti $(N, +, \cdot)$ *S-near-ring* □

Contoh 8

Misalkan $N = Z_3 \times Z_5 \times Z_7$, maka N merupakan hasil kali langung *S-near-ring* karena masing-masing Z_3, Z_5, Z_7 merupakan *S-near-ring* (terdapat himpunan bagian sejati $Z_2 \subset Z_3 \subset Z_5 \subset Z_7$ dan $Z_2 \neq Z_3 \neq Z_5 \neq Z_7$;near-*field*). Selanjutnya menurut Teorema 1, $N = Z_3 \times Z_5 \times Z_7$ merupakan *S-near-ring* .

Sifat 1.
Diberikan $\{M_i\}$ *merupakan keluarga near-field dengan* $i = 1,2, \ldots, n$ *pada* $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(m_1, m_2, \ldots, m_n) | m_1 \in M_1, m_2 \in M_2, \ldots, m_n \in M_n\}$ *berlaku sifat distributif kanan dengan operasi* " + " *dan pergandan* " $\cdot$ " *yang didefinisikan untuk setiap* $a, b \in M$ *sebagai berikut :*

i. $(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$
ii. $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots, a_n \cdot b_n)$

Bukti.
Diketahui pada $M_1, M_2, \ldots, M_n$ masing-masing merupakan *near-field*. Akan dibuktikan $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ dengan operasi yang didefinisian padanya berlaku sifat distributif kanan.
Selanjutnya
Ambil sebarang $a, b, c \in M$
Akan ditunjukkan $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
Karena $a, b, c \in M$
Maka
$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
dengan $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \ldots, a_r \in M_n$
$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$
dengan $b_1 \in M_1, b_2 \in M_2, \ldots, b_n \in M_n$
$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$
dengan $c_1 \in M_1, c_2 \in M_2, \ldots, c_n \in M_n$
Sehingga
$$\begin{aligned}(a + b) \cdot c &= [(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n)] \cdot (c_1, c_2, \ldots, c_n)\\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \cdot (c_1, c_2, \ldots, c_n)\\ &= [(a_1 + b_1) \cdot c_1, (a_2 + b_2) \cdot c_2, \ldots, (a_n + b_n) \cdot c_n] \quad \text{(i)}\\ &= [(a_1.c_1 + b_1 \cdot c_1), (a_2.c_2 + b_2 \cdot c_2), \ldots, (a_n \cdot c_n + b_n \cdot c_n) \quad \text{(ii)}\\ &= (a_1 \cdot c_1, a_2 \cdot c_2, \ldots, a_n \cdot c_n) + (b_1 \cdot c_1, b_2 \cdot c_2, \ldots, b_n \cdot c_n)\\ &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (c_1, c_2, \ldots, c_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) \cdot (c_1, c_2, \ldots, c_n)\end{aligned}$$

$$= a \cdot c + b \cdot c$$

Karena $a_1, b_1, c_1 \in M_1,\ a_2, b_2, c_2 \in M_2, \dots, a_n, b_n, c_n \in M_n$, dan $M_1, M_2, \dots, M_n$ masing-masing merupakan *near-field* berlaku sifat distributif kanan sehingga diperoleh (i) ke (ii) . □

Definisi 16.
Suatu S-subnear-ring dari hasil kali langsung Smarandache $\underset{i\in I}{X} N_i$ yang terdiri dari elemen-elemen dimana jumlah setiap elemen berhingganya sama dengan nol disebut jumlah langsung eksternal Smarandache, $\bigoplus_{i\in I} N_i$ dari setiap N_i.

Secara umum untuk setiap *S-subnear-ring* N dari $\underset{i\in I}{X} N_i$ dimana setiap pemetaan proyektif $\pi_i (i \in I)$ adalah surjektif (dengan kata lain untuk setiap i ∈ I dan untuk setiap $n_i \in N_i$; n_i merupakan elemen ke-i dari sebarang elemen di N) disebut hasil kali langsung bagian Smarandache dari setiap N_i

Teorema 2.
Jika $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$ merupakan jumlah langsung *S-near-ring* maka *N* adalah *S-near-ring*.

Bukti
Dengan menggunakan definisi operasi "+" dan "." di $N = \bigoplus_{i\in I} N_i = \sum_{i=1}^{r} N_i = N_1 + N_2 + \dots + N_r$ yaitu

$$\{a_i | i\in I\} + \{b_i | i\in I\} = \{a_i + b_i | i\in I\}$$
$$\{a_i | i\in I\} \cdot \{b_i | i\in I\} = \{a_i \cdot b_i | i\in I\}$$

maka $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$ jelas merupakan *near-ring* untuk suatu $N_i \subset N = \bigoplus_{i\in I} N_i$ yang merupakan *near-field* terhadap operasi "+" dan "." di *N* (dengan memperhatikan definisi hasil kali langsung *S-near-ring*) maka *N* merupakan *S-near-ring*. □

Dengan mengacu pada definisi *near-ring* hasil bagi (Definisi 12) berikut ini didefinisikan *S-near-ring* hasil bagi.

