BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan
March 2021 Vol. 15 No. 1 Page 157–166
P-ISSN: 1978-7227 E-ISSN: 2615-3017
: https://doi.org/10.30598/barekengvol15iss1pp157-166

MATRIKS ATAS RING DERET PANGKAT TERGENERALISASI MIRING

Matrices over Skew Generalized Power Series Rings

Siti Rugayah[1], Ahmad Faisol[2*], Fitriani[3]

[1,2,3]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro, Bandar Lampung, 35145, Indonesia

Corresponding author e-mail: [2] ahmadfaisol@fmipa.unila.ac.id*

Abstrak

Misalkan R adalah ring dengan elemen satuan, $(S,\cdot,\leq)$ monoid terurut tegas dan $\omega: S \to End(R)$ suatu homomorfisma monoid. Dibentuk himpunan $R[[S,\leq,\omega]]$, yaitu himpunan semua fungsi-fungsi dari S ke R dengan $\mathrm{supp}(f)$ bersifat Artin dan *narrow*. Terhadap operasi penjumlahan fungsi dan pergandaan konvolusi, $R[[S,\leq]]$ merupakan ring, yang selanjutnya disebut dengan Ring Deret Pangkat Tergeneralisasi Miring (RDPTM). Pada makalah ini, akan dikontruksi himpunan semua matriks atas RDPTM $R[[S,\leq,\omega]]$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa himpunan matriks ini merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan matriks. Lebih lanjut, akan dikonstruksi ideal dari ring matriks atas RDPTM serta dikaji beberapa sifatnya.

Kata Kunci : Artin, *narrow*, matriks atas ring, monoid terurut tegas, ring deret pangkat tergeneralisasi miring.

Abstract

Let R be a ring with unit elements, $(S,\cdot,\leq)$ strictly ordered monoids, and $\omega: S \to End(R)$ a monoid homomorphism. Formed $R[[S,\leq,\omega]]$, which is a set of all functions from S to R with $\mathrm{supp}(f)$ are Artin and narrow. With the operation of the sum of functions and convolution multiplication, $R[[S,\leq,\omega]]$ is a ring, from now on referred to as the Skew Generalized Power Series Ring (SGPSR). In this paper, the set of all matrices over SGPSR $R[[S,\leq,\omega]]$ will be constructed. Furthermore, it will be shown that this set is a ring with the addition and multiplication matrix operations. Moreover, we will construct the ideal of ring matrix over SGPSR and investigate this ideal's properties.

Keywords: *Artinian, narrow, matrices over a ring, strictly ordered monoid, skew generalized power series ring*

Article info:

Submitted: 10th January 2021 *Accepted: 20th February 2021*

How to cite this article:
S. Rugayah, A. Faisol, Fitriani, "MATRIKS ATAS RING DERET PANGKAT TERGENERALISASI MIRING", *BAREKENG: J. Il. Mat. & Ter*., vol. 15, no. 1, pp. 157-166, Mar. 2021.

1. PENDAHULUAN

Telah diketahui bahwa suatu matriks adalah susunan bilangan-bilangan dalam baris dan kolom yang berbentuk persegi panjang yang diapit oleh kurung siku atau kurung biasa [1]. Bilangan-bilangan ini biasa disebut entri-entri. Secara umum entri-entri suatu matriks merupakan anggota dari suatu lapangan (field), seperti himpunan bilangan real $\mathbb{R}$. Lebih lanjut, matriks ini disebut matriks atas lapangan. Berdasarkan fakta bahwa struktur ring lebih umum dari lapangan, suatu matriks atas lapangan dapat digeneralisasi menjadi matriks atas ring [2]. Ring didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dua operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma tertentu [3]. Salah satu contoh ring yaitu, Ring Deret Pangkat Tergeneralisasi (RDPT) R[[S]] yang dikonstruksi oleh Ribenboim pada tahun 1990 [4]. Ring ini merupakan perumuman dari ring semigrup [5], ring polinomial dan ring deret pangkat formal [6]. Ribenboim mengkonstruksi RDPT R[[S]] dengan cara menerapkan konsep himpunan terurut parsial dan memperlemah syarat supp(f) berhingga pada ring polinomial R[X] dan ring semigrup R[S] menjadi supp(f) yang bersifat Artin dan narrow.

Relasi urutan parsial adalah suatu relasi biner " $\leq$ " pada himpunan tak kosong S yang memenuhi sifat refleksif, anti simetris dan transitif [7]. Himpunan tak kosong S yang dilengkapi dengan suatu urutan parsial disebut himpunan terurut parsial (partially ordered set) dan dinotasikan dengan $(S, \leq)$. Himpunan terurut parsial $(S,\leq)$ dikatakan Artin, jika setiap barisan terurut tegas dari elemen S berhingga. Himpunan terurut $(S,\leq)$ dikatakan narrow jika setiap subhimpunan S yang terurut trivial berhingga [8]. Dalam perkembangannya, penelitian terkait sifat-sifat yang berlaku pada R[[S]] telah dikaji oleh Ribenboim [9],[10],[11],[12],[13],[14]. Di sisi lain, Varadarajan [15] menkonstruksi Modul Deret Pangkat Tergeneralisasi (MDPT) M[[S]], yang merupakan modul atas R[[S]]. Selain itu, Varadarajan [16] memberikan syarat perlu dan cukup M[[S]] merupakan modul Noether. Di pihak lain, Faisol, dkk. [17] mengkaji karakterisasi M[[S]] merupakan modul T[[S]]-Noether. Hal ini dilakukan dengan cara memperumum syarat perlu dan cukup modul polinomial M[X] merupakan modul T[X]-Noether [18], serta menerapkan hubungan antar modul yang hampir dibangun secara hingga, modul hampir Noether dan modul T-Noether [19].

