BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan
March 2021 Vol. 15 No. 1 Page 085–094
P-ISSN: 1978-7227 E-ISSN: 2615-3017
doi: https://doi.org/10.30598/barekengvol15iss1pp085-094

METODE ALTERNATIF DALAM MENENTUKAN SOLUSI PARTIKULAR PERSAMAAN EULER-CAUCHY

Alternative Method to Determine Particular Solution of the Euler-Cauchy Equation

Mariatul Kiftiah[1*], Yudhi[2], Alvi Yanitami[3]

[1,2,3] Prodi Matematika, FMIPA, Universitas Tanjungpura
Jln. Prof. Dr. H. Hadari Nawawi, Pontianak, 78124, Indonesia

Corresponding author e-mail: [1] kiftiahmariatul@math.untan.ac.id*

Abstrak

Persamaan Euler-Cauchy merupakan salah satu tipe dari persamaan diferensial biasa dengan koefisien variabel. Pada penelitian ini dibahas metode alternatif yang digunakan untuk menentukan solusi partikular dari Persamaan Euler-Cauchy tak homogen yang berbentuk polinomial dan logaritma natural. Bentuk umum solusi partikular yang diperoleh merupakan hasil dari penggunaan matriks segitiga atas Toeplitz. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode ini dapat menentukan solusi partikular persamaan Euler-Cauchy

Kata Kunci : *Euler-Cauchy, persamaan karakteristik, matriks Toeplitz, multiplisitas*

Abstract

Euler-Cauchy equation is the typical example of a linear ordinary differential equation with variable coefficients. In this paper, we apply the alternative method to determine the particular solution of Euler-Cauchy nonhomogenous with polynomial and natural logarithm form. An explicit formula of the particular solution is derived from the use of an upper triangular Toeplitz matrix. The study showed that this method could be finding the particular solution for the Euler-Cauchy equation.

Keywords: *Euler-Cauchy, characteristics equation, Toeplitz matrix, multiplicity*

Article info:

Received: 30th October 2020 *Accepted: 20th February 2021*

How to cite this article:
M. Kiftiah, Yudhi, A. Yanitami, "METODE ALTERNATIF DALAM MENENTUKAN SOLUSI PARTIKULAR PERSAMAAN EULER-CAUCHY", *BAREKENG: J. Il. Mat. & Ter.*, vol. 15, no. 1, pp. 085-094, Mar. 2021.

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. Berdasarkan variabel bebasnya, persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial [1].

Persamaan diferensial biasa merupakan persamaan diferensial yang memuat satu atau lebih dari variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas. Persamaan diferensial biasa dapat diklasifikasikan berdasarkan jenis koefisiennya, yaitu koefisien konstanta dan koefisien variabel. Persamaan Euler-Cauchy merupakan salah satu jenis persamaan diferensial biasa koefisien variabel [2, 3]. Persamaan Euler-Cauchy ini pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler dan selanjutnya dikembangkan oleh Agustin Louis Cauchy [4]. Persamaan Euler-Cauchy mempunyai peran penting dalam suatu permasalahan di bidang fisika dan teknik diantaranya penyelesaian persamaan Laplace di koordinat polar pada kasus aliran fluida dan potensial elektrostatik. Selain itu juga persamaan Euler-Cauchy dapat diaplikasi ke klas fungsi analitik [5].

Diberikan bentuk umum dari persamaan Euler-Cauchy pada suatu interval I, yaitu

$$\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{i}} t^{i} y^{(i)} = b(t)$$

dengan $y^{(i)}$ merupakan turunan ke-i dari y terhadap t, $a_i \in \mathbb{R}$ untuk $i = 0,1,2,\cdots,n$, $a_n \neq 0$ dan $b(t)$ adalah suatu fungsi kontinu pada interval I. Persaman Euler-Cauchy dikatakan homogen jika $b(t) = 0$ dan tak homogen jika $b(t) \neq 0$.

