BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan
September 2021 Vol. 15 No. 3 Page 441 – 452
P-ISSN: 1978-7227 E-ISSN: 2615-3017
doi: https://doi.org/10.30598/ barekengvol15iss3pp441-452

TRACE MATRIKS TOEPLITZ 2-TRIDIAGONAL 3×3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

Trace of Positive Integer Powers of 3×3 2-Tridiagonal Toeplitz Matrices

Isran R. Olii[1*], Resmawan[2], Lailany Yahya[3]

[1,2,3] *Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Gorontalo*
Jl. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Tilongkabila, Kabupaten Bone Bolango, 96119, Indonesia

Corresponding author e-mail: [1] isranolii12@gmail.com*

Abstrak

Artikel ini mengidentifikasi bentuk umum trace matriks Toeplitz 2-tridiagonal 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Langkah penelitian dimulai dengan menentukan bentuk umum matriks Toeplitz 2-tridiagonal 3×3 berpangkat bilangan bulat positif, dilanjutkan dengan menentukan bentuk umum trace matriks Toeplitz 2-tridiagonal 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Pembuktian dilakukan dengan menggunakan induksi matematika. Hasil akhir dari artikel ini diperoleh bentuk umum matriks A^n dan $tr(A^n)$ untuk n bilangan bulat positif ganjil dan n bilangan bulat positif genap.

Kata Kunci : *pangkat matriks, trace matriks, matriks toeplitz 2-tridiagonal, bilangan bulat positif*

Abstract

This article identifies the general form trace of a positive integer power of the 3×3 2-tridiagonal Toeplitz matrix. The research begins to determine the general form of a positive integer power of the 3×3 2-tridiagonal Toeplitz matrix, followed by determining the general form trace of a positive integer power of 3×3 2-tridiagonal Toeplitz matrix. The proof is done by using mathematical induction. The final result of this article is to obtain the general form of the matrix A^n and $tr(A^n)$ for odd and even integers n.

Keywords: *Power of matrix, Trace of matrix, 2-tridiagonal Toeplitz matrices, positive integer.*

Article info:

Submitted: 22nd January 2021 *Accepted: 08th July 2021*

How to cite this article:

I. R. Olii, R. Resmawan, and L. Yahya, "TRACE MATRIKS TOEPLITZ 2-TRIDIAGONAL 3 × 3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF", *BAREKENG: J. Il. Mat. & Ter.*, vol. 15, no. 03, pp. 441-452, Sep. 2021.

1. PENDAHULUAN

Pembahasan mengenai matriks dalam cabang ilmu matematika termasuk pembahasan yang sangat menarik. Matriks juga sudah sering dijumpai pada cabang ilmu lain diantaranya bidang ilmu teknik informatika, ilmu biologi, kimia, ekonomi, dan masih banyak lagi. Secara umum, matriks dapat dikatakan sebagai suatu kumpulan angka-angka yang juga sering disebut elemen-elemen yang disusun secara teratur menurut baris dan kolom sehingga berbentuk persegi panjang, dengan panjang dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom dan baris serta dibatasi tanda "[ ]" atau "( )" [1]. Terdapat berbagai jenis matriks yang terus dikaji dalam berbagai perspektif hingga saat ini, seperti matriks *Circulant* [3][4], matriks *Hermitian* [5][6], matriks Toeplitz [7][8][9][10][11]. Pembahasan tentang matriks tidak terlepas dari pembahasan terkait operasi matriks, termasuk operasi pada jenis matriks Toeplitz. Operasi pada matriks toeplitz sama dengan matriks pada umumnya, namun struktur dan sifat khususnya membuat matriks ini sangat unik dan berbeda dari matriks biasa. Matriks toeplitz adalah matriks simetris yang sirkulan dimana setiap elemen diagonal utama bernilai sama begitupun dengan setiap elemen pada subdiagonal yang bersesuaian dengan diagonal utama juga bernilai sama [2].

Matriks Toeplitz pertama kali dibahas pada tahun 1971 [12] dan terus mengalami perkembangan hingga saat ini. Dalam beberapa tahun terakhir dapat ditemukan pembahasan terkait matriks Toeplitz seperti [7] yang memperluas gagasan terkait matriks (p, r)-Toeplitz tridiagonal serta menyediakan pembuktian singkat untuk menghasilkan invertibilitas matriks tersebut. Kemudian, dalam [8] dibahas perbaikan formula yang lebih efektif dalam pencarian nilai eigen pada matriks blok-Toeplitz Tridiagonal. Kemudian pembahasan mengenai trace matriks berpangkat pertama kali dibahas pada tahun 2015 [13], dan dalam beberapa tahun terakhir ditemukan beberapa artikel terkait Trace matriks berpangkat, seperti pada [14] dibahas tentang penentuan bentuk umum trace matriks Toeplitz 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dengan elemen bilangan kompleks. Kemudian, dalam [15] dibahas tentang formula umum dari trace matriks Toeplitz tridiagonal 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Pada tahun yang sama dalam [16] dibahas mengenai penentuan formula trace matriks real berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Rumus umum trace Matriks Toeplitz berpangkat dalam artikel [14] dibahas kembali dalam [17] dengan mengubah kasus matriks Toeplitz menjadi elemen bilangan real. Kemudian dengan pembahasan yang sama, dalam [18] dibahas penentuan rumus umum trace matriks real 3×3 berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif.