Pada tahun 2008, Mazurek dan Ziembowski [20] memperumum struktur R[[S]] dengan cara menambahkan suatu homomorfisma monoid $\omega: S \rightarrow \mathrm{End}(R)$ ke dalam operasi pergandaan konvolusi yang ada pada R[[S]]. Ring ini selanjutnya disebut dengan Ring Deret Pangkat Tergeneralisasi Miring (RDPTM) dan dinotasikan dengan $R[[S,\leq,\omega]]$ atau disingkat $R[[S,\omega]]$. Selanjutnya, sifat-sifat terkait $R[[S,\omega]]$ telah dikaji oleh Mazurek, dkk. [21],[22],[23],[24],[25]. Hasil penelitian lain terkait struktur $R[[S,\omega]]$ juga telah dikaji oleh Faisol, dkk. [26],[27],[28],[29],[30],[31]. Sejauh ini, $R[[S,\omega]]$ merupakan struktur ring yang paling umum, yaitu untuk ring R, monoid S dan ω tertentu, $R[[S,\omega]]$ merupakan RDPT R[[S]], ring semigrup R[S], ring deret pangkat R[[X]] dan ring polinomial R[X]. Hal ini memberikan motivasi untuk mengkaji sifat-sifat serta struktur aljabar lain yang berkaitan dengan $R[[S,\omega]]$, yang hasilnya nanti akan berakibat langsung pada struktur ring yang lebih khusus dari $R[[S,\omega]]$. Oleh karena itu, pada makalah ini akan dikonstruksi himpunan semua matriks atas $R[[S,\omega]]$, serta akan dibuktikan apakah matriks atas $R[[S,\omega]]$ ini merupakan suatu ring. Selain itu, akan dikonstruksi ideal dari ring matriks atas RDPTM serta dikaji sifat-sifatnya.

2. METODE PENELITIAN

Metode Metode yang digunakan pada makalah ini adalah studi literatur berupa buku-buku dan jurnal-jurnal imiah, khususnya yang berkaitan dengan konsep matriks atas ring, himpunan terurut parsial, sifat Artin dan narrow, ring deret pangkat tergeneralisasi (RDPT) dan ring deret pangkat tergeneralisasi miring (RDPTM). Langkah-langkah yang digunakan yaitu, mengkontruksi matriks atas RDPTM, membuktikan himpunan matriks atas RDPTM terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks merupakan ring, dan mengkonstruksi ideal ring matriks atas RDPTM, serta mengakji sifat-sfatnya.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penulisan Pada bagian ini akan ditunjukkan himpunan semua matriks atas RDPTM merupakan ring. Sebelumnya, akan diberikan definisi dari RDPTM $R[[S,\omega]]$ yang telah dikonstruksi oleh Mazurek dan Ziembowski [20].

Diberikan sebarang ring komutatif R dengan elemen satuan, monoid terurut tegas $(S,\leq)$ dan homomorfisma monoid $\omega: S \to \mathrm{End}(R)$. Dibentuk himpunan semua fungsi dari S ke R, yang dinotasikan dengan R^S. Selanjutnya, didefinisikan himpunan

$$R[[S,\omega]] = \{f \in R^S | \mathrm{supp}(f) \text{Artin dan narrow}\},$$

dengan $\mathrm{supp}(f) = \{s \in S | f(s) \neq 0\}$. Himpunan $R[[S,\omega]]$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan yang didefinisikan oleh:

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s), \quad (1)$$

dan operasi pergandaan konvolusi yang didefinisikan oleh:

$$(fg)(s) = \sum_{(t,u)\in\chi_s(f,g)} f(t)\omega_t(g(u)), \quad (2)$$

untuk setiap $s \in S$ dan $f, g \in R[[S,\omega]]$, dengan himpunan $\chi_s(f,g) = \{(t,u) \in S^2 | f(t) \neq 0, g(u) \neq 0 \text{ dan } t + u = s\}$ berhingga, merupakan suatu ring. Ring ini selanjutnya disebut ring deret pangkat tergeneralisasi miring (RDPTM).

Untuk selanjutnya, matriks n x n atas ring R dinotasikan dengan A_n, matriks n x n atas ring polinomial R[X] dinotasikan dengan $A_n[X]$, matriks n x n atas ring deret pangkat R[[X]] dinotasikan dengan $A_n[[X]]$, matriks n x n atas ring RDPT R[[S]] dinotasikan dengan $A_n[[S]]$, dan matriks n x n atas RDPTM R[[S,ω]] dinotasikan dengan $A_n[[S,\omega]]$. Lebih lanjut, himpunan semua matriks berukuran n x n atas RDPTM dinotasikan oleh

$$M_n(R[[S,\omega]]) = \{A_n[[S,\omega]] = [f_{ij}] \,|f_{ij} \in R[[S,\omega]];\ i,j = 1,2,\dots,n\}.$$

Proposisi 3.1. Jika diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan, monoid terurut tegas $(S,\leq)$, dan homomorfisma monoid $\omega: S \to \mathrm{End}(R)$, maka himpunan matriks atas RDPTM $M_n(R[[S,\omega]])$ terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan matriks merupakan ring.

Bukti. Pertama akan ditunjukkan $M_n(R[[S,\omega]])$ tehadap operasi penjumlahan matriks merupakan grup komutatif (grup Abel).

(i) Untuk sebarang $A_n[[S,\omega]], B_n[[S,\omega]] \in M_n(R[[S,\omega]])$, $A_n[[S,\omega]] + B_n[[S,\omega]] = [f_{ij}] + [g_{ij}] = [f_{ij} + g_{ij}]$. Karena $f_{ij} + g_{ij} \in R[[S,\omega]]$ untuk setiap $f_{ij}, g_{ij} \in R[[S,\omega]]$, maka $A_n[[X,\omega]] + B_n[[X,\omega]] \in M_n(R[[S,\omega]])$.
Dengan kata lain, $M_n(R[[S,\omega]])$ tertutup terhadap operasi penjumlahan matriks.