Solusi umum persamaan Euler-Cauchy tak homogen terdiri dari solusi homogen dan solusi partikular. Ada beberapa metode untuk mencari solusi dari persamaan Euler-Cauchy tak homogen diantaranya Metode Transformasi Integral [6], Transformasi Laplace [7,8,9], Transformasi Elzaki [10], Metode Koefisien Tak Tentu [11], Metode Transformasi Diferensial [12], dan Reduksi Order [13]. Pada umumnya penyelesaian persamaan Euler-Cauchy tak homogen dapat dilakukan dengan mentransformasi koefisien variabel menjadi koefisien konstanta, kemudian mencari solusi homogen, dan dilanjutkan dengan beberapa metode untuk mencari solusi partikular, diantaranya Metode Koefisien Tak Tentu [11]. Namun, solusi partikular dari persamaan Euler-Cauchy tak homogen juga dapat dicari tanpa harus ditansformasikan ke bentuk koefisien konstanta yang telah dilakukan oleh [14, 15]. Metode yang diperkenalkan oleh [14] dan kemudian diperumum oleh [15] hanya untuk mencari solusi partikular dari persamaan Euler-Cauchy tak homogen dengan bentuk polinomial.

Jia dan Sogabe dalam [16] telah menentukan bentuk umum solusi partikular dari persamaan diferensial biasa dengan koefisien konstanta tak homogen dalam kasus polinomial dan eksponensial. Penelitian [16] hanya membahas tentang persamaan diferensial biasa koefisien kontstanta dan pada penelitian ini membahas kasus khusus persamaan diferensial biasa koefisien variable, yaitu persamaan Euler-Cauchy. Pada artikel ini dibahas metode untuk mencari solusi partikular persamaan Euler-Cauchy tak homogen untuk fungsi polinomial dan logaritma natural dengan menerapkan metode yang sudah ada yaitu pada literatur [16].

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan studi literatur, yaitu mengkaji buku dan artikel penelitian yang relevan dengan topik pembahasan penelitian ini. Penelitian ini membahas tentang Metode Alternatif dalam mencari bentuk umum dari solusi partikular persamaan Euler-Cauchy tak homogen dengan bentuk polinomial dan logaritma natural. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut ini.

Persamaan Euler-Cauchy tak homogen dengan bentuk logaritma natural ditransformasi ke bentuk persamaan diferensial biasa koefisien konstanta dan kemudian diturunkan sebanyak m kali. Setelah itu dikonstruksi ke bentuk $\mathbf{Ty} = \mathbf{f}$ dengan $\mathbf{T}$ merupakan matriks segitiga atas Toeplitz. Selanjutnya mencari y, yang mana y merupakan entri pertama dari vektor $\mathbf{y}$, ($\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{f}$). Kemudian ditransformasikan kembali ke variabel awal sehingga diperoleh bentuk umum solusi partikular dari persamaan Euler-Cauchy tak homogen tersebut.

Tahap selanjutnya mencari bentuk umum dari solusi partikular persamaan Euler-Cauchy tak homogen yang berbentuk perkalian polinomial dan logaritma natural dengan memanfaatkan bentuk umum dari solusi partikular persamaan Euler-Cauchy tak homogen yang telah diketahui sebelumnya.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Diberikan persamaan diferensial biasa koefisien konstanta tak homogen

$$\sum_{i=0}^{n} c_i y^{(i)} = h(t)e^{\alpha t}, \qquad h(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i t^i \tag{1}$$

dengan $c_0 = 1$ dan α adalah konstanta. Persamaan karakteristik yang berhubungan Persamaan (1) adalah

$$p(\lambda) := \sum_{i=0}^{n} c_i \lambda^i = 0.$$

Pada artikel ini menampilkan bentuk umum solusi partikular dari Persamaan (1) [16] dalam bentuk Teorema 1 dan 2.

