PENERAPAN TEORI KONGRUENSI DALAM PERMAINAN NIM

L. Tehuayo [1], Z. A. Leleury[2], F. Kondolembang [3]

[1,2,3]Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pattimura
Jalan Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia
e-mail: [1]ledy_tehuayo@yahoo.com; [2]zetharthur82@gmail.com; [3]ferrykondolembang@gmail.com

Abstrak

Permainan NIM adalah permainan tradisional yang menggunakan strategi sebagai elemen utamanya. Permainan ini dimainkan oleh dua pemain dimana setiap pemain secara bergantian mengambil paling sedikit suatu objek dengan aturan-aturan tertentu. Kemenangan permainan Nim terletak pada banyaknya objek yang tersedia dan strategi yang digunakan dalam mengambil objek tersebut. Dalam permainan NIM, pemain yang mengambil objek terakhir adalah pemain yang memenangkan permainan. Penelitian ini menyajikan tujuh buah permainan Nim: Nim Maksima, Nim Satu-Tiga, Nim Satu-Empat, Nim Satu-Dua-Empat, Nim Satu-Tiga-Empat, Nim Satu-Tiga-Lima-Tujuh dan Nim Tiga-Lima-Tujuh-Sembilan. Pada permainan Nim ini, peranan Matematika dalam teori bilangan Khususnya teori kongruensi adalah cara dalam menentukan strategi kemenangan untuk permainan Nim.

Kata kunci: Kongruensi, permainan Nim, strategi.

THE IMPLEMENTATION OF CONGRUENCY THEORY IN NIM GAMES

Abstract

Nim Games is a traditional game that uses strategy as its main element, Nim game is played by two players where each player in turn takes at least an object with certain rules. The victory of Nim games lies in the number of available objects and strategies used in taking those objects. In the NIM game the player who takes the last object is the player who wins the game. In this paper presents seven games of Nim: Nim Maksima, Nim One-Three, Nim One-Four, Nim One-Two-Four, Nim One-Three-Four, Nim One-Three-Five-Seven and Nim Three-Five-Seven-Nine. In this Nim game, the role of Mathematics in the theory of Special numbers of congruence theory is a way of determining winning strategi for Nim games.

Keywords: *Congruence, Nim game, strategy.*

1. Pendahuluan

Permainan Nim merupakan salah satu permainan tradisional yang pada saat ini jarang sekali dimainkan karena muncul dan berkembangnya permainan-permainan baru yang lebih menarik. Nim adalah suatu permainan yang dimainkan oleh 2 orang dengan suatu aturan tertentu. Nim biasanya dimainkan sebagai *misere game* dimana pemain yang mengambil objek terakhir kalah. Nim dapat juga dimainkan secara normal, yaitu pemain yang mengambil objek terakhir menang. Hal ini dikatakan normal karena mengikuti konvensi, sedangkan Nim biasanya tidak mengikuti konvensi tersebut. Permainan normal Nim merupakan hal yang fundamental bagi Teorema *Sprague Gundy*, yang intinya mengatakan bahwa dalam permainan yang normal setiap *impartial game*, yaitu sebuah permainan dimana yang membedakan antara pemain 1 dan pemain 2 adalah bahwa pemain 1 mendapat giliran pertama, ekuivalen dengan setumpuk Nim yang menghasilkan akibat yang sama pada saat dimainkan *parallel* dengan permainan normal *impartial game* lainnya [1]. Ada berbagai jenis permainan Nim. Pada penelitian ini dibahas tujuh buah permainan Nim, yaitu Nim Maksima, Nim Satu-Tiga, Nim Satu-Empat, Nim Satu-Dua-Empat, Nim Satu-Tiga-Empat, Nim Satu-Tiga-Lima-Tujuh dan Nim Tiga-Lima-Tujuh-Sembilan.

Untuk ketujuh permainan Nim yang akan dibahas disini, akan dtentukan suatu strategi untuk memenangkan permainan tersebut. Teori Matematika yang akan tampak pada permainan ini adalah tentang Teori Bilangan. Teori bilangan merupakan bagian dari matematika yang tergolong sudah tua usianya. Namun demikian sering digunakan sebagai dasar dari pengembangan beberapa cabang matematika seperti pada permainan Nim. Konsep teori bilangan, khususnya kongruensi akan dipakai dalam pembentukan strategi kemenangan permainan Nim.

2. Tinjauan Pustaka

Nim merupakan permainan klasik yang mengandalkan strategi sebagai elemen utamanya [1]. Pada faktanya, di Indonesia banyak orang yang tidak mengetahui apa itu permainan Nim. Hal ini wajar, mengingat asal dari permainan itu sendiri. Perminan Nim dimainkan secara normal antara dua orang pemain secara bergantian. Nim secara matematika dipecahkan untuk berbaga i banyaknya tumpukan dan objek. Konsep kongruensi yang dibahas dalam teori bilangan yang juga merupakan bagian dari teori matematika sangat diperlukan dalam permainan ini. Rosen, [2] dalam bukunya yang berjudul *Elementary Number theory and its application* menjelaskan definisi dan beberapa teorema penting terkait konsep kongruensi yang akan menjadi landasan dalam pembahasan teori permainan Nim.

2.1 Teori Permainan Kombinatorial

Teori permainan kombinatorial (*Combinatorial Game Theory*) adalah salah satu teori matematika yang hanya mempelajari permainan dengan dua pemain yang memiliki posisi dimana setiap pemain bermain bergantian untuk memperoleh kemenangan. Dalam teori matematika terdapat teori yang disebut teori permainan *(Game Theory)*. Perlu diketahui bahwa antara teori permainan kombinatorial dan teori permainan ini berbeda. Teori permainan digunakan pada teori ekonomi, dan saat ini lebih banyak digunakan di bidang akademik lainnya seperti biologi, psikologi, sosiologi, dan lain-lain. Permainan yang dipelajari dalam *game theory* sebagian besar merupakan *game* yang memiliki informasi sempurna (*imperfect information),* sehingga tidak semua pemain mengetahui tindakan dari pemain lainnya. Selain itu pemain bermain secara bersama-sama. Tidak seperti pada *Combinatorial Game Theory* permainan dijalankan secara bergiliran. Hal inilah yang membedakan antara *Game Theory* dan *Combinatorial Game Theory.* Permainan yang merupakan aplikasi dari *Combinatorial Game Theory* , yang disebut juga sebagai *Combinatorial Game.* Pada permainan kombinatorial, permainan hanya akan berakhir dengan satu kemenangan bagi satu orang pemain atau seri [3]

2.2 Kekongruenan

Definisi 2.2.1 (Burton, [4]**)**
Jika m suatu bilangan bulat positif, maka a kongruen dengan b modulo $(di\ tulis\ a \equiv b\ (mod\ m))$ jika m membagi habis $(a - b)$, jika m tidak membagi habis $(a - b)$ maka dikatakan bahwa a tidak kongruen dengan b modulo m (di tulis : $a \not\equiv b\ mod\ (m)$)
Dari definisi diatas muncul beberapa teorema sebagai berikut:
Teorema 2.2.1 (Burton, [4]**)**
Jika $a, b,$ dan m adalah bilangan-bilangan bulat dengan m adalah positif, maka $a \equiv b\ (mod\ m)$ jika dan hanya jika ada bilangan bulat k sehingga $a = mk + b$.
Teorema 2.2.2 (Burton, [4]**)**
Setiap bilangan bulat kongruen modulo m dengan tepat satu di antara $0, 1, 2, 3, \dots, (m - 1)$.

