Barekeng Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan | Desember 2016 | Volume 10 Nomor 2 | Hal. 69 – 76

# KARAKTERISTIK MATRIKS *CENTRO*-SIMETRIS

**Berny Pebo Tomasouw**

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia
e-mail: peboberny@gmail.com

**Abstrak**

Matriks *centro*-simetris merupakan matriks simetris yang memenuhi sifat tertentu. Dalam penelitian ini, akan dibahas bentuk dan beberapa sifat dasar dari matriks *centro*-simetris serta nilai eigen dan vektor eigennya.

*Kata Kunci*: Matriks *centro*-simetris, nilai eigen, vector eigen.

# THE CHARACTERISTICS OF CENTROSYMMETRIC MATRICES

**Abstract**

Centrosymmetric is a symmetric matrix which satisfy some certain conditions. In this paper, we will discuss the form and some basic properties of the centrosymmetric matrix also its eigenvalues and eigenvectors.

*Keywords*: Centrosymmetric matrix, eigen value, eigen vector.

## 1. Pendahuluan

Konsep matriks *centro*-simetris muncul dalam buku yang ditulis A. C. Aitken [1] dengan judul "*Determinants and Matrices*". Sedangkan F. Graybill juga membahas konsep matriks yang sama namun dengan nama matriks *cross*-simetris [2]. Walaupun memiliki nama yang mirip dengan matriks simetris namun sifat yang dimiliki oleh matriks contro-simetris sangatlah berbeda.

Beberapa penelitian memperlihatkan bawha matriks *centro*-simetris mempunyai peranan penting dalam masalah analisis numerik, teori informasi, proses Markov, persamaan diferensial, persegi ajaib maupun pengenalan pola [3-8]. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan dibahas karakteristik dari matriks *centro*-simetris beserta nilai eigen dan vektor eigennya.

**Definisi 1. (Matriks Simetris)**

Matriks $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dikatakan simetris jika berlaku

$$A = A^T$$

**Definisi 2. (Nilai Eigen dan Vektor Eigen)**

Diberikan matriks $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dan vektor tak nol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ merupakan nilai eigen dari A jika memenuhi $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Vektor $\mathbf{x}$ disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda$.

**Definisi 3. (Matriks Similar)**

Diberikan matriks $A, B \in \mathbf{M}_n(\square)$. Matriks *A* dikatakan similar dengan *B* jika terdapat matriks non-singular *P* sedemikian sehingga berlaku

$$A = PBP^{-1}.$$

**Lema 1.** Jika matriks *A* similar dengan matriks *B* maka $\det(A) = \det(B)$.

**Akibat 1.** Misalkan matriks *A* similar dengan matriks *B*. Jika $\lambda$ adalah nilai eigen dari *A* maka $\lambda$ juga merupakan nilai eigen dari *B*.

**Definisi 4. (Matriks Ortogonal)**

Matriks non-singular $Q \in \mathbf{M}_n(\square)$ disebut matriks ortogonal jika memenuhi $Q^T = Q^{-1}$.

**Definisi 5. (Matriks contra-identitas)**

Matriks persegi $J_n$ disebut matriks contra-identitas jika berbentuk

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \iddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Lema 2.** Matriks contra-identitas memenuhi sifat-sifat berikut :

a. $J_n = J_n^T$.

b. $J_n^{-1} = J_n$.

c. $J_n^k = \begin{cases} I_n & \text{, jika } k \text{ genap} \\ J_n & \text{, jika } k \text{ ganjil} \end{cases}$

**Definsi 6. (Rotasi Matriks)**

Diberikan $A \in \mathbf{M}_n(\square)$. Rotasi dari matriks *A* dinotasikan dengan $A^R$ dan didefinisikan sebagai

$$A^R = J_n A J_n.$$

**Lema 3.** Rotasi matriks *A* memenuhi sifat-sifat berikut :

a. $\left(A^R\right)^R = A$.

b. $\left(A^R\right)^T = \left(A^T\right)^R$.

c. $\left(A^{-1}\right)^R = \left(A^R\right)^{-1}$, jika *A* non-singular.