Teorema 1. [16] *Jika* $p(\alpha) \neq 0$, *maka*

$$y = e^{\alpha t} \sum_{i=0}^{m} d_i g^{(i)}(t)$$

adalah solusi partikular dari Persamaan (1), dengan

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_i = -\dfrac{1}{p(\alpha)} \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} \dfrac{p^{(i-j)}(\alpha)}{(i-j)!} d_j \text{ untuk } i = 1,2,\cdots,m \end{cases}$$

dan $g(t) = \frac{h(t)}{p(\alpha)}$ *dengan* $h(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i t^i$.

Teorema 1 menjelaskan tentang solusi partikular dari Persamaan (1) ketika akar-akar dari persamaan karakteristik $p(\lambda)$ tidak sama dengan α. Namun ketika terdapat akar-akar persamaan karakteristiknya sama dengan α dan multiplisitasnya r $(r \geq 1)$, maka Teorema 1 tidak berlaku lagi karena $p(\alpha) = 0$ untuk suatu $\alpha \in \mathbb{R}$. Oleh karena untuk mencari solusi partikular dari Persamaan (1) yang mempunyai akar-akar persamaan karakteristiknya sama dengan α dan multiplisitasnya r $(r \geq 1)$ dapat menggunakan Teorema 2 berikut ini.

Teorema 2. [16] *Jika* $p(\alpha) = 0$ *dan* α *mempunyai multiplisitas* r $(r \geq 1)$, *maka*

$$y = e^{\alpha t} u(t)$$

adalah solusi partikular dari Persamaan (1), dengan

$$u^{(r)}(x) = \sum_{i=0}^{m} d_i g^{(i)}(t)$$

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_i = -\dfrac{r!}{p^{(r)}(\alpha)} \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} \dfrac{p^{(r+i-j)}(\alpha)}{(r+i-j)!} d_j \text{ untuk } i = 1,2,\cdots,m \end{cases}$$

dan $g(t) = \frac{h(t)r!}{p^{(r)}(\alpha)}$ *dengan* $h(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i t^i$.

Diberikan persamaan Euler-Cauchy tak homogen

$$\sum_{i=0}^{n} a_i t^i y^{(i)} = f(t) \tag{2}$$

dengan $f(t) = (\ln t)^m$.

Persamaan (2) ditransformasi ke bentuk persamaan diferensial biasa koefisien konstanta dengan memisalkan $x = \ln t$ dan diperoleh

$$\sum_{i=0}^{n} A_i y^{(i)} = f(x) \tag{3}$$

dimana $f(x) = x^m$ dan

$$A_i = \frac{Q^{(i)}(\lambda)}{i!} \text{ untuk } \lambda = 0,$$

dengan $Q^{(i)}(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i P^{(i)}(\lambda, i)$ dan $P(\lambda, i) = \frac{\lambda!}{(\lambda - i)!}$.

Selanjutnya Persamaan (3) diturunkan sampai turunan ke-m dan $y^{(m)} = m!$, sehingga diperoleh

$$\sum_{i=j}^{m} A_{i-j} y^{(i)} = f^{(j)}(x), \text{ untuk } j = 1,2,\cdots,m, \tag{4}$$

kemudian Persamaan (4) direpresentasikan ke bentuk $\mathbf{Ty} = \mathbf{f}$ dengan $\mathbf{T}$ merupakan matriks segitiga atas Toeplitz, yaitu

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ 0 & A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-1} \\ 0 & 0 & A_0 & \cdots & A_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_0 \end{bmatrix}$$

dan

$$\mathbf{y} = \left(y, y', y'', \cdots, y^{(m)}\right)^T$$
$$\mathbf{f} = \left(f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(m)}(x)\right)^T.$$

