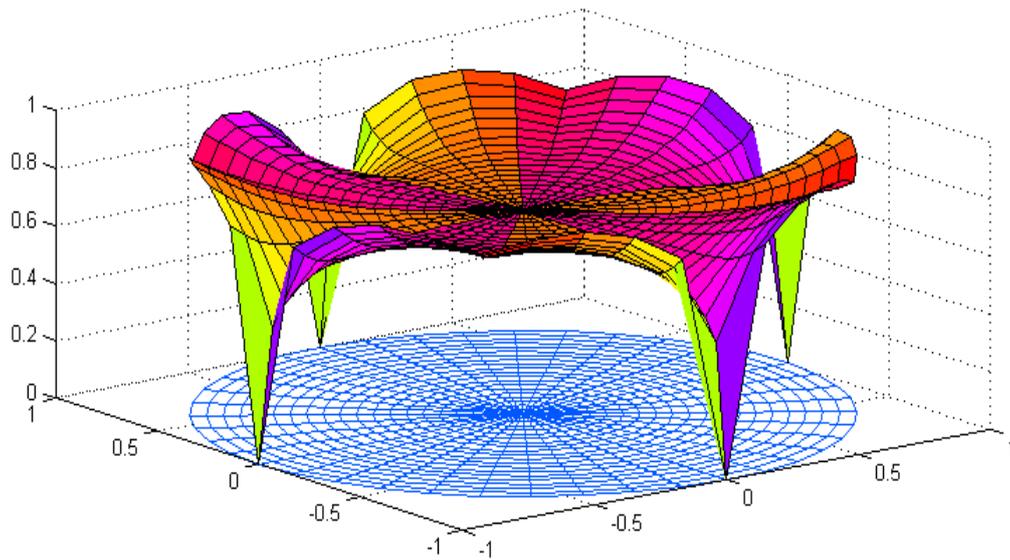


Barekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan

ISSN 1978-7227





jurnal ilmu matematika dan terapan

ISSN 1978-7227

Volume 5 Nomor 1 | Maret 2011

PENANGGUNG JAWAB

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA - Universitas Pattimura

KETUA DEWAN REDAKSI

H. J. Wattimanela, S.Si, M.Si

PENYUNTING AHLI

Prof. Drs. Subanar, Ph.D (UGM Yogyakarta)
Prof. Dr. Edi Baskoro (ITB Bandung)
Dr. Siswadi (IPB Bogor)
Dr. Basuki Widodo, M.Sc (ITS Surabaya)
Prof. Dr. Thomas Pentury, M.Si (Unpatti Ambon)
Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Unpatti Ambon)

PENYUNTING PELAKSANA

F. Y. Rumlawang, S.Si, M.Si
R. W. Matakupan, S.Si, M.Si
M. W. Talakua, S.Pd, M.Si.
E. R. Persulesy, S.Si, M.Si

SEKRETARIAT

H. W. M. Patty, S.Si, M.Sc

PENERBIT (PUBLISHER)

Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Pattimura Ambon

ALAMAT EDITOR (EDITORIAL ADDRESS)

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pattimura
Alamat:
Kampus FMIPA UNPATTI
Jl. Ir. M. Putuhena
Ambon - Maluku



PENELITIAN

PENDEKATAN SISTEM 2D MODEL STREETER-PHELPS UNTUK MODEL POLUSI SUNGAI	Rudy Wolter Matakupan	1–8
MODEL DINAMIK INTERAKSI DUA POPULASI	Francis Y. Rumlawang Trifena Sampeliling	9–13
ANALISIS REGRESI BERGANDA DENGAN METODE STEPWISE PADA DATA HBAT	Ferry Kondo Lembang	15–20
SIFAT-SIFAT SPEKTRAL DAN STRUKTUR KOMBINATORIK PADA SISTEM POSITIF 2D	Rudy Wolter Matakupan	21–27
APLIKASI ALJABAR MAKS-PLUS PADA JALUR TAKSI UNTUK MEMAKSIMUMKAN PENDAPATAN PENGEMUDI TAKSI	Dorteus Lodewyik Rahakbauw	29–32
KARAKTERISASI ELEMEN IDEMPOTEN <i>CENTRAL</i>	Henry W. M. Patty Elvinus Richard Persulesy Rudy Wolter Matakupan	33–39
PENENTUAN JUMLAH MOL UDARA DALAM SELINDER DAN BOLA MENGGUNAKAN HUKUM BOYLE-MARIOTTE	Matheus Souisa	41–45
APROKSIMASI DISTRIBUSI WAKTU HIDUP YANG AKAN DATANG	Thomas Pentury Rudy Wolter Matakupan Lexy Janzen Sinay	47–51



merupakan Jurnal Ilmu Matematika dan Terapannya sebagai suatu wahana informasi ilmiah yang menyajikan artikel (naskah) hasil penelitian meliputi bidang-bidang sebagai berikut: matematika analisis, aljabar, matematika terapan, statistika, pendidikan matematika dan ilmu komputer. Jurnal ini diterbitkan dua kali dalam setahun yaitu pada bulan Maret dan bulan Desember. Artikel atau naskah-naskah di dalam jurnal ini merupakan hasil-hasil penelitian pribadi ataupun kelompok yang belum pernah diterbitkan di jurnal-jurnal atau majalah ilmiah lainnya.

Diterbitkan oleh:

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pattimura
Ambon
2011
Copyright © Jurusan Matematika FMIPA Unpatti 2011

PENDEKATAN SISTEM 2D MODEL STREETER-PHELPS UNTUK MODEL POLUSI SUNGAI
(A 2D Systems Approach to River Pollution Modelling)

RUDY WOLTER MATAKUPAN

Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

e-mail: rwmatakupan@yahoo.com

ABSTRACT

Applications to positive 2D system can follow Steeter-Phelps model to river flow model. by modifying the discrete values. mathematical model structure provided by the river flow at time step t is proportional to the length of rivers and water velocity. The variables that influence is Dissolved oxygen (DO) and Biological oxygen demand (BOD), both these variables are calculated by balance considerations equation with the screening process, the process of reaeration, and the source of BOD established a mathematical model of positive 2D systems

Keywords: *Positive Systems 2D, Steeter-Phelps model*

PENDAHULUAN

Model ruang bagian dapat dijelaskan melalui proses penyaringan (*self-purification*) alami dari suatu sungai. Perlu diingat bahwa hipotesis Biokimia berkaitan dengan model klasik **Streeter-Phelps** (1925), yakni hanya dengan memodifikasi nilai-nilai diskrit kedua ruang dan variabel waktu (*time variables*).

Masalah kualitas sungai yang dicemari oleh bahan pengotor, mengendap kedalam sungai sebagai akibat dari aktivitas manusia. Bahan kotoran dan organisme sungai seperti bakteri, alga dan ikan, saling mempengaruhi dalam suatu sistem yang sangat berbelit dari hubungan nutrisi diantara spesies-spesies. Bahan makanan termasuk dalam bahan yang tercemar, teroksidasi dengan cara demikian dan pada akhirnya tercemar pada substansi abiotik, seperti karbonhidrat, nitrat, dan sebagainya.

Tahap pertama dalam membangun suatu model matematika dari proses di atas, yakni menyelidiki variabel-variabel yang relevan dengan masalah-masalah tersebut. Hanya variabel asli yang muncul dalam model-model penyaringan konsentrasi *larutan oksigen (dissolved oxygen=DO)*, yang mana juga menentukan suatu kriteria penting untuk kualitas air. Disisi lain, hal itu jelas tidak dapat dimulai dengan variabel bagian untuk setiap pencemaran dan semua kehidupan spesies. Pendekatan sederhana dengan mereduksi variabel bahan campuran ke satu kelas dari substansi-substansi oksidasi dan konsentrasi terukur dari reaksi fiksi tersebut, oleh kuantitas oksigen yang diperlukan untuk oksidasi biokimia lengkap ($BOD = Biological\ oxygen\ demand$). Bentuk berbeda *model*

Ekologis, memberikan gambaran yang eksplisit dari organisme, dimana kehidupan organisme diantara larutan oksigen dan bahan oksidasi sangat mengkwatirkan kelangsungan hidup organisme tersebut.

Di sini akan dianggap bahwa seluruh variasi dari konsentrasi BOD dan DO pada sungai merupakan contoh yang representatif daripada longitudinal untuk *model defusi* yang tidak dibahas di sini.

TINJAUAN PUSTAKA

Sistem linear diskrit 2D dalam bentuk pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Italy, Ettore Fornasini dan Giovanni Marchesini (1978) dengan artikelnya *State-Space Realization Theory of Two-Dimensional Filters*. Semenjak itu berbagai tulisan termuat di berbagai jurnal mengenai model matematik seperti pada tahun 1991, Ettore Fornasini kembali menulis tentang *A 2D systems approach to river pollution modelling*. Suatu karya yang fenomenal tentang aplikasi sistem positif 2D. Dengan berbagai pustaka, penulis menguraikan tentang salah satu aplikasi model sistem 2D ini.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Struktur Model

Tahap pertama untuk membangun suatu model 2D adalah membagi sungai kedalam *jangkauan sederhana* dengan panjang Δl . Di saat tahap Δt dan jangkauan

seederhana Δl bergantung pada kecepatan aliran air v , ditulis

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{v}$$

sedemikian hingga elemen-elemen air berpusat di l pada saat t , sehingga pada saat $t + \Delta t$ akan berpusat di $l + \Delta l$.

Misalkan $\beta(t, l)$ dan $\delta(t, l)$ dianggap berturut-turut sebagai konsentrasi BOD dan defisit DO (untuk tingkat kejenuhan), yang terdapat pada jangkauan sederhana sungai, berpusat di l saat t . Nilai-nilai BOD dan DO pada $(t + \Delta t, l + \Delta l)$, dihitung dengan suatu persamaan stabil (*balance equation*) (Ettore Fornasini, 1996)

$$\beta((h+1)\Delta t, (k+1)\Delta l)$$

$$= (1 - a_1\Delta t) [\beta(h\Delta t, k\Delta l) + M \text{in}_\beta(h\Delta t, k\Delta l)]$$

dengan mempertimbangkan beberapa hal berikut :

- Proses penyaringan oleh karena degradasi penyaluran bahan pengotor alam oleh bakteri. Dianggap konsentrasi BOD menurun dengan nilai sama dengan $a_1\beta(t, l)\Delta t$, sedangkan defisit DO meningkat, dimana a_1 = koefisien *reoxxygenation*.
- Proses *reaeration*, mengambil ruang pada air/atmofir. Hipotesa dengan menganggap kekurangan DO direduksi dari suatu nilai yang diberikan oleh $a_2\delta(t, l)\Delta t$, dimana a_2 = koefisien *reaeration*.
- Sumber BOD (pengaruh runoff lokal, dan lain-lain) dan kemungkinan tumbuhan *reoxxygenation* masing-masing dengan $\beta(.,.)$ dan dengan $\delta(.,.)$.

Di sini pembahasan didefinisikan untuk masukan BOD dan DO, tidak meliputi variasi pada kecepatan aliran sungai. Defusi dan penyebaran (*dispersion*) longitudinal tidak diambil kedalam perhitungan nilai-nilai variabel pada titik $(h\Delta t, k\Delta l)$ dari daerah diskrit

$$\{(h\Delta t, k\Delta l) \mid (h, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}.$$

Sekarang misalkan,

$$x(h, k) \equiv \begin{bmatrix} \beta(h\Delta t, k\Delta l) \\ \delta(h\Delta t, k\Delta l) \end{bmatrix}, \quad u(h, k) \equiv \begin{bmatrix} u_\beta(h, k) \\ u_\delta(h, k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{in}_\beta(h\Delta t, k\Delta l) \\ \text{in}_\delta(h\Delta t, k\Delta l) \end{bmatrix},$$

dapat ditulis lagi sebagai suatu model orde kedua 2D,

$$x(h+1, k+1)$$

$$= \begin{bmatrix} (1 - a_1\Delta t)[\beta(h\Delta t, k\Delta l) + M \text{in}_\beta(h\Delta t, k\Delta l)] \\ a_1\Delta t\beta(h\Delta t, k\Delta l) + (1 - a_2\Delta t)[\delta(h\Delta t, k\Delta l) - N \text{in}_\delta(h\Delta t, k\Delta l)] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 - a_1\Delta t)\beta(h\Delta t, k\Delta l) \\ a_1\Delta t\beta(h\Delta t, k\Delta l) + (1 - a_2\Delta t)\delta(h\Delta t, k\Delta l) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} (1 - a_1\Delta t)M \text{in}_\beta(h\Delta t, k\Delta l) \\ -(1 - a_2\Delta t)N \text{in}_\delta(h\Delta t, k\Delta l) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - a_1\Delta t & 0 \\ a_1\Delta t & 1 - a_2\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(h\Delta t, k\Delta l) \\ \delta(h\Delta t, k\Delta l) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} (1 - a_1\Delta t)M & 0 \\ 0 & -(1 - a_2\Delta t)N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{in}_\beta(h\Delta t, k\Delta l) \\ \text{in}_\delta(h\Delta t, k\Delta l) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - a_1\Delta t & 0 \\ a_1\Delta t & 1 - a_2\Delta t \end{bmatrix} x(h, k) + u(h, k)$$

$$+ \begin{bmatrix} (1 - a_1\Delta t)M & 0 \\ 0 & -(1 - a_2\Delta t)N \end{bmatrix}$$

$$= A_0 x(h, k) + B_0 u(h, k) \quad (1)$$

Model 2D di atas dapat lebih dulu sebagai penjabaran dari bentuk sistem 1D tak-hingga, setiap bentuk akan diasosiasikan dengan suatu diagonal berbeda dari daerah diskrit. Volume sederhana dari air pada saat 0 yaitu pada posisi $k\Delta l$, merupakan karakterisasi oleh bagian

$$\xi(0) \equiv \begin{bmatrix} \beta(0, k\Delta l) \\ \delta(0, k\Delta l) \end{bmatrix} = x(0, k)$$

Pada saat $i\Delta t$, volume air sepanjang sungai adalah $(k+i)\Delta l$. Kejadian yang berkorespondensi dengan hal tersebut ditulis sebagai

$$\xi(i) \equiv \begin{bmatrix} \beta(i\Delta t, (k+i)\Delta l) \\ \delta(i\Delta t, (k+i)\Delta l) \end{bmatrix} = x(i, k+i)$$

dan tenaga masukan (*forcing input*) adalah

$$\eta(i) \equiv \begin{bmatrix} u_\beta(i, k+i) \\ u_\delta(i, k+i) \end{bmatrix} = u(i, k+i).$$

Konsentrasi BOD dan defisit (kekurangan) DO dilihat sebagai sesuatu yang harus ditinjau, bahwa sepanjang gerakan dengan volume sederhana air merupakan model sistem 1D mengikuti bentuk :

$$\xi(i+1) = x(i+1, (k+i)+1) = A_0 \xi(i) + B_0 u(i, k+i)$$

$$= A_0 \xi(i) + B_0 \eta(i) \quad (2)$$

Jika model orde pertama 2D yang dipakai, model tersebut memenuhi syarat untuk diperluas ke dimensi ruang bagian. Hal itu terlihat dengan mudah, karena bantuan pesan impuls (*impulse response*) suatu sistem 2D mengenai dimensi satu, yang mana orthant positif atau satu koordinat dikurangi dimana pesan impuls BOD dan DO ditunjukkan dengan bantuan suatu diagonal. Oleh karena itu dua komponen diperlukan pada vektor bagian lokal untuk menyajikan tingkah laku dinamika dari satu variabel tunggal.

Mengingat pengembangan BOD, misalkan

$$x_\beta(h, k) \equiv \begin{bmatrix} \beta(h\Delta t, k\Delta l) \\ \beta(h\Delta t, (k+1)\Delta l) \end{bmatrix} \quad (3)$$

adalah vektor bagian lokal pada (h, k) . Dengan persamaan stabil didapat

$$x_\beta(h+1, k+1) = \begin{bmatrix} \beta((h+1)\Delta t, (k+1)\Delta l) \\ \beta((h+1)\Delta t, (k+2)\Delta l) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} (1-a_1\Delta t) \left[\beta(h\Delta t, k\Delta t) + M \operatorname{in}_\beta(h\Delta t, k\Delta t) \right] \\ (1-a_1\Delta t) \left[\beta(h\Delta t, (k+1)\Delta t) + M \operatorname{in}_\beta(h\Delta t, (k+1)\Delta t) \right] \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ (1-a_1\Delta t) \beta(h\Delta t, (k+1)\Delta t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-a_1\Delta t) \beta(h\Delta t, k\Delta t) \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} (1-a_1\Delta t) M \operatorname{in}_\beta(h\Delta t, k\Delta t) \\ (1-a_1\Delta t) M \operatorname{in}_\beta(h\Delta t, (k+1)\Delta t) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1-a_1\Delta t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(h\Delta t, (k+1)\Delta t) \\ \beta(h\Delta t, (k+2)\Delta t) \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta((h+1)\Delta t, k\Delta t) \\ \beta((h+1)\Delta t, (k+1)\Delta t) \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ (1-a_1\Delta t) M \end{bmatrix} \operatorname{in}_\beta(h\Delta t, k\Delta t) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1-a_1\Delta t & 0 \end{bmatrix} x_\beta(h, k+1) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_\beta(h+1, k) \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ (1-a_1\Delta t) M \end{bmatrix} u_\beta(h, k) \\
 &= A_1 x_\beta(h, k+1) + A_2 x_\beta(h+1, k) + B u_\beta(h, k) \tag{4}
 \end{aligned}$$

dimana suatu orde kedua penunda muncul pada bagian masukan. Kemudian dianggap

$$x_\delta(h, k) \equiv \begin{bmatrix} \delta(h\Delta t, k\Delta t) \\ \delta(h\Delta t, (k+1)\Delta t) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 x_\delta(h+1, k+1) &= \begin{bmatrix} \delta((h+1)\Delta t, (k+1)\Delta t) \\ \delta((h+1)\Delta t, (k+2)\Delta t) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1\Delta t \beta(h\Delta t, k\Delta t) + (1-a_2\Delta t) \left[\delta(h\Delta t, k\Delta t) - N \operatorname{in}_\delta(h\Delta t, k\Delta t) \right] \\ a_1\Delta t \beta(h\Delta t, (k+1)\Delta t) + (1-a_2\Delta t) \left[\delta(h\Delta t, (k+1)\Delta t) - N \operatorname{in}_\delta(h\Delta t, (k+1)\Delta t) \right] \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ (1-a_2\Delta t) \delta(h\Delta t, (k+1)\Delta t) \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} (1-a_2\Delta t) \delta(h\Delta t, k\Delta t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_1\Delta t \beta(h\Delta t, (k+1)\Delta t) \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} a_1\Delta t \beta(h\Delta t, k\Delta t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -N(1-a_2\Delta t) \operatorname{in}_\delta(h\Delta t, (k+1)\Delta t) \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} -N(1-a_2\Delta t) \operatorname{in}_\delta(h\Delta t, k\Delta t) \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1-a_2\Delta t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(h\Delta t, (k+1)\Delta t) \\ \delta(h\Delta t, (k+2)\Delta t) \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta((h+1)\Delta t, k\Delta t) \\ \delta((h+1)\Delta t, (k+1)\Delta t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_1\Delta t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(h\Delta t, (k+1)\Delta t) \\ \beta(h\Delta t, (k+2)\Delta t) \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ -N(1-a_2\Delta t) \end{bmatrix} \operatorname{in}_\delta(h\Delta t, k\Delta t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1-a_2\Delta t & 0 \end{bmatrix} x_\delta(h, k+1) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_\delta(h+1, k) \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_1\Delta t & 0 \end{bmatrix} x_\beta(h, k+1) + \begin{bmatrix} 0 \\ -N(1-a_2\Delta t) \end{bmatrix} u_\delta(h, k) \\
 &= A_1 x_\delta(h, k+1) + A_2 x_\delta(h+1, k) \\
 &\quad + A_\beta x_\beta(h, k+1) + B_\delta u_\delta(h, k) \tag{6}
 \end{aligned}$$

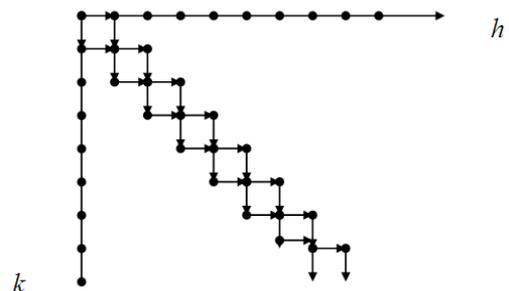
Berdasarkan (4) dan (6) diperoleh model sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_\beta(h+1, k+1) \\ x_\delta(h+1, k+1) \end{bmatrix} &= \overbrace{\begin{bmatrix} A_1\beta & 0 \\ A_\beta\delta & A_1\delta \end{bmatrix}}^{A_1} \begin{bmatrix} x_\beta(h, k+1) \\ x_\delta(h, k+1) \end{bmatrix} \\
 &\quad + \overbrace{\begin{bmatrix} A_2\beta & 0 \\ 0 & A_2\delta \end{bmatrix}}^{A_2} \begin{bmatrix} x_\beta(h+1, k) \\ x_\delta(h+1, k) \end{bmatrix} \\
 &\quad + \overbrace{\begin{bmatrix} B\beta & 0 \\ 0 & B_\delta \end{bmatrix}}^B \begin{bmatrix} u_\beta(h, k) \\ u_\delta(h, k) \end{bmatrix} \tag{7}
 \end{aligned}$$

Kedua matriks A_1 dan A_2 nilpoten, dengan $n = 2$. Maka

$$A_1^i \text{ III } A_2^j = 0 \text{ jika } |i - j| > 1,$$

yang mana menyatakan pengembangan sistem (7), sepanjang garis diagonal diskrit, seperti ditunjukkan pada gambar 1. Jelas $A_1^i \text{ III } A_2^j = 0$ nilpoten untuk $|i - j| > 1$, menurut proposisi (Ettore Fornasini, 1994) pasangan (A_1, A_2) finite memory dan menurut proposisi (Ettore Fornasini, 1994) pasangan (A_1, A_2) separable.



Gambar 1

Sekarang dianggap bahwa pasangan $(h\Delta t, k\Delta t)$ diasosiasikan dengan titik $(a, b) \in Z \times Z$ dengan. Jadi titik-titik himpunan terpisah :

$$C_{\bar{h}} \equiv \{ (a, b) \mid a + b = \bar{h} \}$$

menyajikan lokasi $k\Delta t$ sepanjang bagian sungai pada saat $\bar{h}\Delta t$. Pada bagian lain, titik-titik himpunan

$$\{ (a, b) \mid b = \bar{k} \} = \{ (a, \bar{k}) \}$$

diberikan saat $h\Delta t = (a - \bar{k}) \Delta t$ pada lokasi $\bar{k}\Delta t$.

Misalkan

$$\begin{bmatrix} \beta(h\Delta t, k\Delta l) \\ \delta(h\Delta t, k\Delta l) \end{bmatrix} \equiv x(h-k, k) = x(a, b)$$

$$\begin{bmatrix} in_{\beta}(h\Delta t, k\Delta l) \\ in_{\delta}(h\Delta t, k\Delta l) \end{bmatrix} \equiv u(h-k, k) = u(a, b)$$

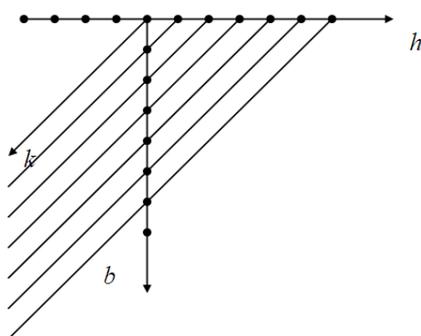
Dengan demikian maka

$$\begin{aligned} x(h-1, k+1) &= \begin{bmatrix} \beta((h-2+1)\Delta t, (k+1)\Delta l) \\ \delta((h-2+1)\Delta t, (k+1)\Delta l) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-a_1\Delta t)[\beta((h-2)\Delta t, k\Delta l) + M in_{\beta}((h-2)\Delta t, k\Delta l)] \\ a_1\Delta t\beta((h-2)\Delta t, k\Delta l) + (1-a_2\Delta t)[\delta((h-2)\Delta t, k\Delta l) - N in_{\delta}((h-2)\Delta t, k\Delta l)] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-a_1\Delta t)\beta((h-2)\Delta t, k\Delta l) \\ a_1\Delta t\beta((h-2)\Delta t, k\Delta l) + (1-a_2\Delta t)\delta((h-2)\Delta t, k\Delta l) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} (1-a_1\Delta t)M in_{\beta}((h-2)\Delta t, k\Delta l) \\ -(1-a_2\Delta t)N in_{\delta}((h-2)\Delta t, k\Delta l) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-a_1\Delta t & 0 \\ a_1\Delta t & 1-a_2\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(h\Delta t, k\Delta l) \\ \delta(h\Delta t, k\Delta l) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} (1-a_1\Delta t)M u(h-k, k) \\ -(1-a_2\Delta t)N u(h-k, k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-a_1\Delta t & 0 \\ a_1\Delta t & 1-a_2\Delta t \end{bmatrix} x(h-k, k) \\ &\quad + \begin{bmatrix} (1-a_1\Delta t)M \\ -(1-a_2\Delta t)N \end{bmatrix} u(h-k, k) \end{aligned}$$

atau ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} x(a, b+1) &= \begin{bmatrix} 1-a_1\Delta t & 0 \\ a_1\Delta t & 1-a_2\Delta t \end{bmatrix} x(a, b) \\ &\quad + \begin{bmatrix} (1-a_1\Delta t)M \\ -(1-a_2\Delta t)N \end{bmatrix} u(a, b) \end{aligned}$$

Dalam gambar 2, garis-garis karakteristik dari sistem pada arah vertikal, $a = \text{konstanta}$



Gambar 2

1. Kondisi Awal

Model (1) adalah penjabaran sistem 1D tak-hingga, disusun sepanjang diagonal $Z \times Z$. Sebagian besar struktur umum dari kondisi-kondisi awal, konsisten dalam tepat satu bagian lokal pada setiap garis diagonal daerah diskrit. Semua himpunan di atas dalam kondisi dapat

dicapai (reachable), oleh karena kondisi itu dapat sebagai gagasan untuk membangun aplikasi sesuai distribusi ruang/waktu dari BOD dan DO.

Penempatan kondisi-kondisi awal dalam model (7), memberikan penyelidikan yang lebih rinci. Pertama-tama komponen bagian lokal menentukan nilai-nilai konsentrasi BOD dan defisit DO pada waktu yang sama dalam dua lokasi ruang berurutan. Selanjutnya kondisi-kondisi awal diberikan pada suatu garis lurus

$$\{(h, \bar{k}) \mid h \in Z\}$$

atau sepanjang batas dari orthant positif. Komponen kedua dan komponen keempat dari $x(h, k)$, mirip dengan komponen pertama dan komponen ketiga dari $x(h, k+1)$.

Lebih jauh aspek struktur dinamik dari sistem itu, bagaimanapun harus diperhatikan karena penetapan bagian-bagian awal adalah penting. Operasi untuk membarui bagian itu dengan tidak merubah nilai-nilai asli dari kondisi awal pada batasan di atas. Pada bagian future, titik-titik bagian itu tidak konsisten untuk menghitung pengembangan bagian bebas oleh nilai-nilai bagian lokal, ditentukan dengan persamaan

$$x(h, k) = A_1^h \text{III}^k A_2 x(0, 0) \tag{8}$$

Dalam kenyataan mungkin dapat merubah nilai-nilai batasnya, sehubungan dengan itu akan dihitung disini deret kuasa formal (formal power series) yang diasosiasikan dengan bagian barisan indeks kembar, yang ditinjau dalam dua kasus.

Kasus pertama, andaikan bahwa kondisi-kondisi awal diberikan pada batas :

$$S = \{(h, 0) \mid h \in Z^+\} \cup \{(0, k) \mid k \in Z^+\} \tag{9}$$

dan nilai-nilai masukan (input) pada

$$\{(h, k) \mid h \geq 0, k \geq 0, h+k > 0\} \tag{10}$$

Oleh karena struktur rekursif, perhitungan $x(\bar{h}, \bar{k})$, $\bar{h} > 0$, $\bar{k} > 0$ hanya meliputi bagian lokal awal

$$\{x(h, 0) \mid 0 < h < \bar{h}\} \cup \{x(0, k) \mid 0 < k < \bar{k}\}$$

dan nilai masukan:

$$\{u(h, k) \mid 0 \leq h < \bar{h}, 0 \leq k < \bar{k}, h+k > 0\}$$

Mengingat deret kuasa formal :

$$X(z_1, z_2) \equiv \sum_{h>0, k>0} x(h, k) z_1^h z_2^k \tag{11}$$

diasosiasikan untuk indeks kembar dari bagian lokal $\{x(h, k)_{h, k>0}\}$ dan misalkan berkorespondensi dengan

$X_{\ell}(z_1, z_2)$ disebabkan oleh pengembangan bebas persamaan (10) pada batasan (9), $X_{\ell}(z_1, z_2)$ dapat dihitung mengikuti

$$\begin{aligned} X_{\ell}(z_1, z_2) &= \sum_{h, k>0} x(h, k) z_1^h z_2^k \\ &= \sum_{h, k>0} \{A_1 x(h-1, k) + A_2 x(h, k-1)\} z_1^h z_2^k \\ &= \sum_{i \geq 0, k > 0} A_1 x(i, k) z_1^{i+1} z_2^k + \sum_{h > 0, j \geq 0} A_2 x(h, j) z_1^h z_2^{j+1} \end{aligned}$$

$$= (I - A_1 z_1 - A_2 z_2)^{-1} \left[z_1 A_1 \sum_{i>0} x(i,0) z_1^i + z_2 A_2 \sum_{j>0} x(0,j) z_2^j \right] \quad (12)$$

pada bagian lain, dengan pengembangan *force* diperoleh

$$X_f = (I - A_1 z_1 - A_2 z_2)^{-1} B z_1 z_2 U(z_1, z_2)$$

dimana

$$U(z_1, z_2) \equiv \sum_{h,k \geq 0} u(h,k) z_1^h z_2^k$$

adalah deret kuasa formal diasosiasikan dengan barisan masukan.