2.3 Sejarah Permainan NIM

Permainan ini sudah ada sejak zaman dahulu. Permainan Nim berasal dari Cina yang bernama **Tsyanshidzi** atau mengambil batu. Nama ini berasal dari kata Nimm yang dalam bahasa jerman artinya adalah *take* atau ambil [5]. Nim merupakan suatu jenis permainan yang telah ada selama berabad-abad di seluruh dunia dan orang Eropa yang pertama mereferensikan permainan ini pada abad 15. Salah seorang professor matematika dari Harvard, Charles Bouton, ialah yang mengembangkan teori permainan Nim ini.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dibahas penerapan teori kongruensi dalam tujuh permainan Nim. Konsep permainan yang dibahas dalam penelitian ini yaitu pemain yang mengambil sisa benda terakhir adalah pemain yang menang.

3.1 Strategi Kemenangan Nim Maksima

Pada permainan Nim Maksima, misalkan pemain memiliki M benda dan banyaknya mengambil benda pada setiap giliran sebanyak maksimum N, dimana $M > N$; $(M,\ N \epsilon \mathbb{Z}^{+})$. Terdapat dua pemain (namakanlah pemain A dan pemain B) dengan M benda tersedia di atas meja. Setiap pemain pada gilirannya mengambil maksimal 4 benda. Strategi kemenangan Nim Maksisma dimana pemain yang mengambil sisa benda terakhir adalah pemenang akan disajikan dalam dua ilustrasi di bawah ini, dimana pemain yang mempunyai strategi kemenangan Nim maksima akan berperan sebagai pemain pertama (Pemain A) untuk ilustrasi I dan sebagai pemain kedua (Pemain B) untuk ilustrasi II.

Ilustrasi I: (A Mulai Dahulu, A Sebagai Pemenang).

Misalkan dua orang bermain bergantian mengeluarkan 1, 2, 3 atau 4 benda sekaligus dari tumpukan yang dimulai dengan 26 benda. Orang yang mengambil benda terakhir itu memenangkan permainan. Akan ditunjukkan bahwa pemain pertama bisa memenangkan pertandingan tidak peduli apa yang pemain kedua lakukan.

Solusi:

Untuk membuktikan bahwa pemain pertama selalu bisa memenangkan permainan, dilakukan pembuktian secara *backward*. Pada langkah terakhir pemain pertama bisa menang jika pengambilan terakhir tersisa 1, 2, 3 atau 4 benda. Pemain kedua akan dipaksa untuk meninggalkan 1, 2, 3 atau 4 benda jika pemain ini harus mengeluarkan benda dari tumpukan yang berisi 5 benda. Akibatnya, langkah terakhir dari pemain pertama harus meninggalkan 5 benda untuk pemain kedua. Hal ini bisa dilakukan bila ada 6, 7, 8 atau 9 benda tersisa, yang terjadi saat pemain kedua harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 10 benda. Akibatnya, pemain pertama harus meninggalkan 10 benda untuk pemain kedua pada langkah kedua. Hal ini juga bisa dilakukan bila ada 11, 12, 13 atau 14 benda tersisa, yang terjadi saat pemain kedua harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 15 benda. Akibatnya, pemain pertama harus meninggalkan 15 benda untuk pemain kedua pada langkah ketiga. Hal ini juga dapat dilakukan bila ada 16, 17, 18, atau 19 benda tersisa, yang terjadi saat pemain kedua harus mengeluarkan benda dari tumpukan 20 benda. Akibatnya, pemain pertama harus meninggalkan 20 benda untuk pemain kedua pada langkah keempat. Ini berarti ada 21, 22, 23, atau 24 benda saat pemain pertama melakukan langkah ini. Demikian pula, pemain pertama harus meninggalkan 25 benda. Dari ilustrasi tersebut menunjukan bahwa pemain pertama akan memenangkan permainan tidak peduli apa yang dilakukan oleh pemain kedua jika menyisakan benda 25, 20, 15, 10, dan 5 benda untuk pemain kedua. Dengan kata lain bahwa pemain pertama akan memenangkan permainan jika pemain pertama menyisakan benda sebanyak $0 \, mod \, 5$ atau $0 \, mod \, (n+1)$, dimana $n = 4$. Untuk lebih memperjelas ilustrasi di atas, maka disajikan dalam tabel 1 berikut ini.

Tabel 1. Ilustrasi Permainan Nim Maksima 26 Benda dengan Pemain Terakhir yang Mengambil Sisa Benda adalah Pemain yang Menang (A Mulai Dahulu, A sebagai Pemenang)

Pemain A		Pemain B	
Benda diambil	Sisa benda	Benda diambil	Sisa Benda
1	25	4	21
1	20	3	17
2	15	2	13
3	10	2	8
3	5	2	3
3	0		

Ilustrasi II: (A Mulai Dahulu, B sebagai Pemenang).

Misalkan dua orang bermain bergantian mengeluarkan 1, 2, 3 atau 4 benda sekaligus dari tumpukan yang dimulai dengan 25 benda. Orang yang mengambil benda terakhir itu memenangkan permainan. Tunjukkan bahwa pemain kedua bisa memenangkan pertandingan tidak peduli apa yang pemain pertama lakukan.