Misalkan $a_0 = A_0 \neq 0$, maka matriks $\mathbf{T}$ mempunyai invers. Sehingga didapatkan $\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{f}$ dan diketahui bahwa entri pertama pada vektor $\mathbf{y}$ adalah y. Dengan demikian y dapat diperoleh dari perkalian titik antara vektor baris pertama dari invers matriks $\mathbf{T}$ dengan $\mathbf{f}$, yaitu

$$y = \frac{1}{A_0} \sum_{i=0}^{m} d_i f^{(i)}(x)$$

dengan

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_i = -\dfrac{1}{A_0} \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} A_{i-j} d_j \text{ untuk } i = 1,2,\cdots,m \end{cases}$$

dan selanjutnya ditansformasi ke bentuk awal dengan memisalkan $x = \ln t$ sehingga diperoleh bentuk umum solusi partikular dari Persamaan (2), yaitu

$$y = \frac{1}{Q(0)} \sum_{i=0}^{m} d_i P(m, i) (\ln t)^{m-i} \tag{5}$$

dengan

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_i = -\dfrac{1}{Q(0)} \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} \frac{Q^{(i-j)}(0)}{(i-j)!} d_j \text{ untuk } i = 1,2,\cdots,m. \end{cases}$$

Diberikan persamaan Euler-Cauchy tak homogen

$$\sum_{i=0}^{n} a_i t^i y^{(i)} = At^k f(t) \tag{6}$$

dengan $f(t) = (\ln t)^m$.

Langkah selanjutnya mencari bentuk umum solusi partikular dari Persamaan (6). Pada penelitian ini solusi partikular dari Persamaan (6) dibagi dalam dua kasus, yaitu $Q(k) \neq 0$ dan ketika k merupakan salah salah dari akar-akar karakteristik dari $Q(\lambda)$ dengan k mempunyai multiplisitas r $(r \geq 1)$.

Teorema 3. Misalkan $Q(k) \neq 0$ maka solusi partikular dari Persamaan (6), yaitu

$$y = \frac{At^k}{Q(k)} \sum_{i=0}^{m} d_i P(m,i)(\ln t)^{m-i} \tag{7}$$

dimana

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_i = -\dfrac{1}{Q(k)} \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} \dfrac{Q^{(i-j)}(k)}{(i-j)!} d_j \text{ untuk } i = 1,2,\cdots,m \end{cases}$$

dengan $Q(k) = \sum_{i=0}^{n} a_i P(k,i)$ dan $P(k,i) = \frac{k!}{(k-i)!}$.

Bukti

Diberikan

$$\sum_{i=0}^{n} a_i t^i y^{(i)} = At^k (\ln t)^m.$$

Misalkan $x = \ln t$, maka

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} A_i y^{(i)} &= Ae^{kx} x^m \\ &= h(x) e^{kx} \end{aligned} \tag{8}$$

dengan

$$\begin{aligned} h(x) &= Ax^m \\ A_i &= \frac{Q^{(i)}(\lambda)}{i!} \text{ untuk } \lambda = 0, \end{aligned}$$

dimana $Q^{(i)}(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i P^{(i)}(\lambda, i)$ dan $P(\lambda, i) = \frac{\lambda!}{(\lambda-i)!}$.

Persamaan karakteristik dari Persamaan (8) adalah

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} A_i \lambda^i = Q(\lambda)$$

dan

$$g(x) = \frac{h(x)}{p(k)} = \frac{Ax^m}{Q(k)}$$

Berdasarkan Teorema 1, maka solusi partikular Persamaan (8) adalah

$$\begin{aligned} y &= e^{kx} \sum_{i=0}^{m} d_i g^{(i)}(x) \\ &= e^{kx} \sum_{i=0}^{m} d_i \left(\frac{Ax^m}{Q(k)} \right)^i \\ &= \frac{Ae^{kx}}{Q(k)} \sum_{i=0}^{m} d_i \, P(m.i) x^{m-i} \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_i = -\dfrac{1}{Q(k)} \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} \dfrac{Q^{(i-j)}(k)}{(i-j)!} d_j \text{ untuk } i = 1,2,\cdots, m \end{cases}$$