Kasus kedua, dibahas analogis diskrit yang memberikan nilai-nilai pada suatu titik dari sungai (misal pada $l = 0$) untuk setiap t dalam \mathbf{R} . Hal itu berhubungan dalam menentukan model bagian lokal (7) pada garis :

$$\{ (h,0) \mid h \in \mathbf{Z} \},$$

nilai-nilai keluaran (*output*) pada setengah daerah :

$$\{ (h,k) \mid k \geq 0 \},$$

dan dalam perhitungan $x(h,k)$ pada setengah daerah :

$$\{ (h,k) \mid k > 0 \}.$$

Suatu peran yang nyata dari kenilpotenan A_1 dan

A_2 menjamin bahwa suatu bagian lokal tunggal $x(h,k)$ tidak mempengaruhi bagian-bagian lokal pada garis diagonal, yakni tidak memotong himpunan $\{ (h,k), (h-1,k), (h+1,k) \}$ mengikuti persamaan yang menyatakan pentingnya sifat itu, dalam menentukan pengembangan bebas dari sistem tersebut (lihat Gambar 3), maka

$$\begin{aligned} x(h, 1) &= A_1 x(h-1, 1) + A_2 x(h, 0) \\ &= A_1 A_2 x(h-1, 0) + A_2 x(h, 0) \\ x(h, 2) &= A_1 A_2 x(h-1, 1) + A_2 x(h, 1) \\ &= A_1 A_2 A_1 A_2 x(h-2, 0) + A_2 A_1 A_2 x(h-1, 0) \\ &\dots \\ x(h, k) &= \underbrace{A_1 A_2 \dots A_1 A_2}_{2k \text{ faktor}} x(h-k, 0) + \underbrace{A_2 A_1 A_2 \dots A_2}_{2k-1 \text{ faktor}} x(h-k+1, 0) \\ &= (A_1^k \text{ III }^{k-1} A_2) A_2 x(h-k, 0) \\ &\quad + (A_1^{k-1} \text{ III }^{k-1} A_2) A_2 x(h-k+1, 0) \quad (13) \end{aligned}$$

Sebagai akibat bentuk (13), jika menggunakan notasi deret kuasa formal, maka

$$\begin{aligned} X(z_1, z_2) &= \sum_{h>0, k>0} x(h,k) z_1^h z_2^k \\ &= \sum_{k \geq 1, h \in \mathbf{Z}} (A_1^k \text{ III }^{k-1} A_2) A_2 x(h-k, 0) z_1^h z_2^k \\ &\quad + \sum_{k \geq 1, h \in \mathbf{Z}} (A_1^{k-1} \text{ III }^{k-1} A_2) A_2 x(h-k+1, 0) z_1^h z_2^k \\ &= \sum_{k \geq 1} [(A_1^k \text{ III }^{k-1} A_2) z_1^k z_2^k \\ &\quad + (A_1^{k-1} \text{ III }^{k-1} A_2) z_1^{k-1} z_2^k] A_2 \sum_{h \in \mathbf{Z}} x(h, 0) z_1^h \\ &= \left[\sum_{v \geq 0} [A_1^{v+1} \text{ III }^v A_2 z_1 z_2 \right. \end{aligned}$$

$$\left. + A_1^v \text{ III }^v A_2 z_2 \right] A_2 z_1^v z_2^v \sum_{h \in \mathbf{Z}} x(h, 0) z_1^h \quad (14)$$

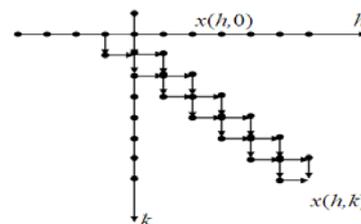
Hal itu membuat anggapan bahwa tingkat BOD dan DO pada bagian sungai ke-0 bergantung pada waktu, yang adalah $x(h, 0) = \bar{x}, \forall h \in \mathbf{Z}$. Bentuk ini dengan jelas diperoleh dari (14) yang merupakan pemecahan yang baik, diberikan oleh

$$\begin{aligned} X_\ell &= \sum_{v \geq 1, h \in \mathbf{Z}} [A_1^{v+1} \text{ III }^v A_2 z_1 z_2 \\ &\quad + A_1^v \text{ III }^v A_2 z_2] A_2 \bar{x} z_1^h z_2^v \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_\ell &= \sum_{v \geq 1, h \in \mathbf{Z}} [A_1^{v+1} \text{ III }^v A_2 z_1^{h+1} z_2^{v+1} \\ &\quad + A_1^v \text{ III }^v A_2 z_1^h z_2^{v+1}] A_2 \bar{x} \end{aligned}$$

Vektor bagian pada bagian sungai ke- k adalah koefisien sembarang monomial $z_1^* z_2^k$ dalam (15), yaitu

$$x(h, k) = [A_1^{k-1} \text{ III }^{k-1} A_2 + A_1^k \text{ III }^{k-1} A_2] A_2 \bar{x}.$$



Gambar 3.

2. Ruang Dependen Dinamik

Dalam bagian ini dianggap bahwa semua parameter sungai tidak bergantung pada absis l . Parameter itu selalu khusus, keanekaragamannya dalam model satu-dimensi berpengaruh kuat dengan sifat-sifat geometri dari model real tiga-dimensi. Dengan mengurangi anggapan pada parameter, dapat mempertinggi beragam kapabilitas untuk fenomena model sungai. Pada bagian akhir nanti akan diandaikan bahwa kecepatan sungai v , seperti koefisien-koefisien a_1 dan a_2 mungkin bergantung pada l .

Tidak sulit memperhitungkan ketergantungan pada l yang mungkin ada. Selain daripada satu kenyataan itu, mengenai variasi-variasi kecepatan a_1 bergantung pada l , mungkin dapat menulis-nya untuk oksidasi bakteri inhomogen (misalnya, variasi yang berkaitan dengan panas atau suatu spesies bakteri yang berlaku lokal pada spesies lain), dan yang bergantung a_2 mungkin yang berhubungan dengan gerakan putaran air terjun, dan sebagainya, yakni induksi suatu variasi pada proses *reaeration*.

Ketika kuantitas interval waktu Δt menerima konstanta, dengan panjang Δl dari *jangkauan sederhana*, akan dirubah agar supaya memenuhi pada semua kondisi

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{v(l)}.$$

Bidang sungai akan dibagi kedalam jangkauan sederhana $\Delta l_k = [l_k, l_{k+1}]$, dengan $\Delta l_k = v(l_k) \Delta t$ (16)

sehingga suatu volume sederhana air pada posisi l_k , pada saat t dan akan pada posisi l_{k+1} pada saat $t + \Delta t$. Kemudian keluarga l_k bergantung pada koefisien-koefisien $a_1(l_k)$ dan $a_2(l_k)$. Dalam keadaan ini persamaan (1) ditulis sebagai $x(h+1, k+1)$

$$= \begin{bmatrix} 1 - a_1(k)\Delta t & 0 \\ a_1(k)\Delta t & 1 - a_2(k)\Delta t \end{bmatrix} x(h, k) + \begin{bmatrix} [1 - a_1(k)\Delta t]M & 0 \\ 0 & -[1 - a_2(k)\Delta t]N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\beta(h, k) \\ u_\delta(h, k) \end{bmatrix} = A_0(k)x(h, k) + B_0(k)u(h, k) \quad (17)$$

dimana vektor bagian lokal didefinisikan sebagai

$$x(h, k) \equiv \begin{bmatrix} \beta(h\Delta t, l_k) \\ \delta(h\Delta t, l_k) \end{bmatrix}$$

sebagai catatan,

$$- a_1(k)\Delta t\beta(h\Delta t, l_k) \text{ dan } - a_2(k)\Delta t\delta(h\Delta t, l_k)$$

menyajikan kosentrasi BOD dan defisit DO, untuk suatu jangkauan sederhana $[l_k, l_{k+1}]$.

Model satu dimensi (2), diasosiasikan dengan (1) maka

$$\xi(i+1) \equiv \begin{bmatrix} \beta((i+1)\Delta t, (k+i+1)) \\ \delta((i+1)\Delta t, (k+i+1)) \end{bmatrix} = x((i+1), k+i+1) = \begin{bmatrix} 1 - a_1(i)\Delta t & 0 \\ a_1(i)\Delta t & 1 - a_2(i)\Delta t \end{bmatrix} x(i, k+i) + \begin{bmatrix} [1 - a_1(i)\Delta t]M & 0 \\ 0 & -[1 - a_2(i)\Delta t]N \end{bmatrix} u(i, k+i) = A_0(i)\xi(i) + B_0(i)\eta(i) \quad (18)$$

Jika diberikan sembarang $h\Delta t$ (waktu), maka $\xi(i)$ adalah vektor bagian pada absis l_i dan pada waktu $(h+i)\Delta t$ akan menghasilkan suatu penetapan vektor bagian $\xi(0)$ pada absis l_0 , dan nilai-nilai masukan $\eta(j) = u((h+j)\Delta t, l_j)$; $j = 0, 1, \dots$.

Pengembangan bebas bagian $\xi(\cdot)$ pada (18), memenuhi

$$\xi(i+1) = \begin{bmatrix} 1 - a_1(i)\Delta t & 0 \\ a_1(i)\Delta t & 1 - a_2(i)\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - a_1(i-1)\Delta t & 0 \\ a_1(i-1)\Delta t & 1 - a_2(i-1)\Delta t \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 - a_1(1)\Delta t & 0 \\ a_1(1)\Delta t & 1 - a_2(1)\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - a_1(0)\Delta t & 0 \\ a_1(0)\Delta t & 1 - a_2(0)\Delta t \end{bmatrix} \xi(0) = A_0(i)A_0(i-1) \dots A_0(1)A_0(0)\xi(0) = \Phi(i)\xi(0) \quad (19)$$

dengan

$$\Phi(i) \equiv \begin{bmatrix} \prod_{v=0}^i [1 - a_1(v)\Delta t] & 0 \\ \sum_{\ell=0}^i \left(\prod_{\mu=\ell+1}^i [1 - a_2(\mu)\Delta t] a_1(\ell)\Delta t \prod_{v=0}^{\ell-1} [1 - a_1(v)\Delta t] \right) \prod_{v=0}^i [1 - a_2(v)\Delta t] \end{bmatrix} \quad (20)$$

Dengan sifat asimtotik (19), akan dapat menarik kesimpulan dari kriteria konvergenan mutlak untuk suatu perkalian tak-hingga (Knopp 1956), sebab pada kenyataan ketaksamaan

$$0 \leq a_1(v)\Delta t < 1, \quad 0 \leq a_2(v)\Delta t < 1$$

merupakan syarat perlu dan cukup untuk

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \prod_{v=0}^i [1 - a_1(v)\Delta t] = 0$$

dan

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \prod_{v=0}^i [1 - a_2(v)\Delta t] = 0 \quad (21)$$

keduanya mengikuti deret berbeda berikut

$$\sum_{v=0}^{+\infty} a_1(v)$$

dan

$$\sum_{v=0}^{+\infty} a_2(v) \quad (22)$$

Selanjutnya sifat divergen dari (22) merupakan suatu kriteria untuk menjamin hal-hal berikut:

- (i). Suatu oksidasi bakteri lengkap dari sembarang muatan injeksi BOD pada bagian l_0 .
- (ii). Suatu *reareation* lengkap dari deoksidasi sungai, jika muatan BOD dianggap nol.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa ketika (22) divergen, terminologi pada kedua hal di atas, dalam matriks transisi $\Phi(i)$ konvergen ke nol untuk $i \rightarrow \infty$. Hal ini menunjukkan bahwa divergensi kedua deret (22), merupakan suatu syarat perlu dan cukup untuk penyaringan sungai.

Harus diingat $A_0(v)$ dapat sebagai gambaran blok diagonal utama kiri berukuran 2×2 dari matriks stokastik berukuran 3×3 .

$$A^{(a)}(v) = \begin{bmatrix} 1 - a_1(v)\Delta t & 0 & 0 \\ a_1(v)\Delta t & 1 - a_2(v)\Delta t & 0 \\ 0 & a_2(v)\Delta t & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Selanjutnya mengikuti langkah-langkah (11) didapat

$$\Phi^{(a)}(v) \equiv \begin{bmatrix} 1 - a_1(i)\Delta t & 0 & 0 \\ a_1(i)\Delta t & 1 - a_2(i)\Delta t & 0 \\ 0 & a_2(i)\Delta t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 - a_1(i-1)\Delta t & 0 & 0 \\ a_1(i-1)\Delta t & 1 - a_2(i-1)\Delta t & 0 \\ 0 & a_2(i-1)\Delta t & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 - a_1(1)\Delta t & 0 & 0 \\ a_1(1)\Delta t & 1 - a_2(1)\Delta t & 0 \\ 0 & a_2(1)\Delta t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 - a_1(0)\Delta t & 0 & 0 \\ a_1(0)\Delta t & 1 - a_2(0)\Delta t & 0 \\ 0 & a_2(0)\Delta t & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 - a_1(0)\Delta t & 0 & 0 \\ a_1(0)\Delta t & 1 - a_2(0)\Delta t & 0 \\ 0 & a_2(0)\Delta t & 1 \end{bmatrix} \\
 &= A^{(a)}(i)A^{(a)}(i-1) \dots A^{(a)}(1)A^{(a)}(0) \\
 &= \begin{bmatrix} \Phi(i) & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{31}^{(a)}(i) & \phi_{32}^{(a)}(i) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(i) & 0 & \vdots & 0 \\ \phi_{21}^{(a)}(i) & \phi_{22}^{(a)}(i) & \vdots & 0 \\ \phi_{31}^{(a)}(i) & \phi_{32}^{(a)}(i) & \vdots & 1 \end{bmatrix} \quad (24)
 \end{aligned}$$

adalah suatu matriks stokastik untuk setiap $i \in \mathbb{Z}^+$, dengan

$$\begin{aligned}
 \phi_{11}(i) &= \prod_{v=0}^i [1 - a_1(v) \Delta t] \\
 \phi_{21}(i) &= \sum_{\ell=0}^i \left(\prod_{\mu=\ell+1}^i [1 - a_2(\mu)\Delta t] a_1(\ell)\Delta t \prod_{v=0}^{\ell-1} [1 - a_1(v)\Delta t] \right) \\
 \phi_{22}(i) &= \prod_{v=0}^i [1 - a_2(v) \Delta t] \\
 \phi_{31}^{(a)}(i) &= \sum_{\ell=0}^i \left(\prod_{\mu=\ell+1}^i [1 - a_2(\mu)\Delta t] a_2(\ell)\Delta t \prod_{v=0}^{\ell-1} [1 - a_1(v)\Delta t] \right)
 \end{aligned}$$

Kemudian dengan menerapkan suatu persamaan rekursif

$$\phi_{31}^{(a)}(i+1) = a_2(i+1)\Delta t \phi_{21}(i) + \phi_{31}^{(a)}(i) \quad (25)$$

mengikuti identitas di atas maka

$$\begin{aligned}
 \phi_{31}^{(a)}(i+1) &= a_2(i+1)\Delta t \phi_{21}(i) + a_2(i)\Delta t \phi_{21}(i-1) + \dots + a_2(1)\Delta t \phi_{21}(0) \\
 &= \sum_{v=1}^{i+1} a_2(v)\Delta t \phi_{21}(v-1) \quad (26)
 \end{aligned}$$

Melihat (18), berarti barisan $\{\phi_{31}^{(a)}\}$ monoton naik. Lagi

pula karakter stokastik $\Phi^{(a)}(v)$ menyatakan

$$\phi_{31}^{(a)}(v) \leq 1, \quad \forall v \in \mathbb{Z}^+.$$

Kejadian menunjukkan barisan di atas konvergen ke suatu limit

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}_{31} &\in [0,1]: \\
 \bar{\phi}_{31} &= \lim_{v \rightarrow +\infty} \phi_{31}^{(a)}(v) \quad (27)
 \end{aligned}$$

sekarang dengan mengambil limit kanan $v \rightarrow +\infty$, maka

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \phi_{11}(v) + \lim_{v \rightarrow +\infty} \phi_{21}(v) + \lim_{v \rightarrow +\infty} \phi_{31}^{(a)}(v) = 1$$

dan mengingat barisan $\{\phi_{11}(v)\}$ konvergen ke 0 dari (11),

maka terlihat barisan $\{\phi_{21}(v)\}$ akan konvergen ke

$$\bar{\phi}_{21} = 1 - \bar{\phi}_{31}.$$

Karena diketahui $\bar{\phi}_{21} = 0$, berarti kontradiksi dengan $\bar{\phi}_{21} > 0$. Maka terdapat suatu bilangan bulat v_0 sehingga

$$\phi_{21}(v) > \frac{\bar{\phi}_{21}}{2}, \quad \forall i \geq v_0$$

dan oleh karena itu dengan (26) maka

$$\phi_{31}^{(a)}(i+1+v_0) \geq \sum_{v=v_0}^{v_0+1} a_2(v+1) \Delta t \phi_{21}(v) \geq \frac{\bar{\phi}_{21}}{2} \Delta t \sum_{v=v_0}^{v_0+1} a_2(v+1)$$

Dengan memperhitungkan deret $\sum_v a_2(v)$ divergen,

maka barisan $\{\phi_{31}^{(a)}(v)\}$ juga akan divergen, yang mana

kontradiksi, karena $\bar{\phi}_{31} > 0$ berhingga. Selanjutnya

$$\bar{\phi}_{21} = 0$$

dan

$$\Phi(i) \rightarrow 0 \text{ untuk } i \rightarrow \infty.$$

KESIMPULAN

Dari pembahasan dapat disimpulkan bahwa:

1. Membangun suatu model 2D adalah membagi sungai kedalam *jangkauan sederhana* dengan panjang Δl . Di saat tahap Δt dan jangkauan sederhana Δl bergantung pada kecepatan aliran air v , ditulis $\Delta t = \Delta l / v$, dengan mempertimbangkan proses penyaringan, proses *reaeration*, dan sumber BOD (pengaruh runoff lokal, dan lain-lain) diperoleh model orde kedua 2D

$$\begin{aligned}
 x^{(h+1, k+1)} &= \begin{bmatrix} (1 - a_1 \Delta t) [\beta(h \Delta t, k \Delta l) + M \text{ in } \beta(h \Delta t, k \Delta l)] \\ a_1 \Delta t \beta(h \Delta t, k \Delta l) + (1 - a_2 \Delta t) [\delta(h \Delta t, k \Delta l) - N \text{ in } \delta(h \Delta t, k \Delta l)] \end{bmatrix} \\
 &= A_0 x(h, k) + B_0 u(h, k)
 \end{aligned}$$

2. Pengembangan BOD, dengan misalkan

$$x_{\beta}(h, k) = \begin{bmatrix} \beta(h \Delta t, k \Delta l) \\ \beta(h \Delta t, (k+1) \Delta l) \end{bmatrix}$$

adalah vektor bagian lokal pada (h, k) . Dengan persamaan stabil didapat

$$\begin{aligned}
 x_{\beta}(h+1, k+1) &= \begin{bmatrix} \beta((h+1)\Delta t, (k+1)\Delta l) \\ \beta((h+1)\Delta t, (k+2)\Delta l) \end{bmatrix} \\
 &= A_{1\beta} x_{\beta}(h, k+1) + A_{2\beta} x_{\beta}(h+1, k) + B_{\beta} u_{\beta}(h, k)
 \end{aligned}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Bose, N.K., 1982, *Applied Multidimensional system Theory*, Van Nostrand Reinhold, New York
- Bisiacco, M., 1985, State and output feedback stabilizability of 2D systems, *IEEE Trans. Circ. Sys.*, vol CAS-32, pp. 1246-54.
- Fornasini, E. and Machesini, G., 1976, State-Space Realization Theory Of Two-Dimensional Filters, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, vol. AC-21, 484-492.
- Fornasini, E. and Machesini, G., 1978, Doubly-Indexed Dynamical systems : State-Space Models and Tructural Properties, *Math. Systems. Theory*, vol. 12, 59-72.
- Fornasini, E., Marchesini, G., and Valcher, M.E., 1994, On The Structure of Finite Memory and Separable Two-Dimensional Systems, *Automatica*, vol. 30, 347-350.

- Fornasini,E., and Valcher,M.E.,1994, Matrix Pairs in Two-Dimensional Systems : an Approach Based on Trace Series an Hankel Matrices, *to appear in SIAM J. Contr.Opt.*
- Fornasini,E., 1991, A 2D systems approach to river pollution modelling, *Multid. Sys. Sign. Process.*, 2, pp.233-65
- Luenberger, D.G., *Introduction to dynamical systems*, J. Wiley & Sons Inc., 1979.
- Motzkin,T.S., and Taussky,O., 1952, Pairs of Matrices With property L(1), *Trans.Amer.Scc.*, vol.73. 108-114.
- Orlob, G.T., 1983, *Mathematical Modeling of Water Quality: Steams, Lakes, dan Reservoirs*, International Institute for Applied Systems Analysis.
- Valcher,M.E., and Fornasini,E., 1994, State Models and Asymptotic Behavior of Two-Dimensional Positive Systems, *to Appear in IMA J. of Appl.Math.*

MODEL DINAMIK INTERAKSI DUA POPULASI
(*Dynamic Model Interaction of Two Population*)

FRANCIS Y. RUMLAWANG¹, TRIFENA SAMPELILING²

¹ Staf Jurusan Matematika, FMIPA, Unpatti

² Alumni Jurusan Matematika, FMIPA Unpatti

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

e-mail: rumlawang@yahoo.com

ABSTRACT

A few phenomena are completely described by a single number. For example, the size of a population of rabbits can be represented using one number, but how to know the rate of population change, we should consider other quantities such as the size of predator populations and the availability of food. This research will discuss a model of the evolution from two populations in a Predator-Prey system of differential equations which one species “eats” another. This model has two dependent variables, where both of functions not hang up of times. A solution of this system will be show in trajectory in phase plane, after we get and know equilibrium points until this model be a balanced solution.

Keywords: *Balanced solution, Equilibrium points, Phase plane, Predator-Prey, Trajectory*

PENDAHULUAN

Bila dua jenis populasi hidup dalam suatu lingkungan yang sama, dan saling berinteraksi dari waktu ke waktu tentu saja akan mempengaruhi keseimbangan lingkungan tersebut. Saling berinteraksi yang dimaksud adalah kedua populasi yang hidup pada lingkungan yang sama tersebut saling mempengaruhi satu dengan yang lainnya.

Tidak ada makhluk hidup yang dapat hidup terisolasi atau hidup tersendiri. Setiap makhluk hidup pasti akan membutuhkan makhluk hidup lainnya. Makhluk hidup di alam merupakan suatu sistem (individu-populasi-komunitas-ekosistem). Setiap spesies makhluk hidup saling berinteraksi antar individu maupun antar populasi (Supeni, 1999). Contohnya interaksi antara rubah dan kelinci, ular dan tikus, dan lain-lain. Seiring dengan interaksi tersebut terdapat rangkaian peristiwa memakan dan dimakan yang menjadikan ekosistem tetap seimbang. Peristiwa ini memberikan ide untuk membuat model matematika, yang dapat dipelajari dengan mudah. Dengan model matematika tersebut, dapat ditentukan perbandingan antara dua spesies agar ekosistem tetap seimbang.

Penelitian ini akan memperkenalkan suatu sistem sederhana yang dimodelkan dengan sistem persamaan

diferensial. Sistem diperoleh berdasarkan rangkaian interaksi dari dua spesies. Berdasarkan model ini dapat diperoleh suatu informasi penting kapan dua spesies tersebut hidup seimbang sebagai ekosistem dan bilamana kondisi awal banyaknya masing-masing spesies diketahui.

Selanjutnya adalah bagaimana memperoleh model yang tepat berdasarkan kajian teori yang memadai dan bagaimana menganalisa model secara matematika.

Tujuan dari penelitian ini adalah Memperlihatkan model dari dua jenis populasi yang saling berinteraksi. Menganalisa model tersebut secara matematika. Menjelaskan hubungan antara kedua populasi tersebut.

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam perkembangannya, model matematika seringkali digunakan sebagai solusi untuk menyelesaikan masalah tertentu. Dalam bukunya (Richard Haberman, 1977), memperkenalkan model dua spesies yang saling berinteraksi. Ia memberikan salah satu contoh termudah dari interaksi yang terjadi saat dua spesies bersaing terhadap sumber makanan yang sama. Contoh interaksi lainnya juga yaitu Mangsa-Pemangsa.

Dalam tulisannya Rumlawang (2010), memperkenalkan bentuk interaksi dari dua populasi Mangsa-

Pemangsa yang telah dimodifikasi yang hidup dalam satu lingkungan dimana interaksi kedua populasi tersebut dimodelkan secara matematis ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa nonlinier.

Model dua spesies Mangsa-Pemangsa jelas saling mempengaruhi secara signifikan. Khususnya jika terdapat berlimpah spesies yang dimakan, maka pertumbuhan populasi pemakan akan cepat oleh karena berlebuhnya makanan, begitu pula sebaliknya. Selanjutnya interaksi kedua spesies tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial. (Waluya, 2006 dan Boyce, 1986).

Dalam persaingan, spesies-spesies yang terlibat akan mengalami beberapa perlakuan. Paling sedikit ada dua spesies yang bersaing dalam satu populasi dimana keduanya bersaing dalam hal apapun. Terkadang dua spesies itu tidak hanya dalam satu populasi, tetapi juga dalam satu ekosistem, yang kemudian akan digambarkan model-model populasi untuk masing-masing spesies dengan satu sistem persamaan. (Rahardi, 2008).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bagian ini akan dibahas dua spesies yang berbeda, satu spesies disebut pemangsa (*Predator*) dan spesies lainnya disebut mangsa (*Prey*). Spesies mangsa mempunyai persediaan makanan yang berlebihan sedangkan spesies pemangsa diberi makanan spesies mangsa. Kajian matematika mengenai ekosistem seperti ini pertama kali diperkenalkan oleh Lotka dan Volterra dalam pertengahan tahun 1920.

Model Mangsa-Pemangsa

Model ini membahas dua spesies yakni pemangsa dan mangsa. Misalkan $x(t)$ dan $y(t)$ masing-masing menunjukkan banyaknya spesies mangsa dan pemangsa pada saat t . Jelas bahwa kedua spesies saling mempengaruhi secara signifikan. Khususnya jika terdapat berlimpah spesies mangsa, maka pertumbuhan populasi pemangsa akan cepat, oleh karena berlebuhnya makanan. Alternatifnya jika pertumbuhan spesies mangsa lambat, maka spesies pemangsa akan banyak yang mati karena kekurangan makanan. Untuk memodelkan interaksi antara kedua spesies, dimulai dengan memperhatikan pemangsa dan mangsa jika tidak ada interaksi. Pertumbuhan spesies mangsa diberikan dengan,

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

dimana $a > 0$ merupakan konstanta pertumbuhan. Solusi dari persamaan diferensial di atas dapat mudah ditemukan, yakni $x(t) = x(0)e^{at}$, sehingga populasinya akan tumbuh terus tanpa batas. Dalam hal ini diasumsikan bahwa persediaan makanan cukup tak terbatas untuk spesies mangsa, sehingga pertumbuhannya tak terbatas yang berarti tidak ada spesies yang mati.

Seperti dalam model pertumbuhan spesies mangsa, dalam hal pertumbuhan spesies pemangsa diberikan dengan,

$$\frac{dy}{dt} = -cy$$

dimana c adalah konstanta penurunan. Alasan mengapa dalam hal ini terjadi penurunan adalah karena pada dasarnya akan mati kelaparan karena tidak ada makanan.

Akan tetapi bila kedua spesies itu berinteraksi dimana interaksi diperhitungkan dengan fakta bahwa pemangsa akan memakan spesies yang dimangsa, maka model matematika yang diungkapkan oleh Lotka dan Volterra menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy \end{aligned} \quad (1)$$

dimana,

x = populasi dari mangsa

y = populasi dari pemangsa

a = laju kelahiran dari populasi mangsa

c = laju kematian dari populasi pemangsa

b dan d adalah koefisien interaksi antara mangsa dan pemangsa

Sistem (1) merupakan sistem otonomus karena bebas dari t .

Populasi pemangsa akan memakan populasi mangsa sehingga beralasan untuk mengandaikan bahwa jumlah yang membunuh besarnya tiap satuan waktu berbanding lurus dengan x dan y yaitu xy . Jadi populasi mangsa akan berkurang, sedangkan populasi pemangsa akan bertambah. Artinya bahwa populasi mangsa akan mengalami penurunan karena spesies pemangsa akan memakannya, sementara populasi pemangsa akan mengalami pertumbuhan karena mempunyai persediaan makanan.

Sistem (1) ini tak linier dan sulit diselesaikan dengan cara analitik untuk menentukan solusi eksplisitnya. Namun demikian dengan teori kualitatif sistem semacam ini dapat dianalisa untuk membuat ramalan tentang kelakuan kedua spesies tersebut.

Titik Tetap

Dengan menyelesaikan sistem:

$$ax - bxy = 0$$

$$-cy + dxy = 0$$

(2)

penentuan titik kritisnya didapat $(0, 0)$ dan $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

Dengan demikian sistem (2) akan mencapai solusi seimbang pada $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ dan $x(t) = \frac{c}{d}$, $y(t) = \frac{a}{b}$. Dalam hal ini solusi seimbang kedua akan dikaji. Secara intuitif dapatlah ditentukan solusi sistem (2), yaitu $x(t) = 0$, $y(t) = y(0)e^{-ct}$ merupakan solusi khusus dengan trayektori sumbu y positif dan $y(t) = 0$, $x(t) = x(0)e^{at}$ merupakan solusi khusus dengan trayektori sumbu x positif. Karena ketunggalan penyelesaian ini, maka setiap penyelesaian sistem (2) yang pada $t = 0$ berawal pada kuadran pertama tidak akan memotong sumbu x dan y , oleh karena itu solusi itu akan tetap berada pada kuadran pertama.