Solusi:

Untuk membuktikan bahwa pemain kedua selalu bisa memenangkan permainan, maka dalam pembuktian ini dilakukan pembuktian secara *backward*. Pada langkah terakhir pemain kedua bisa menang, jika pengambilan terakhir tersisa 1, 2, 3 atau 4 benda. Pemain pertama akan dipaksa untuk meninggalkan 1, 2, 3 atau 4 benda jika pemain ini harus mengeluarkan benda dari tumpukan yang berisi 5 benda. Akibatnya, langkah terakhir dari pemain kedua harus meninggalkan 5 benda untuk pemain pertama. Hal ini bisa dilakukan bila ada 6, 7, 8 atau 9 benda tersisa, yang terjadi saat pemain pertama harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 10 benda. Akibatnya, pemain kedua harus meninggalkan 10 benda untuk pemain pertama pada langkah kedua. Hal ini juga bisa dilakukan bila ada 11, 12, 13, atau 14 benda tersisa , yang terjadi saat pemain pertama harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 15 benda. Akibatnya, pemain kedua harus meninggalkan 15 benda untuk pemain pertama pada langkah ketiga.Ini berarti ada 16, 17, 18, atau 19 benda saat pemain kedua melakukan langkah ini. Demikian pula, pemain kedua harus meninggalkan

20 benda. Dari ilustrasi tersebut menunjukan bahwa pemain kedua akan memenangkan permainan tidak peduli apa yang dilakukan oleh pemain pertama jika pemain kedua menyisakan benda 20, 15, 10, dan 5 benda untuk pemain pertama. Dengan kata lain bahwa pemain kedua akan memenangkan permainan jika pemain kedua menyisakan benda sebanyak $0\ mod\ 5$ atau $0\ mod\ (n+1)$, dimana $n = 4$. Untuk lebih memperjelas ilustrasi di atas maka disajikan dalam tabel 2 berikut ini.

Tabel 2. Ilustrasi Permainan Nim Maksima 25 Benda dengan Pemain Terakhir yang Mengambil Sisa Benda adalah Pemain yang Menang (A Mulai Dahulu, B sebagai Pemenang)

Pemain A		Pemain B	
Benda diambil	Sisa benda	Benda diambil	Sisa Benda
1	24	4	20
3	17	2	15
1	14	4	10
3	7	2	5
1	4	4	0

Dari ilustrasi 1 dan ilustrasi II tersebut maka untuk memenangkan permainan Nim Maksima yaitu pemain akan selalu menyisakan benda yaitu $0\ mod\ (4+1)$.

3.2 Strategi Kemenangan Nim Satu-Tiga

Pada permainana Nim Satu-Tiga, misalkan pemain memiliki M benda dan banyaknya pengambilan benda adalah sebanyak 1 atau 3. Terdapat dua pemain (namakanlah pemain A dan B) dengan M benda tersedia di atas meja. Setiap pemain pada gilirannya hanya boleh mengambil 1 atau 3 buah benda. Permainan dimenangkan oleh orang yang paling terakhir mengambil sisa benda.

Ilustrasi III: (A Mulai Dahulu, A Sebagai Pemenang).

Misalkan dua orang bermain bergantian mengeluarkan 1 atau 3 benda sekaligus dari tumpukan yang dimulai dengan 15 benda. Orang yang mengambil benda terakhir itu memenangkan permainan. Akan ditunjukkan bahwa pemain pertama bisa memenangkan permainan tidak peduli apa yang pemain kedua lakukan.

Solusi:

Untuk membuktikan bahwa pemain pertama selalu bisa memenangkan permainan, maka dalam pembuktian ini dilakukan pembuktian secara *backward*. Pada langkah terakhir pemain pertama bisa menang, jika pengambilan terakhir tersisa 1 atau 3 benda. Pemain kedua akan dipaksa untuk meninggalkan 1 atau 3 benda jika pemain ini harus mengeluarkan benda dari tumpukan yang berisi 2 atau 4 benda. Akibatnya, langkah terakhir dari pemain pertama harus meninggalkan 2 atau 4 benda untuk pemain kedua. Hal ini bisa dilakukan bila ada 3, 5 atau 7 benda tersisa, yang terjadi saat pemain kedua harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 6 atau 8 benda. Akibatnya, pemain pertama harus meninggalkan 6 atau 8 benda untuk pemain kedua pada langkah kedua. Hal ini bisa dilakukan bila ada 7, 9 atau 11 benda tersisa, yang terjadi saat pemain kedua harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 10 atau 12 benda. Akibatnya, pemain pertama harus meninggalkan 12 atau 10 benda untuk pemain kedua pada langkah ketiga. Ini berarti ada 11 atau 13 benda saat pemain pertama melakukan langkah ini. Demikian pula, pemain pertama harus meninggalkan 14 benda. Dari ilustrasi tersebut menunjukan bahwa pemain pertama akan memenangkan permainan tidak peduli apa yang dilakukan oleh pemain kedua jika menyisakan benda 14, 10, 8, 6,4 dan 2 benda untuk pemain kedua. Dengan kata lain bahwa pemain pertama akan memenangkan permainan jika pemain pertama menyisakan benda sebanyak $0\ mod\ 2$ untuk lawan. Untuk lebih memperjelas ilustrasi di atas maka disajikan dalam tabel 3 dan tabel 4 berikut ini.

Tabel 3. Ilustrasi permainan NIM Satu-Tiga dengan 15 benda dengan pemain terakhir yang mengambil sisa benda adalah pemain yang menang (A Mulai Dahulu, A sebagai Pemenang)

Pemain A		Pemain B	
Benda diambil	Sisa benda	Benda diambil	Sisa Benda
1	14	1	13
3	10	3	7
3	4	3	1
1	0		

Tabel 4. Ilustrasi permainan NIM Satu-Tiga dengan 15 benda dengan pemain terakhir yang mengambil sisa benda adalah pemain yang menang (A Mulai Dahulu, A sebagai

Pemain A		Pemain B	
Benda diambil	Sisa benda	Benda diambil	Sisa Benda
3	12	3	9
1	8	1	7
1	6	1	5
3	2	1	1
1	0		

Ilustrasi IV: (A Mulai Dahulu, B sebagai Pemenang).

Misalkan dua orang bermain bergantian mengeluarkan 1 atau 3 benda sekaligus dari tumpukan yang dimulai dengan 14 benda. Orang yang mengambil benda terakhir itu memenangkan permainan. Akan ditunjukkan bahwa pemain kedua bisa memenangkan permainan tidak peduli apa yang pemain pertama lakukan.

Solusi:

Pada langkah terakhir pemain kedua bisa menang, jika pengambilan terakhir tersisa 1 atau 3 benda. Pemain pertama akan dipaksa untuk meninggalkan 1 atau 3 benda jika pemain ini harus mengeluarkan benda dari tumpukan yang berisi 2 atau 4 benda. Akibatnya, langkah terakhir dari pemain kedua harus meninggalkan 2 atau 4 benda untuk pemain pertama. Hal ini bisa dilakukan bila ada 3, 5 atau 7 benda tersisa, yang terjadi saat pemain pertama harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 6 atau 8 benda. Akibatnya, pemain kedua harus meninggalkan 6 atau 8 benda untuk pemain pertama pada langkah kedua. Ini berarti ada 7, 9 atau 11 benda saat pemain kedua melakukan langkah ini. Demikian pula, pemain kedua harus meninggalkan 12 benda. Dari ilustrasi tersebut menunjukan bahwa pemain pertama akan memenangkan permainan tidak peduli apa yang dilakukan oleh pemain kedua jika menyisakan benda 12, 10, 8, 6, 4 dan 2 benda untuk pemain pertama. Dengan kata lain bahwa pemain kedua akan memenangkan permainan jika pemain kedua menyisakan benda sebanyak $0\ mod\ 2$ untuk lawan. Untuk lebih memperjelas ilustrasi di atas maka disajikan dalam tabel 5 dan tabel 6 berikut ini.