(ii) Untuk sebarang $A_n[[S,\omega]], B_n[[S,\omega]], C_n[[S,\omega]] \in M_n(R[[S,\omega]])$, berlaku

$$\begin{aligned}(A_n[[S,\omega]] + B_n[[S,\omega]]) + C_n[[S,\omega]] &= ([f_{ij}] + [g_{ij}]) + [h_{ij}]\\ &= [f_{ij} + g_{ij}] + [h_{ij}]\\ &= [(f_{ij} + g_{ij}) + h_{ij}]\\ &= [f_{ij} + (g_{ij} + h_{ij})]\\ &= [f_{ij}] + [g_{ij} + h_{ij}]\\ &= [f_{ij}] + ([g_{ij}] + [h_{ij}])\\ &= A_n[[S,\omega]] + (B_n[[S,\omega]] + C_n[[S,\omega]]).\end{aligned}$$

Jadi terbukti operasi penjumlahan matriks pada $M_n(R[[S,\omega]])$ bersifat asosiatif.

(iii) Didefinisikan matriks $O_n[[S,\omega]] = [0_{ij}]$, dengan $0_{ij} = 0 \in R[[S,\omega]]$ untuk setiap $i,j = 1,2,\dots,n$. Jelas bahwa $O_n[[S,\omega]] \in M_n(R[[S,\omega]])$, karena $0: S \to R$ merupakan elemen identitas terhadap operasi penjumlahan di $R[[S,\omega]]$. Selanjutnya, untuk setiap $A_n[[S,\omega]] \in M_n(R[[S,\omega]])$ berlaku

$$\begin{aligned}A_n[[S,\omega]] + O_n[[S,\omega]] &= [f_{ij}] + [0_{ij}]\\ &= [f_{ij} + 0_{ij}]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [f_{ij} + 0] \\
&= [f_{ij}] \\
&= A_n[[S,\omega]].
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti, terdapat elemen identitas di $M_n(R[[S,\omega]])$.

(iv) Untuk sebarang $A_n[[S,\omega]] \in M_n(R[[S,\omega]])$, didefinisikan $-A_n[[S,\omega]] = [-f_{ij}]$, dengan $-f_{ij}$ adalah invers penjumlahan dari f_{ij} di $R[[S,\omega]]$. Oleh karena itu, jelas bahwa, $-f_{ij} \in R[[S,\omega]]$. Dengan kata lain, $-A_n[[S,\omega]] \in M_n(R[[S,\omega]])$. Lebih lanjut, berlaku

$$
\begin{aligned}
A_n[[S,\omega]] + (-A_n[[S,\omega]]) &= [f_{ij}] + [-f_{ij}] \\
&= [f_{ij} + (-f_{ij})] \\
&= [0] = [0_{ij}] \\
&= 0_n[[S,\omega]].
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti, setiap elemen di $M_n(R[[S,\omega]])$ mempunyai invers.

(v) Untuk sebarang $A_n[[S,\omega]], B_n[[S,\omega]] \in M_n(R[[S,\omega]])$, berlaku

$$
\begin{aligned}
A_n[[S,\omega]] + B_n[[S,\omega]] &= [f_{ij}] + [g_{ij}] \\
&= [f_{ij} + g_{ij}] \\
&= [g_{ij} + f_{ij}] \\
&= [g_{ij}] + [f_{ij}] \\
&= B_n[[S,\omega]] + A_n[[S,\omega]].
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti operasi penjumlahan matriks pada $M_n(R[[S,\omega]])$ bersifat komutatif.

Dari (i) – (v), terbukti bahwa $M_n(R[[S,\omega]])$ tehadap operasi penjumlahan matriks merupakan grup komutatif (grup Abel). Selanjutnya, akan ditunjukkan $M_n(R[[S,\omega]])$ tehadap operasi perkalian matriks merupakan semigrup.

a) Untuk sebarang $A_n[[S,\omega]], B_n[[S,\omega]] \in M_n(R[[S,\omega]])$, $A_n[[S,\omega]]B_n[[S,\omega]] = [f_{ij}][g_{ij}] = [h_{ij}]$, dengan $h_{ij} = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}g_{kj}$. Karena $R[[S,\omega]]$ tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, maka jelas $f_{ik}g_{kj} \in R[[S,\omega]]$ dan $\sum_{k=1}^{n} f_{ik}g_{kj} \in R[[S,\omega]]$. Dengan kata lain, $h_{ij} \in R[[S,\omega]]$ dan berakibat $A_n[[S,\omega]]B_n[[S,\omega]] \in M_n(R[[S,\omega]])$.
Jadi, terbukti $M_n(R[[S,\omega]])$ tertutup terhadap operasi perkalian matriks.

b) Untuk sebarang $A_n[[S,\omega]], B_n[[S,\omega]], C_n[[S,\omega]] \in M_n(R[[S,\omega]])$, berlaku

$$
\begin{aligned}
(A_n[[S,\omega]]B_n[[S,\omega]])C_n[[S,\omega]] &= ([f_{ij}][g_{ij}])[h_{ij}] \\
&= [\alpha_{ij}][h_{ij}] && ;\ \alpha_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} f_{ik}g_{kj} \\
&= [\gamma_{ij}] && ;\ \gamma_{ij} = \textstyle\sum_{m=1}^{n} \alpha_{im}h_{mj}
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\gamma_{ij} &= \textstyle\sum_{m=1}^{n} \alpha_{im}h_{mj} \\
&= \textstyle\sum_{m=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} f_{ik}g_{km})h_{mj} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} f_{ik}(\sum_{m=1}^{n} g_{km}h_{mj}) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} f_{ik}\delta_{kj} && ;\ \delta_{kj} = \textstyle\sum_{m=1}^{n} g_{km}h_{mj} \quad = \quad \mu_{ij} \\
& && ;\ \mu_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} f_{ik}\delta_{kj}
\end{aligned}
$$

