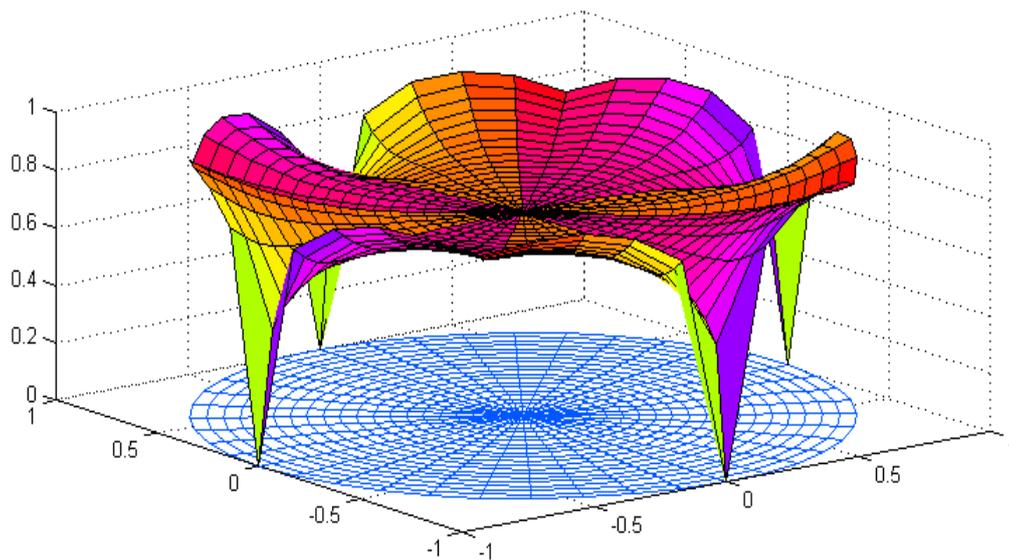


Barekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan

ISSN 1978-7227





jurnal ilmu matematika dan terapan

ISSN 1978-7227

Volume 5 Nomor 2 | Desember 2011

PENANGGUNG JAWAB

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA - Universitas Pattimura

KETUA DEWAN REDAKSI

H. J. Wattimanela, S.Si, M.Si

PENYUNTING AHLI

Prof. Drs. Subanar, Ph.D (UGM Yogyakarta)
Prof. Dr. Edi Baskoro (ITB Bandung)
Dr. Siswadi (IPB Bogor)
Dr. Basuki Widodo, M.Sc (ITS Surabaya)
Prof. Dr. Thomas Pentury, M.Si (Unpatti Ambon)
Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Unpatti Ambon)

PENYUNTING PELAKSANA

F. Y. Rumlawang, S.Si, M.Si
R. W. Matakupan, S.Si, M.Si
M. W. Talakua, S.Pd, M.Si.
E. R. Persulesy, S.Si, M.Si

SEKRETARIAT

H. W. M. Patty, S.Si, M.Sc

PENERBIT (PUBLISHER)

Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Pattimura Ambon

ALAMAT EDITOR (EDITORIAL ADDRESS)

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pattimura
Alamat:
Kampus FMIPA UNPATTI
Jl. Ir. M. Putuhena
Ambon - Maluku



PENELITIAN

TEOREMA REPRESENTASI RIESZ-FRECHET PADA RUANG HILBERT <i>(Riesz-Frechet Representation Theorem in Hilbert Space)</i>	Mozart Winston Talakua Stenly Jondry Nanuru	1-8
ANALISIS MODULUS ELASTISITAS DAN ANGKA POISSON BAHAN DENGAN UJI TARIK <i>(The Analysis of Modulus of Elasticity and Poisson Number using the Pull Test)</i>	Matheus Souisa	9-14
KETAKSAMAAN INTEGRAL GRONWALL-BELLMAN UNTUK FUNGSI BERPANGKAT <i>(Integral Inequalities of Gronwall-Bellman for Power Function)</i>	Monalisa Engelline Rijoly Henry Junus Wattimanela Rudy Wolter Matakupan	15-24
MODEL GEOGRAPHICALLY WEIGHTED POISSON REGRESSION DENGAN PEMBOBOT FUNGSI KERNEL GAUSS Studi Kasus: Jumlah Kematian Bayi di Jawa Timur Tahun 2007	Salmon Noce Aulele	25-30
PROYEKSI PENDUDUK BERLIPAT GANDA DI KABUPATEN MALUKU TENGAH <i>(Population Projection Than Doubled in Central Maluku Regency)</i>	Jefri Tipka	31-34
APLIKASI FUZZY PADA PERMASALAHAN PROGRAM TAK-LINIER <i>(Fuzzy's Application in the Problem of Non Linear Programing)</i>	Abraham Zacaria Wattimena	35-38
ANALISA KESTABILAN MODEL PENYEBARAN PENYAKIT RABIES <i>(The Analysis of Model Stability for the Spread of Rabies Disease)</i>	Francis Y. Rumlawang Mario Ivan Nanlohy	39-44
SEMIRING <i>(Semiring)</i>	Susan Rialita Lisapaly Elvinus Richard Persulesy	45-47



merupakan Jurnal Ilmu Matematika dan Terapannya sebagai suatu wahana informasi ilmiah yang menyajikan artikel (naskah) hasil penelitian meliputi bidang-bidang sebagai berikut: matematika analisis, aljabar, matematika terapan, statistika, pendidikan matematika dan ilmu komputer. Jurnal ini diterbitkan dua kali dalam setahun yaitu pada bulan Maret dan bulan Desember. Artikel atau naskah-naskah di dalam jurnal ini merupakan hasil-hasil penelitian pribadi ataupun kelompok yang belum pernah diterbitkan di jurnal-jurnal atau majalah ilmiah lainnya.

Diterbitkan oleh:

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Pattimura

Ambon

2011

Copyright © Jurusan Matematika FMIPA Unpatti 2011

TEOREMA REPRESENTASI RIESZ–FRECHET PADA RUANG HILBERT
(*Riesz–Fréchet Representation Theorem in Hilbert Space*)

MOZART W TALAKUA¹, STENLY JONDRI NANURU²

¹ Staf Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura

² Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

email: ocat_08@yahoo.com; stenly.nanuru@yahoo.com

ABSTRACT

Hilbert space is a very important idea of the Davids Hilbert invention. In 1907, Riesz and Fréchet developed one of the theorem in Hilbert space called the Riesz–Fréchet representation theorem. This research contains some supporting definitions Banach space, pre-Hilbert spaces, Hilbert spaces, the duality of Banach and Riesz–Fréchet representation theorem. On Riesz–Fréchet representation theorem will be shown that a continuous linear functional that exist in the Hilbert space is an inner product, in other words, there is no continuous linear functional on a Hilbert space except the inner product.