Dalam teori matriks sangat mudah untuk menentukan nilai trace dari suatu matriks, hanya dengan menjumlahkan tiap elemen diagonal utama maka akan diperoleh nilai tracenya, namun akan sangat sulit mencari nilai trace pada kasus matriks yang dipangkatkan sebanyak n. Jika dilakukan secara manual akan memakan banyak waktu dalam pencarian nilai tracenya [14]. Untuk itu, perlu ditemukan formula atau rumus umum dalam menentukan trace matriks berpangkat bilangan bulat positif namun pada kasus matriks yang berbeda dari penelitian sebelumnya yaitu matriks Toeplitz 2-Tridiagonal berukuran 3×3 dengan entri bilangan real. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bentuk umum matriks yang dipangkatkan bilangan bulat positif serta bentuk umum dari nilai trace matriks berpangkat bilangan bulat positif. Artikel ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dibidang matematika terutama bidang aljabar mengenai trace matriks 3×3 berpangkat bilangan bulat positif.

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur. Adapun langkah-langkah yang digunakan adalah sebagai berikut:

1. Diberikan Matriks berbentuk Toeplitz 2-Tridiagonal 3x3.
$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \forall a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
2. Menentukan Perpangkatan Matriks A^2 sampai A^k, dengan k adalah batas atas ketika pola sudah terlihat.
3. Menentukan bentuk umum perpangkatan matriks A^n, dengan n bilangan bulat positif.
4. Menentukan bentuk umum $trace(A^n)$, dengan n bilangan bulat positif.
5. Membuktikan bentuk umum perpangkatan matriks A^n, dengan n bilangan bulat positif dengan metode induksi matematika.

6. Membuktikan bentuk umum dari $trace(A^n)$, dengan n bilangan bulat positif dengan pembuktian langsung.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Matriks Toeplitz 2-Tridiagonal Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pada bagian ini dibahas mengenai bentuk umum dari matriks toeplitz 2-tridiagonal 3×3 berpangkat bilangan bulat positif seperti pada Persamaan (1). Menentukan matriks A^2 sampai A^k, dimana k adalah batas atas ketika pola matriks berpangkat sudah terlihat.