Tabel 5. Ilustrasi permainan NIM Satu-Tiga dengan 14 benda dengan pemain terakhir yang mengambil sisa benda adalah pemain yang menang (A Mulai Dahulu, B sebagai Pemenang)

Pemain A		Pemain B	
Benda diambil	Sisa benda	Benda diambil	Sisa Benda
1	13	1	12
1	11	3	8
1	7	3	4
1	3	3	0

Tabel 6. Ilustrasi permainan NIM Satu-Tiga dengan 14 benda dengan pemain terakhir yang mengambil sisa benda adalah pemain yang menang (A Mulai Dahulu, B sebagai Pemenang)

Pemain A		Pemain B	
Benda diambil	Sisa benda	Benda diambil	Sisa Benda
3	11	1	10
1	9	3	6
1	5	3	2
1	1	1	0

Dari ilustrasi III dan ilustrasi IV tersebut maka untuk memenangkan permainan Nim Satu-Tiga yaitu pemain akan selalu menyisakan benda yaitu $0\ mod\ 2$.

3.3 Strategi Kemenangan Nim Satu-Empat

Pada permainana Nim Satu Empat, misalkan pemain memiliki M benda dan banyaknya pengambilan benda adalah sebanyak 1 atau 4. Terdapat dua pemain (namakanlah pemain A dan B) dengan M benda tersedia di atas meja. Setiap pemain pada gilirannya hanya boleh mengambil 1 atau 4 buah benda. Permainan dimenangkan oleh orang yang paling terakhir mengambil sisa benda.

Ilustrasi V: (A Mulai Dahulu, A Sebagai Pemenang).

Misalkan dua orang bermain bergantian mengeluarkan 1 atau 4 benda sekaligus dari tumpukan yang dimulai dengan 18 benda. Orang yang mengambil benda terakhir itu memenangkan permainan. Akan ditunjukkan bahwa pemain pertama bisa memenangkan permainan tidak peduli apa yang pemain kedua lakukan.

Solusi:

Untuk membuktikan bahwa pemain pertama selalu bisa memenangkan permainan, maka dalam pembuktian ini dilakukan pembuktian secara *backward*. Pada langkah terakhir pemain pertama bisa menang, jika pengambilan terakhir tersisa 1 atau 4 benda. Pemain kedua akan dipaksa untuk meninggalkan 1 atau 4 benda jika pemain ini harus mengeluarkan benda dari tumpukan yang berisi 2 atau 5 benda. Akibatnya, langkah terakhir dari pemain pertama harus meninggalkan 2 atau 5 benda untuk pemain kedua. Hal ini bisa dilakukan bila ada 3, 6 atau 9 benda tersisa, yang terjadi saat pemain kedua harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 7 atau 10 benda. Akibatnya, pemain pertama harus meninggalkan 7 atau 10 benda untuk pemain kedua pada langkah kedua. Hal ini bisa dilakukan bila ada 8, 11, atau 14 benda tersisa, yang terjadi saat pemain kedua harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 12 atau 15 benda. Akibatnya, pemain pertama harus meninggalkan 12 atau 15 benda untuk pemain kedua pada langkah ketiga.
Ini berarti ada 13 atau 16 benda saat pemain pertama melakukan langkah ini. Demikian pula, pemain pertama harus meninggalkan 17 benda. Dari ilustrasi tersebut menunjukan bahwa pemain pertama akan memenangkan permainan tidak peduli apa yang dilakukan oleh pemain kedua jika menyisakan benda 17, 15, 12, 10, 7, 5 dan 2 benda untuk pemain kedua. Dengan kata lain bahwa pemain pertama akan memenangkan permainan jika pemain pertama menyisakan benda sebanyak $0 \bmod 5$ atau $2 \bmod 5$ untuk lawan. Untuk lebih memperjelas ilustrasi di atas maka disajikan dalam tabel 7 dan tabel 8 berikut ini.

Tabel 7. Ilustrasi permainan NIM Satu-Empat dengan 18 benda dengan pemain terakhir yang mengambil sisa benda adalah pemain yang menang (A Mulai Dahulu, A sebagai Pemenang)

Pemain A		Pemain B	
Benda diambil	Sisa benda	Benda diambil	Sisa Benda
1	17	4	13
1	12	4	8
1	7	4	3
1	2	1	1
1	0		

Tabel 8. Ilustrasi permainan NIM Satu-Empat dengan 18 benda dengan pemain terakhir yang mengambil sisa benda adalah pemain yang menang (A Mulai Dahulu, A sebagai Pemenang)

Pemain A		Pemain B	
Benda diambil	Sisa benda	Benda diambil	Sisa Benda
1	17	1	16
1	15	4	11
1	10	1	9
4	5	4	1
1	0		

Ilustrasi VI: (A Mulai Dahulu, B Sebagai Pemenang).

Misalkan dua orang bermain bergantian mengeluarkan 1 atau 4 benda sekaligus dari tumpukan yang dimulai dengan 17 benda. Orang yang mengambil benda terakhir itu memenangkan permainan. Akan ditunjukkan bahwa pemain pertama bisa memenangkan permainan tidak peduli apa yang pemain kedua lakukan.

Solusi:

Pada langkah terakhir pemain kedua bisa menang, jika pengambilan terakhir tersisa 1 atau 4 benda. Pemain pertama akan dipaksa untuk meninggalkan 1 atau 4 benda jika pemain ini harus mengeluarkan benda dari tumpukan yang berisi 2 atau 5 benda. Akibatnya, langkah terakhir dari pemain kedua harus meninggalkan 2 atau 5 benda untuk pemain pertama. Hal ini bisa dilakukan bila ada 3, 6 atau 9 benda tersisa, yang terjadi saat pemain pertama harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 7 atau 10 benda. Akibatnya, pemain kedua harus meninggalkan 7 atau 10 benda untuk pemain pertama pada langkah kedua. Hal ini bisa dilakukan bila ada 8, 11, atau 14 benda tersisa, yang terjadi saat pemain pertama harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 12 atau 15 benda. Akibatnya, pemain kedua harus meninggalkan 12 atau 15 benda untuk pemain pertama pada langkah ketiga. Ini berarti ada 8, 11, atau 14 benda saat pemain pertama melakukan langkah ini. Demikian pula, pemain kedua harus meninggalkan 12 atau 15 benda. Dari ilustrasi tersebut menunjukan bahwa pemain kedua memenangkan permainan tidak peduli apa yang dilakukan oleh pemain pertama. Jika menyisakan benda 15, 12, 10, 7, 5 dan 2 benda untuk pemain pertama. Dengan kata lain bahwa pemain kedua akan memenangkan permainan jika pemain kedua menyisakan benda sebanyak

