BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan
December 2021 Vol. 15 No. 4 Page 659–666
P-ISSN: 1978-7227 E-ISSN: 2615-3017
: https://doi.org/10.30598/ barekengvol15iss4pp659-666

MASALAH EIGEN DAN *EIGENMODE* MATRIKS ATAS ALJABAR MIN-PLUS

Eigen Problem and Eigenmode Matrix over Min-Plus Algebra

Eka Widia Rahayu[1*], **Siswanto**[2], **Santoso Budi Wiyono**[3]

[1,2,3] *Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret Jln. Ir. Sutami No 36A Kentingan, Surakarta, 57126, Indonesia*

Corresponding author e-mail: [1*] *ekawidia@student.uns.ac.id*

Abstrak

Masalah eigen dan *eigenmode* adalah komponen penting yang berhubungan dengan matriks persegi. Pada aljabar maks-plus suatu matriks persegi dapat direpresentasikan dalam bentuk graf yang dinamakan graf komunikasi. Graf komunikasi dapat berupa graf *strongly connected* dan graf tidak *strongly connected*. Matriks representasi dari graf *strongly connected* disebut matriks tak tereduksi sedangkan matriks representasi dari graf tidak *strongly connected* disebut matriks tereduksi. Tujuan dari penelitian ini adalah menyusun langkah-langkah untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks tak tereduksi atas aljabar min-plus serta *eigenmode* matriks tereduksi reguler atas aljabar min-plus. Aljabar min-plus memiliki struktur yang isomorpik dengan aljabar maks-plus. Oleh karena itu, masalah eigen dan *eigenmode* matriks atas aljabar min-plus dapat ditentukan berdasarkan teori nilai eigen, vektor eigen dan *eigenmode* matriks atas aljabar maks-plus. Hasil dari penelitian ini diperoleh langkah-langkah untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks tak tereduksi atas aljabar min-plus serta algoritme *eigenmode* matriks tereduksi reguler atas aljabar min-plus.

Kata Kunci : *aljabar min-plus, masalah eigen, eigenmode*

Abstract

Eigen problems and eigenmode are important components related to square matrices. In max-plus algebra, a square matrix can be represented in the form of a graph called a communication graph. The communication graph can be strongly connected graph and a not strongly connected graph. The representation matrix of a strongly connected graph is called an irreducible matrix, while the representation matrix of a graph that is not strongly connected is called a reduced matrix. The purpose of this research is set the steps to determine the eigenvalues and eigenvectors of the irreducible matrix over min-plus algebra and also eigenmode of the regular reduced matrix over min-plus algebra. Min-plus algebra has an ispmorphic structure with max-plus algebra. Therefore, eigen problems and eigenmode matrices over min-plus algebra can be determined based on the theory of eigenvalues, eigenvectors and eigenmode matrices over max-plus algebra. The results of this research obtained steps to determine the eigenvalues and eigenvectors of the irreducible matrix over min-plus algebra and eigenmode algorithm of the regular reduced matrix over min-plus algebra.

Keywords: *min-plus algebra, eigen problem, eigenmode*

Article info:

Submitted: 03rd July 2021 *Accepted: 28th October 2021*

How to cite this article:

E. W. Rahayu, Siswanto, and S. B. Wiyono, "MASALAH EIGEN DAN *EIGENMODE* MATRIKS ATAS ALJABAR MIN-PLUS", *BAREKENG: J. Il. Mat. & Ter.*, vol. 15, no. 04, pp. 659-666, Dec. 2021.

1. PENDAHULUAN

Aljabar maks-plus adalah himpunan $\mathbb{R} \cup \varepsilon$ dengan $\mathbb{R}$ merupakan himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$ yang dilengkapi dengan operasi maksimum ($\oplus$) dan plus ($\otimes$). Aljabar maks-plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{maks} = (\mathbb{R}_{\varepsilon}, \oplus, \otimes)$ merupakan *semifield* idempoten [1]. Operasi-operasi yang terdapat pada aljabar maks-plus dapat diperluas ke dalam himpunan matriks. Himpunan matriks berukuran $m \times n$ yang komponen-komponennya merupakan elemen $\mathbb{R}_{\varepsilon}$ disebut himpunan matriks atas aljabar maks-plus yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{maks}^{m \times n}$.