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & 0 & 2ac \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2ab & 0 & a^2+bc \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} a^3+3abc & 0 & 3a^2c+bc^2 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 3a^2b+b^2c & 0 & a^3+3abc \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} a^4+b^2c^2+6a^2bc & 0 & 4abc^2+4a^3c \\ 0 & a^4 & 0 \\ 4a^3b+4ab^2c & 0 & a^4+b^2c^2+6a^2bc \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} a^5+5ab^2c^2+10a^3bc & 0 & b^2c^3+10a^2bc^2+5a^4c \\ 0 & a^5 & 0 \\ 5a^4b+b^3c^2+10a^2b^2c & 0 & a^5+5ab^2c^2+10a^3bc \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$A^6 = \begin{bmatrix} a^6+b^3c^3+15a^2b^2c^2+15a^4bc & 0 & 6ab^2c^3+20a^3bc^2+6a^5c \\ 0 & a^6 & 0 \\ 6a^5b+6ab^3c^2+20a^3b^2c & 0 & a^6+b^3c^3+15a^2b^2c^2+15a^4bc \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$A^7 = \begin{bmatrix} a^7+7ab^3c^3+35a^3b^2c^2+21a^5bc & 0 & b^3c^4+21a^2b^2c^3+35a^4bc^2+7a^6c \\ 0 & a^7 & 0 \\ 7a^6b+b^4c^3+21a^2b^3c^2+35a^4b^2c & 0 & a^7+7ab^3c^3+35a^3b^2c^2+21a^5bc \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$A^8 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} a^8+b^4c^4+28a^2b^3c^3+ \\ 70a^4b^2c^2+28a^6bc \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} 8ab^3c^4+56a^3b^2c^3+ \\ 56a^5bc^2+8a^7c \end{matrix} \\ 0 & a^8 & 0 \\ \begin{matrix} 8a^7b+8ab^4c^3+ \\ 56a^3b^3c^2+56a^5b^2c \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} a^8+b^4c^4+28a^2b^3c^3+ \\ 70a^4b^2c^2+28a^6bc \end{matrix} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$A^9 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} a^9+9ab^4c^4+84a^3b^3c^3+ \\ 126a^5b^2c^2+36a^7bc \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} b^4c^5+36a^2b^3c^4+ \\ 126a^4b^2c^3+84a^6bc^2+9a^8c \end{matrix} \\ 0 & a^9 & 0 \\ \begin{matrix} 9a^8b+b^5c^4+36a^2b^4c^3+ \\ 126a^4b^3c^2+84a^6b^2c \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} a^9+9ab^4c^4+84a^3b^3c^3+ \\ 126a^5b^2c^2+36a^7bc \end{matrix} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$A^{10} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} a^{10}+b^5c^5+ \\ 45a^2b^4c^4+210a^4b^3c^3+ \\ 210a^6b^2c^2+45a^8bc \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} 10ab^4c^5+120a^3b^3c^4+252a^5b^2c^3+ \\ 120a^7bc^2+10a^9c \end{matrix} \\ 0 & a^{10} & 0 \\ \begin{matrix} 10a^9b+10ab^5c^4+120a^3b^4c^4+ \\ 252a^5b^3c^2+120a^7b^2c \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} a^{10}+b^5c^5+ \\ 45a^2b^4c^4+210a^4b^3c^3+ \\ 210a^6b^2c^2+45a^8bc \end{matrix} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$A^{11} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} a^{11} + 11ab^5c^5 + \\ 165a^3b^4c^4 + 462a^5b^3c^3 + \\ 330a^7b^2c^2 + 55a^9bc \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} b^5c^6 + 55a^2b^4c^5 + \\ 330a^4b^3c^4 + 462a^6b^2c^3 + \\ 165a^8bc^2 + 11a^{10}c \end{matrix} \\ 0 & a^{11} & 0 \\ \begin{matrix} 11a^{10}b + b^6c^5 + \\ 55a^2b^5c^4 + 330a^4b^4c^3 + \\ 462a^6b^3c^2 + 165a^8b^2c \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} a^{11} + 11ab^5c^5 + \\ 165a^3b^4c^4 + 462a^5b^3c^3 + \\ 330a^7b^2c^2 + 55a^9bc \end{matrix} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$A^{12} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} a^{12} + b^6c^6 + 66a^2b^5c^5 + \\ 495a^4b^4c^4 + 924a^6b^3c^3 + \\ 495a^8b^2c^2 + 66a^{10}bc \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} 12ab^5c^6 + 220a^3b^4c^5 + \\ 792a^5b^3c^4 + 792a^7b^2c^3 + \\ 220a^9bc^2 + 12a^{11}c \end{matrix} \\ 0 & a^{12} & 0 \\ \begin{matrix} 12a^{11}b + 12ab^6c^5 + \\ 220a^3b^5c^4 + 792a^5b^4c^3 + \\ 792a^7b^3c^2 + 220a^9b^2c \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} a^{12} + b^6c^6 + 66a^2b^5c^5 + \\ 495a^4b^4c^4 + 924a^6b^3c^3 + \\ 495a^8b^2c^2 + 66a^{10}bc \end{matrix} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$A^{13} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} a^{13} + 13ab^6c^6 + 286a^3b^5c^5 + \\ 1287a^5b^4c^4 + 1716a^7b^3c^3 + \\ 715a^9b^2c^2 + 78a^{11}bc \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} b^6c^7 + 78a^2b^5c^6 + 715a^4b^4c^5 + \\ 1716a^6b^3c^4 + 1287a^8b^2c^3 + \\ 286a^{10}bc^2 + 13a^{12}c \end{matrix} \\ 0 & a^{13} & 0 \\ \begin{matrix} 13a^{12}b + b^7c^6 + 78a^2b^6c^5 + \\ 715a^4b^5c^4 + 1716a^6b^4c^3 + \\ 1287a^8b^3c^2 + 286a^{10}b^2c \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} a^{13} + 13ab^6c^6 + 286a^3b^5c^5 + \\ 1287a^5b^4c^4 + 1716a^7b^3c^3 + \\ 715a^9b^2c^2 + 78a^{11}bc \end{matrix} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Dengan melihat pola pada koefisien yang terbentuk dari elemen-elemen matriks pada Persamaan (2) sampai Persamaan (13), maka diperoleh bentuk umum perpangkatan matriks yang dinyatakan dalam Teorema 1.