Keywords: *Banach Spaces, Hilbert Spaces, Norm Space, Pre-Hilbert Spaces, Representation Riesz*

PENDAHULUAN

Ruang Hilbert diperkenalkan oleh David Hilbert (1862-1943), seorang ahli matematika yang sangat terkenal pada generasinya. Penelitian yang dilakukannya menciptakan dasar dari pekerjaannya mengenai “ruang dimensi tak terbatas”, yang kemudian disebut dengan ruang Hilbert, suatu konsep yang sangat diperlukan dalam matematika analisis.

Pada tahun 1907, M.R. Frechet (1878-1973), dan F. Riesz (1880-1956) membuktikan bahwa suatu jawaban untuk masalah konvergensi deret Fourier klasik dapat diberikan dalam kaitan dengan Ruang Hilbert $L_2(-\pi, \pi)$ (Eberhard Zeidler, 1995). Dalam penelitian ini akan ditunjukkan bahwa hal tersebut merupakan suatu kasus khusus dari suatu hasil abstrak pada sistem ortonormal lengkap dalam ruang Hilbert. Selain itu juga dibahas beberapa sifat atau teorema tentang ruang pre Hilbert dan ruang Hilbert serta pembuktiannya.

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam perkembangan ilmu matematika (sekitar tahun 1909) khususnya dalam bidang analisis tentang ruang Euclides berdimensi- n , David Hilbert akhirnya

termotivasi oleh analog ruang tersebut kemudian diperluas menjadi ruang dimensi yang tak terbatas dan bersama-sama dengan Schmidt memberikan notasi untuk hasil kali dalam, norma, dan ortogonal. Selanjutnya dalam tesisnya yang berjudul *Learning in Hilbert Spaces*, Nimit Kumar mencoba menyusun suatu konsep tentang konvergensi barisan dalam ruang bernorma yang mempunyai konsekuensi terhadap barisan Cauchy dan gagasan kelengkapannya (Eberhard Zeidler, 1995).

Kecenderungan untuk mempelajari topik-topik dalam analisis, terutama analisis Fourier, persamaan diferensial, dan persamaan integral, secara abstrak sebagaimana yang dilakukan oleh V. Volterra (1860-1940), D. Hilbert (1862-1943), E. I. Fredholm (1866-1927), M. R. Frechet (1878-1973), dan F. Riesz (1880-1956) pada awal abad ke-20, telah memicu lahirnya sebuah anak-cabang matematika yang kita kenal sekarang sebagai analisis fungsional. Aksioma-aksioma ruang bernorma diperkenalkan pertama kali oleh Riesz ketika ia mempelajari operator di ruang fungsi kontinu $C[a,b]$ pada 1918, namun abstraksinya dirumuskan oleh S. Banach (1892-1945) dalam disertasinya pada 1920. Perluasannya untuk ruang bernorma atas lapangan bilangan kompleks C dikembangkan oleh N. Wiener (1894-1964) pada 1923 (Rudin. W, 1973).

Dengan merujuk pada Zeidler (1995) dan Halmos (1957) yang memberikan pemahaman bahwa setiap ruang

pre Hilbert atas suatu lapangan adalah juga ruang bernorma atas lapangan tersebut dengan aturan $\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$, serta beberapa sifat lain pendukung ruang pre Hilbert dan ruang Hilbert.

Kemudian dengan didukung oleh beberapa literatur lain maka penulis mencoba menyusun sebuah penulisan dengan harapan dapat mudah dipahami walaupun umumnya masih bersifat abstrak.

Definisi 2.1. (Ruang Vektor)

Sistem X merupakan ruang vektor atas lapangan F , terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan skalar jika memenuhi aksioma-aksioma di bawah ini :

1. Tertutup.
 $(\forall v_1, v_2 \in X) \quad v_1 + v_2 \in X$
2. Asosiatif.
 $(\forall v_1, v_2, v_3 \in X) \quad (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
3. Terdapat elemen netral.
 $(\exists \theta \in X) (\forall v \in X) \quad \theta + v = v + \theta = v$
4. Setiap elemen mempunyai invers.
 $(\forall v \in X) (\exists -v \in X) \quad v + (-v) = -v + v = \theta$
5. Komutatif.
 $(\forall v_1, v_2 \in X) \quad v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
6. Tertutup terhadap pergandaan skalar.
 $(\forall v \in X) (\forall \alpha \in F) \quad \alpha v \in X$
7. Distributif skalar.
 $(\forall v \in X) (\forall \alpha, \beta \in F) \quad (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
8. Distributif skalar.
 $(\forall v_1, v_2 \in X) (\forall \alpha \in F) \quad \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$
9. Asosiatif skalar.
 $(\forall v \in X) (\forall \alpha, \beta \in F) \quad (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
10. Perkalian dengan skalar 1.
 $(\forall v \in X) (\exists 1 \in F) \quad 1 \cdot v = v$

selanjutnya ruang vektor X atas lapangan F dinotasikan dengan $X(F)$.

Definisi 2.2. (Himpunan Perentang/Spanning Set)

Himpunan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ disebut himpunan perentang untuk X jika dan hanya jika setiap vektor dalam X dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari v_1, v_2, \dots, v_n .

Definisi 2.3. (Fungsi Kontinu)

Misalkan $A \subseteq \mathfrak{R}$, $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$, dan $c \in A$. Fungsi f dikatakan kontinu di titik c jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika x sebarang titik di A sehingga $|x - c| < \delta$, maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Definisi 2.4. (Batas Atas dan Batas Bawah)

Diberikan himpunan tak kosong $S \subseteq \mathfrak{R}$.

- a) Himpunan S dikatakan terbatas ke atas (*bounded above*) jika terdapat suatu bilangan $u \in \mathfrak{R}$ sedemikian hingga $s \leq u$ untuk semua $s \in S$. Setiap

bilangan u seperti ini disebut dengan batas atas (*upper bound*) dari S .

- b) Himpunan S dikatakan terbatas ke bawah (*bounded below*) jika terdapat suatu bilangan $w \in \mathfrak{R}$ sedemikian hingga $w \leq s$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan w seperti ini disebut dengan batas bawah (*lower bound*) dari S .
- c) Suatu himpunan dikatakan terbatas (*bounded*) jika terbatas ke atas dan terbatas ke bawah. Jika tidak, maka dikatakan tidak terbatas (*unbounded*).

Definisi 2.5. (Supremum dan Infimum)

Diberikan himpunan tak kosong $S \subseteq \mathfrak{R}$.

- a) Jika S terbatas ke atas, maka suatu bilangan u disebut supremum (batas atas terkecil) dari S jika memenuhi kondisi berikut:
 - 1) u merupakan batas atas S , dan
 - 2) jika v adalah sebarang batas atas S , maka $u \leq v$.
Ditulis $u = \sup S$.
- b) Jika S terbatas ke bawah, maka suatu bilangan w disebut infimum (batas bawah terbesar) dari S jika memenuhi kondisi berikut:
 - 1) w merupakan batas bawah S , dan
 - 2) jika t adalah sebarang batas bawah S , maka $t \leq w$.
Ditulis $w = \inf S$.

