FUNGSIONAL LINEAR-2 DALAM RUANG NORM-2

Harmanus Batkunde[1], Meilin I. Tilukay[2] dan F. Y. Rumlawang[3]

[1,2,3] Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia
e-mail: [1]hbatkunde@fmipa.unpatti.ac.id; [2]meilin.tilukay@fmipa.unpatti.ac.id

Abstrak

Ruang norm-2 merupakan perluasan dari ruang norm yang telah kita kenal. Ruang norm-2 dan perumumannya ruang norm-*n* ($n \geq 2$), pertama kali diperkenalkan oleh Gähler pada tahun 1960-an, [3, 4, 5, 6]. Kemudian Misiak di tahun 1989 memperkenalkan ruang hasil kali dalam-*n* ($n \geq 2$) [16]. Setelah itu, banyak peneliti yang mengkaji sifat-sifat ataupun aspek-aspek dalam ruang norm-2 maupun ruang norm-*n*. Hal ini dapat dilihat pada beberapa penelitian dalam [1,2,7,8,9,10,11,12,13,14,15,18,19]. Dalam penelitian ini aspek yang akan ditinjau adalah fungsional linear-2 terbatas pada ruang norm-2. Untuk meninjau beberapa sifatnya, sebelumnya akan diperkenalkan fungsional linear-2 di ruang norm-2 dengan beberapa tipe keterbatasn. Berdasarkan tipe keterbatasan ini akan dibentuk ruang-ruang dual. Ruang-ruang dual ini memuat semua fungsional linear-2 masing-masing berdasarkan tipe keterbatasannya. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ruang-ruang dual ini ekuivalen.

Kata Kunci: Fungsional linear-2 terbatas, norm-2, ruang dual, ruang norm-2.

2-LINEAR FUNCTIONALS IN 2-NORMED SPACE

Abstract

A 2-normed space is a generalization of a normed space that we have known. 2-normed space and n-normed spaces were initially introduced by Gähler on 1960’s. Then in 1989 Misiak introduced n-inner product space. Later, many researchers studied some properties and aspects in 2-normed spaces or n-normed spaces. For instance we can see at [1,2,7,8,9,10,11,12,13,14,15,18,19]. In this paper we will observe about bounded 2-linear functional in 2-normed spaces. Before that, we will introduce 2-linear functional with several type of boundedness. Moreover, we will form some dual spaces with respect to these type of boundedness. Furthermore, we will show that these dual spaces are equivalence.

Keywords: bounded 2-linear functional, dual spaces, 2-norm, 2-normed spaces.

1. Pendahuluan

Jika dalam ruang norm kita membahas panjang vektor, maka dalam ruang norm-2 yang dibicarakan adalah luas jajargenjang yang direntang oleh 2 vektor.

Berikut adalah definisi ruang norm-2 yang diajukan oleh Gähler yang dapat dilihat dalam [3, 4, 5, 6].

Definisi 1.1. [3] Misal X dengan $\dim(X) \geq 2$. Pemetaan $\|.,.\|: X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat:

i. $\|x,y\| \geq 0\ ; \forall\, x,y \in X$

   $\|x,y\| = 0$ jika dan hanya jika x,y bergantung linier;

ii. $\|x,y\| = \|y,x\|\ , \forall\, x,y \in X$;

iii. $\|\alpha x,y\| = |\alpha|\|x,y\|, \forall\, x,y \in X$;

iv. $\|x+y,z\| \leq \|x+z\| + \|y+z\|\ ; \forall\, x,y,z \in X$;

merupakan norm-2 pada X, dan pasangan $(X,\|.,.\|)$ disebut ruang norm-2.

Sebagai contoh, perhatikan bahwa $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ merupakan ruang hasil kali dengan hasil kali dalamnya didefinisikan oleh:

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^2$$

dengan norm-2 didefinisikan oleh

$$\|x, y\|_s = \begin{vmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y\rangle \\ \langle y, x\rangle & \langle y, y\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

Dapat diperiksa bahwa $(\mathbb{R}^2, \|\cdot,\cdot\|)$merupakan suatu ruang norm-2. Lebih lanjut secara geometri $\|x, y\|_s$ menyatakan luas jajargenjang yang direntang oleh x dan y.