Trayektori

Trayektori sistem (1) diperoleh dari

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cy + dxy}{ax - bxy} = \frac{(-c + dx)y}{(a - by)x}$$

$$\frac{a - by}{y} dy = \frac{-c + dx}{x} dx$$

atau

$$\left(\frac{a}{y} - b\right) dy = \left(-\frac{c}{x} + d\right) dx$$

Integralkan kedua ruas persamaan ini diperoleh penyelesaian umum,

$$\begin{aligned} a \ln y - by &= -c \ln x + dx + k \\ \ln y^a + \ln x^c &= by + dx + k \\ y^a x^c &= e^{by+dx+k} \\ \frac{y^a}{e^{by}} \cdot \frac{x^c}{e^{dx}} &= K \end{aligned} \tag{3}$$

dimana $K = e^k$ dan k merupakan konstanta sembarang. Persamaan (4.3) merupakan persamaan trayektori pada bidang- xy .

Dapat di lihat bahwa bila $K > 0$, trayektori (3) merupakan kurva tertutup, dan karena itu tiap penyelesaian $(x(t), y(t))$ dari (2) dengan nilai awal $(x(0), y(0))$ dalam kuadran pertama merupakan fungsi dari waktu yang periodik. Jika T merupakan periode dari penyelesaian $x(t), y(t)$, yaitu jika $(x(t + T), y(t + T)) = x(t), y(t)$ untuk semua $t \geq 0$, maka nilai rata-rata dari populasi $x(t)$ dan $y(t)$ adalah:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

Untuk menentukan nilai integral ini dapat diturunkan langsung dari sistem (2) tanpa mengetahui solusi eksplisit.

Dalam hal ini

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy \\ \frac{dy/dt}{y} &= -c + dx \end{aligned}$$

Integralkan kedua ruas dari 0 sampai dengan T ,

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{1}{y(t)} dy &= \int_0^T (-c + dx(t)) dt \\ \ln y(T) - \ln y(0) &= -cT + d \int_0^T x(t) dt \end{aligned}$$

Karena $y(T) = 0$ maka,

$$-cT + d \int_0^T x(t) dt = 0$$

atau

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{c}{d}$$

Dengan demikian

$$\bar{x} = \frac{c}{d} \tag{4}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$\bar{y} = \frac{a}{b} \tag{5}$$

Dari persamaan (4) dan (5) dapatlah dibuat ramalan yang menarik bahwa ukuran rata-rata dari dua populasi $x(t)$ dan $y(t)$ yang berinteraksi sesuai dengan model matematika yang digambarkan pada sistem (2) akan tepat mempunyai nilai seimbang pada $x = c/d$ dan $y = a/b$.

Misal populasi mangsa $x(t)$ berkurang dalam jumlah yang sedang, maka populasi mangsa dan pemangsa akan berkurang jumlahnya pada laju, katakanlah $\epsilon x(t)$ dan $\epsilon y(t)$, dimana ϵ adalah laju pengurangan populasi. Sehingga sistem menjadi

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy - \epsilon x$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy - \epsilon y$$

atau

$$\frac{dx}{dt} = (a - \epsilon)x - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = -(c + \epsilon)y + dxy \tag{6}$$

Dengan menerapkan sistem (6) dapat ditentukan bahwa rata-rata populasi mangsa dan pemangsa setelah adanya pengurangan masing-masing adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{c + \epsilon}{d} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{a - \epsilon}{b} \end{aligned}$$

Dengan kata lain rata-rata populasi mangsa akan lebih besar sedikit dari rata-rata sebelum adanya pengurangan sedangkan rata_rata populasi pemangsa sedikit lebih kecil dari rata-rata sebelumnya.

Contoh:

Model yang digunakan adalah:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0,2x - 0,005xy \\ \frac{dy}{dt} &= -0,5y + 0,01xy \end{aligned} \tag{7}$$

dimana $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, semuanya konstanta positif.

Titik kesetimbangan dari sistem (7) diperoleh bila

$$\begin{aligned} 0,2x - 0,005xy &= 0 \\ -0,5y + 0,01xy &= 0 \end{aligned}$$

sehingga sistem (7) akan memiliki titik tetap di (0,0) dan (50,40).

Dengan melakukan pelinearan terhadap sistem (7) yakni melalui ekspansi Taylor disekitar titik tetap, diperoleh matriks Jacobian untuk persamaan tersebut sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} 0,2 - 0,005y & -0,005x \\ 0,01y & -0,5 + 0,01x \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan analisis linearnya diperoleh, bahwa pada:

Titik Tetap (0,0)

$$\text{Matriks Jacobian } J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix}$$

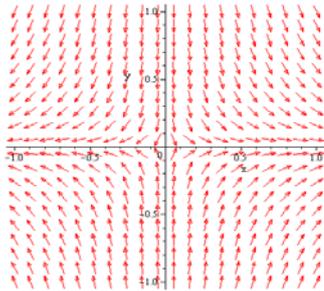
Perilaku dinamik untuk sistem (7) dapat diidentifikasi secara lengkap oleh nilai eigen dari matriks $J_{(0,0)}$, yaitu:

$$\begin{aligned} |\lambda I - J| &= 0 \\ \begin{vmatrix} \lambda - 0,2 & 0 \\ 0 & \lambda + 0,5 \end{vmatrix} &= 0 \\ (\lambda - 0,2)(\lambda + 0,5) &= 0 \end{aligned}$$

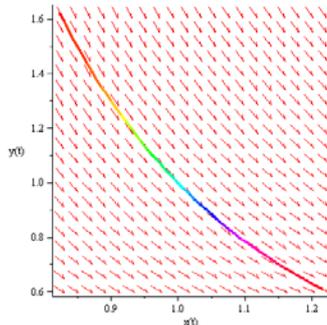
sehingga nilai eigen untuk matriks tersebut yaitu $\lambda_1 = 0,2$ dan $\lambda_2 = -0,5$. Dengan demikian berdasarkan kajian terhadap nilai eigen kestabilan dari sistem adalah $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$, sehingga titik tetap ini bersifat sadel atau tidak stabil.

Trayektori dan titik tetapnya dapat dilihat pada Gambar 3. Selanjutnya Gambar 4 merupakan

penyelesaian dari model dengan nilai awal $x(0) = 1$ dan $y(0) = 1$.



Gambar 3. Trayektori dan titik tetap.



Gambar 4. Penyelesaian model dengan nilai awal $x(0) = 1$ dan $y(0) = 1$.

Jelas bahwa berdasarkan Gambar (3), $t \rightarrow \infty$ dan setiap trayektori akan menuju titik tetap (0,0) dan akan menyinggung sumbu-x dan sumbu-y.

Titik Tetap (50,40)

$$\text{Matriks Jacobian } J_{(50,40)} = \begin{bmatrix} 0 & -0,25 \\ 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Perilaku dinamik untuk sistem (7) dapat diidentifikasi secara lengkap oleh nilai eigen dari matriks $J_{50,40}$, yaitu:

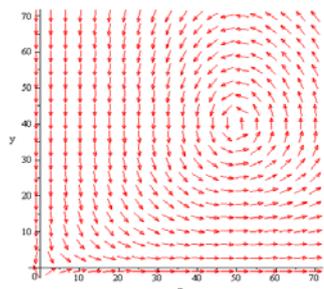
$$\begin{aligned} |\lambda I - J| &= 0 \\ \begin{vmatrix} \lambda & 0,25 \\ -0,4 & \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \lambda^2 - (0,25)(-0,4) &= 0 \end{aligned}$$

Yang akan memberikan nilai eigen,

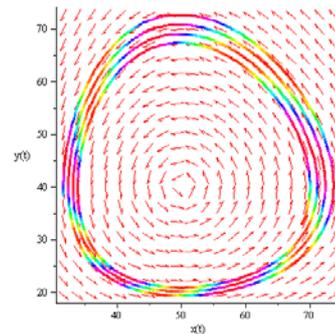
$$\lambda_{\pm} = \pm i\sqrt{0,1}$$

Jadi nilai-nilai eigennya adalah imajiner murni, dan akan memberikan pusat pada titik (50,40). Dengan demikian berdasarkan kajian terhadap nilai eigen kestabilan dari sistem adalah λ_1 dan λ_2 kompleks murni, sehingga titik tetap ini disebut pusat.

Trayektori dan titik tetapnya dapat dilihat pada Gambar 5. Selanjutnya Gambar 6 merupakan penyelesaian dari model dengan nilai awal $x(0) = 70$ dan $y(0) = 40$.

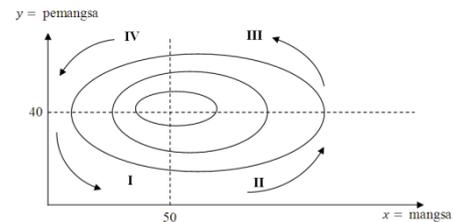


Gambar 5. Trayektori dan titik tetap.



Gambar 6. Penyelesaian model dengan nilai awal $x(0) = 70$ dan $y(0) = 40$.

Berdasarkan Gambar 6 maka trayektorinya tertutup, sehingga hubungan antara pemangsa dan mangsa dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 7. Hubungan antara mangsa dan pemangsa.

- (I) Pemangsa menurun karena kelangkaan mangsa dan mangsa naik akibat kelangkaan pemangsa.
- (II) Kenaikan populasi mangsa sesuai dengan penurunan populasi pemangsa.
- (III) Pemangsa naik sesuai dengan penurunan populasi mangsa.
- (IV) Sebagai akibat kelangkaan mangsa, baik mangsa maupun pemangsa menurun.

KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan dan uraian pada Bab-bab sebelumnya, maka dapatv diambil kesimpulan, antara lain sebagai berikut:

1. Laju populasi untuk dua jenis spesies Predator-Prey yang bersaing dalam satu ekosistem dapat dimodelkan secara matematik ke dalam bentuk persamaan diferensial, sehingga dari persamaan menggambarkan laju kedua populasi tersebut seimbang.
2. Model Predator-Prey $\frac{dx}{dt} = ax - bxy$ dan $\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$ yang diberikan akan mencapai solusi keseimbangan jika $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ dan $x(t) = \frac{c}{d}$, $y(t) = \frac{a}{b}$. Dengan melakukan analisis terhadap bidang fase, pada suatu saat kedua spesies yang bersaing mengalami beberapa keadaan naik turun populasi atau kepadatannya, dan ada saatnya juga kedua spesies yang bersaing itu dalam keadaan seimbang, dimana pupalasi kedua spesies tersebut mengalami penurunan hingga menuju titik keseimbangan.

DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W. E. and R. C. DiPrima, (1986), *Elementary Differential Equation And Boundary Value Problem*, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Haberman, Richard, (1977), *Mathematical Models*, Penerbit Prentice-Hall, New Jersey.
- Rahardi, Rustanto, (2008), *Model Interaksi Dua Spesies*, Penerbit Center of Mathematics Education Development Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah, Malang.
- Rumlawang, F. Y., (2010), *Model Predator-Prey Modifikasi*, Penerbit FMIPA UNPATTI, Ambon.
- Waluyo, S. B., (2006), *Persamaan Diferensial*, Penerbit Graha Ilmu, Yogyakarta.
- <file:///F:/Predator-Prey/hubungan-mangsa-pemangsa.html>
- [file:///F:/Model%20Dua%20Spesies/Lotka%E2%80%93Volterra equation.htm](file:///F:/Model%20Dua%20Spesies/Lotka%E2%80%93Volterra%20equation.htm)

Halaman Kosong (BLANK PAGE)

ANALISIS REGRESI BERGANDA DENGAN METODE STEPWISE PADA DATA HBAT

FERRY KONDO LEMBANG

Staf Jurusan Matematika, FMIPA, Unpatti
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
e-mail: free_maxpluz16@yahoo.com

ABSTRACT

Multiple regression analysis as a statistical technique that can be used to analyze the relationship between a single dependent (respon) variable and several independent (peredictor) variables. Application for this analysis to be done specially in social economic. HBAT is a manufacture of paper products. Surveys of HBAT customer will be used to application multiple regression analysis in this paper to explain relationship satisfaction between the other variables. Methods to selective entering and deleting among these variables until some overall criterion measure is achived. Objective methods for selecting variables that maximizes the prediction while employing the smallest number of variables. Results is the best model from multiple regression analysis is $Y = -1.15106 + 0.36900 X6 - 0.41714 X7 + 0.31896 X9 + 0.17435 X11 + 0.77513 X12$, means that customer satisfaction is significantly influenced by the complaint resolution, product quality, salesforce image, e-commerce activities, and product line. Besides that the assumptions in multiple regression analysis are met. SAS software has facility more complete than SPSS, Minitab, and R.

Keywords: *multiple regression analysis HBAT, stepwise, Corellation, SAS, SPSS, Minitab, R*

PENDAHULUAN

HBAT merupakan perusahaan yang bergerak di bidang industri khususnya untuk produksi produk kertas. Data HBAT dipakai sebagai data sekunder dalam menjelaskan dan mengilustrasikan beberapa teknik analisis multivariat. Semua data yang ada dalam data HBAT merupakan data hasil survey terhadap pelanggan HBAT yang kemudian dikelola oleh sebuah perusahaan riset unggulan. Beberapa teknik analisis multivariat yang menggunakan data HBAT antara lain, Analisis Faktor, Analisis Diskriminan, dan juga beberapa metode Analisis Regresi. Khusus untuk metode Analisis Regresi biasanya untuk model persamaan regresi linear berganda, umumnya penelitian difokuskan mengenai pemilihan model regresi terbaik, dimana prosedur ini memungkinkan penentuan peubah atau variabel yang akan dimasukkan ke dalam regresi. Adapun tujuan pemilihan model regresi terbaik biasanya untuk kepentingan peramalan dan mencegah pengeluaran biaya yang tinggi dalam memperoleh informasi dari peubah atau variabel mengingat aplikasi analisis regresi telah banyak dipakai dalam dunia bisnis dan marketing.

Pemilihan model regresi terbaik dalam ilmu statistika yang umumnya sering digunakan, antara lain metode regresi *Backward*, metode Regresi *Forward*, dan Metode Regresi *Stepwise*.

Penelitian regresi linier berganda untuk kepentingan peramalan telah banyak dilakukan antara lain, Supriyono (2007) membandingkan logika fuzzy dengan regresi berganda sebagai alat peramalan, Pujiati (2005) melakukan analisis regresi berganda untuk mengetahui hubungan antara beberapa aktifitas promosi dengan penjualan produk. Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh Pujiati, agar model yang diperoleh dapat mudah diinterpretasikan, sebaiknya pada saat analisa/interpretasinya dikembalikan pada nilai sebenarnya. Namun kelemahan dari penelitian ini adalah belum disimpulkan apakah model regresi yang didapat adalah model terbaik untuk kasus diatas.

Tertarik dengan penelitian Pujiati, maka untuk menjawab kelemahannya dalam penulisan ini akan digunakan metode pemilihan model regresi terbaik yaitu, metode Stepwise. Adapun pemilihan metode Stepwise karena dapat menyelesaikan masalah regresi yang variabel prediktornya saling berkorelasi. Selain itu,

pemecahannya akan dianalisis dengan empat software antara lain SPSS, Minitab, R, dan SAS. Tujuan dari penulisan ini adalah mendapatkan model regresi terbaik dari data HBAAT dengan prosedur Stepwise. Penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai informasi analisa data bagi perusahaan yang bergerak di bidang bisnis dan marketing untuk meningkatkan usaha dan bagi pemerhati statistik dalam memperdalam konsep analisis regresi linier berganda khususnya untuk pemilihan model regresi terbaik.

TINJAUAN PUSTAKA

Analisis Regresi Linier Berganda adalah suatu metode statistik umum yang digunakan untuk meneliti hubungan antara satu variabel dependen (Y) dengan beberapa variabel independen (X_1, X_2, \dots, X_k) (Draper and Smith, 1992; Hair, Black, Babin, Anderson, & Tatham, 2006, P.176; Cohen, Cohen, West, and Aiken, 2003; Johnson, R.A. and Wichern, D.W, 2002). Tujuan analisis regresi berganda adalah menggunakan nilai-nilai variabel dependen yang diketahui, untuk meramalkan nilai variabel dependen. Persamaan umum dari regresi linier berganda adalah

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \epsilon$$

dengan Y = variabel dependen yang diprediksi

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k = \text{parameter}$$

$$X_1, X_2, \dots, X_k = \text{variabel independen}$$

Jika terdapat variabel dependen Y yang dipenuhi oleh sekumpulan variabel X, maka agar bermanfaat ingin dimasukkan sebanyak mungkin variabel X sehingga didapatkan keterhandalan yang tinggi, tetapi untuk kepentingan monitoring seringkali lebih diharapkan jumlah X yang kecil, sehingga komprominya adalah dipilih persamaan regresi terbaik. Adapun prinsip persamaan regresi terbaik adalah

- semua variabel independen yang masuk signifikan
- menghasilkan koefisien determinasi yang tinggi
- MS residualnya kecil
- Memakai konsep parsimony

Metode pencarian secara berurutan (*sequential search*) merupakan suatu metode untuk mengestimasi persamaan regresi dengan mempertimbangkan variabel-variabel yang sudah didefinisikan oleh peneliti dan secara selektif menambah dan mengurangi diantara variabel-variabel tersebut sampai semua kriteria terpenuhi. Ada dua pendekatan dalam metode ini yaitu estimasi *stepwise* dan penambahan *forward* dan eliminasi *backward*. Metode estimasi *stepwise* dilakukan dengan memasukkan variabel independen yang mempunyai kontribusi terbesar terhadap variabel dependen, hal ini dilakukan secara terus menerus sampai semua variabel independen yang mempunyai kontribusi signifikan (Brown, 1993; Kokaly and Clark, 1999; Nielsen, Stapelfeldt, and Skibsted, 1997; Sun, Zhao, and Yan, 1995; Wilkinson, 1979). Tujuan dilakukan metode ini untuk mencari model regresi terbaik.

METODOLOGI PENELITIAN

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder mengenai hasil survey konsumen HBAAT yaitu perusahaan penghasil kertas (Hair dkk, 2006). Banyaknya konsumen atau perusahaan yang disurvei dalam data ini adalah 100 perusahaan dengan variabel sebanyak 18. Penelitian ini hanya menggunakan 13 variabel prediktor dan satu variabel respon. Adapun variabel yang digunakan adalah

Variabel respon

Y = kepuasan pelanggan

Variabel prediktor

X6 = Kualitas produk

X7 = Aktivitas *E-commerce*

X8 = penunjang tehnik (*technical support*)

X9 = Tanggapan terhadap complain

X10 = periklanan

X11 = *product line*

X12 = image dari sales

X13 = kompetisi harga

X14 = Garansi dan klaim

X15 = produk baru

X16 = pemesanan dan pembayaran

X17 = harga yang fleksibel

X18 = kecepatan pengiriman

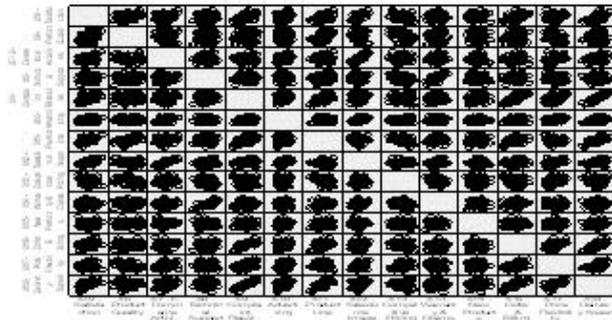
Analisis yang akan dilakukan pada data penelitian tersebut adalah regresi linear berganda dengan tujuan untuk mengetahui model terbaik antara satu variabel respon dan 13 variabel prediktor dengan menggunakan metode stepwise. Analisis dilakukan dengan menggunakan 4 software yaitu SPSS (Ho, 2006, PP 195 – 201), MINITAB, SAS (Khattre and Naik, 1999; Schlotzhauer and Littell 1997) dan R (Braun and Murdoch, 2007).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Analisis data dilakukan dengan menggunakan enam langkah dalam membangun model pada analisis multivariat (Hair dkk, 2006). Langkah awal sebelum melakukan regresi linear berganda terlebih dahulu dilakukan pengujian untuk mengetahui layak atau tidaknya suatu penelitian dianalisis dengan menggunakan analisis ini. Pengujian awal yang digunakan adalah melihat apakah ada korelasi antara variabel respon dan setiap variabel prediktor. *Scatter plot* antara variabel respon dan variabel prediktor merupakan salah satu alat yang dapat digunakan untuk melihat apakah ada korelasi yang signifikan antara variabel-variabel dalam plot. Secara visual plot antara variabel respon dengan masing-masing variabel prediktor dapat dilihat pada Gambar 1.

Ada hubungan antara variabel respon dengan masing-masing variabel prediktor, akan tetapi ada beberapa variabel prediktor yang terlihat tidak berkorelasi dengan variabel respon diantaranya X8, X14, X15 dan X17, hal ini dapat dilihat dari bentuk scatter plot yang tidak menunjukkan trend naik atau turun, akan tetapi menyebar secara random. Berdasarkan pengujian ini maka analisis data pada penelitian ini dapat menggunakan analisis regresi berganda. Disamping itu, korelasi antar

variabel prediktor menunjukkan bahwa ada multikolinearitas sehingga pada analisis selanjutnya akan di seleksi variabel-variabel prediktor yang secara signifikan memberikan kontribusi terhadap variabel responden.



Gambar 1 Scatter plot antara variabel respon dan setiap variabel prediktor

Langkah selanjutnya memodelkan antara variabel respon (X19) dan variabel prediktor (X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12, X13, X14, X15, X16, X17, dan X18) dengan menggunakan metode stepwise. Metode ini dilakukan dengan seleksi jika $\alpha \leq 0,05$ maka variabel prediktor masuk dalam model dan variabel akan dikeluarkan dari model jika $\alpha \leq 0,1$. Nilai α adalah nilai probabilitas dari pengujian korelasi parsial antara variabel respon dengan masing-masing dari variabel prediktor. Adapun hasil analisis dengan menggunakan metode stepwise dapat dirinci dalam beberapa tahap berikut :

Tabel 1. Hasil dari tahap 1

Tabel 1 Hasil dari tahap 1

Variabel yang masuk : X9 - Tangapan terhadap Komplain

R	.603
Koefisien Determinasi (R ²)	.364
Adjusted R ²	.357
Std. Error dari estimasi	.955

Analisis Varians

	SS	df	MS	F	sig. (P)
Regression	51.178	1	51.178	56.070	.000
Residual	89.450	98	.913		
Total	140.628	99			

Koefisien variabel yang masuk

Variabel yang masuk	Koefisien Regresi		signifikansi	Korelasi			Kolinearitas			
	B	S.E. Beta		t	sig.	bivariate	partial	Toleransi	VIF	
konstanta	3.680	.443	8.310	.000						
X9 - Komplain	.595	.079	.603	7.488	.000	.603	.603	.603	1.000	1.000

Variabel yang tidak masuk dalam Model

	Beta	Signifikansi		Korelasi Parsial	Kolinearitas	
		t	sig. (P)		Toleransi	VIF
X6 - Kualitas Produk	.427	6.193	.000	.532	.989	1.011
X7 - Website	.202	2.553	.012	.251	.980	1.020
X8 - Technical Support	.055	.675	.501	.068	.991	1.009
X10 - Penjualan	.193	2.410	.018	.238	.961	1.040
X11 - Product Line	.309	3.338	.001	.321	.685	1.460
X12 - Image dari sales	.382	5.185	.000	.466	.947	1.056
X13 - Kompetisi Harga	-.133	-1.655	.101	-.166	.984	1.017
X14 - Garansi & klaim	.095	1.166	.246	.118	.980	1.020
X15 - Produk Baru	.035	.434	.665	.044	.996	1.004
X16 - Pengiriman dan Pembayaran	.153	1.241	.218	.125	.427	2.341
X17 - Fleksibilitas Harga	-.216	-2.526	.013	-.248	.844	1.184

Tahap 1: Melihat nilai korelasi terbesar antara variabel respon dengan masing-masing variabel prediktor dalam model, didapatkan nilai korelasi terbesar antara X19 dengan X9 yaitu 0,603 sehingga X9 dimasukkan dalam

model. Selanjutnya, memodelkan X19 dengan X9 untuk mengetahui apakah X9 layak masuk dalam model dengan melakukan pengujian-pengujian yang diperlukan. Berdasarkan output komputer maka X9 layak masuk dalam model karena koefisien regresi (β) signifikan pada $\alpha = 0,05$ dengan pengujian secara individu dan serentak. Hasil lebih lengkap dapat dilihat pada Tabel

Tahap 2 : Melihat nilai korelasi parsial antara model pada tahap 1 dengan masing-masing variabel prediktor yang lain, didapatkan nilai korelasi parsial terbesar dengan X6 yaitu 0,532 sehingga X6 dimasukkan dalam model. Selanjutnya, memodelkan X19 dengan X9 dan X6 untuk mengetahui apakah X9 dan X6 layak masuk dalam model dengan melakukan pengujian-pengujian yang diperlukan. Berdasarkan output komputer maka X9 dan X6 layak masuk dalam model karena koefisien regresi (β) signifikan pada $\alpha = 0,05$ dengan pengujian secara individu dan serentak serta nilai R² dari model sebesar 0,544. Secara lebih lengkap dapat dilihat pada Tabel 2

Tabel 2. Hasil dari Tahap 2

Variabel yang masuk : X6 - Kualitas Produk

R	.738
Koefisien Determinasi (R ²)	.544
Adjusted R ²	.535
Std. Error dari estimasi	.813

Analisis Varians

	SS	df	MS	F	sig. (P)
Regression	76.527	2	38.263	57.902	.000
Residual	64.101	97	.661		
Total	140.628	99			

Koefisien variabel yang masuk

Variabel yang masuk	Koefisien Regresi		signifikansi	Korelasi			Kolinearitas			
	B	S.E. Beta		t	sig.	bivariate	partial	Toleransi	VIF	
konstanta	1.077	.564	1.909	.059						
X9 - Komplain	.550	.068	.558	8.092	.000	.603	.635	.555	.989	1.011
X6 - Kualitas	.364	.059	.427	6.193	.000	.486	.532	.425	.989	1.011

Variabel yang tidak masuk dalam Model

	Beta	Signifikansi		Korelasi Parsial	Kolinearitas	
		t	sig. (P)		Toleransi	VIF
X7 - Website	.275	4.256	.000	.398	.957	1.045
X8 - Technical Support	.018	.261	.794	.027	.983	1.017
X10 - Penjualan	.228	3.423	.001	.330	.956	1.046
X11 - Product Line	.066	.683	.496	.070	.508	1.967
X12 - Image dari sales	.477	8.992	.000	.676	.916	1.092
X13 - Kompetisi Harga	.041	.549	.584	.056	.832	1.202
X14 - Garansi & klaim	.063	.908	.366	.092	.975	1.026
X15 - Produk Baru	.026	.382	.703	.039	.996	1.004
X16 - Pengiriman dan Pembayaran	.129	1.231	.221	.125	.427	2.344
X17 - Fleksibilitas Harga	.084	.909	.366	.092	.555	1.803
X18 - Kecepatan pengiriman	.334	2.487	.015	.246	.247	4.041

Tahap 3 : Melihat nilai korelasi parsial antara model pada tahap 2 dengan masing-masing variabel prediktor yang lain, didapatkan nilai korelasi parsial terbesar dengan X12 yaitu 0,676 sehingga X12 dimasukkan dalam model. Selanjutnya, memodelkan X19 dengan X9, X6 dan X12 untuk mengetahui apakah X9, X6 dan X12 layak masuk dalam model dengan melakukan pengujian-pengujian yang diperlukan. Berdasarkan output komputer maka X9, X6 dan X12 layak masuk dalam model karena koefisien regresi (β) signifikan pada $\alpha = 0,05$ dengan pengujian secara individu dan serentak serta nilai R² dari model sebesar 0,753. Tabel 3 merupakan hasil lengkap tahap 3

Tabel 3. Hasil dari Tahap 3

Variabel yang masuk : X12 - Image dari Sales											
R	.868										
Koefisien Determinasi (R ²)	.753										
Adjusted R ²	.745										
Std. Error dari estimasi	.602										
Analisis Varians											
	SS	df	MS	F	sig. (P)						
Regression	105.833	3	35.278	97.333	.000						
Residual	34.794	96	.362								
Total	140.628	99									
Koefisien variabel yang masuk											
Variabel yang masuk	Koefisien Regresi			Signifikansi			Korelasi			Kolinearitas	
	B	S.E	Beta	t	sig.	bivariate	parial	Part	toleransi	VIF	
konstanta	-1.569	.511		-3.069	.003						
X9 - Komplain	.433	.052	.439	8.329	.000	.603	.648	.423	.927	1.079	
X6 - Kualitas	.437	.044	.512	9.861	.000	.486	.709	.501	.956	1.046	
X12 - Image	.530	.059	.477	8.992	.000	.500	.676	.457	.916	1.092	
Variabel yang tidak masuk dalam Model											
	Beta	Signifikansi		Korelasi			Kolinearitas				
		t	sig. (P)	Parial	Toleransi	VIF					
X7 - Website	-.232	-2.890	.005	-.284	.372	2.692					
X8 - Technical Support	.013	.259	.796	.027	.983	1.017					
X10 - Periklanan	-.019	-.307	.760	-.031	.700	1.428					
X11 - Product Line	.180	2.559	.012	.254	.494	2.026					
X13 - Kompetisi Harga	-.094	-1.643	.104	-.166	.776	1.288					
X14 - Garansi & klaim	.020	.387	.700	.040	.966	1.035					
X15 - Produk Baru	.016	.312	.755	.032	.896	1.004					
X16 - Pengiriman dan Pembayaran	.101	1.297	.198	.132	.426	2.348					
X17 - Fleksibilitas Harga	-.063	-.892	.374	-.091	.525	1.906					
X18 - Kecepatan pengiriman	.219	2.172	.032	.217	.243	4.110					

Tabel 4. Hasil dari Tahap 4

Variabel yang masuk : X7 - Website											
R	.879										
Koefisien Determinasi (R ²)	.773										
Adjusted R ²	.763										
Std. Error dari estimasi	.580										
Analisis Varians											
	SS	df	MS	F	sig. (P)						
Regression	108.645	4	27.161	80.678	.000						
Residual	31.983	95	.337								
Total	140.628	99									
Koefisien variabel yang masuk											
Variabel yang masuk	Koefisien Regresi			Signifikansi			Korelasi			Kolinearitas	
	B	S.E	Beta	t	sig.	bivariate	parial	Part	toleransi	VIF	
konstanta	-1.106	.518		-2.134	.035						
X9 - Komplain	.423	.050	.429	8.430	.000	.603	.654	.412	.923	1.084	
X6 - Kualitas	.435	.043	.509	10.177	.000	.486	.722	.498	.956	1.046	
X12 - Image	.736	.091	.663	8.074	.000	.500	.638	.395	.356	2.813	
X7 - Website	-.395	.137	-.232	-2.890	.005	.283	-.284	-.141	.372	2.692	
Variabel yang tidak masuk dalam Model											
	Beta	Signifikansi		Korelasi			Kolinearitas				
		t	sig. (P)	Parial	Toleransi	VIF					
X8 - Technical Support	.012	.233	.817	.024	.983	1.017					
X10 - Periklanan	-.017	-.295	.769	-.030	.700	1.428					
X11 - Product Line	.192	2.860	.005	.283	.492	2.033					
X13 - Kompetisi Harga	-.091	-1.662	.100	-.169	.776	1.288					
X14 - Garansi & klaim	.014	.272	.786	.028	.964	1.037					
X15 - Produk Baru	.004	.088	.930	.009	.989	1.011					
X16 - Pengiriman dan Pembayaran	.120	1.602	.112	.163	.423	2.365					
X17 - Fleksibilitas Harga	-.063	-.925	.357	-.095	.525	1.906					
X18 - Kecepatan pengiriman	.231	2.379	.019	.238	.243	4.116					

Tahap 4 : Melihat nilai korelasi parsial antara model pada tahap 3 dengan masing-masing variabel prediktor yang

lain, didapatkan nilai korelasi parsial terbesar dengan X7 yaitu -0,284 sehingga X7 dimasukkan dalam model. Selanjutnya, memodelkan X19 dengan X9, X6, X12 dan X7 untuk mengetahui apakah X9, X6, X12, dan X7 layak masuk dalam model dengan melakukan pengujian-pengujian yang diperlukan. Berdasarkan output komputer maka X9, X6, X12 dan X7 layak masuk dalam model karena koefisien regresi (β) signifikan pada $\alpha = 0,05$ dengan pengujian secara individu dan serentak serta nilai R² dari model sebesar 0,773. Selengkapnya pada Tabel 4.