Kemudian ditransformasi ke bentuk awal, diperoleh

$$y = \frac{At^k}{Q(k)} \sum_{i=0}^{m} d_i P(m,i)(\ln t)^{m-i}\,. \blacksquare$$

Kasus ketika $m = 0$ pada Persamaan (6), maka dapat diperoleh bentuk umum solusi partikularnya, yaitu

$$y = \frac{At^k}{Q(k)}$$

dimana solusi partikularnya sama dengan solusi partikular dari penelitian [14].

Akibat 4. Misalkan $Q(k) \neq 0$ maka solusi partikular dari Persamaan (6) untuk $m = 0$, yaitu

$$y = \frac{At^k}{Q(k)}$$

dengan $Q(k) = \sum_{i=0}^{n} a_i P(k,i)$ dan $P(k,i) = \frac{k!}{(k-i)!}$.

Bukti

Misalkan

$$y = \frac{At^k}{Q(k)}$$

maka

$$y^{(i)} = \frac{A}{Q(k)} P(k,i) t^{k-i} \text{ untuk } i = 1,2,\cdots,n.$$

Jadi

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} a_i t^i y^{(i)} &= \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \frac{A}{Q(k)} P(k,i) t^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{A}{Q(k)} P(k,i) t^k \\ &= \frac{At^k}{Q(k)} \sum_{i=0}^{n} a_i P(k,i) \\ &= \frac{At^k}{Q(k)} Q(k) \\ \sum_{i=0}^{n} a_i t^i y^{(i)} &= At^k \blacksquare. \end{aligned}$$

Adapun kasus ketika terdapat akar-akar persamaan dari $Q(\lambda)$ sama dengan k dan multiplisitasnya r $(r \geq 1)$.

Teorema 5. Misalkan $Q(k) = 0$ dan k mempunyai multiplisitas r $(r \geq 1)$, maka solusi partikular dari Persamaan (6), yaitu

$$y = \frac{At^k}{Q^{(r)}(k)} \sum_{i=0}^{m} d_i \frac{P(m,i)}{C_r^{m-i+r}} (\ln t)^{m-i+r} \tag{9}$$

dimana

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_i = -\dfrac{r!}{Q^{(r)}(k)} \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} \dfrac{Q^{(i-j+r)}(k)}{(i-j+r)!} d_j \text{ untuk } i = 1,2,\cdots,m \end{cases}$$

dengan $Q(k) = \sum_{i=0}^{n} a_i P(k,i)$, $P(k,i) = \frac{k!}{(k-i)!}$ dan $C_r^{m-i+r} = \frac{(m-i+r)!}{r!(m-i)!}$.

Bukti
Misalkan

$$y = \frac{At^k}{Q^{(r)}(k)} \sum_{i=0}^{m} d_i \frac{P(m,i)}{C_r^{m-i+r}} (\ln t)^{m-i+r}$$

maka

$$y^{(j)} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{l=0}^{j} C_l^{m-i+r} P^{(l)}(k,j) \frac{At^{k-j}}{Q^{(r)}(k)} d_i \frac{P(m,i)}{C_r^{m-i+r}} (\ln t)^{m-i+r-l}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} a_j t^j y^{(j)} &= \sum_{j=0}^{n} a_j t^j \sum_{i=0}^{m} \sum_{l=0}^{j} C_l^{m-i+r} P^{(l)}(k,j) \frac{At^{k-j}}{Q^{(r)}(k)} d_i \frac{P(m,i)}{C_r^{m-i+r}} (\ln t)^{m-i+r-l} \\ &= \frac{At^k}{Q^{(r)}(k)} \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{i=0}^{m} d_i \frac{P(m,i)}{C_r^{m-i+r}} \sum_{l=0}^{j} C_l^{m-i+r} P^{(l)}(k,j) (\ln t)^{m-i+r-l} \\ &= \frac{At^k}{Q^{(r)}(k)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{l=0}^{r-i} d_i \frac{P(m,i)}{C_r^{m-i+r}} C_l^{m-i+r} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j P^{(l)}(k,j) \right) (\ln t)^{m-i+r-l} \\ &= \frac{At^k}{Q^{(r)}(k)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{l=0}^{r-i} d_i \frac{P(m,i)}{C_r^{m-i+r}} C_l^{m-i+r} \left(Q^{(l)}(k) \right) (\ln t)^{m-i+r-l}, \end{aligned}$$