## 2. Hasil dan Pembahasan

**Definisi 7. (Matriks *Centro*-Simetris)**

Diberikan matriks *S* berorde $n \times n$. Matriks *S* disebut matriks *centro*-simetris jika memenuhi

$$S^R = S$$

**Contoh 1.** Matriks $S = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ adalah matriks *centro*-simetris karena

$$\begin{aligned} S^R &= J_2 S J_2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= S \end{aligned}$$

**Contoh 2.** Matriks $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah matriks *centro*-simetris.

Contoh 1 di atas memperlihatkan contoh matriks simetris yang juga merupakan matriks centro-simetris. Namun hal ini tidak berlaku umum ataupun sebaliknya seperti tampak pada contoh 2 di atas. Lema 4 berikut ini memperlihatkan bentuk umum dari matriks *centro*-simetris berukuran $2 \times 2$ dan $3 \times 3$.

**Lema 4.**

i. Jika $S = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ maka *S* adalah matriks *centro*-simetris.

ii. Jika $S = \begin{bmatrix} a & c & b \\ d & e & d \\ b & c & a \end{bmatrix}$ maka *S* adalah matriks *centro*-simetris.

Selanjutnya, bentuk umum matriks *centro*-simetris dengan orde $n \geq 4$ dibagi ke dalam 2 kasus yakni *n* genap dan *n* ganjil. Untuk kasus *n* genap yakni $n = 2m$ maka misalkan matriks *S* berbentuk matriks blok sebagai berikut

$$S = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix},$$

dengan *A*, *B*, *C*, dan *D* adalah matriks persegi berorde *m*. Matriks *S* harus memenuhi $S^R = S$ sehingga

$$J_n S J_n = S$$

$$\begin{bmatrix} O_m & J_m \\ J_m & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_m & J_m \\ J_m & O_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} J_m D J_m & J_m B J_m \\ J_m C J_m & J_m A J_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$$

Dari bentuk terakhir diperoleh $D = J_m A J_m$ dan $C = J_m B J_m$. Hasil ini diperlihatkan dalam Lema berikut.

**Lema 5.** Jika $S$ adalah matriks *centro*-simetris berorde n genap yakni $n = 2m$ maka $S$ dapat ditulis dalam bentruk matriks blok sebagai berikut

$$S = \begin{bmatrix} A & J_m B J_m \\ B & J_m A J_m \end{bmatrix},$$

dengan $A$ dan $B$ adalah matriks persegi berorde $m$.

Bentuk matriks $S$ pada Lema di atas bukanlah bentuk tunggal karena matriks $S$ dapat juga ditulis dalam bentuk

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ J_m B J_m & J_m A J_m \end{bmatrix} \text{ atau } S = \begin{bmatrix} A & J_m B \\ B J_m & J_m A J_m \end{bmatrix}.$$

**Contoh 3.** Matriks $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah matriks *centro*-simetris karena S dapat ditulis dalam bentuk $S = \begin{bmatrix} A & J_m B J_m \\ B & J_m A J_m \end{bmatrix}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Selanjutya, untuk matriks persegi berorde $n$ ganjil yakni $n = 2m + 1$ maka misalkan $S$ berbentuk matriks blok sebagai berikut

$$S = \begin{bmatrix} A & \mathbf{p} & C \\ \mathbf{q}^T & \alpha & \mathbf{r}^T \\ B & \mathbf{s} & D \end{bmatrix}$$

dengan $A, B, C, D$ adalah matriks persegi berorde $m$, vektor $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^m$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Matriks $S$ harus memenuhi $S^R = S$ sehingga

$$J_n S J_n = S$$

$$\begin{bmatrix} O_m & \mathbf{0} & J_m \\ \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}^T \\ J_m & \mathbf{0} & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \mathbf{p} & C \\ \mathbf{q}^T & \alpha & \mathbf{r}^T \\ B & \mathbf{s} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_m & \mathbf{0} & J_m \\ \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}^T \\ J_m & \mathbf{0} & O_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{p} & C \\ \mathbf{q}^T & \alpha & \mathbf{r}^T \\ B & \mathbf{s} & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} J_m D J_m & J_m \mathbf{s} & J_m B J_m \\ \mathbf{r}^T J_m & \alpha & \mathbf{q}^T J_m \\ J_m C J_m & J_m \mathbf{p} & J_m A J_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{p} & C \\ \mathbf{q}^T & \alpha & \mathbf{r}^T \\ B & \mathbf{s} & D \end{bmatrix}$$