Dengan kata lain,

$$
\begin{aligned}
(A_n[[S,\omega]]B_n[[S,\omega]])C_n[[S,\omega]] &= ([f_{ij}][g_{ij}])[h_{ij}] \\
&= [\alpha_{ij}][h_{ij}] && ;\ \alpha_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} f_{ik}g_{kj} \\
&= [\gamma_{ij}] && ;\ \gamma_{ij} = \textstyle\sum_{m=1}^{n} \alpha_{im}h_{mj} \\
&= [\mu_{ij}] && ;\ \mu_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} f_{ik}\delta_{kj} \\
&= [f_{ij}][\delta_{ij}] && ;\ \delta_{ij} = \textstyle\sum_{m=1}^{n} g_{im}h_{mj} \\
&= [f_{ij}]([g_{ij}][h_{ij}]) \\
&= A_n[[S,\omega]](B_n[[S,\omega]]C_n[[S,\omega]])
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti operasi perkalian matriks pada $M_n(R[[S,\omega]])$ bersifat asosiatif.

Dari a) dan b), terbukti bahwa $M_n(R[[S,\omega]])$ tehadap operasi perkalian matriks merupakan semigrup. Selanjutnya, akan ditunjukkan berlaku hukum distributif kiri dan kanan pada operasi penjumlahan dan perkalian matriks pada $M_n(R[[S,\omega]])$.

1) Untuk sebarang $A_n[[S,\omega]], B_n[[S,\omega]], C_n[[S,\omega]] \in M_n(R[[S,\omega]])$, berlaku

$$\begin{aligned} A_n[[S,\omega]](B_n[[S,\omega]]+C_n[[S,\omega]]) &= [f_{ij}]([g_{ij}]+[h_{ij}]) \\ &= [f_{ij}][\alpha_{ij}] && ;\ \alpha_{ij}=g_{ij}+h_{ij} \\ &= [\gamma_{ij}] && ;\ \gamma_{ij}=\textstyle\sum_{k=1}^{n} f_{ik}\alpha_{kj} \end{aligned}$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} f_{ik}\alpha_{kj} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} f_{ik}(g_{kj}+h_{kj}) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(f_{ik}g_{kj}+f_{ik}h_{kj}) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} f_{ik}g_{kj}+\sum_{k=1}^{n} f_{ik}h_{kj} \\ &= \delta_{ij}+\mu_{ij} && ;\ \delta_{ij}=\textstyle\sum_{k=1}^{n} f_{ik}g_{kj} \text{ dan } \mu_{ij}=\sum_{k=1}^{n} f_{ik}h_{kj} \end{aligned}$$

Dengan kata lain,

$$\begin{aligned} A_n[[S,\omega]](B_n[[S,\omega]]+C_n[[S,\omega]]) &= [f_{ij}]([g_{ij}]+[h_{ij}]) \\ &= [f_{ij}][\alpha_{ij}] && ;\ \alpha_{ij}=g_{ij}+h_{ij} \\ &= [\gamma_{ij}] && ;\ \gamma_{ij}=\textstyle\sum_{k=1}^{n} f_{ik}\alpha_{kj} \\ &= [\delta_{ij}+\mu_{ij}] && ;\ \delta_{ij}=\textstyle\sum_{k=1}^{n} f_{ik}g_{kj} \text{ dan} \\ & && \ \ \mu_{ij}=\textstyle\sum_{k=1}^{n} f_{ik}h_{kj} \\ &= [\delta_{ij}]+[\mu_{ij}] \\ &= [f_{ij}][g_{ij}]+[f_{ij}][h_{ij}] \\ &= A_n[[S,\omega]]B_n[[S,\omega]]+A_n[[S,\omega]]C_n[[S,\omega]]. \end{aligned}$$

2) Untuk sebarang $A_n[[S,\omega]], B_n[[S,\omega]], C_n[[S,\omega]] \in M_n(R[[S,\omega]])$, berlaku

$$\begin{aligned} (A_n[[S,\omega]]+B_n[[S,\omega]])C_n[[S,\omega]] &= ([f_{ij}]+[g_{ij}])[h_{ij}] \\ &= [\alpha_{ij}][h_{ij}] && ;\ \alpha_{ij}=f_{ij}+g_{ij} \\ &= [\gamma_{ij}] && ;\ \gamma_{ij}=\textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}h_{kj} \end{aligned}$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}h_{kj} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(f_{ik}+g_{ik})\,h_{kj} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(f_{ik}h_{kj}+g_{ik}h_{kj}) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} f_{ik}h_{kj}+\sum_{k=1}^{n} g_{ik}h_{kj} \\ &= \delta_{ij}+\mu_{ij} && ;\ \delta_{ij}=\textstyle\sum_{k=1}^{n} f_{ik}h_{kj} \text{ dan } \mu_{ij}=\sum_{k=1}^{n} g_{ik}h_{kj} \end{aligned}$$

Dengan kata lain,

$$\begin{aligned} (A_n[[S,\omega]]+B_n[[S,\omega]])C_n[[S,\omega]] &= ([f_{ij}]+[g_{ij}])[h_{ij}] \\ &= [\alpha_{ij}][h_{ij}] && ;\ \alpha_{ij}=f_{ij}+g_{ij} \\ &= [\gamma_{ij}] && ;\ \gamma_{ij}=\textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}h_{kj} \\ &= [\delta_{ij}+\mu_{ij}] && ;\ \delta_{ij}=\textstyle\sum_{k=1}^{n} f_{ik}h_{kj} \text{ dan} \\ & && \ \ \mu_{ij}=\textstyle\sum_{k=1}^{n} g_{ik}h_{kj} \\ &= [\delta_{ij}][\mu_{ij}] \\ &= [f_{ij}][h_{ij}]+[g_{ij}][h_{ij}] \\ &= A_n[[S,\omega]]C_n[[S,\omega]]+B_n[[S,\omega]]C_n[[S,\omega]]. \end{aligned}$$