Berikut beberapa sifat yang dapat ditinjau mengenai luasan yang direntang oleh 2 vektor x dan y.

Proposisi 1.2. [10] Diberikan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ adalah suatu ruang norm-2, maka $\forall\, x, y \in X$ berlaku:

$$\|x + \alpha y, y\| = \|x, y\|, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Proposisi di atas menyatakan bahwa jika suatu luasan dibentuk oleh dua vektor *x* dan *y*, maka luasnya akan sama dengan luasan yang dibentuk oleh vektor $(x + \alpha y)$ dan y untuk sembarang $\alpha \in \mathbb{R}$. Di sisi lain, Misiak juga mengembangkan teori ruang hasil kali dalam-*n* $(n \geq 2)$ dalam [16]. Berikut definisi dari ruang hasil kali dalam-2.

Definisi 1.3. [17] Misalkan X ruang vektor. Maka pemetaan $\langle\cdot,\cdot \mid \cdot\rangle: X \times X \times X \to \mathbb{R}$, yang bersifat:

i. $\langle x, x|z\rangle \geq 0$, $\forall\, x, z \in X$;

ii. $\langle x, x|z\rangle = 0$ jika dan hanya jika x dan z bergantung linier;

iii. $\langle x, x|z\rangle = \langle z, z|x\rangle$, $\forall\, x, z \in X$;

iv. $\langle x, y|z\rangle = \langle y, x|z\rangle$, $\forall\, x, y, z \in X$;

v. $\langle \alpha x, y|z\rangle = \alpha\langle x, y|z\rangle$, $\forall\, x, y, z \in X, \alpha \in \mathbb{R}$;

vi. $\langle x + x', y|z\rangle = \langle x, y|z\rangle + \langle x', y|z\rangle$, $\forall x, x', y, z \in X$;

merupakan hasil kali dalam-2 pada X, dan pasangan $(X, \langle\cdot,\cdot \mid \cdot\rangle)$ merupakan ruang hasil kali dalam-2.

Sebagai contoh, perhatikan bahwa $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot \mid \cdot\rangle)$ dengan *n* $\in \mathbb{N}$, dan hasil kali dalam-2 yang didefinisikan sebagai

$$\langle x, y|z\rangle = \begin{vmatrix} \langle x, y\rangle & \langle x, z\rangle \\ \langle z, y\rangle & \langle z, z\rangle \end{vmatrix} \;;\; x, y, z \in \mathbb{R}^n$$

merupakan ruang hasil kali dalam-2.

Dalam ruang hasil kali dalam-2 juga berlaku ketaksamaan Cauchy Schwarz [8] yaitu

$$|\langle x, y|z\rangle| \leq \langle x, x|z\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y, y|z\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Berikut beberapa teorema yang menunjukkan hubungan antara ruang norm-2 dan ruang hasil kali dalam-2.

Teorema 1.4. [8] Misal $(X, \langle \cdot,\cdot \mid \cdot \rangle)$ ruang hasil kali dalam-2, maka

$$\|x, y\| = \langle x, x|y \rangle^{\frac{1}{2}}$$

merupakan norm-2 pada X. Lebih lanjut, norm-2 ini disebut norm-2 yang diinduksi oleh hasil kali dalam-2.

Teorema berikut menyatakan bahwa dalam ruang hasil kali dalam-2 berlaku hukum jajargenjang, dengan akibat langsung yang merupakan kesamaan polarisasi.

Teorema 1.5. [8] Misal $(X, \langle \cdot,\cdot \mid \cdot \rangle)$ ruang hasil kali dalam-2, maka berlaku hukum jajargenjang berikut

$$\|x + y, z\|^2 + \|x - y, z\|^2 = 2(\|x, z\|^2 + \|y, z\|^2) \quad ; \quad \forall\, x, y, z \in X$$

Akibat 1.6. [8] Misal $(X, \langle \cdot,\cdot \mid \cdot \rangle)$ ruang hasil kali dalam-2, maka berlaku kesamaan polarisasi, yaitu:

$$\langle x, y|z \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y, z\|^2 - \|x - y, z\|^2).$$

Karena dalam penelitian ini aspek yang akan ditinjau adalah fungsional linear-2 terbatas di ruang norm-2, maka berikut akan ditinjau definisi dasar dari fungsional linear terbatas di ruang norm.