Dari bentuk terakhir diperoleh persamaan :

i. $J_m D J_m = A$ dan $D = J_m A J_m$.

ii. $J_m \mathbf{s} = \mathbf{p}$ dan $J_m \mathbf{p} = \mathbf{s}$.

iii. $\mathbf{r}^T J_m = \mathbf{q}^T$ dan $\mathbf{r}^T = \mathbf{q}^T J_m$.

iv. $J_m C J_m = B$ dan $C = J_m B J_m$.

Dari hasil ini dapat dibentuk Lema berikut.

**Lema 6.** Jika $S$ adalah matriks *centro*-simetris berorde $n$ ganjil yakni $n=2m+1$ maka $S$ dapat ditulis dalam bentruk matriks blok sebagai berikut

$$S=\begin{bmatrix} A & \mathbf{p} & J_mBJ_m \\ \mathbf{q}^T & \alpha & \mathbf{q}^TJ_m \\ B & J_m\mathbf{p} & J_mAJ_m \end{bmatrix},$$

dengan $A,B$ adalah matriks persegi berorde $m$, vektor $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbb{R}^m$ dan $\alpha\in\mathbb{R}$ .

Selanjutnya, Lema berikut akan membantu dalam mencari matriks yang similar dengan matriks centro-simetris.

**Lema 7.**

a. Matriks $Q_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_m & I_m \\ -J_m & J_m \end{bmatrix}$ adalah matriks ortogonal berorde $n=2m$.

b. Matriks $Q_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_m & \mathbf{0} & I_m \\ \mathbf{0}^T & \sqrt{2} & \mathbf{0}^T \\ -J_m & \mathbf{0} & J_m \end{bmatrix}$ adalah matriks ortogonal berorde $n=2m+1$.

Dengan menggunakan matriks $Q_1$ dan $Q_2$ pada Lema ini maka dapat dicari matriks yang similar dengan matriks *centro*-simetris.

Untuk kasus $n$ genap maka misalkan $D_1$ adalah matriks yang similar. Matriks *centro*-simetris $S$ dan $D_1$ harus memenuhi $S=Q_1D_1Q_1^T$ atau

$$\begin{aligned} D_1 &= Q_1^TSQ_1 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_m & -J_m \\ I_m & J_m \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} A & J_mBJ_m \\ B & J_mAJ_m \end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_m & I_m \\ -J_m & J_m \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2(A-J_mB) & O_m \\ O_m & 2(A+J_mB) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A-J_mB & O_m \\ O_m & A+J_mB \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sedangkan untuk kasus n ganjil diperoleh matriks $D_2$ yang similar yaitu

$$\begin{aligned} D_2 &= Q_2^TSQ_2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_m & \mathbf{0} & -J_m \\ \mathbf{0}^T & \sqrt{2} & \mathbf{0}^T \\ I_m & \mathbf{0} & J_m \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} A & \mathbf{p} & J_mBJ_m \\ \mathbf{q}^T & \alpha & \mathbf{q}^TJ_m \\ B & J_m\mathbf{p} & J_mAJ_m \end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_m & \mathbf{0} & I_m \\ \mathbf{0}^T & \sqrt{2} & \mathbf{0}^T \\ -J_m & \mathbf{0} & J_m \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2(A-J_mB) & \mathbf{0} & O_m \\ \mathbf{0}^T & 2\alpha & 2\sqrt{2}\mathbf{q}^T \\ O_m & 2\sqrt{2}\mathbf{p} & 2(A+J_mB) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} A - J_m B & \mathbf{0} & O_m \\ \mathbf{0}^T & \alpha & \sqrt{2}\,\mathbf{q}^T \\ O_m & \sqrt{2}\,\mathbf{p} & A + J_m B \end{bmatrix}$$

Dari hasil ini dapat dibentuk Teorema berikut.