Definisi 2.6. (Barisan Cauchy)

Barisan bilangan real $X = (x_n)$ disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $H(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n, m \geq H(\varepsilon)$, berlaku $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas mengenai beberapa definisi dan teorema pendukung pemetaan linier, ruang bernorma, ruang Banach, ruang Hilbert, dan Dualitas Banach yang nantinya akan dipakai pada Teorema Representasi Riesz-Frechet. Sesuai ruang lingkup pembahasan maka lapangan F (*field*) yang digunakan adalah \mathfrak{R} atau C .

3.1. Pemetaan Linier.

Definisi 3.1.1. (Devito, 1990).

Diberikan ruang vektor X dan Y atas lapangan F . Pemetaan $f : X \rightarrow Y$ dikatakan linier jika untuk setiap $x, y \in X$ dan skalar $\alpha \in F$ berlaku :

- (1) f aditif : $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- (2) f homogen : $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Secara singkat Definisi 3.1.1 ditulis sebagai berikut.

Lemma 3.1.2. (Zaanen, 1997).

Diberikan X dan Y masing-masing ruang vektor atas lapangan F . Pemetaan $f : X \rightarrow Y$ dikatakan linier jika dan hanya jika

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

untuk setiap $x, y \in X$ dan skalar $\alpha, \beta \in F$.

Bukti:

Diambil sebarang $x, y \in X$ dan skalar $\alpha, \beta \in F$. Karena X ruang vektor, jadi $\alpha x \in X, \beta y \in X$ dan $\alpha x + \beta y \in X$.

Syarat perlu:

Karena f linier, menurut Definisi 3.1.1 diperoleh

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= f(\alpha x) + f(\beta y) \quad (f \text{ aditif}) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \quad (f \text{ homogen}) \end{aligned}$$

Syarat cukup:

1) Untuk $\alpha = \beta = 1$,

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(1 \cdot x + 1 \cdot y) \\ &= 1 \cdot f(x) + 1 \cdot f(y) \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

2) Untuk $\beta = 0$,

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= f(\alpha x + 0 \cdot y) \\ &= f(\alpha x + 0 \cdot y) \\ &= \alpha f(x) + 0 \cdot f(y) \\ &= \alpha f(x) + \bar{\theta} \\ &= \alpha f(x) \end{aligned}$$

Dengan θ = vektor nol di dalam X dan $\bar{\theta}$ = vektor nol di dalam Y . ■

Contoh:

1) Untuk setiap ruang vektor X atas lapangan F ; Pemetaan Nol:

$O: X \rightarrow X$ dengan $O(x) = 0$ untuk setiap $x \in X$ merupakan pemetaan linier, juga

Pemetaan Identitas:

$I: X \rightarrow X$ dengan $I(x) = x$ untuk setiap $x \in X$ merupakan pemetaan linier.

2) Jika $X = [a, b]$, yaitu koleksi semua fungsi kontinu dari $[a, b]$ ke \mathfrak{R} , maka $C[a, b]$ merupakan ruang vektor atas lapangan F dan

$$f: x \in C[a, b] \rightarrow f(x) = \int_a^b x(t) dt$$

merupakan pemetaan linier dari $C[a, b]$ ke \mathfrak{R} , dan $f: x \in C \rightarrow f(x) \in C[a, b]$ dengan

$$f(x)(t) = \int_a^b x(u) du \quad \forall t \in [a, b]$$

merupakan pemetaan linier.

3.2 Ruang Bernorma

Dalam suatu ruang vektor, telah diketahui mengenai konsep panjang dari suatu vektor atau disebut norma. Selanjutnya, suatu ruang X dikatakan ruang bernorma bila definisi berikut dipenuhi.

Definisi 3.2.1. (Royden, 1989).

Diberikan ruang vektor X atas lapangan F .

a) Fungsi $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathfrak{R}$ dinamakan norma bila memenuhi:

$$(N_1) \quad \|x\| \geq 0 \text{ untuk setiap } x \in X$$

$$(N_2) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta \text{ untuk setiap } x \in X$$

$$(N_3) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \text{ untuk setiap } x \in X \text{ dan skalar } \alpha \in F$$

$$(N_4) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ untuk setiap } x, y \in X$$

b) Ruang linier X yang dilengkapi norma dinamakan ruang bernorma dan ruang bernorma itu ditulis dengan $(X, \|\cdot\|)$ atau X saja jika normanya sudah diketahui.

Norma untuk koleksi semua fungsi linier kontinu disajikan pada definisi berikut ini.

Definisi 3.2.2. (Conway, 1990).

Jika X dan Y masing-masing ruang bernorma dan fungsi $f: X \rightarrow Y$ linier dan kontinu, didefinisikan bilangan:

$$\|f\| = \inf \{M : \|f(x)\| \leq M, x \in X \text{ dan } \|x\| \leq 1\}$$

yang disebut norma f .

Bentuk lain dari norma f tersebut di atas bisa dinyatakan sebagai

$$\|f\| = \sup \{ \|f(x)\| : x \in X \text{ dan } \|x\| \leq 1 \}.$$

Selanjutnya, koleksi semua fungsi linier dan kontinu dari ruang bernorma X ke ruang bernorma Y dinotasikan dengan $L_c(X, Y)$.

Bentuk lain dari Definisi 3.2.2 disajikan pada teorema berikut ini.

Teorema 3.2.3. (Conway, 1990).

Jika X dan Y masing-masing ruang bernorma dan fungsi $f: X \rightarrow Y$ linier dan kontinu maka

$$\|f\| = \inf \{M \geq 0 : \|f(x)\| \leq M \|x\|, x \in X\}$$

Bukti:

$$\|f\| = \sup \{ \|f(x)\| : x \in X \text{ dan } \|x\| \leq 1 \}.$$

Namakan

$$\alpha = \|f\| = \inf \{M \geq 0 : \|f(x)\| \leq M \|x\|, x \in X\}$$

Cukup ditunjukkan $\|f\| \leq \alpha$ dan $\alpha \leq \|f\|$.

i. $\alpha = \inf \{M \geq 0 : \|f(x)\| \leq M \|x\|, x \in X\}$. Jadi untuk setiap $x \in X$ berlaku

$$\|f(x)\| \leq \alpha \|x\|$$

Jika $x = \theta$ maka $\|x\| = 0 \leq 1$

$$\text{dan } \|f(x)\| = \|f(\theta)\| = \|\bar{\theta}\| = 0 \leq \alpha \cdot 0 \leq \alpha.$$

Jika $x \neq \theta$ dibentuk $y = \frac{x}{\|x\|}$ dengan $\|y\| \leq 1$.