Definisi 16.
Diberikan N suatu near-ring dan S suatu S-subsemigrup dari $(N,+)$. Near-ring N_S disebut S-near-ring hasil bagi kiri (kanan) dari N pada S jika:

a. N_S memiliki elemen satuan
b. N dapat disisipkan dalam N_S dengan suatu homomorfisma h
c. Untuk setiap $s \in S$: $h(s)$ memiliki invers dalam $(N_S, \cdot)$
d. Untuk setiap $q \in N_S$ terdapat $s \in S$ dan terdapat $n \in N$ sedemikan hingga $q = h(n)h(s)^{-1}$ $(q = h(s)^{-1}h(n))$.

Dengan mengacu pada definisi kondisi ore *near-ring* (Definisi 11) berikut ini didefinisikan kondisi ore *S-near-ring* sebagai berikut.

Definisi 17.
Near-ring N dikatakan memenuhi kondisi ore kiri (kanan) Smarandache berkaitan dengan suatu S-subsemigrup P dari $(N,.)$. yang diberikan jika untuk setiap $(s,n) \in S \times N$ berlaku $ns_1 = sn_1$ $(s_1 n = n_1 s)$

Berdasarkan Definisi 17 maka diperoleh sifat tentang *near-ring N* yang memenuhi kondisi ore sebagai berikut.

Teorema 3.
Jika suatu *near-ring N* memenuhi kondisi ore kiri (kanan) *Smarandache* dengan memperhatikan suatu *S*-subsemigrup *P* dari $(N,.)$ maka *near-ring N* memenuhi kondisi ore kiri (kanan) yang berkaitan pada suatu subsemigrup *P* yang diberikan dari $(N,.)$

Bukti
Dapat langsung dibuktikan dari Definisi 17. Jika dapat ditemukan contoh suatu *near-ring N* yang memenuhi kondisi ore kiri (kanan) dalam kaitannya dengan subsemigrup *P* dari $(N,.)$ namun tidak memenuhi kondisi ore kiri (kanan) Smarandache. □

Definisi 18.
Jika $S = \{s \in N | s \text{ dapat dikanselasi}\}$ suatu N_S (jika ada) adalah *S-near-ring* maka N_s disebut *near-ring Smarandache* hasil bagi kiri (kanan) dari *N*

Berdasarkan Definisi 18 maka diperoleh sifat tentang S-*near-ring* hasil bagi sebagai berikut.

Teorema 4.
Jika N_S merupakan suatu S-near-ring hasil bagi maka N_S suatu near-ring hasil bagi.

Bukti
Dapat langsung dibuktikan dari Definisi 18. □

2. *Near-Ring* Smarandache Bebas

Dengan memperhatikan syarat perlu dan cukup suatu *near-ring* hasil bagi kiri (kanan) dari *N* (yang sudah didefinisikan sebelumnya) menjadi S-*near-ring* hasil bagi maka akan didefinisikan *near-ring* Smarandache bebas.

Namun sebelumnya diberikan definisi homomorfisma *near-ring* Smarandache sebagai berikut.

Definisi 19.
Misalkan N dan N_1 adalah pasangan S-near-ring. Maka $h: N \to N_1$ disebut homomorfisma S-near-ring jika untuk setiap $m, n \in M$ (dimana M himpunan bagian sejati dari N, M merupakan near-field) berlaku:

$$h(m+n) = h(m) + h(n)$$

$$h(m.n) = h(m).h(n)$$

dimana $h(m), h(n) \in M_1$ (dengan M_1 himpunan bagian sejati dari N_1, N_1 merupakan near-field).

Misalkan $S(V)$ keluarga *S-near-ring* dan X himpunan bagian tak kosong yang merupakan S-semigrup atas "+" dan "." maka didefinisikan :

Definisi 20.
Suatu *S-near-ring* $F_X \in S(V)$ disebut *near-ring* Smarandache bebas di V atas X jika terdapat suatu pemetaan $f : X \to F$ untuk setiap $N \in V$ dan untuk setiap $g : X \to N$ maka terdapat suatu homomorfisma *S-near-ring*, $h \in S(Hom(F_X, N)):$[dimana $S(Hom(F_X, N)$ adalah kumpulan semua homomorfisma smarandache dari F_X ke N] sedemikian sehingga $h \circ f = g$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dalam tulisan ini dapat disimpulkan bahwa struktur *near-ring* Smarandache dimotivasi dari struktur *near-ring*. Hal ini berakibat untuk hasil kali langsung *S-near-ring* $\underset{i \in I}{X} N_i$ merupakan suatu struktur yang serupa dengan hasil kali langsung pada *near-ring* dengan syarat paling sedikit terdapat satu dari N_i merupakan S-*near ring*. Sedangkan untuk struktur -*near-ring* Smarandache bebas dimotivasi dari keberadaan homomorfisma *S-near-ring* dari F_X ke N dengan mempertahankan sifat komutatif pada diagram homomorfsima.

DAFTAR PUSTAKA

Hungerford, T.W., 1980, *Algebra*, Springer-Verlag, New York.

Pilz, Gunter, 1977, *Near-rings*, Noth Holland Pub. Co

Vasantha Kandasamy, W.B., 2002, *Smarandache Near-rings*, American Research Press, Rehoboth, USA

Vasantha Kandasamy, W.B., 2002, *Smarandache rings*, American Research Press, Rehoboth, USA