Dari 1) dan 2) terbukti bahwa, berlaku hukum distributif kiri dan kanan pada operasi penjumlahan dan perkalian matriks pada $M_n(R[[S,\omega]])$. Karena (i)-(v), a), b), 1) dan 2) terpenuhi, maka terbukti bahwa $M_n(R[[S,\omega]])$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks. □

Jika diberikan ideal I di ring R, maka himpunan

$$I[[S,\omega]] = \{f_{ij} \in R[[S,\omega]] | f_{ij}(s) \in I, \text{untuk setiap } s \in S\}$$

merupakan ideal RDPTM $R[[S,\omega]]$ [32]. Dengan menerapkan cara yang serupa pada pendefinisian ideal RDPTM, berikut didefinisikan ideal dari $M_n(R[[S,\omega]])$.

Proposisi 3.2 Jika $I[[S,\omega]]$ ideal RDPTM $R[[S,\omega]]$, maka himpunan

$$J_n(R[[S,\omega]]) = \{A_n[[S,\omega]] = [f_{ij}] \in M_n(R[[S,\omega]]) | f_{ij} \in I[[S,\omega]]\}$$

merupakan ideal di $M_n(R[[S,\omega]])$.

Bukti:

i) Untuk sebarang $A_n[[S,\omega]], B_n[[S,\omega]] \in J_n(R[[S,\omega]])$, akan ditunjukkan $A_n[[S,\omega]] - B_n[[S,\omega]] = [f_{ij}] - [g_{ij}] \in J_n(R[[S,\omega]])$.

Ambil sebarang $A_n[[S,\omega]], B_n[[S,\omega]] \in J_n(R[[S,\omega]])$ dengan $A_n[[S,\omega]] = [f_{ij}]$ dan $B_n[[S,\omega]] = [g_{ij}]$. Jelas bahwa $f_{ij}, g_{ij} \in I[[S,\omega]]$. Karena $I[[S,\omega]]$ ideal $R[[S,\omega]]$, maka berakibat $f_{ij} - g_{ij} \in I[[S,\omega]]$.

Sehingga $[f_{ij} - g_{ij}] \in J_n(R[[S,\omega]])$. Sedangkan $[f_{ij} - g_{ij}] = [f_{ij}] - [g_{ij}] = A_n[[S,\omega]] - B_n[[S,\omega]]$. Dengan kata lain, terbukti $A_n[[S,\omega]] - B_n[[S,\omega]] \in J_n(R[[S,\omega]])$.

ii) Untuk sebarang $P_n[[S,\omega]] \in M_n(R[[S,\omega]])$ dan $A_n[[S,\omega]] \in J_n(R[[S,\omega]])$, akan ditunjukkan $A_n[[S,\omega]]P_n[[S,\omega]], P_n[[S,\omega]]A_n[[S,\omega]] \in J_n(R[[S,\omega]])$.

Untuk sebarang $P_n[[S,\omega]] \in M_n(R[[S,\omega]])$ dengan $P_n[[S,\omega]] = [\alpha_{ij}]$ dan $A_n[[S,\omega]] \in J_n(R[[S,\omega]])$ dengan $A_n[[S,\omega]] = [f_{ij}]$ berlaku

$$A_n[[S,\omega]]P_n[[S,\omega]] = [f_{ij}][\alpha_{ij}] = [\mu_{ij}] \ \ ; \mu_{ij} = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}\alpha_{kj},$$

dengan $(f_{ik}\alpha_{kj})(s) = \sum_{t+u=s} f_{ik}(t)\omega_t(\alpha_{kj}(u))$ untuk setiap $s \in S$, dan

$$P_n[[S,\omega]]A_n[[S,\omega]] = [\alpha_{ij}][f_{ij}] = [\delta_{ij}] \ \ ; \delta_{ij} = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{im} f_{mj},$$

dengan $(\alpha_{im}f_{mj})(s) = \sum_{x+y=s} \alpha_{im}(x)\omega_x(f_{mj}(y))$ untuk setiap $s \in S$.

Dengan kata lain, untuk menunjukkan $A_n[[S,\omega]]P_n[[S,\omega]], P_n[[S,\omega]]A_n[[S,\omega]] \in J_n(R[[S,\omega]])$, cukup ditunjukkan $\mu_{ij}, \delta_{ij} \in I[[S,\omega]]$. Karena $I[[S,\omega]]$ ideal RDPTM $R[[S,\omega]]$, untuk sebarang $f_{ik}, f_{mj} \in I[[S,\omega]]$ dan $\alpha_{kj}, \alpha_{im} \in R[[S,\omega]]$, berlaku $f_{ik}\alpha_{kj}, \alpha_{im}f_{mj} \in I[[S,\omega]]$. Oleh karena itu, $\sum_{k=1}^{n} f_{ik}\alpha_{kj} = \mu_{ij}, \sum_{m=1}^{n} \alpha_{im} f_{mj} = \delta_{ij} \in I[[S,\omega]]$.