karena $Q^{(j)}(k) = 0$ untuk $j = 0,1,\cdots,r-1$, maka

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} a_j t^j y^{(j)} &= \frac{At^k}{Q^{(r)}(k)} Q^{(r)}(k) (\ln t)^m \\ &= At^k (\ln t)^m. \blacksquare \end{aligned}$$

Contoh 6. *Tentukan solusi partikular dari persamaan Euler-Cauchy berikut ini*

$$t^2 y'' - ty' + y = 30t(\ln t)^4.$$

Penyelesaian:

1) Menentukan solusi partikular dengan Metode Koefisien Tak Tentu.
   Diberikan persamaan Euler-Cauchy berikut ini

$$t^2 y'' - ty' + y = 30t(\ln t)^4. \tag{10}$$

   Misalkan $t = e^x$, maka Persamaan (10) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$y'' - 2y' + y = 30e^x x^4. \tag{11}$$

   Kemudian persamaan karakteristik dari Persamaan (11) adalah

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

   dan akar-akar persamaan karakteristiknya adalah $\lambda_{1,2} = \lambda = 1$, sehingga diperoleh solusi umum dari Persamaan (11), yaitu

$$y_h = (c_1 + c_2 x)e^x.$$

Misalkan $y_p = x^2(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E)e^x$ merupakan solusi partikular dari Persamaan (11), maka

$$\begin{aligned} y_p' &= (Ax^6 + (6A+B)x^5 + (5B+C)x^4 + (4C+D)x^3 + (3D+E)x^2 + 2Ex)e^x \\ y_p'' &= (Ax^6 + (12A+B)x^5 + (30A+10B+C)x^4 + (20B+8C+D)x^3 + (12C+6D+E)x^2 \\ &\quad +(6D+4E)x + 2E)e^x \end{aligned}$$

Kemudian disubstitusikan ke Persamaan (11) diperoleh $A = 1$, dan $B = C = D = E = 0$. Sehingga solusi partikular dari Persamaan (11) adalah

$$y_p = x^6 e^x,$$

setelah itu ditransformasi ke bentuk awal, maka diperoleh solusi partikular dari Persamaan (10), yaitu

$$y_p = t(\ln t)^6.$$

2) Menentukan solusi partikular dengan Metode Alternatif.
Diberikan persamaan Euler-Cauchy berikut ini

$$t^2 y'' - t y' + y = 30t(\ln t)^4.$$

Diketahui

$$Q(\lambda) = \sum_{i=0}^{2} a_i P(\lambda, i) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

dan $k = 1$ dimana $Q(1) = Q'(1) = 0$ dan $Q''(1) \neq 0$, maka diperoleh $r = 2$.
$d_0 = 1$
$d_1 = -\frac{2!}{Q^{(2)}(1)} \frac{Q^{(3)}(1)}{3!} d_0 = 0$, $d_2 = 0$, $d_3 = 0$, dan $d_4 = 0$.

$$\begin{aligned} y &= \frac{30t}{Q^{(2)}(1)} \sum_{i=0}^{4} d_i \frac{P(4,i)}{C_2^{6-i}} (\ln t)^{6-i} \\ &= t(\ln t)^6. \end{aligned}$$

Berdasarkan Contoh 6 dapat dilihat bahwa untuk mencari solusi partikular Euler-Cauchy tak homogen dengan Metode Alternatif lebih efisien dibandingkan dengan Metode Koefisien Tak Tentu, yang dalam hal ini metode yang memanfaatkan solusi homogen untuk mencari solusi partikular.