Tahap 5 : Melihat nilai korelasi parsial antara model pada tahap 4 dengan masing-masing variabel prediktor yang lain, didapatkan nilai korelasi parsial terbesar dengan X11 yaitu -0,284 sehingga X11 dimasukkan dalam model. Selanjutnya, memodelkan X19 dengan X9, X6, X12, X7 dan X11 untuk mengetahui apakah X9, X6, X12, X7 dan X11 layak masuk dalam model dengan melakukan pengujian-pengujian yang diperlukan. Berdasarkan output komputer maka X9, X6, X12, X7 dan X11 layak masuk dalam model karena koefisien regresi (β) signifikan pada $\alpha = 0,05$ dengan pengujian secara individu dan serentak serta nilai R² dari model sebesar 0,791. Hasil lengkap pada Tabel 5.

Tabel 5. Hasil dari Tahap 5

Variabel yang masuk : X11 - Product Line											
R	.889										
Koefisien Determinasi (R ²)	.791										
Adjusted R ²	.780										
Std. Error dari estimasi	.559										
Analisis Varians											
	SS	df	MS	F	sig. (P)						
Regression	111.205	5	22.241	71.058	.000						
Residual	29.422	94	.313								
Total	140.628	99									
Koefisien variabel yang masuk											
Variabel yang masuk	Koefisien Regresi			Signifikansi			Korelasi			Kolinearitas	
	B	S.E	Beta	t	sig.	bivariate	parial	Part	toleransi	VIF	
konstanta	-1.151	.500		-2.303	.023						
X9 - Komplain	.319	.061	.323	5.256	.000	.603	.477	.248	.588	1.701	
X6 - Kualitas	.369	.047	.432	7.820	.000	.486	.628	.369	.728	1.373	
X12 - Image	.775	.089	.697	8.711	.000	.500	.668	.411	.347	2.880	
X7 - Website	-.417	.132	-.245	-3.162	.002	.283	-.310	-.149	.370	2.701	
X11 - Line	.174	.061	.192	2.860	.005	.551	.283	.135	.492	2.033	
Variabel yang tidak masuk dalam Model											
	Beta	Signifikansi		Korelasi			Kolinearitas				
		t	sig. (P)	Parial	Toleransi	VIF					
X8 - Technical Support	-.009	-1.187	.232	-.019	.961	1.041					
X10 - Periklanan	-.009	-1.162	.252	-.017	.698	1.432					
X13 - Kompetisi Harga	-.040	-.685	.495	-.071	.667	1.498					
X14 - Garansi & klaim	-.023	-.462	.645	-.048	.901	1.110					
X15 - Produk Baru	.002	.050	.960	.005	.989	1.012					
X16 - Pengiriman dan Pembayaran	.124	1.727	.088	.176	.423	2.366					
X17 - Fleksibilitas Harga	.112	1.429	.156	.147	.272	3.674					
X18 - Kecepatan pengiriman	.138	1.299	.197	.133	.197	5.075					

Tahap 6 : Melihat nilai korelasi parsial antara model pada tahap 5 dengan masing-masing variabel prediktor yang lain, didapatkan nilai korelasi parsial terbesar dengan X16 yaitu 0,176 sehingga X16 dimasukkan dalam model. Selanjutnya, memodelkan X19 dengan X9, X6, X12, X7, X11 dan X16 untuk mengetahui apakah X9, X6, X12, X7, X11 dan X16 layak masuk dalam model dengan melakukan pengujian-pengujian yang diperlukan. Berdasarkan output komputer maka X16 tidak layak

masuk dalam model karena koefisien regresi (β) tidak signifikan pada $\alpha = 0,05$ dengan pengujian secara individu walaupun pengujian secara serentak signifikan sehingga proses seleksi stepwise dihentikan dan variabel prediktor yang masuk dalam model adalah yaitu X9, X6, X12, X7 dan X11.

Berdasarkan hasil analisis regresi dengan metode stepwise didapatkan model terbaik yaitu $Y = -1.15106 + 0.36900 X6 - 0.41714 X7 + 0.31896 X9 + 0.17435 X11 + 0.77513 X12$. Model tersebut menunjukkan bahwa kepuasan mempunyai hubungan yang positif dengan variabel prediktor hal ini terlihat dari nilai koefisien yang positif kecuali X7 (aktivitas *e-commerce*). Aktifitas *E-commerce* (X7) mempunyai nilai korelasi positif dengan kepuasan ketika dilakukan secara individu, akan tetapi dalam model terlihat negatif hal ini berarti bahwa X7 berhubungan dengan variabel prediktor yang lain. Bukti adanya hubungan yang signifikan antara X7 dengan variabel yang lain adalah nilai korelasi antara X7 dan X12 cukup signifikan yaitu sebesar 0,792.

Langkah selanjutnya dilakukan pengujian terhadap residual untuk mengetahui apakah model yang didapatkan layak untuk digunakan memprediksi dan menggambarkan data. Ada beberapa asumsi klasik dalam regresi linear yang harus dipenuhi diantaranya :

(1) Fenomena yang diukur adalah linear

Uji linearity dapat dilakukan dengan erbagai cara diantaranya dengan melihat plot antara residual dengan prediksi (fit). Kelinearan terlihat jika grafik terlihat seperti garis lurus dan tidak membuat pola seperti bentuk kuadrat atau kubik. Gambar 2 menunjukkan bahwa plot menyerupai garis lurus sehingga model regresi yang didapatkan adalah linear. Disamping itu juga dilihat plot antara variabel respon dengan variabel prediktor yang diduga berpengaruh secara parsial. Berdasarkan Gambar 1 terlihat bahwa plot tersebut menyerupai garis lurus, sehingga dapat dikatakan bahwa fenomena yang diukur sudah linear.

(2) Residual homogen dalam varian

Uji homogenitas varian juga dapat dilihat dari plot antara residual dan prediksi. Homogenitas varian terlihat jika tidak terdapat pola bertambah atau berkurangnya residual pada plot yang didapatkan. Gambar 2 menunjukkan bahwa tidak terdapat pola tersebut maka dapat dikatakan bahwa asumsi kedua terpenuhi yaitu homogen dalam varian.

(3) Residual independen

Uji independen dilakukan dengan melihat plot antara residual dengan waktu (urutan oservasi). Hal ini dilakukan dengan pertimbangan bahwa jika terdapat trend atau pola antara residual dengan waktu maka residual tidak independen atau tergantung dengan waktu sebelumnya atau dalam beberapa literatur disebut autokorelasi. hasil plot ini dapat dilihat pada Gambar 2 yang menunjukkan bahwa tidak terdapat trend pada grafik tersebut sehingga residual sudah independen.

(4) Residual berdistribusi normal

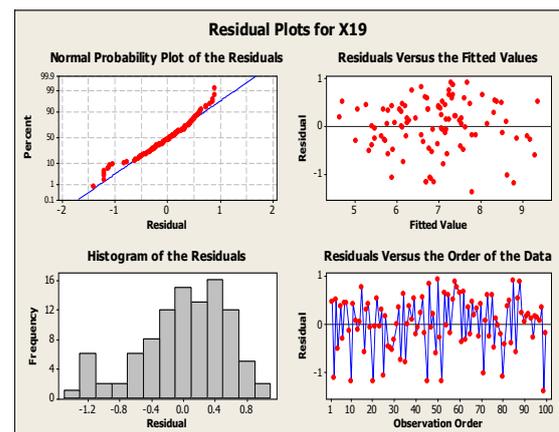
Distribusi normal dari suatu data dapat diketahui dengan melakukan uji kolmogorov smirnov dan melihat *normal probability plot*. Selain itu juga dapat dilihat dari histogram data tersebut. Gambar 2 menunjukkan bahwa residual sudah berdistribusi normal berdasarkan plot yang

didapat yaitu mendekati garis lurus. Disamping itu juga terlihat bahwa histogram dari residual menyerupai bentuk lonceng.

Tabel 6. Perbedaan Fasilitas dari 4 *Software* yang digunakan

No.	Fasilitas	SPSS	MINITAB	SAS	R
1	Metode seleksi	enter, forward, remove, backward dan stepwise	best subset, stepwise (forward dan backward)	forward, backward, stepwise, maxR, minR, R-square	stepwise (forward dan backward)
2	signifikan level	nilai F dan α	nilai F dan α	nilai F dan α	nilai AIC
3	uji statistika	influence, multikolinearitas dan plot normalitas	multikolinearitas, plot normalitas, plot residual	influence, multikolinearitas, heteroskedastisitas, autokorelasi, normalitas	influence, plot normalitas

Setelah melakukan analisis dengan 4 *software* maka tidak ada perbedaan dalam output yang dihasilkan. Ada beberapa perbedaan fasilitas yang dipunyai masing-masing *software* yang digunakan diantaranya dapat dilihat dalam Tabel 6.



Gambar 2. Plot-plot Residual dari Variabel Respon

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan maka dapat disimpulkan bahwa model terbaik dari penelitian yang dilakukan adalah $Y = -1.15106 + 0.36900 X6 - 0.41714 X7 + 0.31896 X9 + 0.17435 X11 + 0.77513 X12$ yang artinya bahwa kepuasan pelanggan secara signifikan dipengaruhi oleh tanggapan terhadap komplain, kualitas produk, image dari sales aktivitas *e-commerce*, dan *product line*. Hal ini dikuatkan dengan terpenuhinya asumsi-asumsi yang diperlukan dalam analisis regresi. Disamping itu, berdasarkan perbedaan *software* yang digunakan secara umum mengeluarkan hasil yang sama dengan metode yang sama. Penulis menyarankan untuk menggunakan *software* SAS karena dalam fasilitas yang lain lebih lengkap dibandingkan dengan *software* yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Braun, W.J and Murdoch, D.j. (2007). *A First Course in Statistical Programming with R*. Cambridge University Press, New York.
- Brown, C. E. (1993). Use of Principle Component, Correlation and Stepwise Multiple Regression Analyses to Investigate Selected Phisical and Hydraulic Properties of Carbonate-Rock Aquifers. *Journal of Hydrology*, 147(1-4), 169-195.
- Cohen, J.,Cohen, P., West, S.G., and Aiken, L.S. (2003). *Applied Multiple Regression/Correlation Analysis for The Behavioral Sciences*. Third Edition. Lawrence Elbaum Associates, Mahwah : New Jersey.
- Drapper and Smith. (1992). *Analisis Regresi Terapan*. PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.
- Hair, J.F., Anderson, R.E, Black, W.C., Babin, B.J., and Tatham,R.L, (2006). *Multivariate Data Analysis*. Sixth edition. Prentice Hall International : UK.
- Ho, R. (2006). *Handbook of Univariate and Multivariate Data Analysis and Interpretation with SPSS*, Chapman & Hall /CRC, Taylor and Francis Group.
- Johnson, R.A. and Wichern, D.W. (2002). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Fifth edition, Prentice Hall Inc. Upper Saddle River : NJ.
- Khattree, R., and Naik, D.N. (1999). *Applied Multivariate Statistics with SAS[®] Software*. Second Edition. SAS Institute Inc.,Cary, NC : USA.
- Kokaly, R.F. and Clark, R.N. (1999). Spectroscopic Determination of Leaf Biochemistri Using Band-Depth Analysis of Absorption Features and Stepwise Multiple Linear Regression. *Remote Sensing of Environment*, 67(3), 267-287.
- Nielsen, B. R., Stapelfeldt, H., and Skibsted, L.H. (1997). Early Prediction of The Shelf-Life of Medium-Heat Whole Milk Powders Using Stepwise Stepwise Multiple Regression and Principal Component Analysis. *International Dairy Journal*, 7(3), 341-348.
- Pujiati, (2005). *Analisis Regresi Berganda Untuk Mengetahui Hubungan Antara Beberapa Aktifitas Promosi Dengan Penjualan Produk*. Makalah Tugas Mata Kuliah Analisis Regresi. Program Pascasarjana FMIPA Jurusan Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Schlotzhauer, S.D. and Littell, R.C. (1997). *SAS[®] System for Elementary Statistical Analysis*. Second Edition. SAS Institute Inc.,Cary, NC : USA.
- Supriyono, (2007). *Analisis Perbandingan Logika Fuzzy Dengan Regresi Berganda Sebagai Alat Peramalan*. Seminar Nasional III SDM Teknologi Nuklir, Jogjakarta.
- Sun, Y.X., Zhao, G.C., and Yan,W. (1995). Age Estimation on The Female Sternum by Quantification Theory I and Stepwise Regression Analysis. *Forensic Science International*, 74(1-2), 57-62.
- Wilkinson, L.(1979). Test of Significant in Stepwise Rgression. *Psychological Bulletin*, 86(1),168-174.

SIFAT-SIFAT SPEKTRAL DAN STRUKTUR KOMBINATORIK PADA SISTEM POSITIF 2D
(On the Spectral and Combinatorial Structure Of 2D Positive Systems)

RUDY WOLTER MATAKUPAN

Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
e-mail: rwmatakupan@yahoo.com

ABSTRACT

The dynamics of a 2D positive system depends on the pair of nonnegative square matrices that provide the updating of its local states. In this paper, several spectral properties, like finite memory, separability and property L, which depend on the characteristic polynomial of the pair, are investigated under the nonnegativity constraint and in connection with the combinatorial structure of the matrices.

Some aspects of the Perron-Frobenius theory are extended to the 2D case; in particular, conditions are provided guaranteeing the existence of a common maximal eigenvector for two nonnegative matrices with irreducible sum. Finally, some results on 2D positive realizations are presented.

Keywords: Finite Memory, 2D positive system, Separability, property L, Spectral properties

PENDAHULUAN

Sistem diskrit satu dimensi (1D)

$$\begin{aligned}x(h+1) &= Ax(h) + Cu(h) \\ y(h) &= Hx(h) + Ju(h) \quad h = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{1}$$

adalah positif jika bagian masukan (*input*) dan keluaran (*output*) selalu bernilai tak-negatif. Sistem-sistem positif seringkali muncul karena variabel internal dan variabel eksternal, menunjukkan kuantitas sistem-sistem real, seperti tekanan, konsentrasi, tingkat populasi penduduk di suatu negara atau hewan di alam dan sebagainya.

Suatu penjelasan hampir lengkap dari sifat dinamis sistem diskrit telah disajikan dalam teorema Perron-Frobenius yang hubungannya dengan spektral dan struktur kombinatorik matriks-matriks tak-negatif. Beberapa masalah baru muncul dalam konteks teori sistem, mendorong penelitian dan membuka pandangan baru atas lapangan matriks-matriks positif. Beberapa menyebutkan yang berhubungan dengan reabilitas dan analisis keterobservasian yang menyatakan ruang bagian (*state space*) sistem-sistem positif 1D.

Sistem-sistem linear yang berkaitan dengan dua variabel diskrit atau sistem dua dimensi (2D) terbit dalam literatur hampir dua puluh tahun yang lalu, para ahli mulai dengan menyelidiki struktur rekursif untuk proses data dua dimensi. Proses tersebut dilakukan menggunakan algoritma diskripsi masukan-keluaran lewat rasio

polinomial dalam dua *indeterminate*. Ide baru yang bersumber dari penelitian sistem-sistem 2D terus dilakukan dengan mengingat algoritma-algoritma tersebut sebagai penyajian eksternal sistem-sistem dinamik, karena itu sistem 2D $\Sigma = (A, B, C, D, H, J)$, diberikan oleh persamaan (2).

$$\begin{aligned}x(h+1, k+1) &= Ax(h, k+1) + Bx(h+1, k) \\ &\quad + Cu(h, k+1) + Du(h+1, k)\end{aligned}\tag{2}$$

$$y(h, k) = Hx(h, k) + Ju(h, k)$$

dimana $u(h, k) \in \mathbb{R}$ masukan, $y(h, k) \in \mathbb{R}$ keluaran,

$h, k \in \mathbb{Z}$, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C, D \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $H, J \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ dan

$x(h, k) \in \mathbb{R}^n$ merupakan ruang bagian lokal (*local state space*). (model Fornasini-Marchesini, 1976). Bentuk lain di luar persamaan di atas dikenal dalam model Givone-Roesser 1972, model Attasi 1973, model Roesser 1975 dan model Sontag 1978.

Para ahli mengaplikasikan untuk memproses data dua dimensi dalam berbagai bidang seperti Ilmu Gempa Bumi (*Seismologi*), peningkatan bayangan sinar X, bayangan baur, proses gambar digital dan sebagainya. Kontribusi lain dapat dijumpai pada model populasi sungai (Fornasini 1991), diambil sebagai contoh untuk batasan tak-negatif dalam persamaan (2) dan diskritisasi persamaan diferensial parsial dari penyerapan gas dan aliran air panas (Marszalek, 1984).

Sistem positif 2D adalah suatu model bagian yang mengambil variabel-variabel bernilai positif. Disini akan dibatasi untuk bagian *unforced* pada sistem 2D (2) seperti yang diberikan persamaan :

$$\begin{aligned} x(h+1, k+1) &= Ax(h, k+1) + Bx(h+1, k) \\ y(h, k) &= Hx(h, k) \end{aligned} \tag{3}$$

dimana barisan pasangan kembar indeks *bagian lokal (local state)* $x(\cdot, \cdot)$ diambil dalam daerah positif

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n\} \text{ dengan } h, k \in \mathbb{Z}$$

sedangkan A dan B matriks-matriks tak-negatif berukuran $n \times n$. Kondisi awal (*initial condition*) ditetapkan oleh nilai-nilai tak-negatif dari bagian lokal pada *himpunan terpisah (separation set)* $C_0 = \{(i, -i) \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Pilihan berbeda untuk kondisi awal dapat dianggap pada batas

$$S = \{(i, 0) \mid i > 0\} \cup \{(0, j) \mid j > 0\}$$

TINJAUAN PUSTAKA

Sistem linear diskrit 2D dalam bentuk (2) disusun oleh matematikawan Italy, Ettore Fornasini dan Giovanni Marchesini (1978) dengan artikel: *State-Space Realization Theory of Two-Dimensional Filters*, sedangkan sistem *finite memory* untuk sistem positif 2D diperkenalkan oleh Bisiacco (1985) dengan menyebutkan polinomial karakteristik $\Delta_{A,B}(z_1, z_2) = 1$, berlaku untuk setiap z_1 dan z_2 . Pengertian lain untuk menyebutkan sistem (2) sebagai sistem *separable*, yaitu jika dapat ditulis polinomial karakteristik sebagai $\Delta_{A,B}(z_1, z_2) = r(z_1) \cdot s(z_2)$, dikemukakan oleh Ettore Fornasini dan Giovanni Marchesini (1993).

Selanjutnya dengan merujuk pada artikel *Pairs of Matrices with Property L* oleh Motzkin dan Taussky (1952), yang telah mendefinisikan pasangan matriks (A, B) ke dalam sifat-sifat L , kemudian dengan artikel dari Ettore Fornasini dan Maria Elena Valcher (1996), dengan dukungan beberapa literatur menyusun sifat-sifat spektral dan struktur kombinatorik pada sistem positif 2D.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sifat-sifat Spektral dan Struktur Kombinatorik pada Sistem Positif 2D

Dalam proposisi berikut disajikan perkalian Hurwitz dan perkalian elemen-elemen dalam suatu monoid bebas Ξ^* yang dibangun oleh A dan B .

Proposisi 1

Misalkan (A, B) pasangan matriks tak-negatif berukuran $n \times n$ maka pernyataan-pernyataan berikut saling ekuivalen

- (i). $\Delta_{A,B}(z_1, z_2) = 1$
- (ii). $A + B$ nilpoten

- (iii). $A^i \text{ III } B^j$ nilpoten untuk setiap $(i, j) \neq (0, 0)$
- (iv). $w(A, B)$ nilpoten untuk setiap $w \in \Xi^* - \{1\}$

Bukti :

Akan dibuktikan (i) \Rightarrow (ii). Ambil $z_1 = z_2 = z$ maka $\det(I_n - (A + B)z) = 1 = \det(I_n)$ yaitu dipenuhi jika $A + B = 0$. Jadi $(A + B)^v = 0$ untuk suatu $v \in \mathbb{Z}$ atau $A + B$ nilpoten terbukti.

Akan dibuktikan (ii) \Rightarrow (iii). Untuk setiap $v \geq n$ berlaku

$$\sum_{i+j=v} A^i \text{ III } B^j = (A + B)^v$$

karena $A + B$ nilpoten dan tak-negatif maka $A^i \text{ III } B^j = 0$ dimana $i + j = v \geq n$, akibatnya $A^i \text{ III } B^j = 0$. Dengan memperhatikan hubungan $0 \leq (A^i \text{ III } B^j)^n \leq A^{in} \text{ III } B^{jn} = 0 \quad \forall (i, j) \neq (0, 0)$ maka $(A^i \text{ III } B^j)^n = 0$ atau $A^i \text{ III } B^j$ nilpoten terbukti.

Akan dibuktikan (iii) \Rightarrow (iv). Misalkan $|w|_1 = i$ dan $|w|_2 = j$. Perkalian Hurwitz ke- (i, j) .

$A^i \text{ III } B^j = \sum_{|w|_1=i, |w|_2=j} w(A, B) \geq w(A, B)$ sehingga $(A^i \text{ III } B^j)^n \geq [w(A, B)]^n \geq 0$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$. Karena $A^i \text{ III } B^j$ nilpoten atau $(A^i \text{ III } B^j)^n = 0$ maka $[w(A, B)]^n = 0$, yaitu $w(A, B)$ nilpoten $w \in \Xi^* - \{1\}$ terbukti.

Kemudian, akan dibuktikan (iv) \Rightarrow (i). Menggunakan teorema Levitzki, $w(A, B)$ nilpoten maka dengan transformasi similaritas matriks-matriks A dan B direduksi ke bentuk matriks-matriks segitiga. Polinomial karakteristik: $\Delta_{A,B}(z_1, z_2) = \prod_{i=1}^n (1 - A_{ii}z_1 - B_{ii}z_2)$.

Ambil $z_1 = z_2 = z$, diketahui $A + B$ nilpoten maka

$$\Delta_{A,B}(z_1, z_2) = \prod_{i=1}^n (1 - (A_{ii} + B_{ii})z) = 1 \text{ terbukti.}$$

Jadi (i), (ii), (iii) dan (iv) saling ekuivalensi \square

Definisi 2

Suatu pasangan matriks (A, B) berukuran $n \times n$ dikatakan **ko-gradien** ke pasangan (\bar{A}, \bar{B}) , jika terdapat suatu matriks permutasi P sehingga

$$\bar{A} = P^T A P \text{ dan } \bar{B} = P^T B P$$

Struktur kombinatorik sistem *finite memory* dari pasangan-pasangan matriks tak-negatif dijelaskan secara lengkap pada proposisi berikut ini.

Proposisi 3

Pasangan matriks tak-negatif (A, B) berukuran $n \times n$ finite memory jika dan hanya jika (A, B) ko-gradien untuk suatu matriks segitiga atas nilpoten tak-negatif.

Bukti :

(\Rightarrow) Telah diketahui pada proposisi 1, jika (A, B) finite memory maka $(A+B)$ nilpoten akibatnya $(A+B)$ tereduksi dengan demikian terdapat matriks permutasi P sehingga $P^T(A+B)P = \overline{(A+B)}$. Akan ditunjukkan bahwa $\overline{(A+B)}$ matriks segitiga atas dengan diagonal nol. Misalkan λ_1 nilai karakteristik dari matriks $A+B$ dan $x_1 \in V_n(\mathbb{R})$ vektor karakteristik yang bersesuaian dengan λ_1 sehingga $(A+B)x_1 = \lambda_1 x_1$ dan $x_1^t x_1 = 1$. Anggap matriks permutasi itu sebagai $P_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sehingga

$$P_1^T(A+B)P_1 = \left[\begin{array}{c|c} (A+B)_{11} & * \\ \hline 0 & (A+B)_{22} \end{array} \right]$$

dengan $x_i^t x_1 = 0, i \neq 1$. Dan seterusnya akan didapat

$$P_k^T(A+B)_{k-1, k-1} P_k \quad k = 3, 4, \dots, n-1.$$

Sekarang bila matriks ortogonal $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ berukuran

$n \times n$ sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}^T P_1^T(A+B)P_1 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} (A+B)_{11} & * & * \\ \hline 0 & (A+B)_{22} & * \\ \hline 0 & 0 & (A+B)_{33} \end{array} \right]$$

Jika dilanjutkan diperoleh matriks permutasi

$$P = P_1 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

karena $A+B$ nilpoten maka

$$P^T(A+B)P = \begin{bmatrix} (A+B)_{11} & * & \dots & * \\ 0 & (A+B)_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (A+B)_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} = \overline{(A+B)}$$

Jadi (A, B) ko-gradien untuk suatu matriks segitiga atas tak-negatif, terbukti.

(\Leftarrow) Dari bentuk matriks di atas maka $(A+B)^n = 0$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$ atau $A+B$ nilpoten, menurut proposisi 1 pasangan (A, B) finite memory terbukti \square

Dalam menganalisis pasangan separable tak-negatif, dilakukan mengikuti alur yang sama dengan finite memory. Suatu dekomposisi spektral separable diringkas sebagai berikut:

Proposisi 4

Misalkan (A, B) pasangan matriks positif berukuran $n \times n$ maka pernyataan-pernyataan berikut saling ekuivalen

- (i). $\Delta_{A,B}(z_1, z_2) = r(z_1).s(z_2)$
- (ii). $\det[I - (A+B)z] = \det[I - Az].\det[I - Bz]$
- (iii). $A^i \text{ III } B^j$ nilpoten untuk setiap $i, j > 0$
- (iv). $w(A, B)$ nilpoten untuk setiap $w \in \Xi^* - \{1\}$ sehingga $|w_i| > 0 \quad i = 1, 2$
- (v). Terdapat suatu matriks tak-singular $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sehingga $\hat{A} = T^{-1}AT$ dan $\hat{B} = T^{-1}BT$ merupakan matriks-matriks segitiga atas dan $[\hat{A}]_{hh} \neq 0$ sehingga berlaku $[\hat{B}]_{hh} = 0$.

Bukti :

Akan dibuktikan $(i) \Rightarrow (ii)$. Jika

$$z_1 = 0 \Rightarrow \Delta_{A,B}(z_1, z_2) = \det[I - Bz_2] \equiv s(z_2),$$

dan jika

$$z_2 = 0 \Rightarrow \Delta_{A,B}(z_1, z_2) = \det[I - Az_1] \equiv r(z_1).$$

Diambil $z_1 = z_2 = z$, maka

$$\begin{aligned} \Delta_{A,B}(z_1, z_2) &= \det[I - (A+B)z] \\ &= r(z_1).s(z_2) = \det[I - Az].\det[I - Bz] \end{aligned}$$

terbukti.

Kemudian, akan dibuktikan $(ii) \Rightarrow (iii)$. Dimulai dengan memperhatikan matriks

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

$\det[I - (A+B)z] = \det[I - Az].\det[I - Bz] = \det[I - Mz]$ sehingga M dan $A+B$ mempunyai polinomial karakteristik yang sama, akibatnya

$$tr(M^h) = tr((A+B)^h) \quad \forall h \geq 1 \quad (4)$$

perhatikan bahwa $(A+B)^h = \sum_{i+j=h} A^i \text{ III } B^j$ merupakan

linieritas dari operator trace.

$$tr(A^h) + tr(B^h) = \sum_{i+j=h} tr A^i \text{ III } B^j$$

Diketahui $\sum_{i,j>0, i+j=h} tr A^i \text{III}^j B = 0 \quad \forall h \geq 1$ sehingga

pasangan (A, B) tak-negatif. Akhirnya untuk $h \geq \nu$

$$0 \leq tr((A^i \text{III}^j B)^\nu) \leq tr(A^{i\nu} \text{III}^{j\nu} B) = 0$$

untuk $i, j \geq 1; \nu = 1, 2, \dots$

maka $(A^i \text{III}^j B)^\nu = 0$ atau $A^i \text{III}^j B$ nilpoten untuk setiap $i, j > 0$ terbukti.