**Teorema 1.**

a. Jika $S = \begin{bmatrix} A & J_m B J_m \\ B & J_m A J_m \end{bmatrix}$ dan $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_m & I_m \\ -J_m & J_m \end{bmatrix}$ maka $S$ similar dengan matriks diagonal blok $D_1 = \begin{bmatrix} A - J_m B & O_m \\ O_m & A + J_m B \end{bmatrix}$.

b. Jika $S = \begin{bmatrix} A & \mathbf{p} & J_m B J_m \\ \mathbf{q}^T & \alpha & \mathbf{q}^T J_m \\ B & J_m \mathbf{p} & J_m A J_m \end{bmatrix}$ dan $Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_m & \mathbf{0} & I_m \\ \mathbf{0}^T & \sqrt{2} & \mathbf{0}^T \\ -J_m & \mathbf{0} & J_m \end{bmatrix}$ maka $S$ similar dengan matriks diagonal blok $D_2 = \begin{bmatrix} A - J_m B & \mathbf{0} & O_m \\ \mathbf{0}^T & \alpha & \sqrt{2}\,\mathbf{q}^T \\ O_m & \sqrt{2}\,\mathbf{p} & A + J_m B \end{bmatrix}$

Dari Teorema 1 diperoleh tiga akibat sebagai berikut.

**Akibat 2.** Determinan dari matriks centro-simetris adalah

a. Untuk $n$ genap

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & J_m B J_m \\ B & J_m A J_m \end{bmatrix}\right) = \det\left(A - J_m B\right) \det\left(A + J_m B\right).$$

b. Untuk $n$ ganjil

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & \mathbf{p} & J_m B J_m \\ \mathbf{q}^T & \alpha & \mathbf{q}^T J_m \\ B & J_m \mathbf{p} & J_m A J_m \end{bmatrix}\right) = \det\left(A - J_m B\right) \det\left(\begin{bmatrix} \alpha & \sqrt{2}\,\mathbf{q}^T \\ \sqrt{2}\,\mathbf{p} & A + J_m B \end{bmatrix}\right).$$

**Akibat 3.** Jika $S = \begin{bmatrix} A & J_m B J_m \\ B & J_m A J_m \end{bmatrix}$ serta matriks $A - J_m B$ dan $A + J_m B$ tak singular maka

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F^{-1} + G^{-1} & \left(G^{-1} - F^{-1}\right) J_m \\ J_m \left(G^{-1} - F^{-1}\right) & J_m \left(F^{-1} + G^{-1}\right) J_m \end{bmatrix}.$$

dengan $F = A - J_m B$ dan $G = A + J_m B$.

**Akibat 4.** Nilai eigen dari matriks *centro*-simetris adalah

a. Untuk $n$ genap

Nilai eigen dari $S=\begin{bmatrix} A & J_mBJ_m \\ B & J_mAJ_m \end{bmatrix}$ adalah nilai eigen dari matriks $A-J_mB$ dan nilai eigen dari matriks $A+J_mB$.

b. Untuk $n$ ganjil

Nilai eigen dari $S=\begin{bmatrix} A & \mathbf{p} & J_mBJ_m \\ \mathbf{q}^T & \alpha & \mathbf{q}^TJ_m \\ B & J_m\mathbf{p} & J_mAJ_m \end{bmatrix}$ adalah nilai eigen dari matriks $A-J_mB$ dan nilai eigen dari matriks $\begin{bmatrix} \alpha & \sqrt{2}\mathbf{q}^T \\ \sqrt{2}\mathbf{p} & A+J_mB \end{bmatrix}$.