Contoh 7. *Tentukan solusi partikular dari persamaan Euler-Cauchy berikut ini*

$$t^3 y''' + t^2 y'' = 12t(\ln t)^2.$$

Penyelesaian:
Diketahui

$$Q(\lambda) = \sum_{i=0}^{3} a_i P(\lambda, i) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda$$

dan $k = 1$ dimana $Q(1) = Q'(1) = 0$ dan $Q''(1) \neq 0$, maka diperoleh $r = 2$.

$$\begin{aligned} d_0 &= 1 \\ d_1 &= -\frac{2!}{Q^{(2)}(1)} \frac{Q^{(3)}(1)}{3!} d_0 = -1 \\ d_2 &= -\frac{2!}{Q^{(2)}(1)} \sum_{j=0}^{1} \frac{Q^{(4-j)}(1)}{(4-j)!} d_j = -\frac{2}{2}(0-1) = 1 \\ y &= \frac{12t}{Q^{(2)}(1)} \sum_{i=0}^{2} d_i \frac{P(2,i)}{C_2^{4-i}} (\ln t)^{4-i} = \frac{12t}{2}\left(d_0\left(\frac{1}{6}\right)(\ln t)^4 + d_1\left(\frac{2}{3}\right)(\ln t)^3 + d_2\left(\frac{2}{1}\right)(\ln t)^2\right) \\ &= t(\ln t)^4 - 4t(\ln t)^3 + 12t(\ln t)^2. \end{aligned}$$

Contoh 8. *Tentukan solusi partikular dari persamaan Euler-Cauchy berikut ini*

$$t^5 y^{(5)} + t^{(4)} y^{(4)} + 3t^3 y''' - 8t^2 y'' + 16t y' - 16y = 840t^2(\ln t)^3.$$

Penyelesaian:
Diketahui:

$$Q(\lambda) = \sum_{i=0}^{5} a_i P(\lambda, i) = \lambda^5 - 9\lambda^4 + 32\lambda^3 - 56\lambda^2 + 48\lambda - 16$$

$$Q^{(4)}(\lambda) = 120\lambda - 216$$

dan $k = 2$ dimana $Q(2) = Q'^{(2)} = Q''(0) = Q'''(2) = 0$ dan $Q^{(4)}(2) \neq 0$, maka diperoleh $r = 4$.

$$d_0 = 1$$

$$d_1 = -\frac{4!}{Q^{(4)}(2)} \frac{Q^{(5)}(2)}{5!} d_0 = -1$$

$$d_2 = -\frac{4!}{Q^{(4)}(2)} \sum_{j=0}^{1} \frac{Q^{(6-j)}(2)}{(6-j)!} d_j = -(0-1) = 1$$

$$d_3 = -\frac{4!}{Q^{(4)}(2)} \sum_{j=0}^{2} \frac{Q^{(7-j)}(2)}{(7-j)!} d_j = -(0+0+1) = -1$$

$$y = \frac{840t}{Q^4(2)} \sum_{i=0}^{3} d_i \frac{P(3,i)}{C_4^{7-i}} (\ln t)^{7-i} = \frac{840t^2}{24} \left(d_0 \left(\frac{1}{35}\right) (\ln t)^7 + d_1 \left(\frac{3}{15}\right) (\ln t)^6 + d_2 \left(\frac{6}{5}\right) (\ln t)^5 + d_2 \left(\frac{6}{1}\right) (\ln t)^5 \right)$$
$$= t^2 (\ln t)^7 - 7t^2 (\ln t)^6 + 42t^2 (\ln t)^5 - 210t^2 (\ln t)^4.$$