Bukti (iii) \Rightarrow (iv) mirip dengan pembuktian (iii) \Rightarrow (iv) pada proposisi 1 terbukti.

Akan dibuktikan (iv) \Rightarrow (v). Karena $w(A, B)$ nilpoten $w \in \Xi^* - \{1\}$, $|w|_i > 0 \quad i = 1, 2$ menurut proposisi 1 pasangan matriks tak-negatif (A, B) finite memory dan menurut proposisi 4 (A, B) ko-gradien untuk suatu matriks segitiga terbatas ke atas, maka terdapat $T \in C^{n \times n}$ sehingga $\hat{A} = T^{-1}AT$ dan $\hat{B} = T^{-1}BT$ dimana \hat{A} dan \hat{B} matriks-matriks segitiga atas. Sekarang akan ditunjukkan $[\hat{A}]_{hh} \neq 0 \Rightarrow [\hat{B}]_{hh} = 0$ menggunakan

perluasan teorema Levitzki. Misalkan $A, B \in C^{n \times n}$ dan S himpunan semua perkalian matriks pada semigrup

$$S = \{w(A, B) \mid w \in \Xi^*, |w|_1 \geq 1, |w|_2 \geq 1\} \\ = \{\hat{A} \cdot \hat{A} \cdots \hat{A}, \hat{B} \cdot \hat{B} \cdots \hat{B}\}.$$

Menurut Levitzki $w(A, B)$ nilpoten jika dan hanya jika (A, B) separable dan merupakan matriks segitiga melalui suatu transformasi similaritas.

$$tr(w(A, B)) = tr([\hat{A}]^i \cdot [\hat{B}]^j) = \sum_{h=1}^n ([\hat{A}]_{hh})^i ([\hat{B}]_{hh})^j = 0 \quad (5)$$

Persamaan (5) benar jika $[\hat{A}]_{hh} \neq 0$ maka $[\hat{B}]_{hh} = 0$; $h = 1, 2, \dots, n$ terbukti.

Akan dibuktikan (v) \Rightarrow (i). Karena \hat{A} dan \hat{B} masing-masing matriks segitiga atas maka nilai-nilai eigen mereka dapat di order sebagai spektra

$$\Lambda(\hat{A}) = (\hat{A}_{11}, \hat{A}_{22}, \dots, \hat{A}_{nn}, 0, 0, \dots, 0)$$

dan

$$\Lambda(\hat{B}) = (0, 0, \dots, 0, \hat{B}_{n+1, n+1}, \dots, \hat{B}_{rr})$$

sehingga untuk setiap $\alpha, \beta \in C$ didapat

$$\Lambda(\alpha\hat{A} + \beta\hat{B}) = (\alpha\hat{A}_{11}, \alpha\hat{A}_{22}, \dots, \alpha\hat{A}_{nn}, \beta\hat{B}_{n+1, n+1}, \beta\hat{B}_{n+2, n+2}, \dots, \beta\hat{B}_{rr}) \\ = \alpha\Lambda(\hat{A}) + \beta\Lambda(\hat{B})$$

jadi \hat{A} dan \hat{B} mempunyai sifat L , diketahui (\hat{A}, \hat{B}) separable karena $\hat{A} \approx A, \hat{B} \approx B$ maka (A, B) separable terbukti.

Dengan demikian (i), (ii), (iii), (iv) dan (v) saling ekuivalensi \square

Struktur kombinatorik pasangan-pasangan matriks separable sangat menarik dan mudah ditentukan sebagai akibat lemma berikut.

Lemma 5

Jika $A > 0$ dan $B > 0$ pasangan matriks separable berukuran $n \times n$ maka $A + B$ tereduksi.

Proposisi 6

Pasangan matriks tak-negatif (A, B) berukuran $n \times n$ separable jika dan hanya jika terdapat matriks permutasi P sehingga P^TAP dan P^TBP terpecah ke dalam matriks segitiga blok

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & A_{22} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & A_{tt} \end{bmatrix} \\ \hat{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & B_{22} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & B_{tt} \end{bmatrix} \quad (6)$$

dimana $A_{ii} \neq 0$ maka $B_{ii} = 0$.

Bukti :

(\Rightarrow) Jika salah satu dari pasangan (A, B) adalah matriks nol maka trivial. Jika pasangan (A, B) tak-nol dan separable menurut lemma 5 maka $A + B$ tereduksi sehingga terdapat matriks permutasi $P_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Misalkan λ_1 nilai karakteristik dari $A + B$ dan $x_1 \in V_n(\mathbb{R})$ vektor karakteristik yang bersesuaian dengan λ_1 sehingga

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 \text{ dan } x_1^t x_1 = 1.$$

Matriks ortogonal P_1 berukuran $(n-1) \times (n-1)$,

$$P_1^T (A + B) P_1 = P_1^T A P_1 + P_1^T B P_1 \\ = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$$

dimana $P_1^T A P_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ -1 & \vdots & -1 \\ 0 & \vdots & A_{22} \end{bmatrix}$ untuk $i \neq 1, x_i^t x_1 = 0$

dan $P_1^T B P_1 = \begin{bmatrix} B_{11} & \vdots & B_{12} \\ -1 & \vdots & -1 \\ 0 & \vdots & B_{22} \end{bmatrix}$.

Jika diteruskan pada akhirnya akan didapat,

$$P_{n-1}^T A_{n-1, n-1} P_{n-1} = \begin{bmatrix} A_{n-1, n-1} & \vdots & A_{n-1, n} \\ -1 & \vdots & -1 \\ 0 & \vdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

dan

$$P_{n-1}^T B_{n-1, n-1} P_{n-1} = \begin{bmatrix} B_{n-1, n-1} & \vdots & B_{n-1, n} \\ -1 & \vdots & -1 \\ 0 & \vdots & B_{nn} \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$P_{n-1}^T (A_{n-1, n-1} + B_{n-1, n-1}) P_{n-1} = P_{n-1}^T A_{n-1, n-1} P_{n-1} + P_{n-1}^T B_{n-1, n-1} P_{n-1}$$

Kemudian akan diperoleh matriks permutasi

$$P = P_1 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh (6). Dengan melakukan cara yang sama seperti di atas didapat P^TBP seperti pada (6) sehingga

$$P^T(A+B)P = P^TAP + P^TBP$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & A_{22} + B_{22} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} + B_{nn} \end{bmatrix}$$

menurut proposisi 4 (v) $A_{ii} \neq 0$ maka berlaku $B_{ii} = 0$, terbukti.

(\Leftarrow) Jelas menurut proposisi 4 (v) \Rightarrow (i), terbukti \square

Masalah invers spektral untuk pasangan-pasangan matriks-matriks tak-negatif dapat ditetapkan dengan membuat pertanyaan sebagai berikut : apa syarat perlu dan cukup untuk suatu polinomial dalam dua variabel

$$p(z_1, z_2) = 1 - \sum_{i+j>0} p_{ij} z_1^i z_2^j$$

ke polinomial karakteristik dari pasangan matriks tak-negatif (A, B) ? Berikut lemma yang buktinya merupakan algoritma untuk memecahkan masalah invers spektral 2D.

Lemma 7

Misalkan $p(z_1, z_2) = 1 - \sum_{i+j>0} p_{ij} z_1^i z_2^j \in R[z_1, z_2]$;

r dan s bilangan-bilangan bulat yang memenuhi $\deg_{z_1}(p) \leq r, \deg_{z_2}(p) \leq s, \deg(p) \leq r + s - 1$ maka terdapat pasangan matriks (A, B) berukuran $(r + s - 1) \times (r + s - 1)$ yang memenuhi

$$\Delta_{A,B}(z_1, z_2) = p(z_1, z_2) \tag{7}$$

setiap koefisien p_{ij} tak-negatif dan setiap elemen (A, B) dapat dipilih tak-negatif.

Proposisi 8

Jika semua koefisien-koefisien p_{ij} dalam polinomial

$$p(z_1, z_2) = 1 - \sum_{i+j>0} p_{ij} z_1^i z_2^j \in R[z_1, z_2]$$

tak-negatif, maka terdapat pasangan matriks tak-negatif (A, B) dengan $A + B$ tak-tereduksi sehingga

$$\Delta_{A,B}(z_1, z_2) = p(z_1, z_2)$$

Bukti :

Misalkan $\deg_{z_1}(p) \leq r, \deg_{z_2}(p) \leq s$ dan yang pertama $r + s > \deg(p)$, menurut lemma 7 dapat dikonstruksikan dua matriks tak-negatif A dan B berdimensi $(r + s - 1) \times (r + s - 1)$ sehingga memenuhi

$$\Delta_{A,B}(z_1, z_2) = p(z_1, z_2).$$

Dalam matriks $M = A + B$,

paling sedikit terdapat elemen tak-nol $m_{1,k}, k \geq r$ dalam baris pertama dan elemen tak-nol $m_{i+1,1}$ adalah 1 dengan bilangan-bilangan bulat positif $i, j \leq r + s - 1$. Digraph $D(M)$ merupakan suatu *path* dari vertex i ke vertex j dengan $i, j \leq r + s - 1$ dua bilangan bulat positif. Jika $i < j$ maka trivial, tetapi jika $i > j$ maka terdapat

$$\gamma = \{(i, i-1), (i-1, i-2), \dots, (1, k), (k, k-1), \dots, (\rho+1, \rho),$$

$$(\rho, r + s - 1), (r + s - 1, r + s - 2), \dots, (j + 1, j)\}$$

untuk itu matriks M tak-tereduksi. Jika $\deg(p) = r + s$, anggap $p(z_1, z_2)$ mempunyai derajat formal $r + 1$ dalam z_1 , kemudian dengan mengulangi konstruksi seperti pada lemma 7 akan didapat matriks tak-negatif berdimensi $r + s$ terbukti.

Jelas bahwa M tak-tereduksi, sebab andaikan M tereduksi maka berlaku $[M^k]_{ij} = 0$ untuk suatu bilangan bulat positif k , padahal diketahui bahwa $[M^k]_{ii} = 1$ kontradiksi, jadi M harus tak-tereduksi dengan demikian bukti lengkap \square

Syarat cukup untuk memecahkan masalah invers spektral adalah masalah invers spektral 1D. Keadaan khusus yang harus menjadi perhatian :

1. Dalam $p(z_1, 0) = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i z_1)$ dan

$$p(0, z_2) = \prod_{i=1}^n (1 - \mu_i z_2)$$

dimana $\mu_i, \lambda_i \in R, \forall i$ dan memenuhi syarat Suleimanova untuk memecahkan masalah invers spektral 1D

$$\lambda_1 > 0 \geq \lambda_i \quad \forall i \geq 2 \text{ dan } \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0 \tag{8}$$

$$\mu_1 > 0 \geq \mu_i \quad \forall i \geq 2 \text{ dan } \sum_{i=1}^n \mu_i > 0$$

2. Faktor-faktor $p(z_1, z_2)$ ke dalam perkalian faktor linier sebagai

$$p(z_1, z_2) = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i z_1 - \mu_i z_2) \tag{9}$$

Ketika (8) dan (9) dipenuhi maka masalah invers spektral 2D terpecahkan dan suatu penyelesaian (A, B) dapat dibangun dengan $A + B$ tak-tereduksi.

Dengan menggunakan lemma 7 dan proposisi 8, akan dilakukan reduksi untuk membuktikan koefisien-koefisien p_{ij} pada $p(z_1, z_2)$ tak-negatif, diberikan dalam proposisi berikut

Proposisi 9

Misalkan λ_i dan $\mu_i, i = 1, 2, \dots, n$ bilangan-bilangan real yang memenuhi (8) maka dalam polinomial

$$p(z_1, z_2) = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i z_1 - \mu_i z_2) = 1 - \sum_{i+j=1}^n p_{ij} z_1^i z_2^j$$

semua koefisien-koefisien p_{ij} tak-negatif.

Sebagai akibat dari proposisi-proposisi di atas tersedia algoritma untuk memperlihatkan contoh tak-trivial dari pasangan positif.

Contoh 1

Misalkan diberikan polinomial :

$$p(z_1, z_2) = (1 - z_1 - z_2) \left(1 + \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2} \right) \left(1 + \frac{z_1}{4} \right),$$

disini akan ditentukan pasangan matriks (A, B) berukuran 4×4 , dengan jumlahan tak-tereduksi yang memenuhi (7). Pasangan (A, B) mempunyai sifat L dan nilai-nilai eigen mereka mengikuti orde spektra $\Lambda(A) = (1, -1/2, -1/4, 0)$ dan $\Lambda(B) = (1, -1/2, 0, 0)$, kemudian $p(z_1, z_2)$ dapat ditulis kembali sebagai

$$p(z_1, z_2) = 1 - \left(\frac{3}{4}z_1 + \frac{1}{2}z_2 \right) - \left(z_1 \left(\frac{5}{8}z_1 + \frac{5}{8}z_2 \right) + z_2 \left(\frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 \right) \right) - \left(z_1^2 \left(\frac{1}{8}z_1 + \frac{1}{8}z_2 \right) + z_1 z_2 \left(\frac{1}{8}z_1 + \frac{1}{8}z_2 \right) \right)$$

menggunakan koefisien-koefisien dari bentuk-bentuk linear untuk konstruksi matriks-matriks A dan B menurut lemma 7 maka

$$L(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/8z_1 - 1/8z_2 & 0 \\ -z_1 & 1 & -5/8z_1 - 5/8z_2 & -1/8z_1 - 1/8z_2 \\ 0 & -z_2 & 1 - 3/4z_1 - 1/2z_2 & -1/2z_1 - 1/2z_2 \\ 0 & 0 & -z_2 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

memenuhi $\det L(z_1, z_2) = p(z_1, z_2)$ maka diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 1 & 0 & 5/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 5/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

KESIMPULAN

Dari pembahasan dapat disimpulkan bahwa :

1. Dekomposisi spektral dari pasangan matriks *finite memory* dan *separable* sistem 2D dapat dibentuk seperti ditunjukkan pada proposisi 1 dan proposisi 5.
2. Pasangan matriks (A, B) tak-negatif berukuran $n \times n$ yang *finite memory* dan *separable* berturut-turut dengan syarat : $A + B$ tereduksi dan $A, B > 0$, merupakan syarat perlu agar pasangan-pasangan tersebut ko-gradien ke suatu matriks segitiga atas.
3. Pasangan (A, B) mempunyai sifat L dimana A matriks diagonal dengan elemen-elemen berbeda dan B matriks tak-negatif sesuai dengan partisi A

maka (A, B) akan ko-gradien ke suatu matriks segitiga atas.

4. Invers spektral 2D pasangan matriks (A, B) dapat dipecahkan jika memenuhi syarat-syarat Suleimanova untuk invers spektral 1D dan polinomial :

$$p(z_1, z_2) = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i z_1 - \mu_i z_2)$$

DAFTAR PUSTAKA

- Bose, N.K., 1982, *Applied Multidimensional system Theory*, Van Nostrand Reinhold, New York
- Bisiacco, M., 1985, State and output feedback stabilizability of 2D systems, *IEEE Trans. Circ. Sys.*, vol CAS-32, pp. 1246-54.
- Cullen, C.G., 1966, *Matrices and Linear Transformations*, Addison-Wesley Publishing Company.
- Davis P.J., 1979, *Circulant Matrices*, John Wiley & Sons.
- Drazin, M.P, 1950, Some generalizations of matrix commutativity, *Proc. London Math. Soc.*, (3), 1, 222-31.
- Fornasini, E. and Machesini, G., 1976, State-Space Realization Theory Of Two-Dimensional Filters, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, vol. AC-21, 484-492.
- Fornasini, E. and Machesini, G., 1978, Doubly-Indexed Dynamical systems : State-Space Models and Tructural Properties, *Math. Systems .Teory*, vol. 12, 59-72.
- Fornasini, E. and Machesini, G., 1993, 2D state dynamics and geometry of the matrix pairs, in multivariate Analysis, Future Directions, *C.R. Rao ed., Elsevier Sci. Publ.*, pp. 131-53.
- Fornasini, E., Marchesini, G., and Valcher, M.E., 1994, On The Structure of Finite Memory and Separable Two-Dimensional Systems, *Automatica*, vol. 30, 347-350.
- Fornasini, E., and Valcher, M.E., 1994, Matrix Pairs in Two-Dimensional Systems : an Approach Based on Trace Series an Hankel Matrices, *to appear in SIAM J. Contr. Opt.*
- Fornasini, E., 1991, A 2D systems approach to river pollution modelling, *Multid. Sys. Sign. Process.*, 2, pp.233-65
- Frank Ayres, 1974, *Theory and Problems of Matrices*, McGraw-Hill, Inc.
- Grantmacher, F.R., 1960, *The Theory of Matrices*, Chelsea Pub.Co., Vol. 2
- Gilbert W.J., 1976, *Modern Algebra With Applications*, John Wiley & Sons.
- Luenberger, D.G., *Introduction to dynamical systems*, J. Wiley & Sons Inc., 1979.
- Motzkina, T.S., and Taussky, O., 1952, Pairs of Matrices With property L(1), *Trans. Amer. Soc.*, vol. 73. 108-114.
- Orlob, G.T., 1983, *Mathematical Modeling of Water Quality: Steams, Lakes, dan Reservoirs*, International Institute for Applied Systems Analysis.
- Soehakso, R.M.J.T., *Teori Graph*, Diktat .Kuliah MIPA UGM.

- Valcher, M.E., and Fornasini, E., 1994, State Models and Asymptotic Behavior of Two-Dimensional Positive Systems, *to Appear in IMA J. of Appl. Math.*
- Varga, R.S., 1962, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, inc.

Halaman Kosong
(BLANK PAGE)

APLIKASI ALJABAR MAKS-PLUS PADA JALUR TAKSI UNTUK MEMAKSIMUMKAN PENDAPATAN PENGEMUDI TAKSI

DORTEUS LODEWYIK RAHAKBAUW

Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

e-mail: lodewyik@gmail.com

ABSTRAK

Jaringan jalur transportasi pada suatu daerah memegang peranan penting dalam mobilitas masyarakat antar satu daerah, baik antar kota maupun antar tempat yang satu ke tempat yang lain. Berbagai macam alat transportasi digunakan baik alat transportasi umum maupun pribadi. Ditengah aktivitas yang padat masyarakat yang berekonomi menengah kebawah cenderung menggunakan taksi sebagai solusi untuk membantu aktivitas agar tepat waktu, ditengah kepadatan lalu lintas. Jalur taksi pada umumnya lebih bervariasi daripada jalur kendaraan umum karena tidak mempunyai jalur yang ditetapkan. Sopir taksi dalam hal ini cenderung memaksimalkan tarif/ongkos yang didapat untuk itu sering diambil jalur yang dapat memaksimalkan tarif/ongkos tersebut. Dalam paper ini dikonstruksikan model aljabar maks-plus untuk rute/jalur taksi yang dianggap maksimal dan akan ditempuh oleh seorang pengemudi taksi.

Keywords: *graph, jalur taksi, aljabar maks-plus, lintasan kritis*

PENDAHULUAN

Transportasi menjadi alat yang sangat penting dalam mobilitas masyarakat ditengah aktivitasnya sehari-hari. Namun seringkali transportasi seringkali dikaitkan dengan ketepatan waktu yang harus dicapai oleh pengguna alat transportasi.

Dalam paper ini penulis mencoba mengabaikan hal tersebut tetapi akan dikaji jalur taksi yang bisa menghasilkan pendapatan yang maksimal dari seorang pengemudi taksi.

Dengan mengabaikan waktu dan berorientasi pada tarif deterministi pada kajian jalur taksi, akan dikonstruksikan aljabar maks-plus untuk bagaimana pengemudi taksi dapat mencapai tujuan penumpang dengan memilih jalur-jalur yang dirasa sangat menguntungkan.

TINJAUAN PUSTAKA

Aljabar Maks-Plus

Elemen dasar dari aljabar maks-plus adalah bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$. Operasi dasar dari aljabar maks-plus adalah *maximum* (dinotasikan dengan simbol \oplus , “dibaca :

O-plus”) dan *tambah* (dinotasikan dengan simbol \otimes , “dibaca O-times”) dengan dua operasi tersebut diperoleh :
 $x \oplus y = \max(x, y)$ dan $x \otimes y = x + y$

Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$, dimana $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$. Catatan: $x \oplus \varepsilon = x = \varepsilon \oplus x$ untuk semua $x \in \mathbb{R}_\varepsilon$. Operasi \oplus dan \otimes yang diperluas ke matriks sebagai berikut :

$$(A \oplus B)_{i,j} = a_{i,j} \oplus b_{k,j} = \max(a_{i,j}, b_{k,j})$$

dan

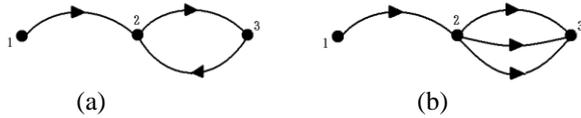
$$(A \otimes B)_{i,j} = \bigoplus_k a_{i,j} \otimes b_{k,j} = \max_k(a_{i,j}, b_{k,j})$$

untuk semua i, j .

Definisi Graph Dalam Aljabar Max-Plus

- Diberikan **graph berarah** $G = (V, A)$ dengan V adalah suatu himpunan berhingga tak kosong yang anggotanya disebut **titik (vertex)** dan A adalah suatu himpunan pasangan terurut titik-titik pada **garis (edge)** V .
- Suatu barisan garis dari $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{l-1}, i_l)$ dari suatu garis dinamakan **path**.
- Suatu path dikatakan **elementer** apabila tidak ada titik terjadi dua kali dalam path tersebut.
- Suatu **sirkuit** adalah path elementer tertutup yaitu $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{l-1}, i_l)$.

- Suatu graph berarah $G = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}$ dikatakan *strongly connected* jika untuk setiap $i, j \in V, i \neq j$, terdapat suatu lintasan dari i ke j . Suatu graph yang memuat sirkuit disebut **graph siklik**, sedangkan suatu graph yang tidak memuat sirkuit disebut graph tak siklik.



Gambar 1. (a) merupakan path elementer, gambar (b) bukan path elementer

- Graph berarah G dikatakan berbobot jika setiap garis $(j, i) \in A$ dikawankan dengan suatu bilangan real A_{ij} . Bilangan real A_{ij} disebut bobot garis (j, i) , dilambangkan dengan $w(j, i)$. Graph preseden dari matriks $A \in R_{\max}^{n \times n}$ adalah graph berarah berbobot $G(A) = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $A = \{(j, i) \mid w(i, j) = A_{ij} \neq \varepsilon, \forall i, j\}$. Sebaliknya untuk setiap graph berarah berbobot $G = (V, A)$ selalu dapat didefinisikan suatu matriks $A \in R_{\max}^{n \times n}$ dengan $A_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{jika } (i, j) \in A \\ \varepsilon, & \text{jika } (i, j) \notin A \end{cases}$, yang disebut matriks bobot graph G .
- Bobot suatu path $P = (i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{l-1}, i_l)$ dinotasikan oleh $|P|_w$ dan diberikan oleh:
$$|P|_w = w(i_1, i_2) + w(i_2, i_3) + \dots + w(i_{l-1}, i_l) = (a_{i_2, i_1} + a_{i_3, i_2} + \dots + a_{i_l, i_{l-1}})$$
- Panjang dari path P / banyak garis dalam path P dinotasikan oleh $|P|_l$
- Bobot rata-rata dari path P adalah bobot P dibagi banyak garis dalam path P :
$$\frac{|P|_w}{|P|_l} = \frac{a_{i_2, i_1} + a_{i_3, i_2} + \dots + a_{i_l, i_{l-1}}}{(l - 1)}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pemodelan Jaringan Transportasi (Jalur Taksi)

a. Asumsi pendukung.

Diasumsikan bahwa walaupun penumpang taksi cenderung berkeinginan sampai tepat pada waktunya namun pengemudi taksi selalu memperhitungkan biaya yang nantinya dia terima, sehingga pengemudi taksi akan mengambil jalur yang dirasanya dapat mencapai ongkos/tarif maksimum. Dengan kata lain pengemudi taksi yang menentukan jalur/rute untuk dicapai ke tempat tujuan penumpang.

Dalam kenyataannya seringkali terdapat faktor-faktor pendukung seorang pengemudi taksi mendapatkan tarif/biaya maksimum seperti waktu tunggu saat berada pada lampu lalu lintas, waktu tunggu pada saat terjadi kemacetan, kecepatan taksi yang diatur oleh pengemudi taksi, lama perjalanan dan sebagainya.

Dan sebaliknya faktor-faktor yang kurang mendukung adalah permintaan rute oleh penumpang kepada pengemudi taksi yang dapat meminimumkan pendapatan pengemudi taksi tersebut

Dalam paper ini dikaji sebuah contoh jalur taksi dengan ongkos/tarif deterministik yang sudah ditentukan

Tabel 1. Jalur dan biaya taksi

Kode	dari	Tujuan	Tarif (puluh ribu Rupiah)
1	K1	K1	5
2		A	3
3		A	4
4		K2	0
5		K3	7
6	K2	K1	0
7		A	4
8		K2	1
9		K3	0
10	K3	K1	0
11		A	2
12		K2	6
13		K3	2
14	A	K1	4
15		K2	6
16		K3	3

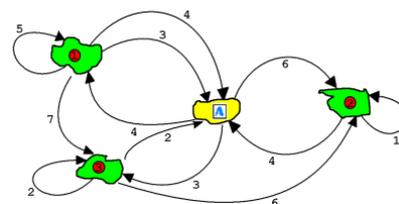
b. Contoh jalur taksi

Pada bagian ini akan dikaji jalur taksi yang digunakan oleh seorang pengemudi taksi dalam memaksimalkan pendapatan yang didapat. Dalam contoh ini dibuat graph berarah (*directed graph*), dimana ada 4 node yang menunjukkan tempat yakni kota 1(K₁), kota 2(K₂), kota 3(K₃), dan pelabuhan udara (*Airport*)(A), dimana bobot-bobot dari masing-masing garis(*edge*) menunjukkan tarif/ongkos rute.

Dari Tabel 1 terlihat pada kode 2, dan 3 terdapat jalur yang sama untuk itu pengemudi akan selalu memakai jalur yang dirasanya maksimum terhadap tarif/ongkos.

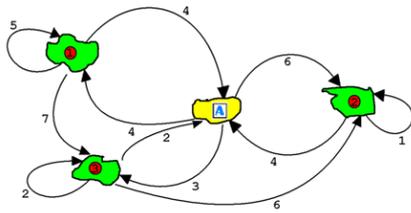
$$2 \oplus 3 = \text{maks}(3, 4) = 4$$

Dengan demikian jalur dari kode 2 akan selalu diabaikan oleh pengemudi taksi dan juga jalur dari kode 4, 6, 9, 10 karena menghasilkan tarif yang minimum



Gambar 2

Graph di atas diubah menjadi graph seperti di bawah ini karena diambil maksimum dari *path* yang sama.



Gambar 3

Graph berarah yang dibangun berdasarkan jalur taksi yang diberikan pada tabel

Dari graph diatas didapat matriks bobot sebagai berikut :

$$A = \begin{matrix} & k_1 & a & k_2 & k_3 \\ \begin{matrix} k_1 \\ a \\ k_2 \\ k_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & 4 & \epsilon & 7 \\ 4 & \epsilon & 6 & 3 \\ \epsilon & 4 & 1 & \epsilon \\ \epsilon & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Berdasarkan graph di atas dapat dibuat path berdasarkan kode sebagai berikut : 1, 3, 5, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, dan 16

Kajian Aljabar Maks-Plus dengan menggunakan Scilab

a. Menentukan *Maximum Cycle Mean* (MCM)

Diketahui ada 13 jalur siklus/sirkuit, dan secara manual didapat :

Tabel 2

No	JALUR SIRKUIT	CYCLE MEAN
1	K1-K1	5/1=5
2	K1-A-K1	(4⊗4)/2=4
3	K1-K3-A-K1	(7⊗2⊗4)/3= 4,33...
4	K1-K3-K2-A-K1	(7⊗6⊗4⊗4)/4=5,25
5	K2-K2	1/1=1
6	K2-A-K2	(6⊗4)/2=5
7	K2-A-K3-K2	(4⊗3⊗6)/3=4,33...
8	K2-A-K1-K3-K2	(4⊗4⊗7⊗6)/4=5,25
9	K3-K3	3/1=3
10	K3-A-K3	(2⊗3)/2=2,5
11	K3-A-K1-K3	(2⊗4⊗7)/3=4,33...
12	K3-K2-A-K3	(6⊗4⊗3)/3=4,33...
13	K3-K2-A-K1-K3	(6⊗4⊗4⊗7)/4=5,25

Pada dasarnya no. 3 dan 11 adalah bentuk siklus yang sama (misalkan siklus a), no. 4, 8, dan 13 juga sama (misalkan siklus b), no.7 dan 12 juga sama (misalkan siklus c), ditambah 1, 2, 5, 6, 9, 10 jadi ada 9 bentuk siklus/sirkuit. Dan *Maximum Cycle Mean* (MCM) dari 9 bentuk siklus/sirkuit adalah $(a \oplus b \oplus c \oplus 1 \oplus 2 \oplus 5 \oplus 6 \oplus 9 \oplus 10)$
 $= maks(a, b, c, 1, 2, 5, 6, 9, 10)$

$$= maks(4.33, 5.25, 4.33, 5, 4, 1, 5, 3, 10) = 5.25$$

Dengan menggunakan scilab :

```
-->t=-%inf
t =
-Inf
-->A=[5 4 t 7;4 t 6 3;t 4 1 t;2 6 2]
A =
5. 4. -Inf 7.
4. -Inf 6. 3.
-Inf 4. 1. -Inf
-Inf 2. 6. 2.
-->mcm=maxpluscmm(A)
mcm =
5.25
```

b. Lintasan kritis

Menentukan lintasan kritis adalah hal yang sangat penting bagi seorang pengemudi taksi, karena pada lintasan kritis tersebut akan dipakai sebagai jalur yang akan sering digunakan oleh pengemudi taksi.

Dengan mendapatkan maksimum dari semua siklus mean (*maximum cycle mean*), akan didapat rute yang menyebabkan tarif tersebut dalam hal ini bobot pada graph A menjadi maksimum.