Oleh karena itu $\|f(y)\| \leq \alpha \cdot \|y\| \leq \alpha$. Jadi α batas atas $\{ \|f(y)\| : y \in X \text{ dan } \|y\| \leq 1 \}$. Hal ini berakibat

$$\|f\| \leq \alpha \tag{3.2.1}$$

ii. Sebaliknya $\|f\| = \sup \{ \|f(x)\| : x \in X \text{ dan } \|x\| \leq 1 \}$. Jadi

untuk setiap $x \in X$ berakibat $\|f(x)\| \leq \|f\|$.

Diambil sebarang $z \in X$. Jika $z = \theta$ jelas berlaku

$$\|f(z)\| = \|f(\theta)\| = \|\bar{\theta}\| = 0 \leq \|f\| \cdot \|\theta\|.$$

Jika $z \neq \theta$ diperoleh $x = \frac{z}{\|z\|}$ dengan $\|z\| \leq 1$ dan

$$\|f(x)\| \leq \|f\|.$$

$$\left\| f \left(\frac{z}{\|z\|} \right) \right\| \leq \|f\| \Leftrightarrow \|f(z)\| \leq \|f\| \cdot \|z\| \text{ dan } \|f\| \text{ salah}$$

satu M . Jadi diperoleh

$$\alpha \leq \|f\| \tag{3.2.2}$$

Berdasarkan persamaan (3.2.1) dan (3.2.2) menunjukkan bahwa $\alpha = \|f\|$. ■

3.3. Ruang Banach

Berdasarkan bagian sebelumnya setiap konsep, pengertian, serta sifat-sifat ruang metrik berlaku pula pada ruang bernorma. Ruang bernorma sebagai ruang metrik d yang lengkap (setiap barisan Cauchy di X konvergen ke suatu unsur di X) disebut ruang Banach.

Selanjutnya, ekuivalensi pernyataan suatu fungsi linier kontinu X dengan suatu fungsi linier terbatas X disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 3.3.1. (Conway, 1990).

Diketahui X dan Y masing-masing ruang bernorma. Jika pemetaan $T : X \rightarrow Y$ linier, maka pernyataan berikut ekuivalen;

- (I) T kontinu pada X .
- (II) T kontinu di $x_0 \in X$
- (III) T kontinu di $\theta \in X$, θ merupakan vektor nol di dalam X .
- (IV) $\{ \|T(x)\| : x \in X \text{ dan } \|x\| \leq 1 \}$ terbatas.
- (V) Terdapat konstanta $M \geq 0$ sehingga $\|T(x)\| \leq M \|x\|$ untuk setiap $x \in X$.

Bukti:

(I) \Rightarrow (II), cukup jelas, dimana jika T kontinu pada titik X maka T kontinu pada setiap elemen di X .

(II) \Rightarrow (III), karena T linier dan $\theta \in X$, maka $T(\theta) = \theta \in Y$. Selanjutnya diambil sebarang barisan $\{x_n\} \subset X$ dan $\{x_n\} \rightarrow \theta$.

Harus ditunjukkan $\{T(x_n)\} \rightarrow T(\theta) = \bar{\theta}$.

Karena $\{x_n\} \rightarrow \theta$, maka $\{x_n + x_0\} \rightarrow \theta + x_0 = x_0$.

Karena $T : X \rightarrow Y$ kontinu di $x_0 \in X$ maka $\{T(x_n + x_0)\} \rightarrow T(x_0)$ atau $\lim_{x \rightarrow \infty} T(x_n + x_0) = T(x_0)$.

Karena diketahui T linier, maka

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n + x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (T(x_n) + T(x_0)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) + T(x_0) = T(x_n) + \bar{\theta} \end{aligned}$$

Jadi $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \bar{\theta} = T(\theta)$.

Dengan kata lain T kontinu di $\theta \in X$.

(III) \Rightarrow (IV), diketahui T kontinu di $\theta \in X$. Diandaikan

$S = \{ \|T(x)\| : x \in X \text{ dan } \|x\| \leq 1 \}$ tak terbatas. Jadi untuk setiap bilangan asli n terdapat $x_n \in X$, $x_n \neq \theta$ dengan sifat $\|x_n\| \leq 1$ dan $\|T(x_n)\| \geq n$; jadi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \infty \tag{3.3.1}$$

Dibentuk $y_n = \frac{x_n}{n}$ untuk setiap n . Jelas $y_n \in X$ dan

$$\|y_n\| = \frac{1}{n} \|x_n\| \leq \frac{1}{n} \text{ (sebab } \|x_n\| \leq 1 \text{ untuk setiap } n). \text{ Jadi}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = 0 \text{ atau } \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = \theta.$$

Menurut hipotesisnya diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(y_n) = T(\theta) = \bar{\theta}$$

atau

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| T \left(\frac{1}{n} x_n \right) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|T(x_n)\| = \|\bar{\theta}\| = 0$$

yang berakibat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n)\| = 0 \tag{3.3.2}$$

Persamaan (3.3.1) dan (3.3.2) merupakan suatu kontradiksi. Jadi pengandaian salah, yang benar haruslah T terbatas.

(IV) \Rightarrow (V), menurut hipotesis $\{ \|T(y)\| : y \in Y \text{ dan } \|y\| \leq 1 \}$ terbatas. Jadi terdapat bilangan $M \geq 0$ sehingga $\|T(y)\| \leq M$ untuk setiap $y \in X$ dan $\|y\| \leq 1$.

Selanjutnya diambil sebarang $x \in X$, diperoleh:

1. Jika $x = 0$, maka $\|x\| = \|\theta\| = 0 \leq 1$ (jelas) jadi $\|T(x)\| = \|T(\theta)\| \leq M \|x\|$ (3.3.3)

2. Jika $x \neq \theta$, maka $\|x\| \neq 0$. Diambil $z = \frac{x}{\|x\|} \in X$ dan

$$\|z\| \leq 1.$$

Menurut hipotesisnya

$$\|T(z)\| \leq M \Leftrightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq M$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\|x\|} \|T(x)\| \leq M \text{ (sebab } T \text{ linier)}$$

$$\Leftrightarrow \|T(x)\| \leq M \cdot \|x\| \quad (3.3.4)$$

Berdasarkan persamaan (3.3.3) dan (3.3.4), terbukti terdapat bilangan $M \geq 0$ sehingga $\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\|$ untuk setiap $x \in X$.

(V) \Rightarrow (I), diketahui $T : X \rightarrow Y$ linier dan terdapat bilangan $M \geq 0$ sehingga $\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\|$ untuk setiap $x \in X$. Dibuktikan T kontinu pada X . Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Apakah dapat ditemukan bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $x, y \in X$, $d_1(x, y) = \|x - y\| < \delta$ berakibat $d_2(T(x), T(y)) = \|T(x) - T(y)\| < \varepsilon$.

Dari

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq M \cdot \|x - y\| < (M + 1) \cdot \|x - y\| < \varepsilon,$$

asalkan $d_1(x, y) = \|x - y\| < \delta = \frac{\varepsilon}{M + 1}$.