$0, 2\ mod\ 5$ untuk lawan. Untuk lebih memperjelas ilustrasi di atas, disajikan dalam tabel 9 dan tabel 10 berikut:

Tabel 9. Ilustrasi permainan NIM Satu-Empat dengan 17 benda dengan pemain terakhir yang mengambil sisa benda adalah pemain yang menang (A Mulai Dahulu, B sebagai Pemenang)

Pemain A		Pemain B	
Benda diambil	Sisa benda	Benda diambil	Sisa Benda
1	16	1	15
4	11	4	7
1	6	4	2
1	1	1	0

Tabel 10. Ilustrasi permainan NIM Satu-Empat dengan 17 benda dengan pemain terakhir yang mengambil sisa benda adalah pemain yang menang (A Mulai Dahulu, B sebagai Pemenang)

Pemain A		Pemain B	
Benda diambil	Sisa benda	Benda diambil	Sisa Benda
4	13	1	12
1	11	1	10
1	9	4	5
4	1	1	0

Dari ilustrasi V dan VI tersebut maka untuk memenangkan permainan Nim Satu-Empat yaitu pemain akan selalu menyisakan benda yaitu $\mathbf{0\ mod\ 5}$ atau $\mathbf{2\ mod\ 5}$

3.4 Strategi Kemenangan Nim Satu-Dua-Empat

Pada permainana Nim Satu-Dua-Empat, misalkan pemain memiliki M benda dan banyaknya pengambilan benda adalah sebanyak 1, 2 atau 4. Terdapat dua pemain (namakanlah pemain A dan pemain B) dengan M benda tersedia di atas meja. Setiap pemain pada gilirannya hanya boleh mengambil 1, 2 atau 4 buah benda. Permainan dimenangkan oleh orang yang paling terakhir mengambil sisa benda.

Ilustrasi VII: (A Mulai Dahulu, A Sebagai Pemenang).

Misalkan dua orang bermain bergantian mengeluarkan 1, 2 atau 4 benda sekaligus dari tumpukan yang dimulai dengan 28 benda. Orang yang mengambil benda terakhir itu memenangkan permainan. Akan ditunjukkan bahwa pemain pertama bisa memenangkan permainan tidak peduli apa yang pemain kedua lakukan.

Solusi :

Dengan pembuktian secara *backward* maka pada langkah terakhir pemain pertama bisa menang, jika pengambilan terakhir tersisa 1, 2 atau 4 benda. Pemain kedua akan dipaksa untuk meninggalkan 1, 2 atau 4 benda jika pemain ini harus mengeluarkan benda dari tumpukan yang berisi 3 atau 6 benda. Akibatnya, langkah terakhir dari pemain pertama harus meninggalkan 3 atau 6 benda untuk pemain kedua. Hal ini bisa dilakukan bila ada 5, 7, 8, 10 atau 11 benda tersisa, yang terjadi saat pemain kedua harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 9 atau 12 benda. Akibatnya, pemain pertama harus meninggalkan 9 atau 12 benda untuk pemain kedua pada langkah kedua. Hal ini bisa dilakukan bila ada 11, 13, 14, 16 atau 17 benda tersisa, yang terjadi saat pemain kedua harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 15 atau 18 benda. Akibatnya, pemain pertama harus meninggalkan 15 atau 18 benda untuk pemain kedua pada langkah ketiga dan seterusnya yakni pemain pertama akan memenangkan permainan jika pemain pertama menyisakan benda sebanyak $0\ mod\ 3$ untuk lawan. Untuk lebih memperjelas ilustrasi di atas maka disajikan dalam tabel 11 dan tabel 12 berikut ini.

Tabel 11. Ilustrasi permainan NIM Satu-Dua-Empat dengan 28 benda dengan pemain terakhir yang mengambil sisa benda adalah pemain yang menang (A Mulai Dahulu, A sebagai Pemenang)

Pemain A		Pemain B	
Benda diambil	Sisa benda	Benda diambil	Sisa Benda
1	27	2	25
4	21	4	17
2	15	4	11
2	9	4	5
2	3	2	1
1	0		

Tabel 12. Ilustrasi permainan NIM Satu-Dua-Empat dengan 28 benda dengan pemain terakhir yang mengambil sisa benda adalah pemain yang menang (A Mulai Dahulu, A sebagai Pemenang)

Pemain A		Pemain B	
Benda diambil	Sisa benda	Benda diambil	Sisa Benda
4	24	2	22
4	18	2	16
4	12	4	8
2	6	4	2
2	0		

Ilustrasi VIII: (A Mulai Dahulu, B Sebagai Pemenang).

Misalkan dua orang bermain bergantian mengeluarkan 1, 2 atau 4 benda sekaligus dari tumpukan yang dimulai dengan 27 benda. Orang yang mengambil benda terakhir itu memenangkan permainan. Akan ditunjukkan bahwa pemain kedua bisa memenangkan permainan tidak peduli apa yang pemain pertama lakukan.

Solusi:

Pada langkah terakhir pemain kedua bisa menang, jika pengambilan terakhir tersisa 1, 2 atau 4 benda. Pemain pertama akan dipaksa untuk meninggalkan 1, 2 atau 4 benda jika pemain ini harus mengeluarkan benda dari tumpukan yang berisi 3 atau 6 benda. Akibatnya, langkah terakhir dari pemain kedua harus meninggalkan 3 atau 6 benda untuk pemain pertama. Hal ini bisa dilakukan bila ada 5, 7, 8, 10 atau 11 benda tersisa, yang terjadi saat pemain pertama harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 9 atau 12 benda. Akibatnya, pemain kedua harus meninggalkan 9 atau 12 benda untuk pemain pertaama pada langkah kedua. Hal ini bisa dilakukan bila ada 11, 13, 14, 16 atau 17 benda tersisa, yang terjadi saat pemain pertama harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 15 atau 18 benda. Akibatnya, pemain kedua harus meninggalkan 15 atau 18 benda untuk pemain pertama pada langkah ketiga. Ini berarti ada 17, 19, atau 20 benda saat pemain kedua melakukan langkah ini. Demikian pula, pemain kedua harus meninggalkan 21 benda. Dari ilustrasi tersebut menunjukan bahwa pemain pertama akan memenangkan permainan tidak peduli apa yang dilakukan oleh pemain kedua jika menyisakan benda 24, 21, 18, 15, 12, 9, 6 dan 3 benda untuk pemain pertama. Dengan kata lain bahwa pemain keuda akan memenangkan permainan jika pemain kedua menyisakan benda sebanyak $0 \; mod \; 3$ untuk lawan. Untuk lebih memperjelas ilustrasi di atas maka disajikan dalam tabel 13 dan tabel 14 berikut ini.