Masalah nilai eigen, vektor eigen dan *eigenmode* adalah komponen penting yang berhubungan dengan matriks persegi. Matriks persegi adalah matriks yang mempunyai jumlah kolom dan baris sama. Pada aljabar maks-plus suatu matriks persegi dapat direpresentasikan dalam bentuk graf yang dinamakan graf komunikasi. Graf komunikasi dapat berupa graf *strongly connected* dan graf tidak *strongly connected*. Graf *strongly connected* merupakan graf yang setiap *node*-nya dapat dicapai dari setiap *node* yang lain. Matriks representasi dari graf *strongly connected* disebut matriks tak tereduksi sedangkan matriks representasi dari graf tidak *strongly connected* disebut matriks tereduksi.

Penentuan nilai eigen matriks tak tereduksi dengan matriks tereduksi memiliki perbedaan. Nilai eigen dari matriks tak tereduksi merupakan bobot rata-rata maksimum dari semua sirkuit pada graf komunikasi. Namun, tidak semua matriks tereduksi memiliki nilai eigen yang merupakan bobot rata-rata maksimum dari sirkuit yang ada. *Eigenmode* tergeneralisasi merupakan pasangan vektor hasil perumuman dari nilai eigen dan vektor eigen matriks tak tereduksi [2]. Oleh karena itu, permasalahan nilai eigen matriks tereduksi dapat diselesaikan dengan menentukan *eigenmode* tergeneralisasi.

Masalah nilai eigen, vektor eigen dan *eigenmode* matriks atas aljabar maks-plus dapat diaplikasikan pada kehidupan sehari-hari seperti untuk menyelesaikan masalah penjadwalan [3] dan pengaturan sistem antrian [4]. Masalah nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar maks-plus sudah banyak dibahas pada penelitian sebelumnya di antaranya pada penelitian [5], [6], [7], [8], dan [9]. Sementara itu, *eigenmode* matriks atas aljabar maks-plus dibahas pada penelitian [2], [10] dan [11]. Aljabar min-plus memiliki struktur yang isomorpik dengan aljabar maks-plus. Oleh karena itu, nilai eigen, vektor eigen dan *eigenmode* matriks atas aljabar min-plus dapat ditentukan berdasarkan teori nilai eigen, vektor eigen dan *eigenmode* matriks atas aljabar maks-plus. Aljabar min-plus telah dibahas pada penelitian [12] dan [13]. Nascihuddin [14] pada tahun 2017 membahas mengenai algoritme pangkat untuk menentukan masalah eigen matriks atas aljabar min-plus.

Tujuan penelitian ini adalah menyusun langkah-langkah untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks tak tereduksi atas aljabar min-plus serta menentukan *eigenmode* matriks tereduksi reguler atas aljabar min-plus. Manfaat dari penelitian ini yaitu untuk menambah pengetahuan mengenai aljabar min-plus khususnya masalah nilai eigen, vektor eigen dan *eigenmode*.

2. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan yaitu studi literatur dengan menggunakan referensi berupa jurnal, artikel, dan buku. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah mempelajari materi yang menjadi dasar dalam penelitian ini yang meliputi teori graf, masalah eigen dan *eigenmode*, algoritme *eigenmode* matriks atas aljabar maks-plus, aljabar min-plus dan matriks atas aljabar min-plus, menyusun langkah-langkah untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks tak tereduksi atas aljabar min-plus. Setelah itu, memformulasikan persamaan rekurensi nonhomogen dalam aljabar min-plus berdasarkan persamaan rekurensi nonhomogen dalam aljabar maks-plus. Kemudian menentukan algoritme *eigenmode* matriks tereduksi reguler atas aljabar min-plus.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Tak Tereduksi atas Aljabar Min-Plus

Diberikan definisi nilai eigen dan vektor eigen yang diambil dari [12].

Definisi 1. *Diberikan* $A \in \mathbb{R}_{min}^{n \times n}$. *Jika* $\lambda \in \mathbb{R}_{min}$ *dan* $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}_{min}$ *sedemikian sehingga* $\boldsymbol{v}$ *mempunyai sedikitnya satu entri berhingga dan*

$$A \otimes \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \boldsymbol{v}$$

maka λ merupakan nilai eigen dari A dan $\boldsymbol{v}$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian .

Definisi 2. *Diberikan $C(A)$ yang menyatakan himpunan dari semua sirkuit dari graf $G(A)$.*

$$\lambda = min_{p\in C(A)} \frac{\parallel p \parallel_w}{\parallel p \parallel_l}$$

Definisi 3. *Diberikan $A \in \mathbb{R}_{min}^{n\times n}$ dan λ didefinisikan seperti pada Definisi 1, maka didefinisikan matriks A_λ sebagai berikut*

$$A_\lambda = a_{ij} - \lambda,$$

matriks A_λ^+ didefinisikan sebagai

$$A_\lambda^+ = A_\lambda \oplus' A_\lambda^{\otimes 2} \oplus' \dots \oplus' A_\lambda^{\otimes n},$$

A_λ^* didefinisikan sebagai

$$A_\lambda^* = E \oplus' A_\lambda^+.$$

Berdasarkan teori nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar maks-plus, nilai eigen λ dari matriks tak tereduksi $A \in \mathbb{R}_{min}^{n\times n}$ dan vektor eigen yang bersesuaian ditentukan melalui langkah-langkah sebagai berikut.

1. Menentukan graf komunikasi dari matriks $A \in \mathbb{R}_{min}^{n\times n}$,
2. menentukan nilai eigen, dalam menentukan nilai eigen λ dapat dilakukan berdasarkan Definisi 2,
3. memperhatikan sirkuit (c,c) untuk suatu $1 \le c \le n$ yang merupakan sirkuit kritis dari $G(A)$,
4. menentukan A_λ dan matriks A_λ^*,
5. vektor eigen dari A adalah kolom c dari matriks A_λ^*.

3.2. *Eigenmode*

Matriks yang dibahas adalah matriks reguler yaitu matriks yang disetiap baris setidaknya memuat satu entri tidak sama dengan ε. Berikut diberikan definisi mengenai *eigenmode* matriks tereduksi reguler yang diambil dari [15].

Definisi 4. *Suatu pasangan vektor $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ disebut eigenmode tergeneralisasi dari matriks reguler A jika untuk setiap $k \ge 0$ memenuhi*

$$A \otimes (k \times \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{v}) = (k+1) \times \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{v}.$$

Eigenmode tergeneralisasi disebut juga dengan *eigenmode* merupakan perluasan dari nilai eigen dan vektor eigen matriks tak tereduksi.

3.3. Persamaan Rekurensi Nonhomogen

Untuk mengetahui nilai eigen dari matriks tereduksi atas aljabar min-plus, terlebih dahulu dipelajari perluasan dari relasi rekurensi $x(k+1) = A \otimes x(k)$ dengan A adalah matriks tak tereduksi. Oleh karena itu berdasarkan teori relasi rekurensi nonhomogen matriks atas aljabar maks-plus, diperoleh teorema berikut.

Teorema 1. *Diperhatikan relasi rekurensi nonhomogen sebagai berikut*

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A \otimes \boldsymbol{x}(k) \oplus' \oplus_{j=1}^{\prime m} B_j \otimes \boldsymbol{u}_j(k), \tag{1}$$

dengan $A \in \mathbb{R}_{min}^{n\times n}$ merupakan matriks tak tereduksi yang mempunyai nilai eigen λ atau $A \in \mathbb{R}_{min}$ dimana $A = \varepsilon$ dengan $\lambda = \varepsilon$, $B_j \in \mathbb{R}_{min}^{n\times m_j}$ dimana $j \in m$ dengan $\underline{m_j} \ge 1$ memenuhi $B_j \ne \mathcal{E}$, sedangkan $\boldsymbol{u}_j(k) \in \mathbb{R}_{min}^{m_j}$ memenuhi $\boldsymbol{u}_j(k) = \tau_j^k \otimes \boldsymbol{w}_j(k)$, $k \ge 0$ dengan $\boldsymbol{w}_j \in \mathbb{R}_{min}^{m_j}$ skalar $\tau_j \in \mathbb{R}$, ditunjukkan $\tau = \oplus'_{j\in \underline{m}} \tau_j$ maka terdapat bilangan bulat $K \ge 0$ dan vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga barisan $\boldsymbol{x}(k) = \mu^{\otimes k} \otimes \boldsymbol{v}$, dengan $\mu = \lambda \oplus' \tau$ memenuhi persamaan rekurensi (1) untuk setiap $k \ge K$.