Teorema 1. *Diberikan Matriks Toeplitz* 2-*Tridiagonal* 3×3 *dengan bentuk:*

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ maka}$$

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1}b^i c^{i+1} \\ 0 & a^n & 0 \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1}b^{i+1}c^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i \end{bmatrix}, & n\ ganjil, n > 0, n \in \mathbb{Z} \\ \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1}b^i c^{i+1} \\ 0 & a^n & 0 \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1}b^{i+1}c^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i \end{bmatrix}, & n\ genap, n \geq 0, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{14}$$

Bukti. Pembuktian dilakukan menggunakan induksi matematika. Diberikan

$$p(n): A^n = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^i c^{i+1} \\ 0 & a^n & 0 \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} a^{n-2i-1} b^{i+1} c^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i \end{bmatrix}$$

untuk n bilangan ganjil positif,

1. Akan ditunjukan $p(1)$ benar.

$$p(1): A^1 = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{0} \binom{1}{2i} a^{1-2i}(bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{0} \binom{1}{2i+1} a^{-2i} b^i c^{i+1} \\ 0 & a^1 & 0 \\ \sum_{i=0}^{0} \binom{1}{2i+1} a^{-2i} b^{i+1} c^i & 0 & \sum_{i=0}^{0} \binom{1}{2i} a^{1-2i}(bc)^i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^1(bc)^0 & 0 & a^0b^0c^1 \\ 0 & a^1 & 0 \\ a^0b^1c^0 & 0 & a^1(bc)^0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$$

Dengan melihat Persamaan (1) maka $p(1)$ benar.

2. Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A^k = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i}(bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^i c^{i+1} \\ 0 & a^k & 0 \\ \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1} b^{i+1} c^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i}(bc)^i \end{bmatrix}$$

untuk k bilangan ganjil positif.

3. Akan dibuktikan $p(k+2)$ juga benar yaitu:

$$p(k+2): A^{k+2} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i} a^{k-2i+2}(bc)^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i+1} b^i c^{i+1} \\ 0 & a^k & 0 \\ \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i+1} b^{i+1} c^i & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i} a^{k-2i+2}(bc)^i \end{bmatrix} \quad (15)$$

Pembuktiannya sebagai berikut:

$A^{k+2} = A^k \cdot A^2$

$$
= \begin{bmatrix}
\begin{gathered} \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+2}(bc)^{i} + \\ 2\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i}(bc)^{i+1} + \\ \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i}(bc)^{i+1} \end{gathered} & 0 & \begin{gathered} \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i+1}b^{i}c^{i+1} + \\ 2\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1}b^{i}c^{i+1} + \\ \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1}b^{i+1}c^{i+2} \end{gathered} \\
0 & a^{k+2} & 0 \\
\begin{gathered} \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i+1}b^{i+1}c^{i} + \\ 2\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1}b^{i+1}c^{i} + \\ \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i-1}b^{i+2}c^{i+1} \end{gathered} & 0 & \begin{gathered} \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+2}(bc)^{i} + \\ 2\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i}(bc)^{i+1} + \\ \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i}(bc)^{i+1} \end{gathered}
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
\begin{gathered} a^{k+2} + 2a(bc)^{\frac{k+1}{2}} + ka(bc)^{\frac{k+1}{2}} \\ \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i} a^{k-2i+2}(bc)^{i} + \end{gathered} & 0 & \begin{gathered} ka^{k+1}c + 2a^{k+1}c + b^{\frac{k+1}{2}}c^{\frac{k+3}{2}} + \\ \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i} a^{k-2i+1}b^{i}c^{i+1} \end{gathered} \\
0 & a^{k+2} & 0 \\
\begin{gathered} ka^{k+1}b + 2a^{k+1}b + b^{\frac{k+3}{2}}c^{\frac{k+1}{2}} \\ \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2i+1} a^{k-2i+1}b^{i+1}c^{i} \end{gathered} & 0 & \begin{gathered} a^{k+2} + 2a(bc)^{\frac{k+1}{2}} + ka(bc)^{\frac{k+1}{2}} \\ \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i} a^{k-2i+2}(bc)^{i} + \end{gathered}
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
\sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i} a^{k-2i+2}(bc)^{i} & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i+1}b^{i}c^{i+1} \\
0 & a^{k} & 0 \\
\sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i+1} a^{k-2i+1}b^{i+1}c^{i} & 0 & \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2i} a^{k-2i+2}(bc)^{i}
\end{bmatrix}
$$

Dengan melihat Persamaan (14) maka $p(k+2)$ benar, dan Karena langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti untuk n bilangan ganjil positif. Selanjutnya dengan cara yang sama dapat dibuktikan A^n untuk n bilangan genap positif. □

3.2. Trace Matriks Toeplitz 2-Tridiagonal Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Berdasarkan Teorema 1 maka diperoleh *trace* matriks Toeplitz 2-tridiagonal berpangkat bilangan bulat positif, yang dinyatakan dalam Teorema 2.