Tabel 13. Ilustrasi permainan NIM Satu-Dua-Empat dengan 27 benda dengan pemain terakhir yang mengambil sisa benda adalah pemain yang menang (A Mulai Dahulu, B sebagai Pemenang)

Pemain A		Pemain B	
Benda diambil	Sisa benda	Benda diambil	Sisa Benda
4	23	2	21
2	20	2	18
4	14	2	12
1	11	2	9
2	7	1	6
1	5	2	3
2	1	1	0

Tabel 14. Ilustrasi permainan NIM Satu-Dua-Empat dengan 27 benda dengan pemain terakhir yang mengambil sisa benda adalah pemain yang menang (A Mulai Dahulu, B sebagai Pemenang)

Pemain A		Pemain B	
Benda diambil	Sisa benda	Benda diambil	Sisa Benda
1	25	1	24
4	20	2	18
1	17	2	15
4	11	2	9
2	7	4	3
2	1	1	0

Dari ilustrasi VII dan VIII tersebut maka untuk memenangkan permainan Nim Satu-Empat yaitu pemain akan selalu menyisakan benda yaitu $\mathbf{0 \; mod \; 3}$

3.5 Strategi Kemenangan Nim Satu-Tiga-Empat

Pada permainana Nim Satu-Tiga-Empat, misalkan pemain memiliki M benda dan banyaknya pengambilan benda adalah sebanyak 1, 3 atau 4. Terdapat dua pemain (namakanlah pemain A dan pemain B) dengan M benda tersedia di atas meja. Setiap pemain pada gilirannya hanya boleh mengambil 1, 3 atau 4 buah benda. Permainan dimenangkan oleh orang yang paling terakhir mengambil sisa benda.

Ilustrasi IX: (A Mulai Dahulu, A Sebagai Pemenang).

Misalkan dua orang bermain bergantian mengeluarkan 1, 3 atau 4 benda sekaligus dari tumpukan yang dimulai dengan 29 benda. Orang yang mengambil benda terakhir itu memenangkan permainan. Akan ditunjukkan bahwa pemain pertama bisa memenangkan permainan tidak peduli apa yang pemain kedua lakukan

Solusi :

Melalui sistem pembuktian secara *backward* maka pada langkah terakhir pemain pertama bisa menang, jika pengambilan terakhir tersisa 1, 3 atau 4 benda. Pemain kedua akan dipaksa untuk meninggalkan 1, 3 atau 4 benda jika pemain ini harus mengeluarkan benda dari tumpukan yang berisi 2 atau 7 benda. Akibatnya, langkah terakhir dari pemain pertama harus meninggalkan 2 atau 7 benda untuk pemain kedua. Hal ini bisa dilakukan bila ada 5, 6, 8, 10, 11 atau 13 benda tersisa, yang terjadi saat pemain kedua harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 9 atau 14 benda. Akibatnya, pemain pertama harus meninggalkan 9 atau 14 benda untuk pemain kedua pada langkah kedua. Hal ini bisa dilakukan bila ada 12, 13, 15, 17, 18 atau 20 benda tersisa, yang terjadi saat pemain kedua harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 16 atau 21 benda. Akibatnya, pemain pertama harus meninggalkan 16 atau 21 benda untuk pemain kedua pada langkah ketiga. Ini berarti ada 19, 20, 22, 24, 25 atau 27 benda saat pemain pertama melakukan langkah ini. Demikian pula, pemain pertama harus meninggalkan 23 atau 28 benda. Dari ilustrasi tersebut menunjukan bahwa pemain pertama akan memenangkan permainan tidak peduli apa yang dilakukan oleh pemain kedua. Jika menyisakan benda 28, 23, 21, 16, 14, 9, 7 dan 2 benda untuk pemain kedua. Dengan kata lain bahwa pemain pertama akan memenangkan permainan jika pemain pertama menyisakan benda sebanyak $\mathbf{0 \ mod \ 7}$ **atau** $\mathbf{2 \ mod \ 7}$ untuk lawan. Untuk lebih memperjelas ilustrasi di atas maka disajikan dalam tabel 15 dan tabel 16 berikut ini.

Tabel 15. Ilustrasi permainan NIM Satu-Tiga-Empat dengan 29 benda dengan pemain terakhir yang mengambil sisa benda adalah pemain yang menang (A Mulai Dahulu, A sebagai Pemenang)

Pemain A		Pemain B	
Benda diambil	Sisa benda	Benda diambil	Sisa Benda
1	28	3	25
4	21	1	20
4	16	4	12
3	9	1	8
1	7	1	6
4	2	1	1
1	0		

Tabel 16. Ilustrasi permainan NIM Satu-Tiga-Empat dengan 29 benda dengan pemain terakhir yang mengambil sisa benda adalah pemain yang menang (A Mulai Dahulu, A sebagai Pemenang)

Pemain A		Pemain B	
Benda diambil	Sisa benda	Benda diambil	Sisa Benda
1	28	1	27
4	23	4	19
3	16	1	15
1	14	3	11
4	7	1	6
4	2	1	1
1	0		

Ilustrasi X: (A Mulai Dahulu, B Sebagai Pemenang).

Misalkan dua orang bermain bergantian mengeluarkan 1, 3 atau 4 benda sekaligus dari tumpukan yang dimulai dengan 28 benda. Orang yang mengambil benda terakhir itu memenangkan permainan. Akan ditunjukkan bahwa pemain kedua bisa memenangkan permainan tidak peduli apa yang pemain pertama lakukan

Solusi :

Pada langkah terakhir pemain kedua bisa menang, jika pengambilan terakhir tersisa 1, 3 atau 4 benda. Pemain pertama akan dipaksa untuk meninggalkan 1, 3 atau 4 benda jika pemain ini harus mengeluarkan benda dari tumpukan yang berisi 2 atau 7 benda. Akibatnya, langkah terakhir dari pemain kedua harus meninggalkan 2 atau 7 benda untuk pemain pertama. Hal ini bisa dilakukan bila ada 5, 6, 8, 10, 11 atau 13 benda tersisa, yang terjadi saat pemain pertama harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 9 atau 14 benda. Akibatnya, pemain kedua harus meninggalkan 9 atau 14 benda untuk pemain pertama pada langkah kedua. Hal ini bisa dilakukan bila ada 12, 13, 15, 17, 18 atau 20 benda tersisa, yang terjadi saat pemain pertama harus mengeluarkan benda dari tumpukan dengan 16 atau 21 benda. Akibatnya, pemain kedua harus meninggalkan 16 atau 21 benda untuk pemain pertama pada langkah ketiga dan seterusnya dimana pemain kedua akan memenangkan permainan jika pemain kedua menyisakan benda sebanyak $\mathbf{0\ mod\ 7}$ **atau** $\mathbf{2\ mod\ 7}$ untuk lawan. Untuk lebih memperjelas ilustrasi di atas maka disajikan dalam tabel 17 dan tabel 18 berikut ini.