Jadi T kontinu pada X . ■

Selanjutnya, norma pada suatu ruang pre-hilbert atau ruang hasil kali dalam didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.3.2. (Maddox, 1970).

Diketahui ruang pre-Hilbert X dan $x \in X$. Norma vektor x dinotasikan dengan $\|x\|$, didefinisikan sebagai bilangan non negatif:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Teorema 3.3.3 (Kreyszig, 1978).

Jika X suatu ruang pre-Hilbert maka untuk setiap $x, y \in X$ berlaku ketaksamaan Cauchy-Schwartz:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Bukti:

Diambil sebarang dua vektor $x, y \in X$, diperoleh:

Jika $y = 0$ maka untuk setiap $\lambda \in C$ berlaku:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle &= \langle x, x - \lambda x \rangle - \langle \lambda y, x - \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \langle x, \lambda y \rangle - \lambda \langle y, x - \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, y \rangle - \lambda \{ \langle y, x \rangle - \bar{\lambda} \langle y, y \rangle \} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Untuk setiap $\lambda \in C$, dipilih $\bar{\lambda} = \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$ sehingga

persamaan (3.3.5) menjadi

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle - \lambda \left\{ \langle y, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, y \rangle \right\} \\ = \langle x, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle - 0 = \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \end{aligned}$$

Jadi

$$\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \leq \langle x, x \rangle$$

dengan kata lain $|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}} = \|x\| \|y\|$. ■

Untuk melengkapi pembuktian bahwa norma $\|\cdot\|$ mendefinisikan norma di X , tinggal menunjukkan ketaksamaan segitiga saja yang disajikan pada teorema berikut.

Teorema 3.3.4. (Ketaksamaan segitiga) (Kreyszig, 1978).

Untuk sebarang dua vektor x dan y di dalam ruang pre-Hilbert X selalu berlaku ketaksamaan segitiga, yaitu

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Bukti:

Diambil sebarang dua vektor $x, y \in X$, diperoleh:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Dengan kata lain $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ■

Selanjutnya, perlu diingat bahwa setiap ruang bernorma merupakan ruang metrik. Hubungan antara ruang hasil kali dalam dengan ruang bernorma disajikan pada teorema berikut ini.

Teorema 3.3.5. (Kreyszig, 1978).

Setiap ruang hasil kali dalam atau ruang pre-Hilbert X merupakan ruang bernorma.

Bukti:

Karena X adalah ruang vektor, maka tinggal diperiksa bahwa $\|\cdot\|$ memenuhi sifat-sifat norma. Diambil sebarang $x, y \in X$ dan $\alpha \in F$, diperoleh:

(N₁) $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle \geq 0$, jelas dari Definisi 3.3.2

(N₂) $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (menurut I₄)

(N₃) $\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2$

Jadi $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(N₄) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ menurut Teorema 3.3.4 ■

Setelah didapat definisi norma pada ruang hasil kali dalam X maka dapat didefinisikan metrik (fungsi jarak), yaitu $d(x, y) = \|x - y\|$ untuk setiap $x, y \in X$. oleh karena itu kekonvergenan dan barisan Cauchy mempunyai tujuan jelas.

3.4. Ruang Hilbert

Misalkan X ruang vektor atas lapangan F dan $(X \langle \cdot, \cdot \rangle)$ merupakan ruang hasil kali dalam, dapat ditunjukkan pemetaan $\|\cdot\|: X \rightarrow F$ dimana $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ untuk setiap $x \in X$ merupakan suatu ruang bernorma. Apabila ruang bernorma tersebut lengkap dimana setiap barisan Cauchy di X konvergen ke suatu unsur di X , maka ruang ini disebut ruang Hilbert. Sehingga dapat disimpulkan bahwa pada dasarnya ruang Hilbert adalah ruang Banach dengan norma yang ditentukan dari ruang hasil kali dalam.

Definisi 3.4.1. (Kreyszig, 1978).

Ruang hasil kali dalam (ruang pre-Hilbert) X yang lengkap dinamakan ruang Hilbert.

3.5. Dualitas Banach

Dual Banach/Ruang Dual dari ruang bernorma X dinotasikan dengan X^* yaitu koleksi semua fungsional linier kontinu dari ruang bernorma X ke lapangan $F(C/\mathbb{R})$. Jadi

$$X^* = \{T: X \rightarrow F \text{ fungsional linier kontinu}\}$$

Teorema 3.5.1. (Conway, 1990).

Ruang dual dari ruang bernorma X yaitu X^* merupakan ruang Banach.

Bukti:

Karena $X^* = X^* = L_c(X, F)$ dan lapangan F itu lengkap maka menurut Teorema 3.3.1 maka X^* merupakan ruang lengkap atau ruang Banach. ■

3.6. Teorema Representasi Riesz-Frechet

Pada subbab ini akan dibicarakan teorema representasi Riesz-Frechet dari suatu ruang Hilbert yang nantinya akan digunakan untuk mencari ruang dual Banach dari suatu ruang barisan.

Diawali dengan Teorema 3.6.1 dan Lemma 3.6.2, akan ditunjukkan bahwa fungsional linier kontinu pada ruang Hilbert H merupakan hasil kali dalam pada H , yang dikenal sebagai Teorema Representasi Riesz-Frechet.

Teorema 3.6.1 (Royden, 1989).

Jika X ruang pre-Hilbert maka untuk setiap $y \in X$ menentukan dengan tunggal fungsional linier kontinu f dengan rumus:

$$f(x) = \langle x, y \rangle \text{ untuk setiap } x \in X$$

Bukti:

(1) Jelas f linier, sebab untuk setiap skalar $\alpha, \beta \in F$

dan dua vektor $x_1, x_2 \in X$ diperoleh:

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle \\ &= \langle \alpha x_1, y \rangle + \langle \beta x_2, y \rangle \\ &= \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \end{aligned}$$

(2) Fungsi f kontinu, sebab untuk setiap $x_1, x_2 \in X$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \|f(x_1) - f(x_2)\| &= |\langle x_1, y \rangle - \langle x_2, y \rangle| \\ &= |\langle x_1 - x_2, y \rangle| \\ &\leq \|x_1 - x_2\| \|y\| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{asalkan } \|x_1 - x_2\| < \delta = \frac{\varepsilon}{\|y\| + 1} \quad \blacksquare$$

Lemma 3.6.2. (Maddox, 1970).

Diketahui ruang Hilbert H . $G \subset H$, $G \neq H$ sub ruang tertutup. Untuk setiap $h \in H \setminus G$ dan $g \in G$ berlaku $(h - g) \perp G$ atau $\langle h - g, x \rangle = 0$ untuk setiap $x \in G$.

Bukti:

$h \in H \setminus G$ dan $g \in G$ berarti $h - g \neq \theta$. Diandaikan ada $x \in G$ sehingga $\lambda = \langle h - g, x \rangle \neq \theta$. Jadi $x \neq \theta$ (sebab jika $x = \theta$ maka $\lambda = \theta$).