Teorema 2. *Diberikan Matriks Toeplitz* 2*-Tridiagonal* 3×3 *dengan bentuk:*

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ maka}$$

$$tr(A^n) = \begin{cases} a^n + 2\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i, & n\ ganjil, n > 0, n \in \mathbb{Z} \\ a^n + 2\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i, & n\ genap, n \geq 0, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Bukti.

Akan dibuktikan $tr(A^n)$ untuk n bilangan ganjil positif. Berdasarkan Teorema 1 dapat diperoleh bentuk umum $tr(A^n)$ untuk n bilangan ganjil positif yaitu:

$$tr(A^n) = \left(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i\right) + (a^n) + \left(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i\right)$$

$$= a^n + 2\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i$$

Maka terbukti $tr(A^n) = a^n + 2\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i$ untuk n bilangan ganjil positif.

Akan dibuktikan $tr(A^n)$ untuk n bilangan genap positif. Berdasarkan Teorema 1 dapat diperoleh bentuk umum $tr(A^n)$ untuk n bilangan genap positif yaitu:

$$tr(A^n) = \left(\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i\right) + (a^n) + \left(\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i\right)$$

$$= a^n + 2\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i$$

Maka terbukti $tr(A^n) = a^n + 2\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i$ untuk n bilangan genap positif. Berdasarkan pembuktian langsung seperti yang telah dituliskan diatas, maka Teorema 2 terbukti. □

3.3. Simulasi Matriks Toeplitz 2-Tridiagonal Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pada bagian ini, diberikan beberapa contoh yang berhubungan dengan Teorema 1 dan Teorema 2, kemudian akan dilakukan simulasi contoh dalam bentuk *Graphical User Interfaces (GUI)* dengan memasukkan algoritma dari bentuk umum Teorema 1 dan Teorema 2, lalu memvalidasi hasilnya dengan menggunakan aplikasi *Matlab*.

Contoh 1. Diberikan matriks 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

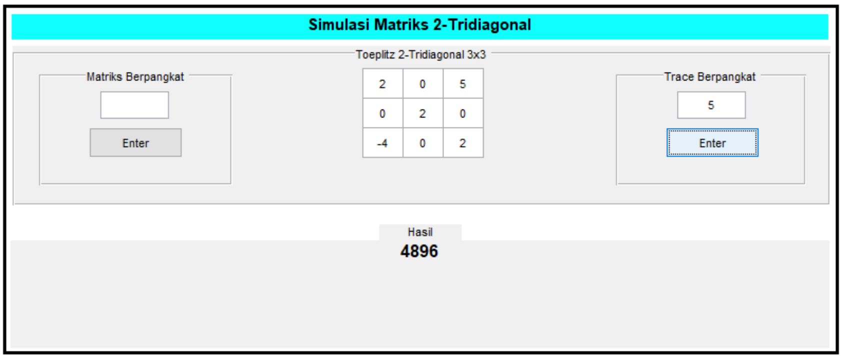
Hitunglah nilai $tr(A^5)$ dan $tr(A^6)$ menggunakan Teorema 2.

Penyelesaian:

Menurut Teorema 2 untuk n bilangan ganjil positif, diperoleh.

$$\begin{aligned} tr(A^5) &= 2^5 + 2\sum_{i=0}^{2} \binom{5}{2i} 2^{5-2i}(-20)^i \\ &= 32 + 2(32 - 1600 + 4000) \\ &= 32 + 4864 \\ &= 4896 \end{aligned}$$

Hasilnya dengan menggunakan GUI disajikan pada Gambar 1.

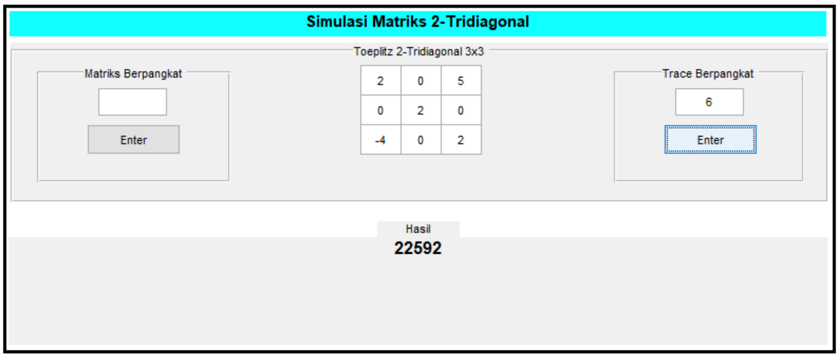


Gambar 1. Hasil Menggunakan GUI dari Contoh 1 (1)

Menurut Teorema 2 untuk n bilangan genap positif, diperoleh.