Bukti. Untuk membuktikan hal tersebut, ditentukan untuk dua kasus berbeda, yaitu $\lambda > \tau$ dan $\lambda \leq \tau$.

Kasus $\lambda > \tau$. Ambil $\boldsymbol{v}$ sebagai vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Pengambilan $\boldsymbol{v}$ memenuhi $\boldsymbol{v} \otimes \lambda < \bigoplus_{j=1}^{m}{}' \ B_j \otimes \boldsymbol{w}_j$. Selanjutnya, ambil $\mu = \lambda > \tau_j$ untuk semua $j \in \underline{m}$, sedemikian sehingga untuk semua $k \geq 0$ memenuhi

$$\mu \otimes \boldsymbol{v} \otimes \mu^{\otimes k} = A \otimes \boldsymbol{v} \otimes \mu^{\otimes k} < \bigoplus{}'^{m}_{j=1} B_j \otimes \boldsymbol{w}_j \otimes \mu^{\otimes k} \leq \bigoplus{}'^{m}_{j=1} B_j \otimes \boldsymbol{w}_j \otimes \tau_j^{\otimes k}.$$

dengan kata lain,

$$\boldsymbol{v} \otimes \mu^{\otimes(k+1)} = A \otimes \boldsymbol{v} \otimes \mu^{\otimes k} < \bigoplus{}'^{m}_{j=1} B_j \otimes \boldsymbol{w}_j \otimes \tau_j^{\otimes k}.$$

Oleh karena itu, relasi rekurensi (1) terpenuhi untuk semua $k \geq 0$ dengan $x(k) = \boldsymbol{v} \otimes \mu^{\otimes k}$ dan $\boldsymbol{u_j}(k) = \boldsymbol{w}_j \otimes \tau_j^{\otimes k}$ untuk $j \in \underline{m}$.

Kasus $\lambda \leq \tau$. Misalkan $\tau = \bigoplus{}'_{j \in \underline{m}} \tau_j$ dan nilai minimum diperoleh untuk τ ke-r pertama, yang akan terpenuhi dengan penomoran ulang dari barisan $\boldsymbol{u}_j(k), j \in \underline{m}$. Kemudian ambil vektor $\boldsymbol{v}$ yang memenuhi

$$\boldsymbol{v} = A_\tau \otimes \boldsymbol{v} \oplus' \bigoplus{}'^{r}_{j=1} \left(B_j\right)_\tau \otimes \boldsymbol{w}_j \tag{2}$$

dimana A_τ dan $\left(B_j\right)_\tau, j \in \underline{m}$ didapatkan dari matriks A dan (B_j) dengan mengurangi τ terhadap semua elemen terbatasnya. Karena $\lambda \leq \tau$, maka graf komunikasi dari A_τ hanya memuat sirkuit dengan bobot nonpositif. Oleh karena itu, solusi dari $\boldsymbol{v}$ ada, kemudian karena $(A_\tau)^*$ adalah terbatas ($A_\tau$adalah tak tereduksi) dan $\bigoplus{}'^{r}_{j=1} \left(B_j\right)_\tau \otimes \boldsymbol{w}_j$ memuat setidaknya satu elemen terbatas, maka $\boldsymbol{v}$ terbatas. Namun hal ini berakibat

$$\boldsymbol{v} \otimes \tau = A \otimes \boldsymbol{v} \oplus' \bigoplus{}'^{r}_{j=1} B_j \otimes \boldsymbol{w}_j.$$