Dengan kata lain,

$$[\mu_{ij}] = [f_{ij}][\alpha_{ij}] = A_n[[S,\omega]]P_n[[S,\omega]] \in J_n(R[[S,\omega]])$$

dan

$$[\delta_{ij}] = [\alpha_{ij}][f_{ij}] = P_n[[S,\omega]]A_n[[S,\omega]] \in J_n(R[[S,\omega]])$$

Jadi terbukti bahwa $J_n(R[[S,\omega]])$ merupakan ideal $M_n(R[[S,\omega]])$. □

Telah diketahui bahwa jika $I_1, I_2, \cdots, I_m$ ideal-ideal ring R, maka $\bigcap_{k=1}^{m} I_k$ juga ideal ring R. Hal ini juga berlaku pada ideal RDPTM, yang dijelaskan pada sifat berikut.

Lemma 3.3 Jika $I_1[[S,\omega]], I_2[[S,\omega]], \cdots, I_m[[S,\omega]]$ ideal RDPTM $R[[S,\omega]]$ dengan $I_1, I_2, \cdots, I_m$ ideal-ideal ring R, maka $\bigcap_{k=1}^{m}(I_k[[S,\omega]])$ merupakan ideal RDPTM $R[[S,\omega]]$, serta berlaku

$$\bigcap_{k=1}^{m}(I_k[[S,\omega]]) = \left(\bigcap_{k=1}^{m} I_k\right)[[S,\omega]].$$

Bukti. Berdasarkan definisi ideal RDPTM, $I_k[[S,\omega]]$ adalah himpunan yang didefinisikan oleh

$$I_k[[S,\omega]] = \{f_{ij} \in R[[S,\omega]] | f_{ij}(s) \in I_k, \text{untuk setiap } s \in S\},$$

dengan I_k adalah ideal ring R untuk k = 1, 2,…, m. Sedangkan, $\left(\bigcap_{k=1}^{m} I_k\right)[[S,\omega]]$ dapat didefinisikan sebagai himpunan

$$\left(\bigcap_{k=1}^{m} I_k\right)[[S,\omega]] = \{f_{ij} \in R[[S,\omega]] \mid f_{ij}(s) \in \bigcap_{k=1}^{m} I_k, \text{untuk setiap } s \in S\}.$$

Untuk sebarang $f_{ij} \in \bigcap_{k=1}^{m}(I_k[[S,\omega]])$, akan ditunjukkan $f_{ij} \in \left(\bigcap_{k=1}^{m} I_k\right)[[S,\omega]]$. Dengan kata lain, akan ditunjukkan $\bigcap_{k=1}^{m}(I_k[[S,\omega]]) \subseteq \left(\bigcap_{k=1}^{m} I_k\right)[[S,\omega]]$.

$f_{ij} \in \bigcap_{k=1}^{m}(I_k[[S,\omega]])$ artinya $f_{ij} \in I_1[[S,\omega]]$, $f_{ij} \in I_2[[S,\omega]]$, …, dan $f_{ij} \in I_m[[S,\omega]]$.

Oleh karena itu, untuk setiap $s \in S$ berlaku $f_{ij}(s) \in I_1$, $f_{ij}(s) \in I_2$, …, dan $f_{ij}(s) \in I_m$. Dengan kata lain, $f_{ij}(s) \in \bigcap_{k=1}^{m} I_k$ untuk setiap $s \in S$. Akibatnya, $f_{ij} \in \left(\bigcap_{k=1}^{m} I_k\right)[[S,\omega]]$. Jadi terbukti $\bigcap_{k=1}^{m}(I_k[[S,\omega]]) \subseteq \left(\bigcap_{k=1}^{m} I_k\right)[[S,\omega]]$.

Selanjutnya, untuk sebarang $f_{ij} \in \left(\bigcap_{k=1}^{m} I_k\right)[[S,\omega]]$, akan ditunjukkan $f_{ij} \in \bigcap_{k=1}^{m}(I_k[[S,\omega]])$. Dengan kata lain, akan ditunjukkan $\left(\bigcap_{k=1}^{m} I_k\right)[[S,\omega]] \subseteq \bigcap_{k=1}^{m}(I_k[[S,\omega]])$.

$f_{ij} \in \left(\bigcap_{k=1}^{m} I_k\right)[[S,\omega]]$ artinya $f_{ij}(s) \in \bigcap_{k=1}^{m} I_k$ untuk setiap $s \in S$. Oleh karena itu, $f_{ij}(s) \in I_1$, $f_{ij}(s) \in I_2$, …, dan $f_{ij}(s) \in I_m$. Akibatnya, $f_{ij} \in I_1[[S,\omega]]$, $f_{ij} \in I_2[[S,\omega]]$, …, dan $f_{ij} \in I_m[[S,\omega]]$. Dengan kata lain, $f_{ij} \in \bigcap_{k=1}^{m}(I_k[[S,\omega]])$, yang artinya $\left(\bigcap_{k=1}^{m} I_k\right)[[S,\omega]] \subseteq \bigcap_{k=1}^{m}(I_k[[S,\omega]])$. Jadi, terbukti bahwa $\bigcap_{k=1}^{m}(I_k[[S,\omega]]) = \left(\bigcap_{k=1}^{m} I_k\right)[[S,\omega]]$. □

Untuk selanjutnya, jika $I_k[[S,\omega]]$ ideal RDPTM $R[[S,\omega]]$, dengan I_k ideal R, untuk k=1, 2, …,m, maka ideal ring matriks $M_n(R[[S,\omega]])$ yang entri matriksnya merupakan anggota dari $I_k[[S,\omega]]$ dinotasikan oleh

$$J_n^k(R[[S,\omega]]) = \{A_n[[S,\omega]] = [f_{ij}] \in M_n(R[[S,\omega]]) | f_{ij} \in I_k[[S,\omega]]\}.$$

Sedangkan, himpunan semua matriks atas RDPTM yang entrinya merupakan anggota RDPTM atas irisan ideal ring R dinotasikan oleh

$$D_n(R[[S,\omega]]) = \{A_n[[S,\omega]] = [f_{ij}] \in M_n(R[[S,\omega]]) | f_{ij} \in \left(\bigcap_{k=1}^{m} I_k\right)[[S,\omega]]\}.$$

Kesamaan dua himpunan ini, diberikan oleh sifat berikut.