Tabel 17. Ilustrasi permainan NIM Satu-Tiga-Empat dengan 28 benda dengan pemain terakhir yang mengambil sisa benda adalah pemain yang menang (A Mulai Dahulu, B sebagai Pemenang)

Pemain A		Pemain B	
Benda diambil	Sisa benda	Benda diambil	Sisa Benda
1	27	4	23
4	19	3	16
3	13	4	9
1	8	1	7
1	6	4	2
1	1	1	0

Tabel 18. Ilustrasi permainan NIM Satu-Tiga-Empat dengan 28 benda dengan pemain terakhir yang mengambil sisa benda adalah pemain yang menang (A Mulai Dahulu, B sebagai Pemenang)

Pemain A		Pemain B	
Benda diambil	Sisa benda	Benda diambil	Sisa Benda
4	24	3	21
4	17	3	14
3	11	4	7
1	6	4	2
1	1	1	0

3.6 Strategi Kemenangan Nim Satu-Tiga-Lima-Tujuh

Terdapat dua pemain dengan 16 benda tersedia di atas meja dengan baris pertama memiliki 1 benda, baris kedua memiliki 3 benda, baris ketiga memiliki 5, dan baris keempat memiliki 7 benda. Setiap pemain pada gilirannya dapat mengambil benda pada salah satu baris pertama, kedua, ketiga, ataupun keempat dengan banyaknya pengambilan minimal 1 dan maksimal adalah sisa semua benda yang terdapat pada baris tersebut. Pemain tidak diperbolehkan mengambil benda dalam dua baris yang berbeda pada giliran yang sama. Pemain terakhir yang mengambil sisa benda terakhir adalah pemain yang kalah. Dalam permainan ini, pemain katakan seseorang dalam posisi kalah jika penjumlahan biner bernilai 0, sehingga dalam permainan ini pemain harus meninggalkan penjumlahan biner bernilai 0 kepada lawan. Penjumlahan biner adalah banyaknya bilangan yang tak memiliki pasangan ketika pemain sudah mengubah suatu bilangan menjadi kelipatan 4, 2, dan 1. Pemain harus menghitung terlebih dahulu setiap benda dibaris tersebut dan pemain ubah dalam kelipatan tersebut sehingga dapat pemain lihat penjumlahan biner pada baris-baris tersebut. Pada gambar 1 dapat dilihat cara menyajikan benda pada setiap baris, dimana baris 1, 2, 3, dan 4 merupakan banyak benda yang jika dibuat dalam kelipatan 4, 2, dan 1 akan menghasilkan penjumlahan biner bernilai 0, yang dimana akan digunakan untuk mengalahkan lawan dalam permainan.

Tabel 19. Penjumlahan Biner dengan Mengubah Menjadi Kelipatan 4, 2, dan 1

Baris 1 = 1	= 1 x **1**	=		~~1~~
Baris 2 = 3	= 1 x **2** + 1 x **1**	=	~~2~~	~~1~~
Baris 3 = 5	= 1 x **4** + 1 x **1**	= ~~4~~		~~1~~
Baris 4 = 7	= 1 x **4** + 1 x **2** + 1 x **1**	= ~~4~~	~~2~~	~~1~~
Banyaknya yang tak memiliki pasangan		= 0	0	0

Seperti yang dapat pemain lihat, terdapat dua kelipatan “4”, dua kelipatan “2”, dan empat kelipatan “1” sehingga pemain memiliki sebanyak dua+dua+empat=delapan kelipatan, pemain mempunyai sebanyak genap kelipatan yaitu delapan yang jika dibagi 2 mempunyai sisa bagi 0. Untuk memenangkan permainan Nim ini, pemain harus selalu bergerak meninggalkan musuh penjumlahan biner bernilai 0, yaitu selalu dapat pasangan kelipatan 4, pasangan kelipatan 2, dan pasangan kelipatan 1 dan tidak ada yang tidak berpasangan. Jika tidak, lawan pemain memiliki kedudukan dengan posisi menang dan pemain harus bergantung kepada kecerobohan musuh jika pemain ingin menang. Berikut adalah contoh simulasi cara meninggalkan penjumlahan biner lawan bernilai 0. Misalkan pada awal permainan, lawan mengambil 2 benda pada baris ke 3, sehingga pemain dapat menuliskan konfigurasi benda tersebut menjadi seperti pada Tabel 20.

Tabel 20. Contoh Konfigurasi Benda pada Nim satu-Tiga-Lima-Tujuh

Baris 1 = 1	= 1 x **1**	=		~~1~~
Baris 2 = 3	= 1 x **2** + 1 x **1**	=	~~2~~	~~1~~
Baris 3 = 3	= 1 x **2** + 1 x **1**	=	~~2~~	~~1~~
Baris 4 = 7	= 1 x **4** +1 x **2 +** 1 x **1**	= ~~4~~	~~2~~	~~1~~
Banyaknya yang tak memiliki pasangan		= 1	1	0

Ambil satu kelipatan “4” dan satu kelipatan “2” dengan cara mengambil 6 benda dari baris keempat sehingga pemain meninggalkan lawan dengan konfigurasi 1, 3, 3, 1 yang bagi lawan adalah posisi kalah karena penjumlahan biner lawan sekarang bernilai 0 yaitu selalu dapat pasangan kelipatan 4, pasangan kelipatan 2, dan pasangan kelipatan 1 dan tidak ada yang tidak berpasangan

Tabel 21. Hasil Penjumlahan Biner dari Konfigurasi Gambar [2]

Baris 1 = 1	= 1 x **1**	=		~~1~~
Baris 2 = 3	= 1 x **2** + 1 x **1**	=	~~2~~	~~1~~
Baris 3 = 3	= 1 x **2** + 1 x **1**	=	~~2~~	~~1~~
Baris 4 = 1	= 1 x **1**	=		~~1~~
Banyaknya yang tak memiliki pasangan		=	0	0

Setiap kali pemain meninggalkan lawan dengan konfigurasi penjumlahan biner bernilai 0, maka pemain memiliki kesempatan untuk menang lebih besar.