Hal ini mengandung arti bahwa pada siklus tersebut pengemudi taksi dapat memaksimalkan tarif yang dicapai yakni sebesar 210.000 yakni no 4, 8 dan 13 yang menunjukkan rute masing-masing **K1-K3-K2-A-K1**, untuk berangkat dari kota 1; **K2-A-K1-K3-K2**, untuk berangkat dari kota 2, **K3-K2-A-K1-K3** untuk berangkat dari kota 3.

Berikut implementasi dengan scilab dalam hal menentukan lintasan kritis.

```
-->[l,d,x] = maxplusccir(A)
x =
1. 4. 3. 2.
d =
4.
l =
5.25
```

c. Strongly connected

Untuk mengecek apakah graph A ini *strongly connected* ataukah tidak maka dengan menggunakan tool yang ada pada scilab.

```
s = maxpluscsg(A)
s =
T
```

Didapat jawaban T yang berarti benar (*True*), hal ini berarti graph berarah A yang merupakan konstruksi graph atas jalur/rute taksi adalah *strongly connected*.

KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat di capai adalah :

Untuk memaksimalkan pendapatan pengemudi taksi dalam hal ini tarif/ongkos dari penumpang harus beroperasi pada lintasan kritis dalam hal ini maksimum dari siklus-siklus mean yang ada (*maximum cycle mean*).

Selanjutnya paper ini dapat disempurnakan dengan menggunakan maks-min untuk mendapatkan waktu yang minimum bagi keuntungan penumpang.

DAFTAR PUSTAKA

Stéphane Gaubert and Max Plus, **Methods and Applications of $(\max,+)$ Linear Algebra**, INRIA, Domaine de Voluceau, BP105, 78153 Le Chesnay Cedex, France.

<ftp://ftp.inria.fr/INRIA/publication/publi-pdf/RR/RR-3088.pdf>

Winarni, dan Subiono, *Penjadwalan jalur bus dalam kota dengan aljabar max-plus*, Seminar nasional matematika IV, Institut teknologi sepuluh nopember surabaya, 13 desember 2008

Subiono, (2000), *On classes of min-max-plus systems and their application*, Thesis Ph.D., Technische Universiteit Delft, Delft.

KARAKTERISASI ELEMEN IDEMPOTEN *CENTRAL*

HENRY W. M. PATTY¹, ELVINUS RICHARD PERSULESSY², RUDI WOLTER MATAKUPAN³

^{1,2,3} Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

e-mail: henry_4t00@yahoo.com, richardelvinus@yahoo.com, rwmatakupan@yahoo.com

ABSTRAK

Elemen idempoten e dalam suatu ring R dengan elemen satuan disebut idempotent *central* jika untuk sebarang $r \in R$ berlaku $er = re$. Selanjutnya dibentuk ring eRe yang merupakan subring dengan elemen satuan e . Dimotivasi dari struktur ring eRe akan diselidiki sifat-sifat dalam ring dan modul diantaranya, *indecomposable*, homomorfisma dan radikal Jacobson, dalam kaitannya dengan elemen idempotent *central*. Dalam tulisan ini akan dipelajari karakterisasi

Kata kunci: *indecomposable, homomorfisma, radikal Jacobson, idempoten central*

PENDAHULUAN

Dalam struktur ring R yang komutatif, jika mempunyai suatu elemen idempoten $e \in R$ maka ring R tersebut dapat didekomposisikan (*decomposable*) menjadi hasil kali langsung dari ring Re dan $R(1-e)$. Dilain pihak, terdapat ring yang tidak dapat dinyatakan sebagai hasil kali langsung dari dua ring yang tak nol. Ring ini disebut ring yang tidak dapat didekomposisikan (*indecomposable*). Dalam ring yang *indecomposable* ini, hanya 0 dan 1 yang merupakan elemen idempoten atau sering disebut idempoten trivial.

Sebaliknya dalam teori ring nonkomutatif, elemen idempoten dikenal dengan sebutan idempoten *central*. Hal ini berarti suatu ring R yang tak nol disebut *indecomposable* jika ring tersebut tidak memiliki elemen idempoten *central* yang nontrivial. Selanjutnya untuk memahami struktur ring *indecomposable* ini, diperlukan pengetahuan tentang karakteristik elemen idempoten *central* yang dalam perkembangannya lebih banyak berperan dalam teori ring nonkomutatif dibandingkan dalam teori ring komutatif. Oleh karena itu dalam tulisan ini akan dibahas karakteristik elemen idempoten khususnya elemen idempoten *central*.

TINJAUAN PUSTAKA

Untuk mempelajari karakteristik elemen idempoten *central* ini diperlukan beberapa pengetahuan dasar tentang ring dan modul diantaranya ideal maksimal, homomorfisma, radikal Jacobson dan jumlah langsung (*direct sum*) yang dikaji dari Malik (1997) dan Fuller (1992). Selanjutnya dalam bukunya yang berjudul *A first Course in Noncommutative Rings*, Tsit Yuen Lam (1991) menjelaskan beberapa sifat elemen idempoten *central* dan peranannya dalam struktur ring dan modul. Ring yang dibicarakan dalam tulisan ini adalah ring dengan elemen satuan. Jadi, tidak harus komutatif terhadap operasi pergandaan. Berikut ini diberikan beberapa definisi dan sifat yang melandasi karakterisasi elemen idempoten *central*.

Definisi 1

Suatu elemen $e \in R$ disebut elemen idempoten jika $e^2 = e$.

Selanjutnya diberikan beberapa sifat dalam ideal kanan eR dan $(1-e)R$ dengan asumsi analog untuk ideal kiri Re dan $R(1-e)$.

Proposisi 1.

Misalkan $e \in R$ elemen idempoten dalam R . Suatu ideal kanan eR dan $(1-e)R$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$eR = \{er \mid r \in R\} \text{ dan } (1-e)R = \{(1-e)r \mid r \in R\}$$

Selanjutnya didefinisikan hasil tambah langsung (*direct sum*) dari ideal kanan eR dan $(1-e)R$ sebagai berikut.

Definisi 2.

Misalkan eR dan $(1-e)R$ ideal kanan dalam R maka R disebut *direct sum* dari ideal kanan eR dan $(1-e)R$, dinotasikan $R = eR \oplus (1-e)R$, jika $R = eR + (1-e)R$ dan $eR \cap (1-e)R = \{0\}$.

Berikut ini diberikan definisi dan beberapa sifat dari ideal kanan maksimal dalam suatu ring R dengan asumsi bahwa definisi dan sifat-sifat tersebut juga berlaku untuk ideal kiri maksimal.

Definisi 3.

Ideal kanan $M \subseteq R$ disebut ideal kanan maksimal jika $M \neq R$ dan tidak terdapat suatu ideal kanan $I \subset R$ sedemikian sehingga $M \subset I \subset R$. Selanjutnya, suatu ideal kanan $N \subset R$ disebut ideal kanan minimal jika $N \neq \{0\}$ dan tidak terdapat ideal kanan $J \subset R$ sedemikian hingga $\{0\} \neq J \subset N \subset R$.

Berikut ini diberikan pengertian radikal Jacobson dari suatu ring dalam kaitannya dengan ideal kanan maksimal dengan asumsi yang analog untuk ideal kiri maksimal.

Definisi 4.

Radikal Jacobson dari suatu ring R (dinotasikan $Jac(R)$) adalah irisan dari semua ideal kanan maksimal dalam R . Jadi,

$$Jac(R) = \bigcap \{M \mid M \text{ ideal kanan maksimal dalam } R\}$$

Berdasarkan Definisi 3, dapat dipahami bahwa ideal kanan $M \subseteq R$ disebut ideal kanan maksimal jika terdapat suatu ideal kanan $I \subseteq R$ yang memenuhi sifat $M \subseteq I \subseteq R$ maka berlaku $I = M$ atau $I = R$. Selanjutnya, suatu ideal $I \subseteq R$ disebut ideal sejati jika $I \neq R$.

Selain itu radikal Jacobson dari suatu ring R dapat dipahami dengan bantuan elemen unit dalam ring tersebut, seperti yang termuat dalam sifat berikut ini.

Teorema 1. Jika $y \in Jac(R)$ maka $1-xy$ merupakan unit kiri untuk setiap $x \in R$.

Bukti: Diambil sebarang $y \in Jac(R)$. Akan ditunjukkan $1-xy$ merupakan unit kiri dalam R . Diandaikan terdapat $1-xy$ yang bukan unit kiri dalam R . Artinya $R(1-xy) \subset R$ dan $R(1-xy) \neq R$. Karena ideal

$R(1-xy) \subset R$ termuat dalam suatu ideal maksimal $M \subset R$. Akibatnya, $1-xy \in M$ dan $y \in M$ sehingga diperoleh $1 \in M$. Timbul kontradiksi dengan M sebagai ideal maksimal, maka $1-xy$ merupakan unit kiri dalam R . \square

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bagian ini akan dibahas beberapa sifat elemen idempoten *central* sebagai berikut.

Karakterisasi Elemen Idempoten Central

Misalkan R ring dengan elemen satuan. Jika ideal eR dan $(1-e)R$ berturut-turut merupakan ideal kanan yang dibangun oleh elemen idempoten e dan $1-e$ maka ring R dapat dinyatakan sebagai dekomposisi dari eR dan $(1-e)R$, seperti yang dijelaskan dalam proposisi berikut ini.

Proposisi 2.

Misalkan R ring dengan elemen satuan. Elemen e dan $1-e$ idempoten di R , maka berlaku:

- (1) eR dan $(1-e)R$ ideal kanan dalam R .
- (2) $R = eR \oplus (1-e)R$.

Bukti:

(1) Diambil sebarang $er_1, er_2 \in eR$ dan $s \in R$. Akan ditunjukkan eR ideal kanan dalam R . Diperoleh, $er_1 - er_2 = e(r_1 - r_2) \in eR$ dan $er.s = e(rs) \in eR$. Terbukti eR merupakan ideal kanan dalam R . Analog untuk $(1-e)R$.

(2) Diambil sebarang $a \in R$ dan diketahui e elemen idempoten dalam R . Akan ditunjukkan $R = eR \oplus (1-e)R$. Diperoleh

$$a = ea + a - ea = ea + (1-e)a$$

dengan $ea \in eR$ dan $(1-e)a \in (1-e)R$. Hal ini berarti $R = eR + (1-e)R$. Selanjutnya diambil sebarang $b \in eR \cap (1-e)R$ yang artinya $b = ec$ dan $b = (1-e)d$ untuk suatu $c, d \in R$. Jika digandakan dengan $e \in R$ akan diperoleh $eb = e^2c = ec = b$ dan $eb = e(1-e)d = (e - e^2)d = (e - e)d = 0$. Dengan demikian $b = eb = 0$ atau $eR \cap (1-e)R = \{0\}$. Terbukti $R = eR \oplus (1-e)R$. \square

Berdasarkan Proposisi 2 dapat dinyatakan bahwa, suatu ring R juga merupakan jumlah langsung dari ideal-ideal kiri dalam R yang dibangun oleh elemen idempoten e dan $1-e$ (dinotasikan $R = Re \oplus R(1-e)$). Sedangkan untuk ring $R \neq 0$ yang tidak dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung dari sebarang dua ideal yang tak nol disebut ring *indecomposable*. Ring tersebut hanya memiliki elemen idempoten yang trivial yaitu 0 dan 1.

Selanjutnya, jika e elemen idempoten *central* maka ring $eRe = \{ere \mid r \in R\}$ merupakan subring dengan elemen satuan e . Namun sebelumnya diberikan definisi elemen idempoten *central* sebagai berikut.

Definisi 5.

Suatu elemen idempoten $e \in R$ disebut *central* jika untuk sebarang $r \in R$ berlaku $er = re$. Himpunan semua elemen idempoten *central* dinotasikan dengan $C(R)$.

Proposisi 3.

Jika R ring dengan elemen idempoten *central* e maka $eRe = \{ere \mid r \in R\}$ merupakan subring dengan elemen satuan e .

Bukti:

Diambil sebarang $x_1, x_2 \in eRe$ dengan $x_1 = er_1e$ dan $x_2 = er_2e$, untuk suatu $r_1, r_2 \in R$. Akan ditunjukkan eRe merupakan subring dengan elemen satuan e .

- (i) $x_1 - x_2 = er_1e - er_2e = e(r_1 - r_2)e \in eRe$
(ii) $x_1 \cdot x_2 = (er_1e)(er_2e) = er_1e^2r_2e = e(r_1r_2)e = e(r_1r_2)e \in eRe$

Dari (i) dan (ii) terbukti eRe merupakan subring. Misalkan $e \in eRe$ dengan $e = e \cdot 1 \cdot e$ maka untuk setiap $x \in eRe$ dengan $x = ere$ diperoleh

$$ex = e(ere) = e^2re = ere = x$$

dan

$$xe = (ere)e = ere^2 = ere = x.$$

Terbukti eRe subring dengan elemen satuan e . \square

Berdasarkan Proposisi 3. maka suatu ring eRe dan fRf dapat dinyatakan sebagai berikut.

- (i) $eRe = \{er = r = re \mid r \in R\}$ dan
(ii) $fRf = \{fr = r = rf \mid r \in R\}$ (1)

dengan e dan $f = 1 - e$ berturut-turut merupakan elemen idempoten *central* sekaligus merupakan elemen satuan. Selanjutnya, diberikan proposisi tentang elemen idempoten *central* yang ditinjau dari (1).

Proposisi 4.

Suatu elemen idempoten e merupakan idempoten *central* ($e \in C(R)$) jika dan hanya jika $eRf = fRe = \{0\}$.

Bukti: Diambil sebarang $r \in R$ dan diberikan $e, f \in C(R)$ dengan $f = 1 - e$. Akan ditunjukkan $eRf = fRe = \{0\}$. Diperoleh

$$erf = er(1 - e) = er - ere = er - er = 0$$

dan

$$fre = (1 - e)re = re - ere = re - re = 0.$$

Terbukti $eRf = \{0\} = fRe$.

Sebaliknya, diberikan $eRf = fRe = \{0\}$. Akan ditunjukkan untuk setiap $r \in R$ berlaku $e \in C(R)$ atau $er - re = 0$. Jika $erf = 0$ dengan $f = 1 - e$ maka berlaku $er(1 - e) = 0$ atau $er - ere = 0$. Akibatnya, $er = ere$. Selanjutnya, jika $fre = 0$ maka berlaku $(1 - e)re = 0$ atau $re - ere = 0$. Akibatnya, $re = ere$. Terbukti, $re = ere = er$. \square

Dalam suatu ring R yang memiliki sebarang elemen idempoten e dan e' , dapat ditentukan $Hom_R(eR, e'R)$ sebagai homomorfisma dari eR ke $e'R$. Berikut ini diberikan suatu isomorfisma antara eR dan $e'R$ dengan suatu ring $e'Re$.

Proposisi 5.

Jika diberikan sebarang elemen idempoten e dan e' dalam suatu ring R dan M_R modul kanan atas ring R maka terdapat suatu isomorfisma grup aditif $\lambda: Hom_R(eR, M_R) \rightarrow M_Re$.

Bukti: Diberikan suatu homomorfisma modul, $\theta: eR \rightarrow M_R$. Untuk setiap $r \in R$ dengan $r \neq e$ diperoleh $\theta(er) = m$ sedangkan untuk $r = e$ juga diperoleh $\theta(ee) = m$. Karena e elemen idempoten maka $\theta(e) = m$ sehingga berlaku $\theta(er) = m = \theta(e)$. Selanjutnya, didefinisikan suatu pemetaan $\lambda: Hom_R(eR, M_R) \rightarrow M_Re$ dengan $\lambda(\theta) = me$, untuk setiap $m \in M_R$. Jika $\theta(e) = m$ maka diperoleh $me = \theta(e)e = \theta(e^2) = \theta(e) = m$ atau dengan kata lain $m = me \in M_Re$, sehingga berlaku $\lambda(\theta) = me = m = \theta(e)$.

Akan ditunjukkan λ isomorfisma grup aditif atau $Hom_R(eR, M_R) \cong M_Re$.

- (i) Akan ditunjukkan λ terdefinisi.

Diambil sebarang $\theta_1, \theta_2 \in Hom_R(eR, M_R)$ dengan $\theta_1 = \theta_2$. Akan ditunjukkan $\lambda(\theta_1) = \lambda(\theta_2)$. Jika $\theta_1 = \theta_2$ atau dengan kata lain $\theta_1 - \theta_2 = 0$ maka untuk suatu elemen idempoten $e \in R$ diperoleh $(\theta_1 - \theta_2)e = 0$. Selanjutnya, karena θ suatu homomorfisma modul maka berlaku $\theta_1(e) - \theta_2(e) = 0$ atau $\theta_1(e) = \theta_2(e)$. Mengingat definisi $\theta(e) = \lambda(\theta)$ maka untuk $\theta_1(e) = \theta_2(e)$ diperoleh $\lambda(\theta_1) = \lambda(\theta_2)$. Terbukti, λ terdefinisi.

- (ii) Akan ditunjukkan λ homomorfisma grup.

Diambil sebarang $\theta_1, \theta_2 \in Hom_R(eR, M_R)$.

Diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda(\theta_1 + \theta_2) &= (\theta_1 + \theta_2)e = \theta_1(e) + \theta_2(e) \\ &= \lambda(\theta_1) + \lambda(\theta_2). \end{aligned}$$

Terbukti, λ homomorfisma grup.

- (iii) Akan ditunjukkan λ injektif.

Diambil sebarang $\lambda(\theta_1), \lambda(\theta_2) \in M_R e$ dengan $\lambda(\theta_1) = \lambda(\theta_2)$. Akan ditunjukkan $\theta_1 = \theta_2$. Karena $\lambda(\theta_1) = \lambda(\theta_2)$ atau $\lambda(\theta_1) - \lambda(\theta_2) = 0$ maka untuk suatu homomorfisma λ diperoleh $\lambda(\theta_1 - \theta_2) = 0$. Selanjutnya, karena didefinisikan $\lambda(\theta) = \theta(e)$ maka untuk $\lambda(\theta_1 - \theta_2) = 0$ diperoleh

$$(\theta_1 - \theta_2)e = 0 \text{ atau } \theta_1(e) - \theta_2(e) = 0. \text{ Akibatnya, } \theta_1(e) = \theta_2(e) \text{ atau } \theta_1 = \theta_2. \text{ Terbukti, } \lambda \text{ injektif.}$$

(iv) Akan ditunjukkan λ surjektif.

Diambil sebarang $\theta(e) \in M_R e$. Akan ditunjukkan terdapat $\theta \in \text{Hom}_R(eR, M_R)$ sehingga berlaku $\lambda(\theta) = \theta(e)$. Karena $\theta(e) = m = me = \lambda(\theta)$ maka akan selalu ditemukan $\theta \in \text{Hom}_R(eR, M_R)$ sehingga $\lambda(\theta) = \theta(e)$. Terbukti, λ surjektif.

Berdasarkan bukti (i)-(iv) terbukti bahwa

$$\text{Hom}_R(eR, M_R) \cong M_R e \quad \square$$

Berdasarkan Proposisi 5. diperoleh suatu akibat sebagai berikut.

Akibat 1.

Jika diberikan sebarang elemen idempoten e dan e' dalam suatu ring R maka $\text{Hom}_R(eR, e'R) \cong e'R e$.

Bukti: Pada Proposisi 5 telah dibuktikan bahwa terdapat suatu isomorfisma grup aditif $\lambda: \text{Hom}_R(eR, M_R) \rightarrow M_R e$ atau $\text{Hom}_R(eR, M_R) \cong M_R e$. Dengan asumsi $M_R = e'R$, maka diperoleh $\text{Hom}_R(eR, e'R) \cong e'R e$. \square

Dari Akibat 1 diperoleh suatu akibat sebagai berikut.

Akibat 2.

Untuk suatu idempoten $e \in R$ terdapat suatu isomorfisma ring, $\text{End}_R(eR) \cong eRe$.

Bukti: Diambil sebarang idempoten e dan e' dengan $e = e'$. Akan ditunjukkan $\text{End}_R(eR) \cong eRe$. Berdasarkan Akibat 1 $\text{Hom}_R(eR, e'R) \cong e'R e$. Jika diasumsikan elemen idempoten $e = e'$ maka diperoleh

$$\text{End}_R(eR) = \text{Hom}_R(eR, eR) \cong eRe.$$

Selanjutnya untuk suatu pemetaan $\theta: eR \rightarrow eR$ dengan definisi $\theta(er) = er, \forall r \in R$ serta mengingat Proposisi 5 yaitu $\theta(er) = m = me$ maka untuk suatu pemetaan $\lambda: \text{Hom}(eR, eR) \rightarrow eRe$ diperoleh

$$\lambda(\theta) = ere = \theta(er)e = me = m.$$

Dapat disimpulkan $m \in eRe$ yang artinya $me = m = em$. Akan dibuktikan λ homomorfisma ring. Diambil sebarang $\theta, \theta' \in \text{End}_R(eR)$ maka diperoleh:

$$(i) \quad \lambda(\theta + \theta') = (\theta + \theta')e = \theta(e) + \theta'(e) = \lambda(\theta) + \lambda(\theta')$$

$$(ii) \quad \lambda(\theta'\theta) = \theta'\theta(e) = \theta'(m) = \theta'(em) = \theta'(e)m \\ = \lambda(\theta')\lambda(\theta). \quad \square$$

Berikut ini didefinisikan elemen idempoten yang saling ortogonal dan diberikan beberapa sifat *indecomposable* dalam ring.

Definisi 6.

Dua elemen idempoten $\alpha, \beta \in R$ dikatakan saling ortogonal jika $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$.

Definisi 7.

Suatu ring R disebut *indecomposable* jika ring tersebut tidak memiliki elemen idempoten *central* yang nontrivial atau dengan kata lain hanya 0 dan 1 yang merupakan elemen idempoten *central* dalam R .

Dari sifat ring *indecomposable*, idempoten *central* dan idempoten ortogonal, dapat didefinisikan elemen idempoten yang primitif, namun sebelumnya diberikan suatu proposisi yang mendasari pendefinisian tersebut.

Proposisi 7.

Untuk sebarang idempoten $e \in R$ yang tidak nol, maka beberapa pernyataan berikut ini ekuivalen.

1. eR *indecomposable* sebagai R -modul kanan.
 Re *indecomposable* sebagai R -modul kiri.
2. Ring eRe tidak memiliki idempoten yang non trivial.
3. Elemen e tidak dapat didekomposisikan ke dalam bentuk $\alpha + \beta$ dengan α, β adalah idempoten tidak nol yang saling ortogonal.

Bukti:

(1) \Leftrightarrow (2) Diketahui eR *indecomposable* sebagai R -modul kanan. Akan ditunjukkan ring eRe tidak memiliki idempoten yang nontrivial. Berdasarkan Akibat 2 $\text{End}_R(eR) \cong eRe$ maka ring eRe juga *indecomposable* dengan kata lain ring eRe tidak memiliki idempoten yang nontrivial. Dengan asumsi yang sama dibuktikan untuk pernyataan Re *indecomposable* sebagai R -modul kiri.

(2) \Rightarrow (3) Dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan $e = \alpha + \beta$ dengan α dan β idempoten tak nol yang saling ortogonal maka diperoleh $e\alpha = (\alpha + \beta)\alpha = \alpha^2 + \beta\alpha = \alpha + 0 = \alpha$ dan $e\beta = \alpha(\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta = \alpha + 0 = \alpha$. Diperoleh $\alpha \in eRe$ dan $\alpha \neq 0$ maka kontradiksi dengan (2) karena eRe memuat idempoten yang nontrivial. Pengandaian diingkari, terbukti $e \neq \alpha + \beta$ dengan α dan β idempoten tak nol yang saling ortogonal.

(3) \Rightarrow (2) Dibuktikan dengan kontradiksi. Diandaikan ring eRe memiliki idempoten α yang nontrivial sehingga untuk suatu komplemen idempoten dari α yaitu $\beta = e - \alpha$ dengan

$\beta \in eRe$, akan mempunyai suatu dekomposisi dari idempoten yang ortogonal yaitu $e = \alpha + \beta$. Akibatnya timbul kontradiksi dengan pernyataan (3), sehingga ring eRe tidak mempunyai elemen idempoten yang nontrivial. \square

Berdasarkan Proposisi 7 didefinisikan suatu idempoten primitif sebagai berikut.

Definisi 8.

Suatu elemen idempoten $e \neq 0$ disebut idempoten primitif dari R , jika memenuhi salah satu dari kondisi berikut ini

1. eR indecomposable sebagai R -modul kanan sedangkan Re indecomposable sebagai R -modul kiri.
2. Ring eRe tidak memiliki idempoten yang non trivial.
3. Elemen e tidak dapat didekomposisikan ke dalam bentuk $\alpha + \beta$ dengan α, β adalah idempoten tak nol yang saling ortogonal.

Selanjutnya, struktur $Jac(eRe)$ dan $\bar{e}\bar{R}\bar{e}$ dapat dipahami dengan memanfaatkan teorema homomorfisma ring

Teorema 1.

Diberikan suatu elemen idempotent e dalam R dan $J = Jac(R)$. Diperoleh $Jac(eRe) = J \cap (eRe) = eJe$ dan $eRe / Jac(eRe) \cong \bar{e}\bar{R}\bar{e}$.

Bukti: Diberikan elemen idempoten $e \in R$ dan $J = Jac(R)$.

Akan ditunjukkan:

1. $Jac(eRe) = J \cap (eRe) = eJe$
 2. $eRe / Jac(eRe) \cong \bar{e}\bar{R}\bar{e}$
1. Akan ditunjukkan $Jac(eRe) = J \cap (eRe) = eJe$. Dibuktikan dengan beberapa tahapan sebagai berikut:
 - (i) $r \in Jac(eRe) \Rightarrow r \in J$,
 - (ii) $r \in J \cap (eRe) \Rightarrow r \in eJe$,
 - (iii) $r \in eJe \Rightarrow r \in Jac(eRe)$

Pembuktian seperti berikut:

- (i) Diambil sebarang $r \in Jac(eRe)$. Akan ditunjukkan $r \in J$. Berdasarkan Teorema 1 jika $r \in J = Jac(R)$ maka $1 - yr$ unit dalam R , untuk setiap $y \in R$. Dengan asumsi yang sama maka untuk setiap $r \in Jac(eRe)$ dan $y \in eRe$ berlaku $e - eye.r$ yang merupakan unit dalam eRe . Artinya untuk suatu $b \in eRe$ berlaku $b(e - eye.r) = e$, akibatnya $be(1 - ye.r) = e$. Karena $b \in eRe$ maka $be = b = eb$ sehingga berlaku $b(1 - yer) = e$. Mengingat $y \in eRe$ maka diperoleh $b(1 - yr) = e$. Di lain pihak, jika digandakan dengan yr dari ruas kiri pada

$b(1 - yr) = e$ diperoleh $yrb(1 - yr) = yre = yr$ akibatnya $yrb - yrb.yr = yr$. Diberikan

$$(1 + yrb)(1 - yr) \in R$$

maka berlaku

$$(1 + yrb)(1 - yr) = 1(1 - yr) + yrb(1 - yr) = 1 - yr + yr = 1.$$

Terbukti bahwa terdapat $1 + yrb \in R$ sehingga berlaku $(1 + yrb)(1 - yr) = 1$ atau dengan kata lain $1 - yr$ unit dalam R .

- (ii) Diambil sebarang $r \in J \cap eRe$. Akan ditunjukkan $r \in eJe$. Jika $r \in J \cap eRe$ yang artinya $r \in J$ dan $r \in eRe$ maka berlaku $r = ere$. Sedangkan di lain pihak telah diketahui bahwa $r \in J$ dan mengingat bahwa $J \subseteq R$ maka diperoleh $r = ere \in eJe$.

(iii) Diambil sebarang $r \in eJe \subseteq J$. Akan ditunjukkan $r \in Jac(eRe)$. Berdasarkan Teorema 1 yaitu untuk setiap $y \in eRe$ maka $e - yr$ merupakan unit dalam eRe . Di lain pihak karena $r \in eJe \subseteq J = Jac(R)$ maka $1 - yr$ merupakan unit dalam R , yang artinya terdapat suatu $x \in R$ sehingga berlaku $x(1 - yr) = 1$. Diperoleh $e = e.1.e = ex(1 - yr)e = ex(e - yre) = ex(e - yr) = ex(e^2 - eyr) = exe(e - yr)$.

Dengan kata lain $exe \in eRe$ adalah invers kiri dari $e - yr$ atau $e - yr$ unit di eRe .

2. Akan ditunjukkan $eRe / Jac(eRe) \cong \bar{e}\bar{R}\bar{e}$. Diberikan suatu pemetaan $\delta: eRe \rightarrow \bar{e}\bar{R}\bar{e}$ yang terdefinisi dengan $\delta(ere) = \bar{e}\bar{r}\bar{e}$. Suatu pemetaan δ merupakan homomorfisma ring dari eRe ke $\bar{e}\bar{R}\bar{e}$, yakni untuk sebarang $er_1e, er_2e \in eRe$ diperoleh :

$$(i) \delta(er_1e + er_2e) = \delta(e(r_1 + r_2)e) = \overline{\bar{e}(r_1 + r_2)\bar{e}} = \bar{e}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)\bar{e} = \bar{e}\bar{r}_1\bar{e} + \bar{e}\bar{r}_2\bar{e} = \delta(er_1e) + \delta(er_2e)$$

$$(ii) \delta(er_1e . er_2e) = \delta(er_1e^2r_2e) = \delta(er_1er_2e) = \delta(er_1r_2e) = \overline{\bar{e}(r_1.r_2)\bar{e}} = \bar{e}(\bar{r}_1 . \bar{r}_2)\bar{e} = \bar{e}\bar{r}_1\bar{e} . \bar{e}\bar{r}_2\bar{e} = \delta(er_1e) . \delta(er_2e)$$

Di lain pihak $\delta: eRe \rightarrow \bar{e}\bar{R}\bar{e}$ juga merupakan suatu epimorfisma karena untuk setiap $\bar{e}\bar{r}\bar{e} \in \bar{e}\bar{R}\bar{e}$ dengan masing-masing \bar{e} dan \bar{r} adalah bayangan dari e dan r sehingga berlaku

$$\bar{e}\bar{r}\bar{e} = (e + J)(r + J)(e + J) = ere + J \in \bar{e}\bar{R}\bar{e}.$$

Hal ini berarti untuk setiap $\bar{e}\bar{r}\bar{e} \in \bar{e}\bar{R}\bar{e}$ dapat ditemukan $ere \in eRe$ sehingga berlaku

$\delta(ere) = \bar{e}\bar{r}\bar{e}$. Diperoleh, untuk setiap $ere \in eRe$ berlaku

$$\text{Im}(\delta) = \{ \bar{e}\bar{r}\bar{e} \in \bar{e}\bar{R}\bar{e} \mid \delta(ere) = \bar{e}\bar{r}\bar{e} \} = \bar{e}\bar{R}\bar{e}$$

dan

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\delta) &= \{ ere \in eRe \mid \delta(ere) = \bar{0} \} \\ &= \{ ere \in eRe \mid \bar{e}\bar{r}\bar{e} = \bar{0} \} \\ &= \{ ere \in eRe \mid ere + J = 0 + J \}. \end{aligned}$$

Jika $eRe \in J$ dan $ere \in eRe$ maka $ere \in J \cap eRe$.