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan bahwa bentuk umum solusi partikular dari Persamaan Euler-Cauchy yang diperoleh, merupakan hasil dari penggunaan matriks segitiga atas Toeplitz. Metode Alternatif ini dapat menentukan solusi partikular dari persamaan Euler-Cauchy tak homogen dengan bentuk polinomial dan logaritma natural tanpa harus ditransformasi ke bentuk persamaan diferensial biasa koefisien konstanta.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih atas dana DIPA FMIPA Universitas Tanjungpura Tahun 2020 yang telah mendanai penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] W.E. Boyce, R.C. DiPrima and D.B. Meade. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Eleventh Edition. New York: John Willey & Sons Inc, 2017.

[2] A. Ü. Keskinv. *Ordinary Differential Equations for Engineers: Problems with MATLAB Solutions*. Switzerland: Springer International Publishing, Year, 2019.

[3] D. D. Leon, Using Undetermined Coefficients to Solve Certain Classes of Variable-Coefficient Equations. *The American Mathematical Monthly*. vol. 122, no. 3, pp. 246-255, 2015.

[4] P. Rodríguez-Vellando. …and so Euler discovered Differential Equations. *Found Sci* vol. 24, no. 2, pp. 343–374, 2019.

[5] I. Faisal and M. Darus. Application of nonhomogenous Cauchy-Euler differential equation for certain class of analytic functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* vol. 43, no. 3, pp. 375 – 382, 2014.

[6] I. Cho1, Hj. Kim. Several Representations of The Euler-Cauchy Equation with Respect to Integral Transforms. *Int. J. of Pure & Appl*. vol 87, no. 3, pp. 487-495, 2013.

[7] Hj. Kim. The solution of Euler-Cauchy equation expressed by differential operator using Laplace transform, *Int. J. of Pure & Appl*. Math., 84, 2013.

[8] Bm. Ghil and Hj. Kim. The solution of Euler-Cauchy equation by using Laplace transform. *Int. J. Math. Anal*. vol. 9, no. 53, pp. 2611–2618, 2015.

[9] P. Haarsa and S. Pothat. On Cauchy-Euler Equation with a Bulge Function by Using Laplace Transform. *Applied Mathematical Sciences*, vol. 9, no. 13, 623 – 627, 2015.

[10] Hj. Kim. The Time Shifting Theorem and The Convolution for Elzaki Transform. *Int. J. of Pure & Appl*. vol. 87 n.o. 2, pp. 261-271, 2013.

[11] D. De Leon. Euler-Cauchy Using Undetermined Coefficients. *The College Mathematics Journal*. vol. 41, no. 3, pp. 235-237, 2010.

[12] M. Alesemi, M. A. El-Moneam, B. S. Bader, E. S. Aly. The of Particular Solutions Some Types of Euler-Cauchy ODE Using the Differential Transform Method. *J. Nonlinear Sci. Appl*., vol. 12, pp. 146–151. 2019.

[13] P. Haarsa and S. Pothat. The Reduction of Order on Cauchy-Euler Equation with a Bulge Function. *Applied Mathematical Sciences*, vol. 9, no. 23, pp. 1139 – 1143, 2015.

[14] A.H. Sabuwala and D.De Leon. Particular Solution to the Euler-Cauchy Equation with polynomial non-homogeneities. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 8th AIMS Conference, Supplement 2, pp. 1271-1278, 2011.

[15] Apriliandi, M. Kiftiah, Yudhi. Generalisasi Teorema Sabuwala-Leon Pada Persamaan Euler-Cauchy Tak Homogen Polinomial, *BIMASTER*, vol 7, no. 2, pp. 149-152, 2018.

[16] J. Jia and T. Sogabe. On Particular Solution of Ordinary Differential Equations with Constant Coefficient. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219, pp. 6761-6767, 2013.