Kemudian, dengan mengambil $\mu = \tau = \tau_j, j = 1,2,\ldots,r$, untuk semua $k \geq 0$ yang memenuhi

$$\boldsymbol{v} \otimes \mu^{\otimes(k+1)} = A \otimes \boldsymbol{v} \otimes \mu^{\otimes k} \oplus' \bigoplus{}'^{r}_{j=1} B_j \otimes \boldsymbol{w}_j \otimes \tau_j^{k},$$

akan memenuhi pertidaksamaan

$$\boldsymbol{v} \otimes \mu^{\otimes(k+1)} \geq A \otimes \boldsymbol{v} \otimes \mu^{\otimes k} \oplus' \bigoplus{}'^{m}_{j=1} B_j \otimes \boldsymbol{w}_j \otimes \tau_j^{k}, \tag{3}$$

Namun, karena $\mu > \tau_j$ untuk $j = r+1, r+2, \ldots, m$ terdapat bilangan bulat $K \geq 0$ sedemikian sehingga untuk semua $k \geq K$ memenuhi

$$\boldsymbol{v} \otimes \mu^{\otimes(k+1)} \leq \bigoplus{}'^{m}_{j=r+1} B_j \otimes \boldsymbol{w}_j \otimes \tau_j^{k}$$

sehingga untuk semua $k \geq K$ pertidaksamaan (3) adalah persamaaan. Oleh karena itu, persamaan relasi rekurensi (1) terpenuhi untuk semua $k \geq K$. □

Matriks tereduksi A dapat disajikan ke dalam matriks bentuk normal. Selanjutnya, diambil vektor $\boldsymbol{x}(k)$ yang bersesuaian dengan matriks bentuk normal, yaitu

$$\boldsymbol{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_q(k) \end{pmatrix}.$$

Matriks bentuk normal dari matriks tereduksi A dapat ditunjukkan dalam relasi rekurensi nonhomogen sebagai berikut

$$\boldsymbol{x_i}(k+1) = A_{ii} \otimes \boldsymbol{x}_i(k) \oplus' \bigoplus{}'^{q}_{j=i+1} A_{ij} \otimes x_j(k);\ i \in \underline{q}, k \geq 0. \tag{4}$$

Selanjutnya nilai eigen dan vektor eigen dari A memenuhi Teorema 2.

Teorema 2. *Jika pada relasi rekurensi (4) matriks A_{qq} merupakan matriks tak tereduksi dan untuk $i \in \underline{q-1}$ matriks A_{ii} adalah tak tereduksi atau samadengan matriks $\mathcal{E}'$ maka terdapat skalar $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q$ dan vektor $v_1. v_2, \ldots, v_q$ sedemikian sehingga*

$$\boldsymbol{x}_i(k) = \xi_i^{\otimes k} \otimes v_i, i \in q$$

memenuhi relasi rekurensi nonhomogen (4) untuk semua $k \geq 0$.
Skalar $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q$ ditentukan dengan

$$\xi_i\,(k) = \oplus'_{j \in H_i}\ \xi_j \oplus' \lambda_i,$$

dimana $\mathcal{H}_l = \{j \in \underline{q} : j > i, A_{ij} \neq \mathcal{E}'\}$.

Bukti. Untuk kasus $i = q$, dengan memerhatikan matriks bentuk normal maka relasi rekurensi (4) menjadi

$$\boldsymbol{x}_q(k+1) = A_{qq} \otimes \boldsymbol{x}_q(k). \tag{5}$$

Karena A_{qq} tak tereduksi dan bukan matriks $\mathcal{E}'$, maka terdapat $v \in \mathbb{R}^n_{min}$ dan $\xi \in \mathbb{R}$ sehingga barisan

$$\boldsymbol{x}_q(k) = \xi_q^{\otimes k} \otimes \boldsymbol{v}_q,$$

dengan $\xi_q = \lambda_q$ memenuhi persamaan (5) untuk semua $k \geq 0$.