Definisi 1.7. [16] Misal X dan Z adalah ruang-ruang vektor. Suatu fungsional linear-2 pada $X \times Z$ adalah suatu pemetaan $f: X \times Z \to \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $x, x_1, x_2 \in X$ dan $z, z_1, z_2 \in Z$ dan skalar α, β memenuhi

i. $f(x_1 + x_2, z) = f(x_1, z) + h(x_2, z)$;

ii. $f(x, z_1 + z_2) = f(x, z_1) + f(x, z_2)$;

iii. $f(\alpha x, z) = \alpha f(x, z)$;

iv. $f(x, \beta z) = \beta f(x, z)$.

Definisi 1.8. [16] Misal $(X, \|\cdot\|_X)$ dan $(Z, \|\cdot\|_Z)$ adalah ruang-ruang norm dan f adalah suatu fungsional linear-2, dan jika terdapat suatu bilangan $k > 0$ sedemikian hingga

$$|f(x, z)| \leq k\|x\|_X\|z\|_Z\,, \tag{1}$$

untuk setiap $x \in X, z \in Z$, maka f dikatakan terbatas, dan

$$\|f\| = \sup_{z \in X \setminus \{0\}, z \in Z \setminus \{0\}} \frac{|f(x,z)|}{\|x\|_X\|z\|_Z} = \sup_{\|x\|_X = 1, \|z\|_Z = 1} |h(x, z)| \tag{2}$$

disebut norm dari f.

Selanjutnya dapat dilihat bahwa pendefinisian (2) identik dengan $\|f\| = \inf\{k > 0 : (1) \text{ berlaku}\}$.

2. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan diperkenalkan tentang fungsional linear-2 di ruang norm-2. Misalkan $(X, \|\cdot,\cdot\|_X)$ dan $(Z, \|\cdot,\cdot\|_Z)$ adalah ruang-ruang norm-2 dan $f: X \times Z \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsional linear-2 pada $X \times Z$, maka kita dapat mendefinisikan suatu fungsional linear-2 terbatas pada $X \times Z$ dalam bebrapa cara.

2.1. Fungsional Linear-2 Terbatas-1

Definisi 2.1.1. Misal $(X, \|\cdot,\cdot\|_X)$ dan $(Z, \|\cdot,\cdot\|_Z)$ adalah ruang-ruang norm-2 dan $Y = \{y_1, y_2\}$ dan $W = \{w_1, w_2\}$ adalah himpunan bebas linear masing-masing di X dan Z. Suatu fungsional linear-2 f dikatakan terbatas-1 (tipe 1) terhadap pasangan himpunan Y dan W jika terdapat $k > 0$ sehingga

$$|f(x,z)| \leq k\,(\|x,y_1\|_X + \|x,y_2\|_X)(\|z,w_1\|_Z + \|z,w_2\|_Z), \tag{3}$$

untuk setiap $x \in X, z \in Z$.

Selanjutnya kita bentuk ruang dual dari $X \times Z$, notasikan dengan $(X \times Z)'_1$. Ruang $(X \times Z)'_1$ memuat semua fungsional linear-2 terbatas-1 (tipe 1) pada $X \times Z$. Untuk $f \in (X \times Z)'_1$ kita definisikan

$$\|f\|_1 \coloneqq \inf\{k > 0 : (3) \text{ berlaku}\}. \tag{4}$$

Jelas dapat terlihat bahwa definisi (4) identik dengan

$$\|f\|_1 \coloneqq \sup\{|f(x,z)| : \|x,y_1\|_X + \|x,y_2\|_X \leq 1 \text{ dan } \|z,w_1\|_Z + \|z,w_2\|_Z \leq 1\}. \tag{5}$$

Lebih lanjut, dapat dilihat bahwa formula (4) dan (5) mendefinisikan suatu norm di $(X \times Z)'_1$.

Berikut kita tinjau contoh dari fungsional linear-2 terbatas.