Selanjutnya, mengingat bukti (1.i) dan (1.ii), jika $J \cap (eRe) = eJe$ maka $ere \in eJe$ dan $\text{Ker}(\delta) = eJe = \text{rad}(eRe)$. Dengan mengingat teorema utama homomorfisma ring diperoleh

$$eRe / \text{Ker}(\delta) \cong \text{Im}(\delta).$$

Terbukti $eRe / \text{Jac}(eRe) \cong \bar{e}\bar{R}\bar{e}$. \square

Berikut ini diberikan proposisi yang mendasari definisi isomorfisma antara dua elemen idempoten dalam suatu ring R .

Proposisi 8.

Diberikan elemen idempoten $e, f \in R$, maka pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen

1. $eR \cong fR$ sebagai R -modul kanan.
 $Re \cong Rf$ sebagai R -modul kiri.
2. Terdapat elemen $a \in eRf$ dan $b \in fRe$ sedemikian sehingga $e = ab$ dan $f = ba$.
3. Terdapat elemen $a, b \in R$ sedemikian sehingga $e = ab$ dan $f = ba$.

Bukti:

1 \Rightarrow 2 Diberikan $Re \cong Rf$ sebagai modul kanan atas R .

Akan ditunjukkan $e = ab$ dan $f = ba$.

Berdasarkan Proposisi 5, untuk sebarang elemen idempoten e dan f , dengan $eR \cong fR$ dapat ditemukan suatu isomorfisma $\theta: eR \rightarrow fR$ atau $\text{Hom}_R(eR, fR) \cong fRe$ dengan definisi $\theta(e) = b \in fRe$. Sebaliknya untuk suatu pemetaan invers $\theta^{-1}: fR \rightarrow eR$ atau $\text{Hom}_R(fR, eR) \cong eRf$ didefinisikan $\theta^{-1}(f) = a \in eRf$. Karena $b \in fRe$ dengan f, e yang juga merupakan elemen satuan maka berlaku $fb = b = be$ dan untuk setiap $a \in eRf$ berlaku $ea = a = af$ diperoleh

$$\begin{aligned} (\theta^{-1}\theta)(e) &= \theta^{-1}(\theta(e)) = \theta^{-1}(b) = \theta^{-1}(fb) \\ &= \theta^{-1}(f)b = ab, \end{aligned}$$

$$\theta(\theta^{-1}(f)) = \theta(a) = \theta(ea) = \theta(e)a = ba.$$

Dari hasil komposisi, elemen e dipetakan ke ab dan elemen f dipetakan ke ba . Karena $\theta^{-1}\theta = 1$ dan $\theta\theta^{-1} = 1$ maka terbukti $e = ab$ dan $f = ba$.

Bukti $Re \cong Rf$ sebagai R -modul kiri dikerjakan secara analog dengan asumsi $Re \cong Rf$ sebagai modul kiri atas R .

2 \Rightarrow 3 Pernyataan 2 dan 3 adalah pernyataan yang trivial.

3 \Rightarrow 1 Diberikan $a, b \in R$ dengan $e = ab$ dan $f = ba$. Akan ditunjukkan $eR \cong fR$ sebagai modul kanan atas R .

Dipunyai $be = b(ab) = (ba)b = fb \in fR$ dan $af = a(ba) = (ab)a = ea \in eR$.

Selanjutnya, didefinisikan $\theta: eR \rightarrow fR$ dengan $\theta(e) = b \in fR$ sehingga untuk setiap $x \in eR$ diperoleh $\theta(x) = \theta(ex) = \theta(e)x = bx \in fR$.

Didefinisikan juga $\theta^{-1}: fR \rightarrow eR$ dengan $\theta^{-1}(f) = a \in eR$ sehingga untuk setiap $y \in eR$ berlaku $\theta^{-1}(y) = \theta^{-1}(fy) = \theta^{-1}(f)y = ay \in eR$. Karena $\theta(e) = b = fb = be$

dan $\theta^{-1}(f) = a = ea = af$

$$\begin{aligned} \text{diperoleh } \theta^{-1}\theta(e) &= \theta^{-1}(\theta(e)) = \theta^{-1}(be) \\ &= a(be) = (ab)e = ee = e^2 = e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dan } \theta\theta^{-1}(f) &= \theta(\theta^{-1}(f)) = \theta(af) = b(af) \\ &= (ba)f = ff = f^2 = f. \end{aligned}$$

Karena $\theta\theta^{-1} = 1$ dan $\theta^{-1}\theta = 1$, terbukti $eR \cong fR$. \square

Berdasarkan Proposisi 8 dapat didefinisikan isomorfisma antara dua elemen idempoten dalam R sebagai berikut.

Definisi 9.

Elemen idempoten e dikatakan saling isomorfisma dengan idempoten f (dinotasikan $e \cong f$) jika memenuhi salah satu dari kondisi berikut ini.

1. $eR \cong fR$ sebagai modul kanan atas R sedangkan $Re \cong Rf$ sebagai modul kiri atas R .
2. Terdapat elemen $a \in eRf$ dan $b \in fRe$ sedemikian sehingga $e = ab$ dan $f = ba$.
3. Terdapat elemen $a, b \in R$ sedemikian sehingga $e = ab$ dan $f = ba$.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan maka dapat disimpulkan bahwa beberapa karakteristik dari elemen idempotent *central* adalah sebagai berikut:

1. Syarat perlu dan cukup suatu elemen idempoten e merupakan idempoten *central* adalah

$$eRf = fRe = \{0\}.$$

2. Jika diberikan sebarang elemen idempoten e dan e' dalam suatu ring R dan M_R modul kanan atas ring R maka terdapat suatu isomorfisma grup aditif

$$\lambda: \text{Hom}_R(eR, M_R) \rightarrow M_R e.$$

4. Untuk sebarang idempoten $e \in R$ yang tidak nol, maka beberapa pernyataan berikut ini ekuivalen yaitu $eR (Re)$ indecomposable sebagai R -modul kanan (R -modul kiri), ring eRe tidak memiliki idempoten yang non trivial, elemen e tidak dapat didekomposisikan ke dalam bentuk $\alpha + \beta$ dengan α, β adalah idempoten tidak nol yang saling ortogonal.
5. Jika diberikan suatu elemen idempoten e dalam R dan $J = \text{Jac}(R)$ maka diperoleh $\text{Jac}(eRe) = J \cap (eRe) = eJe$ dan $eRe / \text{Jac}(eRe) \cong \bar{e} \bar{R} \bar{e}$.
6. Untuk sebarang elemen idempoten $e, f \in R$, maka beberapa pernyataan berikut ini ekuivalen yaitu: $eR \cong fR (Re \cong Rf)$ sebagai R -modul kanan (R -modul kiri), terdapat elemen $a \in eRf$ dan $b \in fRe$ sedemikian sehingga $e = ab$ dan $f = ba$, terdapat elemen $a, b \in R$ sehingga $e = ab$ dan $f = ba$.

DAFTAR PUSTAKA

- Anderson, W. dan Fuller, K., 1992, *Ring and Categories of Modules*, Springer Verlag, New York.
- Lam, T.Y., 1991, *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer Verlag, New York.
- Malik, D.S., Mordeson, J. M., dan Sen, M. K., 1997, *Fundamentals of Abstract Algebra*, The McGraw-Hill Companies, Inc, New York.

Halaman Kosong (BLANK PAGE)

PENENTUAN JUMLAH MOL UDARA DALAM SELINDER DAN BOLA MENGUNAKAN HUKUM BOYLE-MARIOTTE

(Determining The Number Of Moles Of Air In Cylindrical And Spherical Using The Boyle-Mariotte Law)

MATHEUS SOUISA

Staf Jurusan Fisika Fakultas MIPA Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

ABSTRACT

Has done research on different container and the syringe bulb to determine the number of moles of air. If the gas or air is introduced into the syringe or bulb then the more air is forced into it. The analysis uses Boyle-Mariotte law shows that the number of moles of air in the syringe with constant temperature and number of moles of air at constant volume is a sphere with equal 0.02 mol. Thus two different media (cylindrical and spherical), giving the same number of moles. Obtaining the number of moles show that the application of Boyle-Mariotte is derived from the ideal gas law is appropriate.

Keywords: *The number of moles, cylindrical, spherical, ideal gas*

PENDAHULUAN

Termodinamika merupakan ilmu operasional, yang berhubungan dengan sifat makroskopik yang pada dasarnya dapat diukur. Ilmu ini memprediksi jenis-jenis proses kimia dan fisika yang mungkin terjadi serta menghitung secara kuantitatif sifat-sifat keadaan dari suatu materi. Sifat-sifat keadaan suatu materi yang dapat dilihat berupa suhu, tekanan, volume dan sifat keadaan ini dapat dijabarkan dalam suatu persamaan matematika yang disebut persamaan keadaan. Persamaan keadaan yang paling sederhana yaitu persamaan gas ideal (Nurbury, 2000:226). Satu jenis gas dikatakan ideal apabila gaya tarik-menarik antar molekul gas diabaikan. Dalam menganalisis sistem termodinamika, biasanya ditemukan dengan melakukan eksperimen, sehingga terlebih dahulu diperlukan pengertian mengenai sifat fisis berbagai bahan, seperti gas maupun udara.

Gas akan berbentuk sesuai dengan wadah yang ditempatinya, semakin besar massa suatu gas semakin besar pula volume dari gas tersebut. Massa suatu gas biasanya dinyatakan dalam jumlah mol. Jumlah mol suatu gas diperoleh dari besar massa total gas berbanding terbalik dengan massa molekul dari gas tersebut. Massa gas dan massa molekul gas itu berbeda kalau massa gas menyatakan ukuran zat tetapi massa molekul adalah massa yang diukur pada skala relatifnya.

Kalau gas atau udara di masukkan atau di pompa ke dalam suatu balon atau alat penyemprot (*syringe*) maka makin banyak udara yang dipaksa masuk ke dalam, makin besar balon tersebut. Hal ini berarti bahwa kalau suhu dan tekanan konstan, volume udara yang menempati ruang tertutup (*balon/syringe*) akan bertambah dengan perbandingan lurus dengan massa dari udara yang ada. Perbandingan ini dapat dibuat menjadi suatu persamaan dengan memasukkan konstanta perbandingan yang disebut jumlah mol (Giancoli, 1998 *terjemahan* Hanum, 2001:462). Dan juga kalau udara dipaksa masuk ke dalam suatu bola, berarti memberikan molekul udara lebih banyak ke dalam bola dengan volume bolanya tidak berubah (volume konstan), selanjutnya bola berisi molekul udara menempati suatu ruang yang didinginkan atau dipanaskan dengan tekanan tertentu, maka menghasilkan suatu perbandingan yang akan menghasilkan jumlah mol. Karena dari kedua kasus ini, kalau tekanan, suhu, dan volume diketahui maka jumlah udara yang dipaksa masuk ke dalam sebuah benda berbentuk selinder dalam hal ini tabung penyemprot (*syringe*) dan berbentuk bola.

Penelitian menyangkut dengan kasus mendasar telah banyak dilakukan, namun untuk mengkaji jumlah mol pada tabung untuk suhu tetap maupun mengkaji jumlah mol pada bola untuk volume tetap dengan menggunakan rumus gas ideal berdasarkan hukum Boyle-Mariotte dan rumus Gay-Lussac merupakan hal yang baru untuk diteliti

(Anonymous, 2009:3). Jumlah mol untuk kedua kasus ini dapat ditentukan secara grafik dari variasi tekanan dan volume untuk suhu konstan, dan variasi tekanan dan suhu untuk volume konstan. Penggambaran data secara grafik dilakukan dengan menggunakan *software DataStudio*. *DataStudio* dimanfaatkan untuk memplot seluruh data hasil pengamatan untuk nantinya menghasilkan suatu grafik, dan selanjutnya grafik ini di-*fitting* untuk mendapatkan garis lurus agar dapat menentukan nilai kemiringan (*slope*), selanjutnya nilai ini dijadikan untuk menentukan jumlah mol.

METODE PENELITIAN

1. Hukum Gas

Misalkan dipunyai suatu kuantitas yang tetap dari suatu gas di dalam sebuah tangki, maka dapat diubah suhu atau volume dari gas itu. Dapat ditemukan bahwa untuk sembarang gas pada massa jenis yang cukup rendah, maka tekanan p dikaitkan kepada suhu T dan volume V dengan pola spesifik. Suatu gas yang diperlakukan seperti ini dinamakan gas ideal. Dan persamaan yang mengkaitkan kuantitas ini dinamakan hukum gas ideal atau persamaan keadaan untuk gas ideal. Digunakan istilah "ideal" karena gas riil tidak mengikuti hukum gas ideal dengan tepat, terutama pada tekanan tinggi (dan massa jenis) atau ketika gas dekat dengan titik cair atau titik didih, (Giancoli, 1998 *terjemahan* Hanum 2001:463). Menurut Kane and Sternheim (1976) *terjemahan* Silaban, (1988:452), bahwa hukum gas ideal sebenarnya mengikhtisarkan tiga macam eksperimen. Dari tiga macam eksperimen ini menghasilkan tiga hukum gas yaitu hukum Boyle-Mariotte, hukum Charles, dan hukum Gay-lussac, (Renreng 1983:289).

Hukum-hukum gas ini, diperoleh dengan bantuan teknik yang sangat berguna di sains, yaitu menjaga satu atau lebih variabel tetap konstan untuk melihat akibat dari perubahan satu variabel saja. Hukum-hukum ini sekarang dapat digabungkan menjadi satu hubungan yang lebih umum antara tekanan p , volume V dan suhu T dari gas dengan jumlah tertentu:

$$pV \propto T \quad (1)$$

Hubungan ini menunjukkan bagaimana besarnya p , V , atau T akan berubah ketika yang lainnya diubah. Hubungan ini mengecil menjadi hukum Boyle-Mariotte, hukum Charles, dan hukum Gay-Lussac, ketika suhu, tekanan, dan volume berturut-turut dijaga konstan.

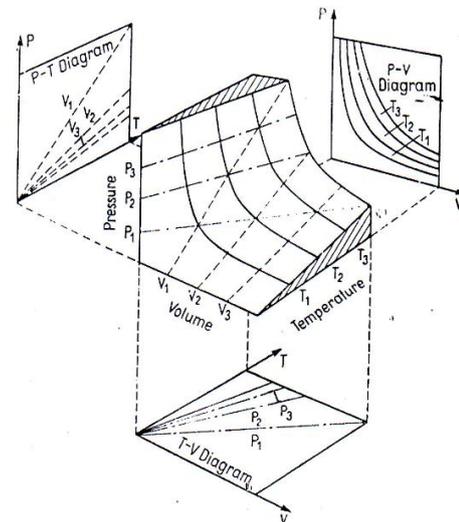
2. Persamaan Keadaan Gas Ideal

Volume V yang ditempat suatu zat yang massanya m tertentu bergantung pada tekanan p yang diderita zat yang bersangkutan, dan pada suhunya T . Setiap zat ada hubungannya tertentu dalam hal besaran-besaran ini. Hubungan tertentu ini dinamakan persamaan keadaan zat yang bersangkutan (Sears and Zemansky, 1962 *terjemahan* Soedarjana dan Achmad, 1994:406). Secara matematika persamaan ini ditulis sebagai berikut:

$$f(m, V, p, T) = 0 \quad (2)$$

Persamaan keadaan gas yang paling sederhana adalah persamaan keadaan gas pada tekanan rendah, hal

ini berlaku untuk segala macam gas adalah sama. Gas ideal didefinisikan sebagai satu bagian dari seluruh tumbukkan yang terjadi antara atom-atom yang elastik sempurna, dimana gaya tarik antar molekul diabaikan karena sedemikian kecil (Anonim, 2010:2). Untuk mewakili hukum gas ideal, maka secara grafik dibangun diagram p - V - T trimatra (*three dimensional*), sebagaimana disajikan pada Gambar 1 (Frauenfelder and Huber, 1966:313).



Gambar 1. Permukaan trimatra mewakili keadaan pada suatu gas ideal

Pada gambar ini di gambarkan isometrik suatu bagian permukaan p - V - T trimatra, dan proyeksi ketiganya (Sears and Salinger, 1980:27) antara lain:

- Bidang suhu konstan ($T = \text{konstan}$) membagi permukaan didalam *equilateral hyperbolas*, sehingga $pV = \text{konstan}$ (hukum Boyle-Mariotte).
- Bidang tekanan konstan ($p = \text{konstan}$) membagi permukaan dalam bentuk garis lurus, jadi kemiringan bidang T - V meningkat dengan meningkatnya tekanan, sehingga $V/T = \text{konstan}$ (hukum Gay-Lussac).
- Bidang volume konstan ($V = \text{konstan}$) juga membagi permukaan dalam bentuk garis lurus, jadi kemiringan bidang p - T sebanding dengan V , maka $P/T = \text{konstan}$, (Sears and Salinger, 1980:27).

Menurut Blatt (1986:269) dan Nurbury (2000:226), menyatakan bahwa gas ideal dapat dirumuskan dalam tiga variabel yaitu tekanan (p), volume (V), dan suhu (T) yang disebut sebagai kombinasi rumusan tunggal dari hukum Boyle-Mariotte dan hukum Gay-Lussac (Anonymous, 2009:2; Zemansky and Dittman, 1982 *terjemahan* Liong, 1986:120). Untuk gas ideal, tekanan, suhu, dan volume dihubungkan oleh:

$$pv = RT \quad \text{atau} \quad pV = nRT \quad (3)$$

dimana:

v = volume molar (m^3/mol)

V = volume yang diberikan oleh n mol (m^3)

R = konstanta gas umum
($= 8,314 \text{ JK}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} = 1,99 \text{ kal} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)

T = suhu (K)

n = jumlah mol (mol).

Persamaan (3) merupakan persamaan keadaan gas ideal atau hukum gas ideal (Kittel and Kroemer, 1996:164; Blatt, 1986:269). Persamaan ini, menurut Kittel and Kroemer (1996:77), kadang-kadang ditulis sebagai:

$$pv = N_A kT \text{ atau } pV = nN_A kT = NkT \quad (4)$$

dimana:

N = jumlah total molekul gas dalam volume

N_A = bilangan Avogadro, (molekul/mol)

k = konstanta Boltzmann ($R/N_A = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$)

Nilai konstanta gas dapat diperoleh dengan mengevaluasi pV/nT untuk gas pada batas tekanan nol. Namun demikian, nilai yang lebih tepat dapat diperoleh dengan mengukur kecepatan suara didalam gas tekanan rendah dan mengekstrapolasikan nilainya ke tekanan nol atau limit tekanan mendekati nol (Zemansky and Dittman, 1982 *terjemahan* Liong, 1986:118).

3. Jumlah Mol

Selain Konstanta gravitasi dalam persamaan gas ideal terdapat beberapa istilah kimia penting, yaitu massa atom relatif, bilangan Avogadro dan mol. Massa atom relatif adalah massa suatu unsur yang dinyatakan sebagai perbandingan massa satu atom suatu unsur terhadap massa satu atom lain. Massa molekul relatif adalah jumlah seluruh massa atom relatif dari atom-atom penyusun unsur atau senyawa tersebut (Anonim, 2010:3).

Menurut Ohanian (1985:471), menyatakan bahwa hukum gas ideal dapat dinyatakan dalam jumlah molekul. Hukum ini memberikan hubungan sederhana diantara parameter makroskopik dari sifat-sifat gas. Jumlah mol (n) dalam suatu gas sama dengan massa gas (m) dibagi dengan berat molekulnya (M_r) (Sears, 1944 *terjemahan* Soedarjana 1986:402). Dari uraian di atas diperoleh hubungan mol (n), massa (m), dan jumlah partikel (N) (Anonymous, 2009:3) sebagai berikut:

$$m = nM_r \quad \text{atau} \quad n = \frac{m}{M_r}$$

$$N = nN_A \quad \text{atau} \quad n = \frac{N}{N_A} \quad (5)$$

dimana:

M_r = massa molekul relative (g/mol)

m = massa molekul (gram)

n adalah jumlah mol atau konsentrasi (Kittel and Kroemer, 1996:77; Alonso and Finn, 1980:419) sehingga dapat ditulis sebagai:

$$n = \frac{\text{massa, (gram)}}{\text{massa molekul, (g/mol)}}$$

atau

$$n = \frac{\text{volume, (m}^3\text{)}}{\text{volume per mol, (m}^3\text{/mol)}} = \frac{V}{V_m} \quad (6)$$

dimana:

V_m = volume molar gas atau volume kontainer, (m^3).

Di bawah kondisi-kondisi standar, satu mole gas ideal menempati 22,4 liter (Kane and Sternheim, 1976 *terjemahan* Silaban, 1988:456). Maka menurut Blatt

(1986:270), jumlah mol gas atau udara dapat ditulis dalam bentuk persamaan sebagai berikut:

$$n = \frac{273 pV}{22,4T} = 12,2 \frac{pV}{T} \quad (7)$$

dimana:

p = tekanan, (atmosfir)

V = volume, (liter)

T = suhu, (kelvin).

Persamaan ini terjadi pada kondisi suhu dan tekanan standar, yaitu suhu $0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$ dan tekanan 1 atm dengan menempati volume 22,4 liter. Jumlah mol disebut juga sebagai faktor kompresibilitas, dimana menggambar suatu sistem volumetrik (Abbott and van Ness, 1972).

Penelitian dilakukan untuk menentukan jumlah mol udara dalam *syringe* dengan memperoleh terlebih linieritas dari volume terhadap tekanan pada suhu konstan, dinyatakan dari:

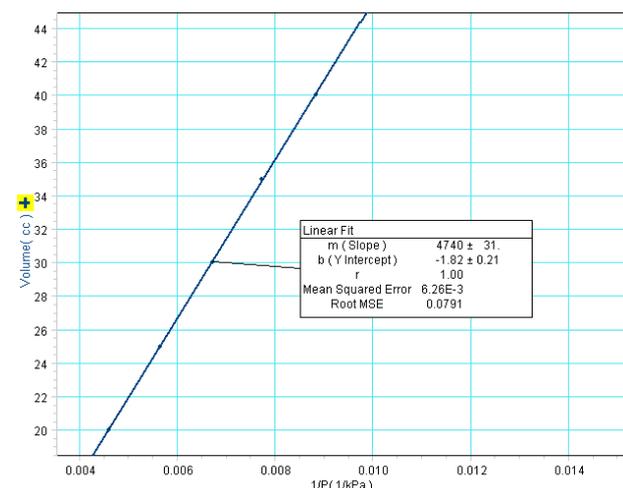
$$V = (nRT) \frac{1}{p} \quad (8)$$

Sedangkan linieritas tekanan terhadap suhu dengan volume bola konstan menghasilkan jumlah mol udara dalam bola dinyatakan dengan hubungan berikut:

$$p = \left(\frac{nR}{V} \right) T \quad (9)$$

HASIL PENELITIAN

Hasil pengumpulan data untuk pengamatan pada *syringe* hukum gas ideal, penggunaan *syringe* dengan suhu konstan dan penggunaan bola dengan volume konstan direkam dengan *DataStudio* menampilkan hubungan volume terhadap invers tekanan pada suhu konstan, dan hubungan antara tekanan terhadap suhu untuk volume konstan seperti tampilan gambar 2 dan gambar 3.



Gambar 2. Grafik hubungan antara volume terhadap invers tekanan pada $T = \text{konstan}$

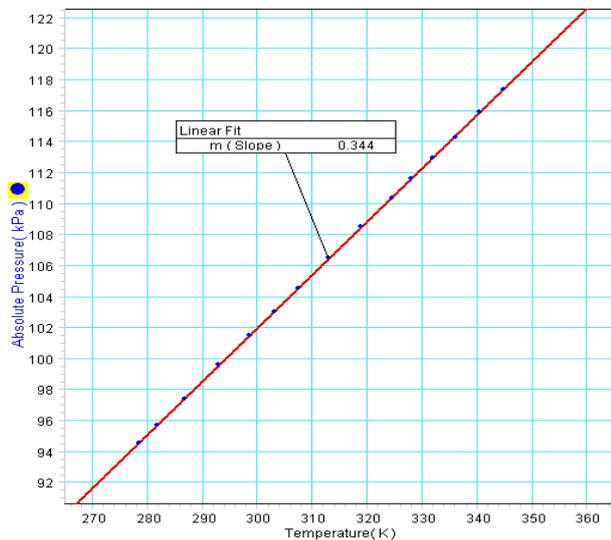
Dengan diperoleh suhu awal $T_1 = 298,54 \text{ K}$, tekanan awal $p_1 = 100,9 \text{ kPa}$, suhu akhir $T_2 = 316,78 \text{ K}$ dan tekanan akhir $p_2 = 208,84 \text{ kPa}$ dapat ditentukan perbandingan (*ratio*) volume *syringe* adalah $\frac{V_1}{V_2} = 1,951 \cong 2$

maka $V_1 = 2V_2$. Berdasarkan gambar 2 dapat ditentukan jumlah mole (n) udara terbaik pada *syringe* dengan suhu konstan adalah

$$n_1 = \bar{n}_1 \pm \Delta n_1 = (0,0188350 \pm 0,0000123) \text{ mol}$$

atau

$$n_1 \cong 0,02 \text{ mol}$$



Gambar 3. Grafik hubungan antara tekanan terhadap suhu (P - T) pada $V = \text{konstan}$

Berdasarkan Gambar 3 dapat ditentukan jumlah mole (n) udara terbaik pada bola dengan volume konstan adalah

$$n_2 = \bar{n}_2 \pm \Delta n_2 = (0,022643 \pm 0,000000) \text{ mol}$$

atau

$$n_2 \cong 0,02 \text{ mol}$$

PEMBAHASAN

Dengan melakukan pengamatan pada alat penyemprot (*syringe*) semacam suatu alat suntik berbentuk silinder dan bola menggunakan rumus gas ideal atas dasar hukum Boyle-Mariotte dan hukum Gay-Lussac untuk memperoleh jumlah mol udara yang terkandung di dalam *syringe* dan bola tersebut, maka setelah dianalisis ratio volume dari *syringe* diperoleh bahwa volume awal sebelum diberikan *plunger* dua kali lebih besar dari volume akhir. Hal ini berlaku jika suhu dan tekanan awal lebih besar dari suhu dan tekanan akhir pada saat proses dilakukannya *plunger*. Jadi semakin mengecil suhu dan tekanan selama proses *plunger* berakhir, akan dapat memperkecil rasio volume *syringe*. Dengan demikian apabila volume gas dijaga agar selalu konstan, maka ketika tekanan gas bertambah, suhu mutlak gas-pun ikut-ikutan bertambah demikian sebaliknya ketika tekanan gas berkurang, suhu mutlak gas pun ikut-ikutan berkurang, hal cocok dengan yang dikembangkan oleh Joseph Gay-Lussac (Anonymous, 2009:3). Jika suhu gas meningkat dari keadaan awal T_1 menjadi T_2 , bila tekanan juga berubah dari keadaan p_1 menjadi p_2 ,

sedangkan massa udara dan komposisi molekul udara tetap, maka hukum Gay-Lussac atau hukum Charles dapat diterima pada penelitian ini.

Sesuai Gambar 2, dapat dijelaskan bahwa semakin besar volume, maka tekanan juga semakin besar. Jadi volume dan tekanan berubah secara linear, jika suhu udara dalam *syringe* konstan. Dengan demikian hasil kali volume dan tekanan ini walaupun hampir konstan pada suhu tertentu, agak berbeda-beda dengan berubahnya tekanan. Kurva dari p - V sebetulnya berupa garis hiperbolik ekilateral yang hampir-hampir bersinggungan dengan sumbu p dan sumbu V , dan kurva ini menunjukkan keadaan pada suhu konstan. Maka pada kasus ini udara dimampatkan dalam *syringe* dari volume yang besar menjadi volume kecil. Hal ini juga dapat digunakan pada pompa sepeda atau ban mobil. Jadi udara ketika dimampatkan perlu dihilangkan panas agar suhunya konstan, dan karena itu dalam penelitian ini proses dilakukan secara perlahan-lahan supaya seluruh udara tidak mengalami kenaikan suhu. Akibat pemampatan secara perlahan itu udara mengalami aras keadaan yang mendekati keadaan setimbang, dan proses ini disebut proses *quasi static* atau proses hampir statik yang berlangsung selama proses isothermal.

Sedangkan berdasarkan gambar 3, semakin tinggi tekanan udara yang diberikan kepada bola, maka suhu-pun semakin besar. Jadi tekanan dan suhu berubah secara linear, jika volume bola konstan. Kurva dari p - T sebetulnya berupa garis lurus yang menunjukkan keadaan pada volume konstan. Maka pada kasus ini jika udara dimampatkan dalam bola dari tekanan yang besar menjadi tekanan kecil, dengan meletakan bola pada suhu yang berubah dari besar menjadi kecil. Jadi udara dimampatkan dalam bola, dengan prosesnya secara isovolume (proses dimana volume konstan).