3.7 Strategi Kemenangan Nim Tiga-Lima-Tujuh-Sembilan

Terdapat dua pemain (namakanlah pemain A dan B) dengan 24 benda tersedia di atas meja dengan baris pertama memiliki 3 benda, baris kedua memiliki 5 benda, baris ketiga memiliki 7, dan baris keempat memiliki 9 benda. Setiap pemain pada gilirannya dapat mengambil benda pada salah satu baris pertama, kedua, ketiga, ataupun keempat dengan banyaknya pengambilan minimal 1 dan maksimal adalah sisa semua benda yang terdapat pada baris tersebut. Pemain tidak diperbolehkan mengambil benda dalam dua baris yang berbeda pada giliran yang sama. Pemain terakhir yang mengambil sisa benda terakhir adalah pemain yang kalah. Dalam permainan ini, pemain katakana seseorang dalam posisi kalah jika penjumlahan biner bernilai 0, sehingga dalam permainan ini pemain harus meninggalkan penjumlahan biner bernilai 0 kepada lawan. Penjumlahan biner adalah banyaknya bilangan yang tak memiliki pasangan ketika pemain sudah mengubah suatu bilangan menjadi kelipatan enam, kelipatan tiga, kelipatan dua dan kelipatan satu. Pemain harus menghitung terlebih dahulu setiap benda dibaris tersebut dan pemain ubah dalam kelipatan 6, 3, 2, dan 1 sehingga dapat pemain lihat penjumlahan biner pada baris-baris tersebut . Pada gambar 1 dapat di lihat cara menyajikan benda pada setiap baris, dimana baris 1, 2, 3, dan 4 merupakan banyak benda yang jika dibuat dalam kelipatan 6, 3, 2, dan 1 akan menghasilkan penjumblahan biner bernilai 0, yang dimana akan digunakan untuk mengalahkan lawan dalam permainan.

Tabel 22. Penjumlahan Biner dengan Mengubah Menjadi Kelipatan 6, 3, 2, dan 1

Baris 1 = 3	= 1 x **2 + 1 x 1**	=		2	1
Baris 2 = 5	= 1 x **3** + 1 x **2**	=	3	2	
Baris 3 = 7	= 1 x **6** + 1 x **1**	= 6			1
Baris 4 = 9	= 1 x **6** + 1 x **3**	= 6	3		
Banyaknya yang tak memiliki pasangan		= 0	0	0	0

Seperti yang dapat pemain lihat, terdapat dua kelipatan “6”, dua kelipatan “3”, dua kelipatan “2” dan dua kelipatan “1” sehingga pemain memiliki sebanyak dua+dua+dua+dua=delapan kelipatan, pemain mempunyai sebanyak genap kelipatan yaitu delapan yang jika dibagi 2 mempunyai sisa bagi 0. Untuk memenangkan permainan Nim ini, pemain harus selalu bergerak meninggalkan musuh penjumlahan biner bernilai 0, yaitu selalu dapat pasangan kelipatan 6, pasangan kelipatan 3, pasangan kelipatan 2 dan pasangan kelipatan 1 dan tidak ada yang tidak berpasangan. Jika tidak, lawan pemain memiliki kedudukan dengan posisi menang dan pemain harus bergantung kepada kecerobohan musuh jika pemain ingin menang.

Berikut adalah contoh simulasi cara meninggalkan penjumlahan biner lawan bernilai 0. Misalkan pada awal permainan, lawan mengambil 2 benda pada baris ke 3, sehingga pemain dapat menuliskan konfigurasi benda tersebut menjadi seperti pada Tabel 24.

Tabel 23. Contoh konfigurasi benda pada Nim-Tiga-Lima-Tujuh-Sembilan

Baris 1 = 3	= 1 x **2 + 1 x 1**	=		2	1
Baris 2 = 5	= 1 x **3** + 1 x **2**	=	3	2	
Baris 3 = 5	= 1 x **3** + 1 x **2**	=	3	2	
Baris 4 = 9	= 1 x **6** + 1 x **3**	= 6	3		
Banyaknya yang tak memiliki pasangan		= 1	1	1	1

Ambil satu kelipatan “6” dengan cara mengambil 6 benda dari baris keempat sehingga pemain meninggalkan lawan dengan konfigurasi 3, 5, 5, 3 yang bagi lawan adalah posisi kalah karena penjumlahan biner lawan sekarang bernilai 0 yaitu selalu dapat pasangan kelipatan 6, pasangan kelipatan 3, pasangan kelipatan 2 dan pasangan kelipatan 1 dan tidak ada yang tidak berpasangan.

Tabel 24. Hasil Penjumlahan Biner

Baris 1 = 3	= 1 x **2 + 1 x 1**	=		2	1
Baris 2 = 5	= 1 x **3** + 1 x **2**	=	3	2	
Baris 3 = 5	= 1 x **3** + 1 x **2**	=	3	2	
Baris 4 = 3	= 1 x 2 + 1x1	=		2	1
Banyaknya yang tak memiliki pasangan		= 0	0	0	0

Setiap kali pemain meninggalkan lawan dengan konfigurasi penjumlahan biner bernilai 0, maka pemain memiliki kesempatan untuk menang lebih besar.

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas, diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Strategi kemenangan untuk permainan Nim Maksima adalah selalu meninggalkan sisa benda yaitu kongruen $0 \ mod \ (n+1)$.
2. Strategi kemenangan untuk permainan Nim Satu-Tiga adalah selalu meninggalkan sisa benda yaitu kongruen $0 \ mod \ 2$.
3. Strategi kemenangan untuk permainan Nim Satu-Empat adalah selalu meninggalkan sisa benda yaitu kongruen $0 \ mod \ 5$ atau $2 \ mod \ 5$
4. Strategi kemenangan untuk permainan Nim Satu-Dua-Empat adalah selalu meninggalkan sisa benda yaitu kongruen $0 \ mod \ 3$
5. Strategi kemenangan untuk permainan Nim Satu-Tiga-Empat adalah selalu meninggalkan sisa benda yaitu kongruen $0 \ mod \ 7$ atau $2 \ mod \ 7$
6. Strategi kemenangan untuk permainan Nim Satu-Tiga-Lima-Tujuh dan Nim Tiga-Lima-Tujuh-Sembilan adalah selalu membuat penjumlahan biner bagi lawan.

Daftar Pustaka

[1] Z. Silbernick and R. Campbell, “A Winning Strategy for The Game of Antonim,” *OAlib Journal*, 2015.

[2] K. H. Rosen, Elementary Number Theori and its application, 6 ed., Addison-Wesley, 2011.

[3] M. Arifin, “Pembuatan Game NIM Menggunakan Alpha-beta Pruning,” EEPIS-ITS, Surabaya, 2010.

[4] D. M. Burton, Elementary Number Theory, Boston: Allyn & Bacon, 1980.

[5] S. Burchan, “ McMurry University,” 2013. [Online]. Available: http://www.mcm.edu/mathdept/Shalisa_Sites_Burchan_2013.pdf. [Accessed 21 Juni 2013].