Dianggap benar untuk suatu $l+1$, dengan $1 < l+1 \leq q$. Sehingga, terdapat vektor $v_1. v_2, \ldots, v_q$ dan skalar $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk $k \geq 0$ barisan

$$\boldsymbol{x}_i(k) = \xi_i^{\otimes k} \otimes v_i, l+1 \leq i \leq q,$$

memenuhi

$$\boldsymbol{x}_i(k+1) = A_{ii} \otimes \boldsymbol{x}_i(k) \oplus' \oplus'^{q}_{j=i+1} A_{ij} \otimes \boldsymbol{x}_j(k), l+1 \leq i \leq q.$$

Kemudian diperhatikan persamaan

$$\boldsymbol{x}_l(k+1) = A_{ll} \otimes \boldsymbol{x}_l(k) \oplus' \oplus'^{q}_{j=i+1} A_{lj} \otimes \boldsymbol{x}_j(k). \tag{6}$$

Matriks A_{ll} adalah matriks tak tereduksi berukuran 1×1 sama dengan ε'. Selanjutnya jika

$$\oplus'^{q}_{j=l+1} A_{lj} \otimes \boldsymbol{x}_j(k) = \oplus'_{j \in \mathcal{H}_l} A_{lj} \otimes \boldsymbol{x}_j(k)$$

dengan $\mathcal{H}_l = \{j \in \underline{q} : j > l, A_{lj} \neq \mathcal{E}'\}$, maka relasi rekurensi (6) dapat disajikan sebagai berikut.

$$\boldsymbol{x}_l(k+1) = A_{ll} \otimes \boldsymbol{x}_l(k) \oplus' \oplus'_{j \in \mathcal{H}_l} A_{lj} \otimes \boldsymbol{x}_j(k). \tag{7}$$

Relasi rekurensi (7) akan terpenuhi dengan Teorema 1. Oleh karena itu, dari Teorema 1 terdapat bilangan bulat $K \geq 0$ dan vektor atau skalar v_l sedemikian sehingga barisan

$$\boldsymbol{x}_l(k) = \xi_l^{\otimes k} \otimes \boldsymbol{v}_l,$$

memenuhi relasi rekurensi (7) untuk semua $k \geq K_l$, dimana

$$\xi_l = \oplus'_{j \in \mathcal{H}_l} \xi_j \oplus' \lambda_l$$

selanjutnya untuk setiap $k \geq 0$ barisan $x_i(k)$, dimana $l \leq i \leq q$ dapat dituliskan ulang dengan

$$\boldsymbol{v}_i = \xi_i^{\otimes K_l} \otimes \boldsymbol{v}_i, l \leq i \leq q$$

sehingga didapatkan barisan baru

$$\boldsymbol{x}_i(k) = \xi_i^{\otimes K_l} \otimes \boldsymbol{v}_i, l \leq i \leq q,$$

yang memenuhi

$$\boldsymbol{x}_i(k+1) = A_{ii} \otimes \boldsymbol{x}_i(k) \oplus' \oplus_{j=i+1}^{\prime q} A_{ij} \otimes \boldsymbol{x}_j(k), l \leq i \leq q.$$

Jadi, berdasarkan hasil tersebut terbukti untuk l, dengan $l \leq i \leq q$. □

3.4. Algoritme *Eigenmode* Matriks Tereduksi Reguler atas Aljabar Min-Plus

Berdasarkan teorema 1 dan teorema 2 dengan memperhatikan teori *eigenmode* matriks atas aljabar maks-plus, diperoleh algoritme *eigenmode* matriks tereduksi reguler atas aljabar min-plus.

1. Diambil $A \in \mathbb{R}_{min}^{n \times n}$ dimana A merupakan matriks tereduksi reguler.
2. Mengubah matriks A ke dalam bentuk matriks blok segitiga atas.
3. Menghitung nilai eigen dan vektor eigen dari A_{qq} dimana A_{qq} merupakan blok matriks terakhir pada diagonal utama matriks blok segitiga atas dari matriks A. Kemudian, diambil $\xi_q = \lambda_q$ dan $i = q$.
4. Menghitung nilai eigen λ_{i-1} dari matriks $A_{(i-1),(i-1)}$.
5. Jika $\lambda_{i-1} < \xi_i$ lanjut ke langkah 6, jika tidak ke langkah 7.
6. Diambil $\xi_{(i-1)} = \lambda_{(i-1)}$ kemudian menghitung vektor $\boldsymbol{v}_{(i-1)}$ melalui persamaan berikut,

   $$\xi_{(i-1)} \otimes \boldsymbol{v}_{(i-1)} = A_{(i-1),(i-1)} \otimes \boldsymbol{v}_{(i-1)} \oplus' \oplus_{j=i}^{\prime q} A_{(i-1),j} \otimes \boldsymbol{v}_j.$$