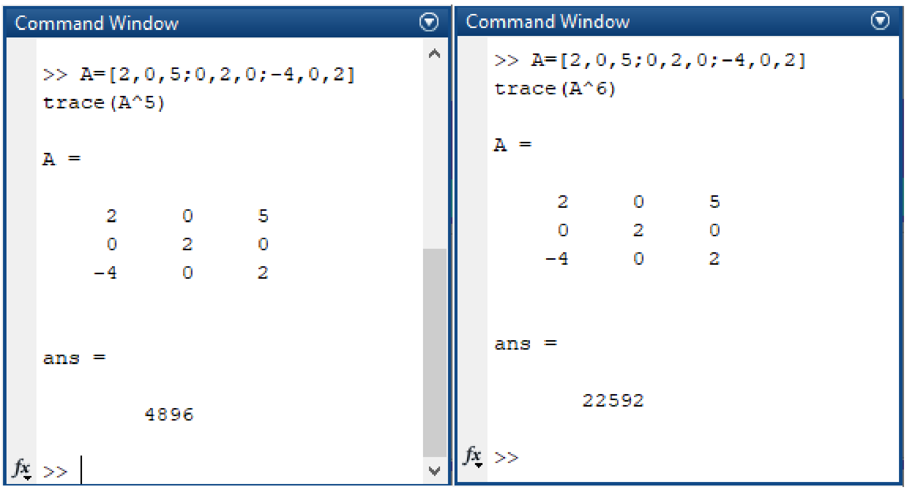
$$
\begin{aligned}
tr(A^6) &= 2^6 + 2\sum_{i=0}^{3}\binom{6}{2i} 2^{6-2i}(-20)^i \\
&= 64 + 2(64 - 4800 + 24000 - 8000) \\
&= 32 + 22528 \\
&= 22592
\end{aligned}
$$

Hasilnya dengan menggunakan GUI disajikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Hasil Menggunakan GUI dari Contoh 1 (2)

Untuk memvalidasi hasil yang diberikan diatas, berikut ini diberikan solusi untuk Contoh 1 dengan menggunakan aplikasi matlab yang disajikan dalam Gambar 3.



Gambar 3. Hasil Menggunakan Aplikasi Matlab dari Contoh 1

Contoh 2. Diberikan matriks $3x3$ sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 2/5 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ -2 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Tentukan A^{13} dan A^{14} menggunakan Teorema 1.

Penyelesaian:

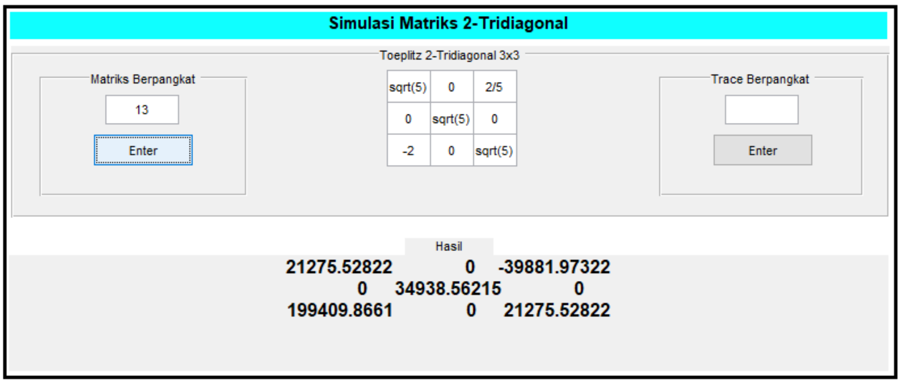
Menurut Teorema 1 untuk n bilangan ganjil positif, diperoleh.

$$A^{13} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{6} \binom{13}{2i} (\sqrt{5})^{13-2i} (-4/5)^i & 0 & \sum_{i=0}^{6} \binom{13}{2i+1} (\sqrt{5})^{13-2i-1} (-2)^i (2/5)^{i+1} \\ 0 & (\sqrt{5})^{13} & 0 \\ \sum_{i=0}^{6} \binom{13}{2i+1} (\sqrt{5})^{13-2i-1} (-2)^{i+1} (2/5)^i & 0 & \sum_{i=0}^{6} \binom{13}{2i} (\sqrt{5})^{13-2i} (-4/5)^i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{148667273\sqrt{5}}{15625} & 0 & -\dfrac{3115779158}{78125} \\ 0 & 15625\sqrt{5} & 0 \\ \dfrac{3115779158}{15625} & 0 & \dfrac{148667273\sqrt{5}}{15625} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21275{,}52822 & 0 & -39881{,}97322 \\ 0 & 34948{,}56215 & 0 \\ 199409{,}8661 & 0 & 21275{,}52822 \end{bmatrix}$$

Hasilnya dengan menggunakan GUI disajikan pada Gambar 4.