Didefinisikan $h = g + \lambda \frac{x}{\|x\|^2}$. Jadi $h \in G$ dan berlaku

$\|h - g\| \leq \|h - k\|$ sebab $\|h - g\| = d(h, G)$. Oleh karena itu diperoleh:

$$\begin{aligned} \|h - k\|^2 &= \langle h - k, h - k \rangle \\ &= \left\langle h - g - \lambda \frac{x}{\|x\|^2}, h - g - \lambda \frac{x}{\|x\|^2} \right\rangle \\ &= \left\langle h - g, h - g - \lambda \frac{x}{\|x\|^2} \right\rangle - \frac{\lambda}{\|x\|^2} \left\langle h - g - \lambda \frac{x}{\|x\|^2}, x \right\rangle \\ &= \langle h - g, h - g \rangle - \frac{\lambda}{\|x\|^2} \langle h - g, x \rangle - \frac{\lambda}{\|x\|^2} \langle x, h - g \rangle \\ &\quad - \frac{\lambda}{\|x\|^2} \left\langle x, \frac{x}{\|x\|^2} \right\rangle \\ &= \langle h - g, h - g \rangle - \frac{\lambda}{\|x\|^2} \cdot \lambda - \frac{\lambda}{\|x\|^2} \cdot \lambda + \frac{|\lambda|^2}{\|x\|^2} \langle x, x \rangle \\ &= \|h - g\|^2 - \frac{\lambda^2}{\|x\|^2} - \frac{\lambda^2}{\|x\|^2} + \frac{|\lambda|^2}{\|x\|^2} \\ &= \|h - g\|^2 + \frac{|\lambda|^2}{\|x\|^2} \end{aligned}$$

Jadi $\|h - k\|^2 \leq \|h - g\|^2$ atau $\|h - k\| \leq \|h - g\|$, yang bertentangan dengan $\|h - k\| \geq \|h - g\|$, sehingga $\langle h - g, x \rangle = 0$ untuk setiap $x \in G$. Jadi $h - g \perp G$. ■

Selanjutnya akan diperlihatkan Teorema Representasi Riesz-Frechet sebagai berikut.

Teorema 3.6.3. (Teorema Representasi Riesz-Frechet) (Royden, 1989).

Diberikan ruang Hilbert H . $f \in H^* \Leftrightarrow$ terdapat dengan tunggal $y \in H$ sehingga $f(x) = \langle x, y \rangle$ untuk setiap $x \in H$. Dalam hal ini $\|f\| = \|y\|$.

Bukti:

Syarat cukup:

Diketahui H ruang Hilbert dan untuk semua $x \in H$ terdapat dengan tunggal $y \in H$ sehingga $f(x) = \langle x, y \rangle$.

Ditunjukkan $f \in H^*$. Diambil sebarang $x_1, x_2 \in H$ dan skalar $\alpha, \beta \in F$, diperoleh:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle \\ &= \langle \alpha x_1, y \rangle + \langle \beta x_2, y \rangle \\ &= \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \end{aligned}$$

dengan kata lain f linier.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| &= |\langle x_1, y \rangle - \langle x_2, y \rangle| \\ &= |\langle x_1 - x_2, y \rangle| \\ &\leq \|x_1 - x_2\| \|y\| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{Asalkan } \|x_1 - x_2\| < \delta = \frac{\varepsilon}{\|y\| + 1}$$

Syarat perlu:

Diambil $G = \ker(f) = \{x \in H \mid f(x) = 0\}$. $G = \ker(f)$ merupakan subruang tertutup di H , sebab:

(i) Diambil sebarang $x, y \in G = \ker(f)$ dan skalar $\alpha, \beta \in F$, diperoleh:

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= f(\alpha x) + f(\beta y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi $\alpha x + \beta y \in G = \ker(f)$. Jadi G subruang linier dari H .

(ii) Jika x titik limit G , maka terdapat barisan $\{x_n\} \subset G$ sehingga $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Karena f

kontinu, maka $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$. Jadi

$$x \in G = \ker(f).$$

Dengan kata lain G tertutup.

Selanjutnya, jika $G = H$ dipilih $y = \theta$ maka $f(x) = \langle x, \theta \rangle = 0$ untuk setiap $x \in H$. Jika $G \neq H$ maka untuk setiap $h \in H \setminus G$ terdapat $g \in G$ sehingga $z = h - g \perp G$ (menurut Lemma 4.7.2). jelas $z \neq \theta$ sebab $g - h \neq 0$.

Untuk z tersebut didefinisikan:

$$S = \{zf(x) - xf(z) \mid x \in H\}$$

$$f(zf(x) - xf(z)) = f(z) \cdot f(x) - f(x) \cdot f(z) = 0.$$

Jadi $zf(x) - xf(z) \in G$. Jadi $S \subset G$.

Karena $z \perp G$ dan $S \subset G$ maka $z \perp S$. Oleh karena itu untuk setiap $x \in H$ berlaku:

$$\begin{aligned} \langle zf(x) - xf(z), z \rangle &= 0 \Leftrightarrow \langle zf(x), z \rangle - \langle xf(z), z \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) \langle z, z \rangle - f(z) \langle x, z \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = \frac{f(z) \langle x, z \rangle}{\langle z, z \rangle} = \left\langle x, \frac{\overline{f(z)}z}{\|z\|^2} \right\rangle \end{aligned}$$

Jadi terdapat $y = \frac{\overline{f(z)}z}{\|z\|^2} \in H$ sehingga $f(x) = \langle x, y \rangle$

untuk setiap $x \in H$.

Selanjutnya akan ditunjukkan ketunggalan y . Diandaikan ada $y_1, y_2 \in H$ sehingga $\langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$ untuk setiap $x \in H$, maka

$$\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0 \text{ untuk setiap } x \in H.$$

Khususnya untuk $x = y_1 - y_2$ diperoleh

$$\langle y_1 - y_2, y_1 - y_2 \rangle = 0$$

Jadi $y_1 - y_2 = 0$ atau $y_1 = y_2$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $\|f\| = \|y\|$

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup \{ |f(x)| : \|x\| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ \langle x, y \rangle : \|x\| \leq 1 \} \\ &\leq \sup \{ \|x\| \cdot \|y\| : \|x\| \leq 1 \} \leq \|y\| \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

Di pihak lain:

$$|f(y)| = \langle y, y \rangle = \|y\|^2$$

jadi

$$\|y\| = \frac{1}{\|y\|} |f(y)| = \frac{|f(y)|}{\|y\|} = \left| f \left(\frac{y}{\|y\|} \right) \right| \leq \|f\| \quad (3.6.2)$$

Berdasarkan persamaan (3.6.1) dan (3.6.2) diperoleh $\|f\| = \|y\|$. ■

KESIMPULAN

Dari pembuktian mengenai Teorema Representasi Riesz-Frechet pada Ruang Hilbert di atas, maka dapat dibuat beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Setiap ruang hasil kali dalam X atas lapangan F juga merupakan ruang bernorma atas F dengan aturan untuk norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ untuk setiap $x \in X$.
2. Jika $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ merupakan ruang hasil kali dalam atas lapangan F , dapat ditunjukkan pemetaan $\|\cdot\| : X \rightarrow F$ dimana $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ untuk setiap

$x \in X$ merupakan suatu ruang bernorma. Apabila ruang bernorma tersebut lengkap, maka ruang ini disebut ruang Hilbert. Hal inilah yang disebut dengan penyempurnaan sifat dari ruang vektor.