Misalkan $(X, \langle\cdot,\cdot \mid \cdot\rangle_X)$ dan $(Z, \langle\cdot,\cdot \mid \cdot\rangle_Z)$ adalah ruang-ruang hasil kali dalam-2. Misal $Y = \{y_1, y_2\}$ dan $W = \{w_1, w_2\}$ adalah himpunan bebas linear masing-masing di X dan Z. Definisikan suatu $f: X \times Z \to \mathbb{R}$ oleh

$$f(x,z) \coloneqq (\langle x, y_1 | y_2\rangle_X + \langle x, y_2 | y_1\rangle_X)(\langle z, w_1 | w_2\rangle_Z + \langle z, w_2 | w_1\rangle_Z), \tag{6}$$

mudah dilihat bahwa f yang didefinisikan pada (6) merupakan fungsional linear-2. Fungsional linear-2 yang ditunjukkan pada (6) terbatas-1 dan normnya ditunjukkan dalam fakta berikut.

Fakta 2.1.2. Fungsional linear yang ditunjukkan dalam (6) terbatas-1 dan

$$\|f\|_1 = \|y_1, y_2\|_X \|w_1, w_2\|_Z.$$

Bukti. Dengan menggunakan ketaaksamaan segitiga dan ketaksamaan Cauchy-Schwarz, perhatikan bahwa untuk $x \in X$ dan $z \in Z$ kita peroleh

$$|f(x,z)| \leq \|y_1, y_2\|_X \|w_1, w_2\|_Z\,(\|x,y_1\|_X + \|x,y_2\|_X)(\|z,w_1\|_Z + \|z,w_2\|_Z),$$

sehingga f adalah terbatas-1. Lebih lanjut dengan memperhatikan definisi (4) dapat dilihat bahwa

$$\|f\|_1 \leq \|y_1, y_2\|_X \|w_1, w_2\|_Z$$

Untuk menunjukkan bahwa $\|f\|_1 = \|y_1, y_2\|_X \|w_1, w_2\|_Z$, kita dapat menggunakan definisi (5) dan cukup pilih

$$x = \|y_1, y_2\|^{-1} y_1 \text{ dan } z = \|w_1, w_2\|^{-1} w_1.$$

Maka kita peroleh

$$\|x, y_1\|_X + \|x, y_2\|_X = 1, \tag{7}$$

dan

$$\|z, w_1\|_Z + \|z, w_2\|_Z = 1. \tag{8}$$

Selanjutnya,

$$|f(x,z)| = \|y_1, y_2\|^{-1}\|w_1, w_2\|^{-1}(\langle y_1, y_1|y_2\rangle_X + \langle y_1, y_2|y_1\rangle_X)(\langle w_1, w_1|w_2\rangle_Z + \langle w_1, w_2|w_1\rangle_Z)$$

sehingga diperoleh

$$|f(x,z)| = \|y_1, y_2\|^{-1}\|w_1, w_2\|^{-1}\|y_1, y_2\|^2\|w_1, w_2\|^2 = \|y_1, y_2\| \quad \|w_1, w_2\|$$

Berdasarkan definisi (5) maka $\|f\|_1 = \|y_1, y_2\|_X\|w_1, w_2\|_Z$. ■

2.2. Fungsional Linear-2 Terbatas-p ($\boldsymbol{p \geq 1}$)

Definisi 2.2.1. Misal $(X, \|\cdot,\cdot\|_X)$ dan $(Z, \|\cdot,\cdot\|_Z)$ adalah ruang-ruang norm-2 dan $Y = \{y_1, y_2\}$ dan $W = \{w_1, w_2\}$ adalah himpunan bebas linear masing-masing di X dan Z. Suatu fungsional linear-2 f dikatakan terbatas-*p* (tipe *p*) terhadap pasangan himpunan Y dan W jika terdapat $k > 0$ sehingga

$$|f(x,z)| \leq k\left(\|x, y_1\|_X^p + \|x, y_2\|_X^p\right)\left(\|z, w_1\|_Z^p + \|z, w_2\|_Z^p\right), \tag{9}$$

untuk setiap $x \in X, z \in Z$.

Kita bentuk $(X \times Z)'_p$ yang merupakan ruang dual yang memuat semua fungsional linear-2 terbatas-*p* di $X \times Z$.