Gambar 4. Hasil Menggunakan GUI dari Contoh 2 (1)

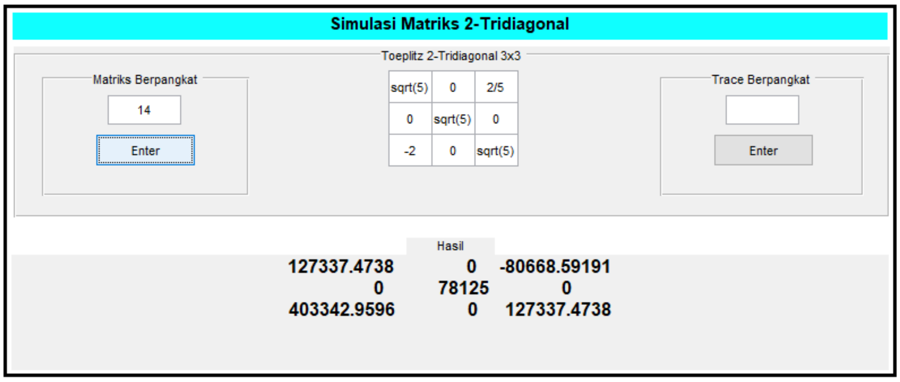
Menurut Teorema 1 untuk n bilangan genap positif, diperoleh.

$$A^{14} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{7} \binom{14}{2i} (\sqrt{5})^{14-2i} (-4/5)^i & 0 & \sum_{i=0}^{6} \binom{14}{2i+1} (\sqrt{5})^{14-2i-1} (-2)^i (2/5)^{i+1} \\ 0 & a^n & 0 \\ \sum_{i=0}^{6} \binom{14}{2i+1} (\sqrt{5})^{14-2i-1} (-2)^{i+1} (2/5)^i & 0 & \sum_{i=0}^{7} \binom{14}{2i} (\sqrt{5})^{14-2i} (-4/5)^i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{9948240141}{78125} & 0 & -\dfrac{2818444612\sqrt{5}}{78125} \\ 0 & 78125 & 0 \\ \dfrac{2818444612\sqrt{5}}{15625} & 0 & \dfrac{9948240141}{78125} \end{bmatrix}$$

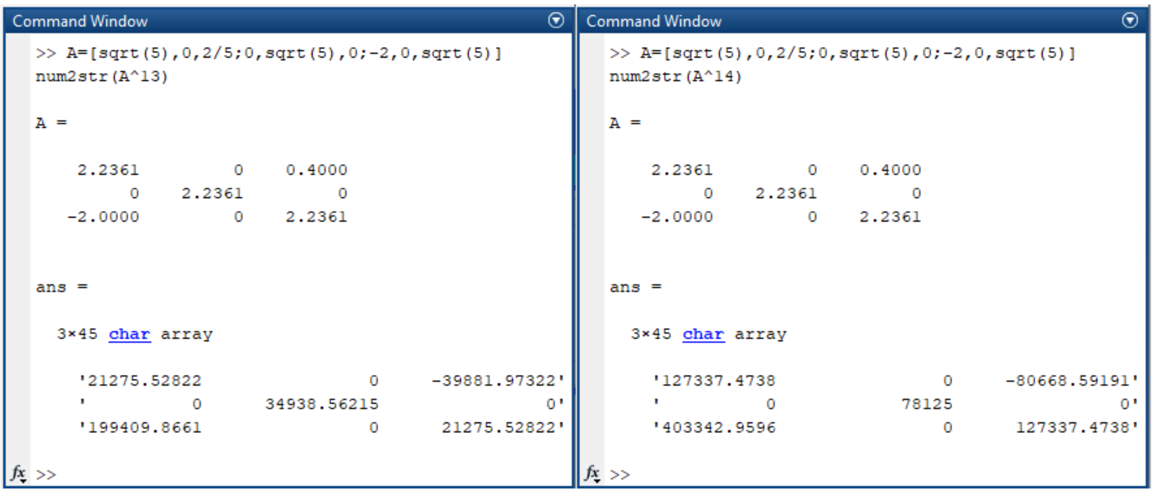
$$= \begin{bmatrix} 127337{,}4738 & 0 & -80668{,}59191 \\ 0 & 78125 & 0 \\ 403342{,}9596 & 0 & 127337{,}4738 \end{bmatrix}$$

Hasilnya dengan menggunakan GUI disajikan pada Gambar 5.