3. Ruang Hilbert adalah ruang Banach dengan norma yang ditentukan dari ruang hasil kali dalam.

Teorema Representasi Riesz-Frechet menunjukkan bahwa tidak ada fungsional linier kontinu di ruang Hilbert kecuali berupa hasil kali dalam. Teorema ini nantinya akan digunakan untuk mencari ruang dual Banach dari suatu ruang barisan.

DAFTAR PUSTAKA

- Bartle. R.G, Sherbert D.R (2000), *Introduction to Real Analysis*, Third Edition. John Wiley and Sons, Inc, USA
- Conway. J. B. A (1989). *Course in Functional Analysis*, Second Edition. Springer-Verlag, New York
- Devito. C. L (1990). *Functional Analysis and Linear Operator Theory*. Addison-Wesley publishing Company, New York
- Halmos. P. R (1957), *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity*. Second edition, Chelsea, New York
- Howard. A (1987). *Aljabar Linear Elementer*. Erlangga, Jakarta
- Kreyszig. E (1978). *Introduction Functional Analysis Applications*. John Wiley & Son, New York
- Leon, Steven. J (2001). *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Erlangga, Jakarta
- Maddox. I. J (1970). *Element of Funcional Analysis*. Cambridge Univ. Press, London
- Royden. H. L (1989). *Real Analysis* (third Edition). Macmillan Publishing Company, New York
- Rudin, W (1973). *Functional Analysis* . Second edition. McGraw-Hill, Inc, United State
- Zaanen. A. C (1997). *Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces*. Springer-Verlag, New York
- Zeidler. E (1995). *Applied Functional Analysis*, Springer-Verlag, Inc, New York

ANALISIS MODULUS ELASTISITAS DAN ANGKA POISSON BAHAN DENGAN UJI TARIK
(*The Analysis of Modulus of Elasticity and Poisson Number using the Pull Test*)

MATHEUS SOUISA

Staf Jurusan Fisika Fakultas MIPA Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

ABSTRACT

Observation of the stress and strain in materials steel, brass and anneal is done by testing to determine the tensile modulus of elasticity of the material. The results showed that the modulus of elasticity of the material brass is smaller than the brass alloy steel and steel materials, caused by the formation of the composition of the material is different. The relationship between stress and strain are used to gain slope value, and this value used to determine the modulus of elasticity of steel materials, brass and anneal. The analysis showed that the magnitude of the modulus of elasticity of brass material $\kappa_{\text{brass}} = (20.10 \pm 1.60) \times 10^9$ Pa, anneal materials $\kappa_{\text{anneal}} = (68.10 \pm 2.20) \times 10^9$ Pa, and steel materials $\kappa_{\text{steel}} = (201, 00 \pm 5.30) \times 10^9$ Pa. The results of tensile tests conducted on all three materials can be used to determine the comparative figures Poisson. The analysis showed the amount of comparative figures in steel material Poisson $m_{\text{steel}} = 0.106 \pm 0.002$, brass material $m_{\text{brass}} = 0.104 \pm 0.002$ and anneal materials $m_{\text{anneal}} = 0.103 \pm 0.005$. Figures Poisson appeal on steel materials is greater than the brass and anneal.

Keywords: *Modulus of elasticity, stress, strain, poisson numbers*

PENDAHULUAN

Regangan dan tegangan memiliki hubungan yang mencirikan sifat bahan untuk tingkat pembebanan yang masih dalam batas tertentu, dan terdapat hubungan yang proposional antara komponen tegangan dan komponen regangan yang berpasangan. Proposionalitas hubungan tersebut dicerminkan oleh sifat elastisitas linier bahan, seperti modulus elastisitas Young, angka perbandingan Poisson, maupun modulus geser. Pada batas atau daerah proposional ini berlaku hukum Hooke. Tingkat pembebanan yang menimbulkan respons yang tidak bersisa setelah penghapusan beban, dinamakan batas elastik, dan jika melebihi batas elastik atau batas keselamatan maka benda tersebut mengalami retak atau patahan.

Dalam berbagai referensi daerah proposionalitas tergantung pada berbagai jenis bahan yang digunakan dan sifat elastisitas bahan tersebut. Sifat elastisitas bahan ini ditunjukkan dengan modulus elastisitas, dan harga dari modulus elastisitas dalam berbagai referensi merupakan harga yang sifatnya representatif (Kane and Sternheim, 1976. *terjemahan* Silaban, 1991:371). Ini berarti untuk menentukan harga yang sebenarnya sangat sulit, sebab

untuk menentukan harga sebenarnya pada bahan tertentu biasanya sangat berbeda.

Dalam penelitian ini, akan menggunakan bahan (material) untuk dilakukan dengan hanya menggunakan perlakuan tarik, dan tidak dilakukan perlakuan tekan. Pada kasus ini yang akan dikaji adalah benda yang akan ditarik dengan gaya minimum sampai gaya maksimum sehingga benda mengalami retak atau patah. Hal ini berarti dapat menunjukkan keterangan dan informasi kuantitatif tentang daerah proposionalitas atau elastisitas, batas elastis dan tarikan maksimum atau patahan. Sekaligus dapat menentukan harga modulus yang merupakan suatu perbandingan antara tegangan terhadap regangan.

METODE PENELITIAN

1. Elastisitas

Menurut Soedjojo (2004:33) yang menyatakan bahwa bahan elastis adalah bahan yang mudah diregangkan serta cenderung pulih ke keadaan semula, dengan mengenakan gaya reaksi elastisitas atas gaya tegangan yang meregangkannya. Pada hakekatnya semua bahan memiliki sifat elastik meskipun boleh jadi amat

sukar diregangkan. Sedangkan menurut Saroyo (2002: 318), sifat elastik adalah kemampuan benda untuk kembali ke bentuk awalnya segera setelah gaya luar yang diberikan benda itu dihilangkan. Elastisitas adalah sifat benda yang berdeformasi untuk sementara, tanpa perubahan yang permanen, yaitu sifat untuk melawan deformasi yang terjadi. Sebuah benda dikatakan elastik sempurna jika setelah gaya penyebab perubahan bentuk dihilangkan benda akan kembali ke bentuk semula. Sekalipun tidak terdapat benda yang elastik sempurna, tetapi banyak benda yang hampir elastik sempurna, yaitu sampai deformasi yang terbatas disebut limit elastik. Jika benda berdeformasi diatas limit elastiknya, dan apabila gaya-gaya dihilangkan, maka benda tersebut tidak lagi kembali ke bentuk semula. Sebenarnya perbedaan antara sifat elastik dan plastik, hanyalah terletak pada tingkatan dalam besar atau kecilnya deformasi yang terjadi. Blatt (1986:179) menyatakan bahwa suatu deformasi dikatakan elastik jika (i) deformasi merupakan proposional dengan gaya penyebabnya, (ii) bekerjanya gaya, maka deformasi diabaikan.