Proposisi 3.4 Jika $J_n^1(R[[S,\omega]]), J_n^2(R[[S,\omega]]), \cdots, J_n^m(R[[S,\omega]])$ ideal $M_n(R[[S,\omega]])$, dengan $I_k[[S,\omega]]$ ideal RDPTM $R[[S,\omega]]$ dan I_k ideal ring R, untuk k = 1, 2, …,m, maka

$$\bigcap_{k=1}^{m}\{J_n^k(R[[S,\omega]])\} = D_n(R[[S,\omega]]).$$

Bukti. Untuk sebarang $A_n[[S,\omega]] = [f_{ij}] \in \bigcap_{k=1}^{m}\{J_n^k(R[[S,\omega]])\}$, akan ditunjukkan $A_n[[S,\omega]] = [f_{ij}] \in D_n(R[[S,\omega]])$. Dengan kata lain, akan ditunjukkan $\bigcap_{k=1}^{m}\{J_n^k(R[[S,\omega]])\} \subseteq D_n(R[[S,\omega]])$.

$A_n[[S,\omega]] = [f_{ij}] \in \bigcap_{k=1}^{m}\{J_n^k(R[[S,\omega]])\}$ artinya $[f_{ij}] \in J_n^1(R[[S,\omega]]), [f_{ij}] \in J_n^2(R[[S,\omega]]), \cdots, [f_{ij}] \in J_n^m(R[[S,\omega]])$. Oleh karena itu, $f_{ij} \in I_1[[S,\omega]], f_{ij} \in I_2[[S,\omega]], \cdots, f_{ij} \in I_m[[S,\omega]]$. Dengan kata lain, $f_{ij} \in \bigcap_{k=1}^{m}(I_k[[S,\omega]])$. Berdasarkan Lemma 3.3, $\bigcap_{k=1}^{m}(I_k[[S,\omega]]) = \left(\bigcap_{k=1}^{m} I_k\right)[[S,\omega]]$, sehingga diperoleh $f_{ij} \in \left(\bigcap_{k=1}^{m} I_k\right)[[S,\omega]]$. Dengan kata lain, $[f_{ij}] = A_n[[S,\omega]] \in D_n(R[[S,\omega]])$. Jadi terbukti $\bigcap_{k=1}^{m}\{J_n^k(R[[S,\omega]])\} \subseteq D_n(R[[S,\omega]])$.

Selanjutnya, untuk sebarang $A_n[[S,\omega]] = [f_{ij}] \in D_n(R[[S,\omega]])$, akan ditunjukkan $A_n[[S,\omega]] = [f_{ij}] \in \bigcap_{k=1}^{m}\{J_n^k(R[[S,\omega]])\}$. Dengan kata lain, akan ditunjukkan $D_n(R[[S,\omega]]) \subseteq \bigcap_{k=1}^{m}\{J_n^k(R[[S,\omega]])\}$.

$A_n[[S,\omega]] = [f_{ij}] \in D_n(R[[S,\omega]])$ artinya $f_{ij} \in \left(\bigcap_{k=1}^{m} I_k\right)[[S,\omega]]$. Berdasarkan Lemma 3.3, $\bigcap_{k=1}^{m}(I_k[[S,\omega]]) = \left(\bigcap_{k=1}^{m} I_k\right)[[S,\omega]]$, sehingga diperoleh $f_{ij} \in \bigcap_{k=1}^{m}(I_k[[S,\omega]])$. Oleh karena itu, diperoleh

$f_{ij} \in I_1[[S,\omega]], f_{ij} \in I_2[[S,\omega]], \cdots, f_{ij} \in I_m[[S,\omega]]$. Dengan kata lain, $[f_{ij}] \in J_n^1(R[[S,\omega]]), [f_{ij}] \in J_n^2(R[[S,\omega]]), \cdots, [f_{ij}] \in J_n^m(R[[S,\omega]])$. Akibatnya, $[f_{ij}] = A_n[[S,\omega]] \in \bigcap_{k=1}^{m}\{J_n^k(R[[S,\omega]])\}$. Jadi terbukti $D_n(R[[S,\omega]]) \subseteq \bigcap_{k=1}^{m}\{J_n^k(R[[S,\omega]])\}$. □

4. KESIMPULAN

Matriks atas RDPTM pada makalah ini, merupakan matriks berukuran $n \times n$ yang entri-entrinya merupakan elemen RDPTM $R[[S,\omega]]$ dan dinotasikan dengan $A_n[[S,\omega]]$. Dapat dikontruksi himpunan matriks atas RDPTM $R[[S,\omega]]$, yang selanjutnya dinotasikan dengan $M_n(R[[S,\omega]])$. Terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks, telah dibuktikan bahwa $M_n(R[[S,\omega]])$ merupakan ring. Selain itu, konstruksi ideal dari $M_n(R[[S,\omega]])$ juga berhasil dilakukan, yang selanjutnya dinotasikan dengan $J_n(R[[S,\omega]])$. Lebih lanjut, telah dibuktikan bahwa irisan semua ideal $M_n(R[[S,\omega]])$ sama dengan himpunan semua matriks atas RDPTM $R[[S,\omega]]$ yang entrinya merupakan anggota RDPTM atas irisan ideal-ideal ring R.

Untuk penelitian lebih lanjut, masih terbuka peluang untuk mengkaji sifat-sifat yang ada pada himpunan semua matriks atas RDPTM, seperti elemen idempotent dan nilpoten dari $M_n(R[[S,\omega]])$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra: Applications Version, 9th Edition*. New Jersey, 2005.