Bentuk vektor eigen dari matriks *centro*-simetris diperlihatkan dalam Teorema berikut.

**Teorema 2.** Diberikan matriks *centro*-simetris $S=\begin{bmatrix} A & J_mBJ_m \\ B & J_mAJ_m \end{bmatrix}$.

a. Jika vektor eigen dari $A-J_mB$ adalah **y** maka vektor eigen dari $S$ adalah $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ -J_m\mathbf{y} \end{bmatrix}$.

b. Jika vektor eigen dari $A+J_mB$ adalah **z** maka vektor eigen dari $S$ adalah $\mathbf{w}=\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ J_m\mathbf{z} \end{bmatrix}$.

**Bukti.**

a. Misalkan nilai eigen dari $A-J_mB$ adalah $\lambda$ dengan vektor eigen yang bersesuaian adalah **y**. Harus ditunjukkan bahwa berlaku $S\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$.

$$
\begin{aligned}
S\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} A & J_mBJ_m \\ B & J_mAJ_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ -J_m\mathbf{y} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A\mathbf{y}-J_mB\mathbf{y} \\ B\mathbf{y}-J_mA\mathbf{y} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (A-J_mB)\mathbf{y} \\ -J_m(A-J_mB)\mathbf{y} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{y} \\ -J_m\lambda\mathbf{y} \end{bmatrix} \\
&= \lambda\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ -J_m\mathbf{y} \end{bmatrix} \\
&= \lambda\mathbf{v}
\end{aligned}
$$

Karena $S\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$ maka terbukti $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ -J_m\mathbf{y} \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari $S$.

b. Misalkan nilai eigen dari $A+J_mB$ adalah $\beta$ dengan vektor eigen yang bersesuaian adalah **z**.

Harus ditunjukkan bahwa berlaku $S\mathbf{w}=\beta\mathbf{w}$ .

$$S\mathbf{v}=\begin{bmatrix} A & J_mBJ_m \\ B & J_mAJ_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ J_m\mathbf{z} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A\mathbf{z}+J_mB\mathbf{z} \\ B\mathbf{z}+J_mA\mathbf{z} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \left(A+J_mB\right)\mathbf{z} \\ J_m\left(A+J_mB\right)\mathbf{z} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \beta\mathbf{z} \\ J_m\beta\mathbf{z} \end{bmatrix}$$

$$=\beta\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ J_m\mathbf{z} \end{bmatrix}$$

$$=\beta\mathbf{w}$$

Karena $S\mathbf{w}=\beta\mathbf{w}$ maka terbukti bahwa $\mathbf{w}=\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ J_m\mathbf{z} \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari *S*.

## Daftar Pustaka


[1] A.C.Aitken., Determinants and Matrices, Edinburgh. Oliver and Boyd, 1939.

[2] F. Graybill, Introduction to Matrices with Application in Statistics, Wadsworth. Belmont., 1969.

[3] A. C. a. P. Butler, "Properties of the Eigen vectors of Persymmetric Matrices with Applications to Communication Theory. IEEE Transactions on Communications.," vol. 24, pp. pp 804-809, 1976.

[4] J. Delmas, "On Adaptive EVD Asymptotic Distribution of Centro-Symmetric Covariance Matrices". IEEE Transactions on Signal Processing," Vol.47, pp.1402-1406, 1999.

[5] W. Chen, Y.Yu and X. Wang, "Reducing the Computational Requirement of Differential Quadrature Method". Numerical Methods for Partial Differential Equations," Vol.12, pp.565-577, 1996.

[6] F. Stenger, "Matrices of Sinc Methods," *Journal of Computational and Applied Mathematics,* Vol. 86, pp.297-310, 1997.

[7] R. B. Mattingly, "Even Order Regular Magic Squares Are Singular," *The American Mathematical Monthly,* Vol.107, pp. pp.777-782, 2000.

[8] L. Datta and S. Morgera, "Some Results on Matrix Symmetries and a Pattern Recognition Application," *IEEE Transactions on Signal Processing,* Vol.34, No.4, pp.992-994, 1986.