   Selanjutnya ke langkah 8.
7. Diambil $\xi_{(i-1)} = \lambda_i$ selanjutnya menghitung vektor $v_{(i-1)}$ melalui persamaan berikut

   $$\lambda_i \otimes \boldsymbol{v}_{(i-1)} = A_{(i-1),(i-1)} \otimes \boldsymbol{v}_{(i-1)} \oplus' \oplus_{j=i}^{\prime q} A_{(i-1),j} \otimes \boldsymbol{v}_j.$$

   Selanjutnya ke langkah 8.
8. Jika $i - 1 \neq 1$ kembali ke langkah 4, jika tidak maka selesai.

Jadi, diperoleh *eigenmode* tergeneralisasi dari matriks A yang merupakan pasangan vektor $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{v})$ dengan $\boldsymbol{\eta} = (\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_q)^T$ dan $\boldsymbol{v} = (v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_q)^T$.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan Hasil dan Pembahasan diperoleh langkah-langkah untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks tak tereduksi atas aljabar min-plus serta algoritme *eigenmode* matriks tereduksi reguler atas aljabar min-plus.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Baccelli, F., *et al*, *Synchronization and Linearity*, New York: John Wiley and Sons, 2001.

[2] Konigsberg, Z.R., "A Generalized Eigenmode Algorithm for Reducible Regular Matrices over the Max-Plus Algebra", *International Matemathical Forum*, 4.24. 1157-1171, 2009.

[3] Mursyidah, H. Subiono, "Eigenvalue, Eigenvector, Eigenmode of Reducible Matrix and Its Application", *Journal of AIP Conference Proccedings* 020044: 1-14, 2017.

[4] Wibowo, A., Wijayanti, K. & Veronica, R.B.," Penerapan Aljabar Max-Plus pada Pengaturan Sistem Antrian Traffic light", *Unnes Journal of Mathematics* 7(2): 192-205, 2018.

[5] Farlow, K.G., *Maxplus Algebra*, Master's thesis, Virginia Polytechnic, Institut and State University, Virginia, 2009.
[6] Tam, K.P., *Optimizing and Approximating Eigenvectors in Max Algebra*, A thesis Submitted to the University of Birmingham for The Degree of Doctor of Philosophy (PHD), 2010.
[7] Novrida, R., *.Nilai Eigen dan Vektor Eigen dalam Aljabar Max-Plus*, Tesis Program Pasca Sarjana UI, Depok :UI, 2012.
[8] Musthofa & Bintari, N., Sifat–Sifat Nilai Eigen dan Vektor Eigen atas Aljabar Max Plus, *Jurnal Sains Dasar* 2(1): 25-31, 2013.
[9] Tunisa, K., Wijayanti, K. dan Veronica, R.B., Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks atas Aljabar Max-Plus. *Unnes Journal of Mathematics* 6(2): 189-197, 2017.
[10] Zuliyanto, A., *Algoritma Eigenmode Tergeneralisasi untuk Matriks Terreduksi Reguler di dalam Aljabar Maks-Plus*, Tugas Akhir untuk memperoleh Gelar Sarjana Matematika pada Jurusan Matematika pada Universitas Sebelas Maret Surakarta, 2012.
[11] Fitria, I., *Eigenmode Matriks atas Aljabar Max-Plus*, Tugas Akhir untuk memperoleh Gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika pada Universitas Negeri Semarang, 2019.
[12] Nowak, A. W., *The Tropical Eigen Value-Vector Problem from Algebraic, Graphical, and Computational Perspectives*, A Thesis Submitted to The University of Bates Colleges for the Degree of Doctor of Philosophy (PHD),2014.
[13] Watanabe, S. & Watanabe, Y., Min-Plus Algebra and Network, Research Institute for Mathematical Sciences Kyoto University, 041-054, 2014.
[14] Nasichuddin, M., *Aplikasi Aljabar Min-Plus dalam Menghitung Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Matriks* $n \times n$, Tugas Akhir untuk memperoleh Gelar Sarjana Matematika pada Jurusan Matematika pada Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, 2018.
[15] Subiono, *Aljabar Min-Max Plus dan Penerapannya*, 3th ed., Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya, 2015.