Gambar 5. Hasil Menggunakan GUI dari Contoh 2 (2)

Untuk memvalidasi hasil yang diberikan diatas, berikut ini diberikan solusi untuk Contoh 2 dengan menggunakan aplikasi matlab yang disajikan dalam Gambar 6.



Gambar 6. Hasil Menggunakan Aplikasi Matlab dari Contoh 2

4. KESIMPULAN

Dengan menggunakan matriks Toeplitz 2-Tridiagonal 3×3 pada Persamaan (1) dan matriks Toeplitz 2-Tridiagonal 3×3 berpangkat-n bilangan bulat positif pada Persamaan (14), maka diperoleh bentuk umum Trace matriks Toeplitz 2-Tridiagonal 3×3 berpangkat-n bilangan bulat positif, yaitu:

$$tr(A^n) = \begin{cases} a^n + 2\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i, & n\ ganjil, n > 0, n \in \mathbb{Z} \\ a^n + 2\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} a^{n-2i}(bc)^i, & n\ genap, n \geq 0, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] R. Larson *Elementary Linear Algebra (seventh edition)*, Boston: Brooks/Cole, 2013.

[2] R.M. Gray, "Toeplitz and Circulan Matrices', *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, vol. 2, no. 3, pp. 155–239, January 2006.

[3] E. Carrasquinha, C. Amado, A. M. Pires, and L. Oliveira, "Image reconstruction based on circulant matrices" *Signal Process. Image Commun.*, vol. 63, pp. 72–80, 2018.

[4] A. Carmona, A. M. Encinas, M. J. Jiménez, and M. Mitjana, "The group inverse of some circulant matrices," *Linear Algebra Appl.*, 2020.
[5] C. Li and T. Zheng, "The continuity equation of almost Hermitian metrics," *J. Differ. Equ.*, vol. 274, pp. 1015–1036, 2021.
[6] E. K. Gnang and J. M. Murphy, "Spectral analysis of non-Hermitian matrices and directed graphs," *Linear Algebra Appl.*, vol. 604, pp. 72–91, 2020.
[7] M. Anđelić and C. M. da Fonseca, "Some comments on tridiagonal (p, r)-Toeplitz matrices," *Linear Algebra Appl.*, vol. 572, pp. 46–50, 2019.
[8] J. Abderramán Marrero and D. A. Aiat Hadj, "Improving formulas for the eigenvalues of finite block-Toeplitz tridiagonal matrices," *Appl. Math. Comput.*, vol. 382, pp. 1–11, 2020.
[9] C. M. da Fonseca, "Comments on the spectrum of a tridiagonal k-Toeplitz matrix," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 375, p. 112793, 2020.
[10] L. Losonczi, "Eigenpairs of some imperfect pentadiagonal Toeplitz matrices," *Linear Algebra Appl.*, vol. 608, pp. 282–298, 2021.
[11] J. Alberto and J. Brox, "Inverses of k-Toeplitz matrices with applications to resonator arrays with multiple receivers," *Appl. Math. Comput.*, vol. 377, 2020.
[12] T. H. E. Asymptotic and B. Of, "On the Asymptotic Eigenvalue Distribution of Toepliti Matrices MOLTEN," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. I, pp. 9–14, 1972.
[13] J. Pahade and M. Jha, "Trace of Positive Integer Power of Real 2×2 Matrices," *Advances in Linear Algebra and Matrix Theory*, vol. 05, no. 4, pp. 150–155, 2015.
[14] F. Aryani, *et al*. "Trace Matriks Toeplitz Kompleks Khusus Ukuran Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri*, pp. 673–681, Nov 13, 2018.
[15] F. Aryani, N. Husna, "Trace Matriks Toepitz Tridiagonal Bilangan Bulat Positif Berpangkat," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 5, no. 1, 2019.
[16] Rahmawati, Wartono, and M. Jelita, "Trace of Integer Power of Real 3×3 Specific Matrices," *Int. J. Adv. Sci. Res. Eng.*, vol. 5, no. 3, pp. 48–56, 2019.
[17] Rahmawati *et al.*, "Trace Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika,* vol. 5, no. 2, pp. 61–70, 2019.
[18] R. Andesta, *Trace Matriks Berbentuk Khusus 3x3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif*, Skripsi]. Riau, Pekan Baru: Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Riau, 2018. [Online]. Available: Repository UIN SUSKA RIAU