[2] W. C. Brown, *Matrices Over Commutative Rings*. New York: Marcel Dekker Inc., 1993.

[3] D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract Algebra*, Third Edit. John Wiley and Sons, Inc., 2004.

[4] P. Ribenboim, “Generalized Power Series Rings,” in *Lattices, Semigroups, and Universal Algebra*, 1990.

[5] R. Gilmer, *Commutative Semigroup Rings*. Chicago and London: The University of Chicago, 1984.

[6] T. W. Hungerford, *Algebra*. New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1974.

[7] W. A. Adkins and S. H. Weintraub, *Algebra: An Approach via Module Theory*. New York: Springer-Verlag, New York, Inc., 1992.

[8] G. A. Elliott and P. Ribenboim, “Fields of generalized power series,” *Arch. der Math.*, vol. 54, no. 4, pp. 365–371, 1990.

[9] P. Ribenboim, “Rings of Generalized Power Series: Nilpotent Elements,” *Abh. Math. Sem. Univ. Hambg.*, vol. 61, pp. 15–33, 1991.

[10] P. Ribenboim, “Noetherian Rings of Generalized Power Series,” *J. Pure Appl. Algebr.*, vol. 79, no. 3, pp. 293–312, 1992.

[11] A. Benhissi and P. Ribenboim, “Ordered Rings of Generalized Power Series,” in *Ordered Algebraic Structures*, 1993.

[12] P. Ribenboim, “Rings of Generalized Power Series II: Units and Zero-Divisors,” *J. Algebr.*, vol. 168, pp. 71–89, 1994.

[13] P. Ribenboim, “Special Properties of Generalized Power Series,” *J. Algebr.*, vol. 173, pp. 566–586, 1995.

[14] P. Ribenboim, “Semisimple Rings and Von Neumann Regular Rings of Generalized Power Series,” *J. Algebr.*, vol. 198, no. 2, pp. 327–338, 1997.

[15] K. Varadarajan, “Generalized power series modules,” *Commun. Algebr.*, vol. 29, no. 3, pp. 1281–1294, 2001.

[16] K. Varadarajan, “Noetherian generalized power series rings and modules,” *Commun. Algebr.*, vol. 29, no. 1, pp. 245–251, 2001.

[17] A. Faisol, B. Surodjo, and S. Wahyuni, “T[[S]]-Noetherian Property on Generalized Power Series Modules,” *JP J. Algebr. Number Theory Appl.*, vol. 43, no. 1, pp. 1–12, 2019.

[18] A. Faisol, B. Surodjo, and S. Wahyuni, “The Sufficient Conditions for R[X]-module M[X] to be S[X]-Noetherian,” vol. 5, no. 1, pp. 1–13, 2019.

[19] A. Faisol, B. Surodjo, and S. Wahyuni, “The Relation between Almost Noetherian Module, Almost Finitely Generated Module and T-Noetherian Module,” in *Journal of Physics: Conference Series*, Sep. 2019, vol. 1306, no. 1.

[20] R. Mazurek and M. Ziembowski, “On von Neumann regular rings of skew generalized power series,” *Commun. Algebr.*, vol. 36, no. 5, pp. 1855–1868, 2008.

[21] R. Mazurek and M. Ziembowski, “The ascending chain condition for principal left or right ideals of skew generalized power series rings,” *J. Algebr.*, vol. 322, no. 4, pp. 983–994, 2009.

[22] R. Mazurek and M. Ziembowski, “Weak dimension and right distributivity of skew generalized power series rings,” *J. Math. Soc. Japan*, vol. 62, no. 4, pp. 1093–1112, 2010.

[23] R. Mazurek, “Rota-Baxter operators on skew generalized power series rings,” *J. Algebr. its Appl.*, vol. 13, no. 7, pp. 1–10, 2014.

[24] R. Mazurek, “Left principally quasi-Baer and left APP-rings of skew generalized power series,” *J. Algebr. its Appl.*, vol. 14, no. 3, pp. 1–36, 2015.

[25] R. Mazurek and K. Paykan, “Simplicity of skew generalized power series rings,” *New York J. Math.*, vol. 23, pp. 1273–1293, 2017.

[26] A. Faisol, “Homomorfisam Ring Deret Pangkat Teritlak Miring,” *J. Sains MIPA*, vol. 15, no. 2, pp. 119–124, 2009.

[27] A. Faisol, “Pembentukan Ring Faktor Pada Ring Deret Pangkat Teritlak Miring,” in *Prosiding Semirata FMIPA Univerisitas Lampung*, 2013, pp. 1–5.

[28] A. Faisol, “Endomorfisma Rigid dan Compatible pada Ring Deret Pangkat Tergeneralisasi Miring,” *J. Mat.*, vol. 17, no. 2, pp. 45–49, 2014.

[29] A. Faisol, B. Surodjo, and S. Wahyuni, “Modul Deret Pangkat Tergeneralisasi Skew T-Noether,” in *Prosiding Seminar Nasional Aljabar, Penerapan dan Pembelajarannya*, 2016, pp. 95–100.

[30] A. Faisol, B. Surodjo, and S. Wahyuni, “The Impact of the Monoid Homomorphism on The Structure of Skew Generalized Power Series Rings,” *Far East J. Math. Sci.*, vol. 103, no. 7, pp. 1215–1227, 2018.

[31] A. Faisol and Fitriani, “The Sufficient Conditions for Skew Generalized Power Series Module M[[S,w]] to be T[[S,w]]-Noetherian R[[S,w]]-module,” *Al-Jabar J. Pendidik. Mat.*, vol. 10, no. 2, pp. 285–292, 2019.

[32] R. Mazurek and M. Ziembowski, “Uniserial rings of skew generalized power series,” *J. Algebr.*, vol. 318, no. 2, pp. 737–764, 2007.