Untuk setiap $f \in (X \times Z)'_p$ kita definisikan

$$\|f\|_p \coloneqq \inf\{k > 0 : (9) \text{ berlaku}\} \tag{10}$$

Dapat dilihat bahwa (10) identik dengan

$$\|f\|_p \coloneqq \sup\left\{|f(x,z)| : \|x, y_1\|_X^p + \|x, y_2\|_X^p \leq 1 \text{ dan } \|z, w_1\|_Z^p + \|z, w_2\|_Z^p \leq 1\right\}. \tag{11}$$

Ternyata fungsional yang didefinisikan pada (6) juga terbatas-*p* dan normnya ditunjukkan oleh fakta berikut.

Fakta 2.2.2. Fungsional linear yang didefinisikan pada (6) terbatas-*p* dengan

$$\|f\|_p = n^{\frac{2}{q}}\|y_1, y_2\|_X\|w_1, w_2\|_Z.$$

Bukti. Bukti analog dengan bukti dari Fakta 2.1.2. (Gunakan ketaksamaan segitiga dan ketaksamaan Hölder)

Untuk mendapatkan kesamaan pilih

$$x = n^{-\frac{1}{p}}\|y_1, y_2\|_X^{-1}(y_1 + y_2) \text{ dan } y = n^{-\frac{1}{p}}\|w, w\|_X^{-1}(w_1 + w_2)\,.$$

Selanjutnya kita akan berpikir bahwa akan ada banyak ruang dual yang terbentuk, mengingat banyaknya bilangan p yang memenuhi (karena $p \geq 1$). Tetapi dalam teorema berikut akan ditunjukkan bahwa ruang-ruang dual yang dibentuk tadi ekuivalen.

Teorema 2.2.3. Misal $(X, \|\cdot,\cdot\|_X)$ dan $(Z, \|\cdot,\cdot\|_Z)$ adalah ruang-ruang norm-2. Jika f adalah suatu fungsional linear-2 di $X \times Z$, maka f terbatas-p jika dan hanya jika f terbatas-1.

Bukti. Misal f sebarang fungsional linear-2 terbatas-p (terhadap pasangan himpunan bebas linear $Y = \{y_1, y_2\}$ dan $W = \{w_1, w_2\}$ adalah himpunan bebas linear masing-masing di X dan).

Jika $x \in X$ dan $z \in Z$ memenuhi

$$\|x, y_1\|_X + \|x, y_2\|_X \leq 1 \text{ dan } \|z, w_1\|_Z + \|z, w_2\|_Z \leq 1,$$

Hal ini berarti tiap suku dari penjumlahan di atas juga nilainya akan kurang dari atau sama dengan 1. Dengan demikian kita peroleh

$$\|x, y_1\|_X^p + \|x, y_2\|_X^p \leq 1 \text{ dan } \|z, w_1\|_Z^p + \|z, w_2\|_Z^p \leq 1,$$

atau

$$(\|x, y_1\|_X^p + \|x, y_2\|_X^p)\left(\|z, w_1\|_Z^p + \|z, w_2\|_Z^p\right) \leq 1.$$

Sehingga kita peroleh $|f(x, z)| \leq \|f\|_p$ atau dengan kata lain f terbatas-1.

Sebaliknya, misal f adalah fungsional linear terbatas-1 (terhadap pasangan himpunan bebas linear $Y = \{y_1, y_2\}$ dan $W = \{w_1, w_2\}$ adalah himpunan bebas linear masing-masing di X dan Z).

Jika $x \in X$ dan $z \in Z$ memenuhi

$$\|x, y_1\|_X^p + \|x, y_2\|_X^p \leq 1,$$

dan

$$\|z, w_1\|_Z^p + \|z, w_2\|_Z^p \leq 1,$$

maka dengan menggunakan ketaksamaan Hölder kita peroleh

$$\left(\|x, y_1\|_X^p + \|x, y_2\|_X^p\right)\left(\|z, w_1\|_Z^p + \|z, w_2\|_Z^p\right) \leq n^{\frac{2}{q}}.$$