Dengan persamaan (5 dan 6), jumlah mol, n dalam udara adalah sama dengan massa udara itu dibagi dengan berat molekulnya. Karena itu rapat udara dapat dinyatakan sebagai massa per satuan volume udara. Karena itu rapat udara tergantung pada tekanan, suhu dan titik berat molekulnya. Sesuai dengan kerapatan ini dapat dibentuk jumlah mol udara dari tekanan, suhu dan volume. Maka pada kasus ini telah dianalisis jumlah mol udara pada *syringe* dengan suhu konstan adalah sebesar 0,019 mol. Sedangkan jumlah mol udara pada bola (bola yang digunakan disebut pada nol mutlak) dengan menjaga agar volume konstan adalah sebesar 0,023 mol. Jumlah mol udara pada *syringe* dan bola, terdapat selisihnya sangat kecil, dan apabila jumlah mol ini diperbesar pada dua angka di belakang koma, maka diperoleh jumlah mol, $n = 0,02$ mol. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa hasil penelitian membuktikan bahwa pada kedua media yang berbeda (silinder dan bola), memberikan jumlah mol yang sama. Maka massa udara dapat diperhitungkan baik untuk oksigen maupun hidrogen, dan massa dari gas lainnya. Aplikasi penggunaan hukum Boyle-Mariotte dengan menentukan jumlah mol semacam ini dapat diterapkan pada media yang lain seperti ban sepeda/mobil, bola basket atau bola kaki, dan lain sebagainya.

KESIMPULAN

Sesuai dengan pembahasan maka kesimpulan dalam penelitian ini adalah

1. Jumlah mol udara dalam selinder (*syringe*) dengan suhu konstan adalah $(0,0188350 \pm 0,0000123)$ mol.
2. Jumlah mol udara dalam bola dengan volume konstan adalah $(0,022643 \pm 0,000000)$ mol.

DAFTAR PUSTAKA

- Alonso, M. and E. J. Finn, 1980., *Fundamental University Physics*, 2nd edition. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts.
- Anonymous, 2009. Ideal Gas Law., Intruccion Manual and Experiment Guide for the Pasco scientific, USA.
- Blatt, F. J. 1986., *Principles of Physics*, 2nd edition. Allyn and Bacon, Inc., Boston.
- Frauenfelder, P. and P. Huber., 1966. *Introduction to Physics: Mechanics, Hydrodynamics, Thermodynamics*, volume 1. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts.
- Giancoli, D. 1998, *terjemahan* Hanum Y. 2001. *Fisika* Jilid 1 edisi kelima., Erlangga, Jakarta.
- Kane, J. W. and M.M. Sternheim., 1976. *terjemahan* P. Silaban, 1988., *Fisika*, edisi ke tiga. AIDAB dan ITB, Bandung
- Kittel, C and H. Kroemer, 1996. *Thermal Physics* 4th edition. W.H. Freeman and Company, San Francisco.
- Nurbury, J. W. 2000., *Elementary Mechanics & Thermodynamics*. Physics Department University of Wisconsin-Milwaukee, Wilwaukee.
- Ohanian, H. C. 1985., *Physics, volume one*. W.W.Norton & Company, New York.
- Renreng, A., 1984, *Asas-asas Ilmu Alam Universitas* Jilid I., Badan Kerjasama Perguruan Tinggi Negeri Indonesia Bagian Timur., Ujung Pandang.
- Sears, F. W. 1944., *terjemahan* Soedarjana P.J. 1986., *Mekanika, Panas dan Bunyi*, Cetakan keenam. Binacipta, Bandung.
- Sears, W. F, and G. L. Salinger. 1980., *Thermodynamics, Kinetic Theory, and Statistical Thermodynamics*, 3rd edition. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts.
- Sears, W. F, and M.W. Zemansky. 1962, *terjemahan* Soedarjana dan A. Achmad, 1994., *Fisika Untuk Universitas 1: Mekanika, Panas dan Bunyi*. Cetakan ke delapan, Binacipta, Bandung.

Halaman Kosong
(BLANK PAGE)

APROKSIMASI DISTRIBUSI WAKTU HIDUP YANG AKAN DATANG
(*Approximations of the Future Lifetime Distribution*)

THOMAS PENTURY¹, RUDY WOLTER MATAKUPAN², LEXY JANZEN SINAY³

¹Guru Besar Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

^{2,3}Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

e-mail: thomypentury@yahoo.com, rwmatakupan@yahoo.com, lexyjk@gmail.com

ABSTRACT

This paper give an analitical technique to approximate future lifetime distributions. Approximations of the future lifetime distribution based on the shifted Jacobi polynomials, and it yielded the sequences of a exponentials combination. The results of approximations of the future lifetime distribution in this cases study based on Makeham's Law. It is very accurate in the case study.

Keywords: *approximations, future lifetime distribution, shifted Jacobi polynomials, exponentials combination, Makeham's law*

PENDAHULUAN

Dalam matematika dan statistika, bentuk eksponensial sangat penting dalam penerapannya. Secara khusus, bentuk eksponensial digunakan dalam membentuk fungsi-fungsi khusus untuk menentukan suatu distribusi peluang. Salah satu distribusi peluang yang menggunakan bentuk eksponensial adalah distribusi eksponensial. Distribusi ini memberikan suatu kemudahan dalam berbagai penghitungan.

Penulisan ini memberikan suatu cara untuk mengaproksimasi distribusi peluang dari suatu kombinasi eksponensial. Dengan demikian, masalah yang dikemukakan dalam penulisan ini adalah mengkonstruksi suatu bentuk aproksimasi distribusi waktu hidup yang akan datang (*future lifetime*) ke dalam bentuk kombinasi eksponensial dan kemudian memperlihatkan keakuratan dari hasil-hasil aproksimasi tersebut secara numerik.

TINJAUAN PUSTAKA

Pada umumnya bentuk dari kombinasi eksponensial merupakan suatu bentuk kombinasi dari fungsi kepadatan peluang distribusi eksponensial. Secara numerik bentuk kombinasi eksponensial tersebut memiliki kemudahan untuk diterapkan. Hal ini dikarenakan distribusi eksponensial memberikan suatu penghitungan yang sangat sederhana, sehingga mudah untuk dapat

diaplikasikan ke berbagai bidang seperti teori resiko, teori antrian, teori keuangan, teori aktuaria, dan lain-lain. Salah satu sifat penting dari kombinasi eksponensial adalah suatu bentuk yang *dense* dalam himpunan distribusi peluang atas $[0, \infty)$.

Bentuk kombinasi eksponensial dari aproksimasi distribusi peluang dapat dibentuk dengan berbagai metode. Suatu metode aproksimasi distribusi peluang dengan menggunakan sifat-sifat dari polinomial Jacobi merupakan sesuatu bentuk yang konstruktif untuk mengaproksimasi distribusi peluang. Hasil yang diperoleh dari aproksimasi distribusi peluang ini merupakan suatu fungsi distribusi yang terdiri atas barisan-barisan yang berbentuk kombinasi eksponensial, yang mana barisan-barisan tersebut merupakan barisan-barisan yang konvergen. (Dufresne, 2006)

Selain ulasan beberapa pustaka mengenai penulisan ini, pada bagian ini akan diberikan beberapa simbol dan teori-teori dasar yang akan digunakan dalam pembahasan. Berikut ini akan diberikan definisi dari beberapa fungsi khusus. Sebelumnya, simbol Pochhammer untuk suatu bilangan a dinotasikan dengan $(a)_n$, didefinisikan seperti berikut,

$$(a)_0 = 1, (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1), n = 1, 2, \dots$$

Dengan demikian, fungsi hipergeometri Gauss yang dinotasikan dengan ${}_2F_1(\bullet, \bullet, \bullet; \bullet)$, dapat didefinisikan seperti berikut,

$$\begin{aligned}
 {}_2F_1(a, b, c; z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \\
 &\int_0^1 (1-zt)^{-a} t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} dt \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{a}{n} \binom{b}{n} z^n}{\binom{c}{n} n!}
 \end{aligned}$$

dengan $|z| < 1, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$.

Berikut akan diberikan ulasan singkat tentang distribusi waktu hidup yang didasarkan atas hukum Makeham. Misal X adalah variabel random kontinu yang mengikuti usia hidup seseorang (dari kelahiran sampai kematian). Untuk usia hidup x , diberikan percepatan mortalitas yang didasarkan atas hukum Makeham seperti berikut

$$\mu(x) = A + Bc^x, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

Bentuk ini sering disebut sebagai *hazard rate* atau *failure rate*.

Kemudian berdasarkan hukum Makeham, maka dapat diperoleh fungsi *survival* dari distribusi Makeham seperti berikut,

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \exp\left\{-\int_0^x \mu(y) dy\right\} = \exp\left\{-\int_0^x (A + Bc^y) dy\right\} \\
 &= \exp\left\{-\left[Ay + B\left(\frac{c^y - 1}{\log c}\right)\right]_0^x\right\} \\
 &= \exp\left\{-Ax - B\left(\frac{c^x - 1}{\log c}\right)\right\} \\
 &= \exp\left\{-Ax - m(c^x - 1)\right\}, \text{ dengan } m = \frac{B}{\log c}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Distribusi Waktu Hidup Yang Akan Datang

Misal variabel random X memiliki distribusi waktu hidup. Dengan demikian, x adalah usia hidup dari seseorang yang dinotasikan dengan (x) . Waktu hidup yang akan datang (*future lifetime*) dari (x) adalah $X - x$ yang dinotasikan dengan $T(x)$ atau T_x , atau untuk lebih simpel cukup ditulis dengan notasi T ; merupakan variabel random yang bergantung pada (x) . Berikut akan diberikan cdf dari T , yaitu

$$F(t) = P(T \leq t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (2)$$

Bentuk cdf dari T yang diberikan pada persamaan (2) merupakan peluang (x) meninggal dalam jangka waktu t tahun. Bentuk ini sering dinotasikan dengan ${}_tq_x$. Dengan demikian, peluang (x) untuk hidup selama t tahun adalah

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = P(T > t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Karena ${}_tq_x$ adalah suatu cdf untuk variabel random T , maka ${}_tp_x$ merupakan ccdf dari T , yang dapat ditulis sebagai $\bar{F}_T(t)$.

Perhatikan bahwa $\bar{F}_T(t)$ merupakan peluang (x) dapat hidup mencapai $x+t$ tahun, sehingga dapat diperoleh hubungan antara fungsi *survival* $S(x)$ dan ccdf $\bar{F}_T(t)$ seperti berikut:

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_T(t) &= P(T > t) = P(X - x > t | X > x) \\
 &= P(X > x + t | X > x) \\
 &= \frac{S(x+t)}{S(x)}, \text{ untuk setiap } x, t \in \mathbb{R}_+ \quad (3)
 \end{aligned}$$

2. Kombinasi Eksponensial dari Aproksimasi Distribusi Peluang

a. Kombinasi Eksponensial

Berikut ini, akan diberikan bentuk umum dari suatu kombinasi eksponensial dengan mendefinisikan sebuah fungsi yang berbentuk

$$f(t) = \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j e^{-\lambda_j t} \mathbf{1}_{\{t>0\}} \quad (4)$$

dimana $\{a_j\}, \{\lambda_j\}$ adalah konstan. Fungsi ini adalah fungsi densitas peluang (pdf) jika

- (a) $\sum_{j=1}^n a_j = 1$;
- (b) $\lambda_j > 0$, untuk setiap j ;
- (c) $f(x) \geq 0$, untuk setiap $x \geq 0$.

Kondisi (a) dan (b) menyatakan bahwa fungsi $f(\bullet)$ terintegral untuk 1 atas \mathbb{R}_+ , namun tidak untuk kondisi (c). Jika $a_j > 0$ untuk semua j , maka persamaan (4) disebut sebuah *mixture of exponentials* atau disebut juga sebagai distribusi hiper-eksponensial.

Teorema 1 memperlihatkan kekonvergenan dari barisan variabel random yang mana pdf dari variabel random tersebut merupakan suatu kombinasi eksponensial. Bukti dari Teorema 1 dapat di lihat di Sinay (2010).

Teorema 1.

- (a) Misal T variabel random non negatif. Maka terdapat suatu barisan variabel random $\{T_n\}$ masing-masing dengan suatu pdf yang diberikan oleh suatu kombinasi eksponensial dan sedemikian sehingga T_n konvergen dalam distribusi ke T .
- (b) Jika distribusi T tidak mempunyai atom, maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t < \infty} |F_T(t) - F_{T_n}(t)| = 0$$

b. Polinomial Jacobi Teralihkan

Pada umumnya, bentuk polinomial Jacobi dapat didefinisikan seperti berikut

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} {}_2F_1\left(-n, n + \alpha + \beta + 1, \alpha + 1; \frac{1-x}{2}\right),$$

untuk $n = 0, 1, \dots$ dan $\alpha, \beta > -1$. Diketahui juga bahwa polinomial Jacobi ortogonal atas interval $[-1, 1]$, untuk fungsi bobot

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta.$$

Kemudian bentuk polinomial Jacobi teralihkan (*shifted Jacobian polynomials*) dapat diturunkan seperti berikut:

$$\begin{aligned} R_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= P_n^{(\alpha, \beta)}(2x-1) \\ &= \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} {}_2F_1(-n, n + \alpha + \beta + 1, \alpha + 1; 1-x) \\ &= \sum_{j=0}^n \rho_{nj} x^j, \end{aligned}$$

dimana ${}_2F_1$ adalah fungsi hipergeometri Gauss dan

$$\rho_{nj} = \frac{(-1)^n (\beta + 1)_n (-n)_j (n + \lambda)_j}{(\beta + 1)_j n! j!}.$$

Dengan demikian, polinomial Jacobi teralihkan ortogonal atas $[0, 1]$, dengan fungsi bobotnya adalah

$$w^{(\alpha, \beta)}(x) = (1-x)^\alpha x^\beta.$$

Sifat-sifat dari polinomial Jacobi teralihkan dapat diberikan untuk suatu fungsi $\phi(\cdot)$ yang terdefinisi atas $(0, 1)$ (termasuk semua fungsi kontinu dan terbatas) sedemikian sehingga,

$$\begin{aligned} w^{(\alpha, \beta)}(x) &= (1-x)^\alpha x^\beta, \\ c_n &= \frac{1}{h_n} \int_0^1 \phi(x) (1-x)^\alpha x^\beta R_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx, \\ h_n &= \int_0^1 (1-x)^\alpha x^\beta \left[R_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right]^2 dx \\ &= \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{(2n + \lambda) n! \Gamma(n + \lambda)} \end{aligned}$$

c. Aproksimasi Distribusi Waktu Hidup Yang Akan Datang

Berdasarkan teori *shifted Jacobian polynomials* yang diberikan pada bagian sebelumnya, maka teori tersebut dapat diterapkan ke dalam suatu distribusi peluang atas \mathbb{R}_+ dengan cara seperti berikut ini.

Misal $F(t)$ adalah cdf, dan misal $\bar{F}(t) = 1 - F(t) = \mathbf{P}(T > t)$. $\bar{F}(t)$ merupakan cdf (komplemen cdf). $\bar{F}(t)$ sering disebut juga sebagai fungsi *survival*. Jika $\bar{F}(0) = 1$ dan $\bar{F}(\infty) = 0$, untuk $0 \leq t < \infty$. Misal T menyatakan waktu sampai kematian dari usia hidup x , maka $\bar{F}(t) = {}_t p_x$.

Diketahui bahwa $r > 0$,

$$g(x) = \bar{F}\left\{-\frac{1}{r} \log(x)\right\}, \quad 0 < x \leq 1, \quad g(0) = 0.$$

Pemetaan yang terjadi dari bentuk ini merupakan pemetaan $[0, \infty)$ pada $(0, 1]$, yang mana $t = 0$ berkorespondensi dengan $x = 1$, dan $t \rightarrow \infty$ berkorespondensi dengan $x \rightarrow 0+$. Diketahui juga bahwa $\bar{F}(\infty) = 0$, maka dapat diperoleh sedemikian rupa sehingga $g(0) = 0$.

Misal parameter-parameter α, β, p dan $\{b_k\}$ diketahui sedemikian sehingga, dengan menerapkan *shifted Jacobian polynomials* dapat diperoleh

$$g(x) = x^p \sum_{k=0}^{\infty} b_k R_k^{(\alpha, \beta)}(x), \quad 0 < x \leq 1.$$

Ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) &= g(e^{-rt}) \\ &= e^{-prt} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sum_j \rho_{kj} e^{-jrt} \\ &= \sum_j \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \rho_{kj} \right) e^{-(j+p)rt}. \end{aligned}$$

Bentuk di atas memiliki kesamaan dengan bentuk (4), jika $\lambda_j = (j + p)r$, untuk $j = 0, 1, 2, \dots$. Jika $p > 0$, suatu kombinasi eksponensial dapat diperoleh dengan cara pemotongan jumlahan dari deret di atas. Berdasarkan bentuk dari deret yang diberikan di atas, maka konstanta $\{b_k\}$ dapat ditemukan seperti berikut:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{h_k} \int_0^1 x^{-p} g(x) R_k^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^\alpha x^\beta dx \quad (5) \\ &= \frac{r}{h_k} \int_0^{\infty} e^{-(\beta-p+1)rt} (1-e^{-rt})^\alpha R_k^{(\alpha, \beta)}(e^{-rt}) \bar{F}(t) dt. \end{aligned}$$

Dengan demikian, bentuk (5) merupakan kombinasi dari bentuk

$$\int_0^{\infty} e^{-(\beta-p+j+1)rt} (1-e^{-rt})^\alpha \bar{F}(t) dt, \quad j = 0, 1, \dots, k$$

Jika $\alpha = 0$, maka dapat diperoleh

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \bar{F}(t) dt = -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} \bar{F}(t) d(e^{-st}) = \frac{1}{s} [1 - \mathbf{E}e^{-st}],$$

dengan $s > 0$

Hal ini berarti, konstanta $\{b_k\}$ dapat diperoleh dengan menggunakan transformasi Laplace dari distribusi T .

Teorema berikut ini merupakan konsekuensi langsung dari *shifted Jacobian polynomials*.

Teorema 2. Misal $\alpha, \beta > -1$, $\bar{F}(\cdot)$ kontinu atas $[0, \infty)$ dan diberikan fungsi berikut ini.

$$e^{prt} \bar{F}(t)$$

yang memiliki sebuah limit yang berhingga untuk t menuju tak hingga, untuk beberapa $p \in \mathbb{R}$ (hal ini selalu benar di mana $p \leq 0$). Maka berlaku

$$\bar{F}(t) = e^{-prt} \sum_{k=0}^{\infty} b_k R_k^{(\alpha, \beta)}(e^{-rt}) \quad (6)$$

Untuk setiap $t \in (0, \infty)$ dan konvergen seragam atas setiap interval $[a, b]$, untuk $0 < a < b < \infty$.

Bukti lihat Sinay (2010)

Tidak semua distribusi terkondisi dalam Teorema 2. Hasil dalam teorema berikut tidak membutuhkan asumsi ini.

Teorema 3. Misal $\alpha, \beta > -1$ dan untuk beberapa $p \in \mathbb{R}$ dan $r > 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-(\beta+1-2p)rt} (1-e^{-rt})^{\alpha} \bar{F}(t)^2 dt < \infty$$

(ini selalu benar jika $p < \frac{\beta+1}{2}$). Maka

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left[\bar{F}(t) - e^{-prt} \sum_{k=0}^N b_k R_k^{(\alpha, \beta)}(e^{-rt}) \right]^2 e^{-(\beta+1-2p)rt} (1-e^{-rt})^{\alpha} dt = 0$$

Bukti lihat Sinay (2010).

Pemotongan jumlahan dari deret yang diperoleh dengan menggunakan metode ini bukanlah fungsi distribusi yang sebenarnya. Ini merupakan suatu aproksimasi dari bentuk ccdf distribusi T . Fungsi yang diperoleh dari metode ini, bisa lebih kecil dari 0 atau lebih besar dari 1, atau fungsi tersebut mungkin saja turun pada beberapa interval.

3. Implementasi Numerik

Hasil-hasil yang diperoleh pada bagian ini didasarkan atas hukum Makeham seperti yang diberikan pada persamaan (1), dengan menggunakan asumsi parameter-parameter seperti berikut:

$$A = 0.0007; \quad B = 5 \times 10^{-5}; \quad c = 10^{0.04},$$

yang mengikuti Bowers et al (1997).

a. Aproksimasi Distribusi Waktu Hidup Yang Akan Datang

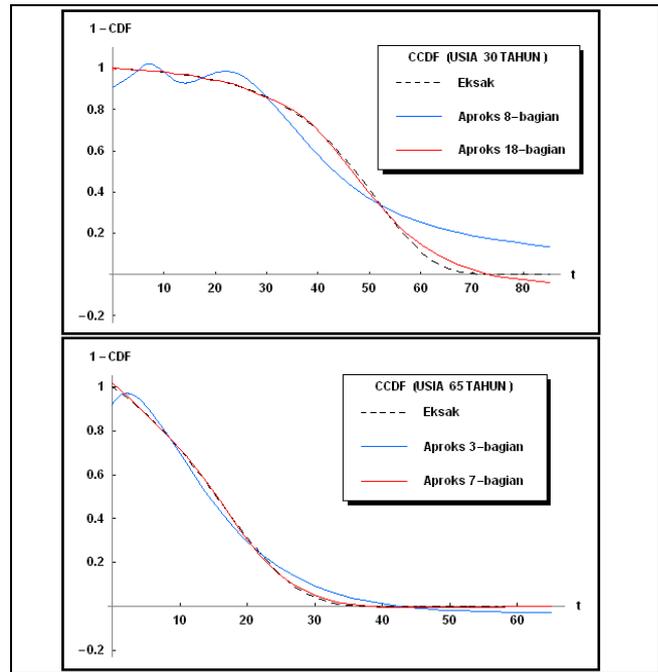
Hasil aproksimasi yang diperoleh pada bagian ini menggunakan persamaan (6), dengan menggunakan parameter-parameter berikut $\alpha = \beta = 0, p = 0.2, r = 0.08$.

Berdasarkan persamaan (3), maka dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \\ &= e^{1.09648^x [0.0005429 - 0.0005429(1.09648^t)] - 0.0007t} \end{aligned}$$

dengan $t \in \mathbb{R}_+$. Hasil ini dapat diterapkan pada persamaan (6) untuk usia hidup $x = 30$ dan $x = 65$, dengan $N = 18$. Hasil secara visual dapat dilihat pada Gambar 1.

Dengan demikian, tingkat ketelitian pada saat $N = 18$ cukup baik (lihat Tabel 1).



Gambar 1. Distribusi waktu hidup yang akan datang

Dari Gambar 1, dapat dilihat bahwa aproksimasi yang digunakan untuk mengaproksimasi distribusi waktu hidup yang akan datang sangat akurat. Dengan demikian, hasil aproksimasi sangat akurat untuk diterapkan.

Untuk melihat tingkat ketelitian dari hasil aproksimasi dari distribusi waktu hidup yang akan datang untuk beberapa N yang berbeda dapat dilihat pada Tabel 1, dimana tingkat ketelitian semakin baik untuk usia hidup 65 tahun, dan untuk nilai yang semakin besar.

Tabel 1
Estimasi tingkat ketelitian

N	$\ F - \hat{F}_N\ $	
	(30)	(65)
3	0.41	0.082
5	0.3	0.043
7	0.198	0.0198
10	0.0798	0.0065
18	0.043	0.001

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil-hasil penelitian yang diberikan dalam penulisan ini, maka dapat disimpulkan bahwa Bentuk aproksimasi ccdf (fungsi *survival*) dari distribusi waktu hidup yang akan datang adalah

$$\bar{F}(t) = e^{-prt} \sum_{k=0}^{\infty} b_k R_k^{(\alpha, \beta)}(e^{-rt}),$$

yaitu dengan melakukan pemotongan terhadap jumlahan dari deret tersebut. Misal pemotongan deret di atas dalam

N bagian, maka hasil dari aproksimasi tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\bar{F}(t) \approx \sum_{j=0}^N c_j e^{-\lambda_j t}$$

dengan $\lambda_j = (j + p)r$, $j = 0, 1, \dots, N$.

Dengan demikian, bentuk aproksimasi yang dihasilkan adalah suatu bentuk kombinasi eksponensial. Tingkat ketelitiannya semakin membaik jika N semakin meningkat.

Hasil-hasil yang diberikan dalam penulisan ini dapat digunakan untuk penghitungan nilai-nilai anuitas hidup kontinu (bentuk eksak) maupun anuitas hidup stokastik. Hal ini dikarenakan oleh hasil yang didapat secara numerik sangat akurat.

DAFTAR PUSTAKA

- Bowers, N. L. Jr., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., dan Nesbitt, C. J., 1997, *Actuarial Mathematics*. edisi kedua, Society of Actuaries, Schaumburg, IL.
- Dufresne, D., 2006, *Fitting Combinations of Exponentials to Probability Distributions*, To Appear in Applied Stochastic Models in Business and Industry.
- Dufresne, D., 2007, *Stochastic Life Annuities*, North American Actuarial Journal.
- Sinay, L. J., 2010, *Anuitas Hidup yang didasarkan atas Kombinasi Eksponensial dari Aproksimasi Distribusi Waktu Hidup Yang Akan Datang*, Tesis pada Program Studi S2 Matematika Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Barekeng terbit dua kali dalam setahun yaitu Bulan Maret dan Desember. *Barekeng* menerima naskah dalam bentuk hasil penelitian, catatan penelitian (*note*) atau artikel ulasan balik (*review/ minireview*) dan ulasan (*feature*) baik dalam bahasa Indonesia maupun dalam bahasa Inggris yang berkaitan dengan bidang Matematika dan Terapannya. Naskah yang dikirimkan merupakan naskah asli yang belum pernah diterbitkan di media manapun.

PENGIRIMAN NASKAH

Naskah dikirimkan kepada:

Redaksi *Barekeng*

Jurusan Matematika

Fakultas MIPA

Universitas Pattimura

Jl. Ir. M. Putuhena, Poka-Ambon

Email: jurnalbarekeng@gmail.com

Naskah yang dikirimkan harus dalam bentuk naskah cetak (*hard copy*) dan naskah lunak (*soft copy*), disertai dengan alamat korespondensi lengkap dan alamat *email* yang dapat dihubungi.

Naskah cetak (*hard copy*):

Naskah cetak dikirim sebanyak satu eksemplar dengan format pengetikan menggunakan *Microsoft Word* seperti berikut:

- Naskah diketik 1 spasi pada kertas HVS Ukuran A4 dengan batas tepi 2 cm dan berbentuk 2 kolom dengan jarak antar kolom 0.5 cm. Tipe huruf *Times New Roman* berukuran 10 point.
- Jumlah halaman maksimum 12 halaman termasuk Lampiran (Gambar dan Tabel). Setiap halaman diberi nomor secara berurutan pada tepi kanan atas. Untuk keterangan Lampiran: Tipe huruf *Times New Roman* berukuran 9 point.
- Persamaan matematika (*equations*) dapat diketik dengan menggunakan *MS Equations* atau *MathType* dengan tipe huruf *Cambria* atau *Times New Roman* berukuran 10 point.

Naskah lunak (*soft copy*):

Naskah lunak harus dalam format *Microsoft Word* dan dikirimkan dalam bentuk disk (CD, DVD), *flashdisk*, atau *attachment email*.

SUSUNAN NASKAH

- a. Judul dalam Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris untuk artikel berbahasa Indonesia dan Judul dalam Bahasa Inggris untuk artikel berbahasa Inggris.
- b. Nama Lengkap Penulis (tanpa gelar).
- c. Nama Lembaga atau Institusi, disertai Alamat Lengkap dengan nomor kode pos. Untuk korespondensi dilengkapi No. Telp., fax dan *email*.
- d. Judul Ringkas (*Running Title*) (jika diperlukan).

- e. Abstrak (*Abstract*) dalam Bahasa Inggris atau Bahasa Indonesia.
- f. Kata Kunci (*Keywords*) dalam Bahasa Inggris atau Bahasa Indonesia.
- g. Pendahuluan (*Introduction*) meliputi latar belakang, masalah dan tujuan penelitian.
- h. Tinjauan Pustaka meliputi ulasan (*review*) penelitian dari beberapa literatur serta teori-teori dasar yang mendukung penelitian.
- i. Metode Penelitian (*Methods and Materials*) meliputi bahan, cara, dan analisis dalam penelitian (jika ada).
- j. Hasil dan Pembahasan (*Results and Discussion*) ditulis secara berkesinambungan dalam satu rangkaian naskah penulisan.
- k. Kesimpulan (*Conclusion*)
- l. Ucapan Terima Kasih (*Acknowledgements*) (Jika diperlukan)
- m. Daftar Pustaka ditulis memakai sistem nama dan disusun menurut abjad. Di bawah ini beberapa contoh penulisan sumber acuan:

Jurnal :

Efron, B. 1983. *Estimating the Error Rate of Prediction Rule: Improvement on Cross-Validation*. J. Amer. Statist. Assoc., 78:316-331.

Buku :

Dennis, G. Z., 1986, *Differential Equations with Boundary Value Problems*. Ed ke-2. Boston: Massachusetts. PWS Publishers.

Skripsi/Tesis/Disertasi :

Mochamad Apri., *Model Biaya Total Jaringan Pipa Transmisi Gas dan Optimasinya*, Departemen Matematika ITB Bandung, Tugas Akhir, 2002.

Informasi dari Internet :

Mallat, Stephane, 1999, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Second Edition, Academic Press 24-28 Oval Road, London NW1 7DX UK, <http://www.hbuk.co.uk/ap/>

- n. Lampiran meliputi Gambar dan Tabel beserta keterangannya (jika diperlukan).

CATATAN (NOTE)

- Naskah harus dikirimkan ke redaksi selambat-lambatnya 2 (dua) bulan sebelum bulan penerbitan jurnal (Maret dan Desember).
- Naskah akan dinilai oleh tim penilai yang relevan sebelum diterbitkan dan tim redaksi berhak merubah struktur naskah tanpa merubah isi naskah.
- Naskah dapat diterima atau ditolak. Naskah ditolak, jika tidak memenuhi kriteria penulisan, pelanggaran hak cipta, kualitas rendah, dan tidak menanggapi korespondensi redaksi. Pengumuman naskah ditolak atau diterima paling lambat 1 (satu) bulan setelah naskah terkirim.
- Penulis atau penulis pertama yang akan mendapat 1 (satu) eksemplar jurnal yang sudah diterbitkan.

Barekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan



© Jurusan Matematika FMIPA Unpatti 2011