Hal ini mengakibatkan

$$\left|f\left(\frac{x}{n^{\frac{1}{q}}}, \frac{z}{n^{\frac{1}{q}}}\right)\right| \leq \|h\|_1,$$

atau dengan kata lain

$$|f(x, z)| \leq n^{\frac{2}{q}} \|h\|_1.$$

Dengan demikian f terbatas-p, dengan

$$\|f\|_p \leq n^{\frac{2}{q}} \|f\|_1. \qquad \blacksquare$$

Teorema di atas menyatakan bahwa norm $\|\cdot\|_1$ dan $\|\cdot\|_p$ ekuivalen dengan

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_p \leq n^{\frac{2}{q}} \|f\|_1 \quad \text{dengan } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ dan } p \geq 1.$$

Lebih lanjut karena untuk sembarang fungsional linear terbatas-1 juga terbatas-p dan juga sebaliknya, maka ruang dual yang dibentuk oleh tiap tipe keterbatasan ekuivalen.

Daftar Pustaka

[1] Batkunde, H., Gunawan, H. dan Pangalela, Y. E. (2013): Bounded linear functionals on the n-normed space of p-summable sequences, Acta Univ. M. Belii Ser. Math, 21, 66–75.

[2] Ekariani, S., Gunawan, H. dan Idris, M. (2013): A contractive mapping theorem for the n-normed space of p-summable sequences, J. Math. Analysis, 4, 1–7. Freese, R. W. dan Cho, Y. J. (2001): Geometry of linear 2-normed spaces, Nova Publishers.

[3] Gähler, S. (1964): Lineare 2-normierte R¨aume, Mathematische Nachrichten, 28(1-2), 1–43.

[4] Gähler, S. (1969a): Untersuchungen ¨uber verallgemeinerte m-metrische R¨aume. I, Mathematische Nachrichten, 40(1-3), 165–189.

[5] Gähler, S. (1969b): Untersuchungen ¨uber verallgemeinerte m-metrische R¨aume. II, Mathematische Nachrichten, 40(4-6), 229–264.

[6] Gähler, S. (1969c): Untersuchungen ¨uber verallgemeinerte m-metrische R¨aume. III, Mathematische Nachrichten, 41(1-3), 23–36.

[7] Gozali, S., Gunawan, H. dan Neswan, O. (2010): On n-norms and bounded n-linear functionals in a Hilbert space, Ann. Funct. Anal, 1(1), 72–79.

[8] Gunawan, H. (2001): On n-inner products, n-norms, and the Cauchy-Schwarz inequality, Scientiae Mathematicae Japonicae, 55(1), 53–60.

[9] Gunawan, H. (2002b): Inner products on n-inner product spaces, Soochow Journal of Mathematics, 28(4), 389–398.

[10] Gunawan, H., Kikianty, E., Mashadi, S. G. dan Sihwaningrum, I. (2006): Orthogonality in n-normed spaces, Indones Math. Soc,.

[11] Gunawan, H. dan Mashadi, M. (2001): On n-normed spaces, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 27(10), 631–639.

[12] Gunawan, H., Neswan, O. dan Setya-Budhi, W. (2005): A formula for angles between subspaces of inner product spaces, Contributions to Algebra and Geometry, 46(2), 311–320.

[13] Gunawan, H., Sukaesih, E. dan Neswan, O. (2015): Fixed point theorems on bounded sets in an n-normed space, J. Math. Anal, 3, 51–58.

[14] Kir, M. dan Kiziltunc, H. (2014): On fixed point theorems for contraction mappings in n-normed spaces, Appl. Math. Inf. Lett, 2, 59–64.

[15] Konca, S¸ dkk., (2014): Some remarks on Lˆ p as an n-normed space, Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 2(2).

[16] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons Inc, (1978).

[17] Misiak, A. (1989): n-Inner Product Spaces, Mathematische Nachrichten, 140(1), 299–319.

[18] Park, C.-G., Rassias, T. M. dan Campus, Z. (2006): Isometries on linear n-normed spaces, J. Inequal. Pure Appl. Math, 7(5), 168.

[19] Soenjaya, A. L. (2012): On n-bounded and n-continuous operator in n-normed space, Journal of the Indonesian Mathematical Society, 18(1).

[20] Trencevski, K. dan Malceski, R. (2006): On a generalized n-inner product and the corresponding Cauchy-Schwarz inequality, J. Inequal. Pure and Appl. Math, 7(2).