2. Tegangan (Stress)

Semua bahan berubah bentuk karena pengaruh gaya. Ada yang kembali ke bentuk aslinya bila gaya dihilangkan, ada pula yang tetap berubah bentuk sedikit atau banyak, (Sears, 1944 *terjemahan* Soedarjana, 1986:236). Jadi, deformasi bahan ditentukan oleh gaya per satuan luas dan bukan oleh gaya total (Kane and Sternheim, 1976. *terjemahan* Silaban, 1991:365). Jika sebuah batang tegar yang dipengaruhi gaya tarik F ke kanan dan gaya yang sama tetapi berlawanan arah ke kiri, maka gaya-gaya ini akan didistribusi secara uniform ke luas penampang batang. Perbandingan gaya F terhadap luas penampang A dinamakan tegangan tarik. Karena perpotongan dapat dilakukan disembarang titik sepanjang batang maka seluruh batang dalam keadaan mengalami tegangan (*stress*) ditulis berikut:

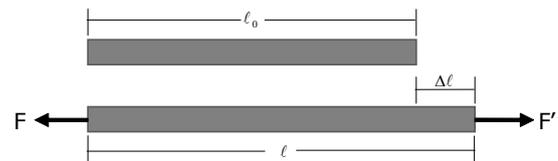
$$\text{Tegangan } (\sigma) = \frac{F}{A} \quad (1)$$

dimana, σ = tegangan tarik, N/m^2 (=Pa), F = gaya (N) dan A = luas permukaan (m^2).

3. Regangan (Strain)

Perubahan pada ukuran sebuah benda karena gaya-gaya atau kopel dalam kesetimbangan dibandingkan dengan ukuran semula disebut regangan. Regangan juga disebut derajat deformasi, (Saroyo, 2002:321). Kata regangan berhubungan dengan perubahan relatif dalam dimensi atau bentuk suatu benda yang mendapat tekanan. Gambar 1, melukiskan suatu batang yang panjang normalnya ℓ_0 dan memanjang menjadi $\ell = \ell_0 + \Delta\ell$ bila pada kedua ujungnya ditarik oleh gaya F . Pertambahan panjang $\Delta\ell$, tentu saja tidak hanya pada ujung-ujung saja; setiap elemen-elemen batang tertarik pada proporsi yang sama seperti batang seluruhnya.

Ada tiga macam regangan, (Kane and Sternheim, 1976. *terjemahan* Silaban, 1991:366) yakni (a) Regangan tarik, (b) Regangan kompresi, dan (c) Regangan geser.



Gambar 1. Regangan membujur

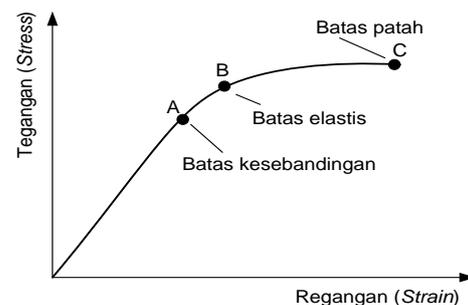
Regangan tarik pada batang didefinisikan sebagai perbandingan antara pertambahan panjang dengan panjang semula, yang harganya lebih besar dari 0. Regangan tekan suatu batang yang ditekan didefinisikan dengan cara yang sama sebagai perbandingan antara berkurangnya panjang batang dengan panjang semula, yang harganya lebih kecil dari 0. Jadi perubahan perbandingan pada panjang batang $\Delta\ell/\ell_0$ dinamakan regangan (Blatt, 1986:183) atau disebut regangan longitudinal (Frauenfelder and Huber, 1966:219), seperti ditulis berikut:

$$\text{Regangan, } (\varepsilon) = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \quad (2)$$

dimana: ε = regangan atau bilangan murni, ℓ = panjang batang (m), ℓ_0 = panjang semula (m) dan $\Delta\ell$ = perubahan panjang (m).

4. Modulus Elastisitas

Gambar 2, menunjukkan grafik tegangan dan regangan untuk batang padat biasa. Grafik tersebut linier sampai titik A. Hasil bahwa regangan berubah secara linier dengan tegangan dikenal sebagai hukum Hooke. Titik B adalah batas elastik. Jika batang ditarik melampaui titik ini batang tidak akan kembali ke panjangnya semula, tetapi berubah bentuk secara tetap. Jika tegangan yang bahkan lebih besar diberikan, bahan akhirnya patah. Seperti ditunjukkan oleh titik C.



Gambar 2. Menunjukkan grafik tegangan terhadap regangan

Di dalam daerah linier dari grafik tegangan-regangan untuk tarikan atau tekanan (kompresi), kemiringan menyamai nilai banding tegangan terhadap regangan yang dinamakan modulus Young, Y dari bahan tersebut, (Kane and Sternheim, 1976. *terjemahan* Silaban, 1991:368). Perbandingan tegangan terhadap regangan dalam daerah linier grafik ini disebut juga konstanta karakteristik atau modulus Young suatu bahan, ditulis sebagai:

$$Y = \frac{\text{Tegangan}}{\text{Regangan}} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F/A}{\Delta\ell/\ell_0} \quad (3)$$

5. Hubungan Tegangan dan Regangan

Hubungan antara tegangan dan regangan mengikuti hukum Hooke untuk elastisitas, dalam batas (limit) elastik suatu benda, dan hal ini menunjukkan bahwa tegangan berbanding lurus dengan regangan, (Blatt, 1986:185) yaitu

$$\text{Modulus, } \kappa = \frac{\text{Tegangan}}{\text{Regangan}} \tag{4}$$

dengan κ disebut modulus elastisitas atau koefisien elastisitas atau konstanta kesebandingan.

Dalam penelitian ini akan ditentukan konstanta proposionalitas atau modulus elastisitas bahan secara grafik, dan berdasarkan konstanta ini dapat ditentukan modulus elastisitas Young, modulus geser dan modulus Bulk. Jadi, hubungan antara gaya tarik pada bahan dengan perubahan panjang mula-mula atau volume mula-mula dapat memberikan suatu hubungan yang linier. Sesuai dengan persamaan (3), diperlukan gaya untuk memberikan deformasi elastisitas bahan, dan hubungan ini (Cutnell and Johnson, 1995:284) dapat dinyatakan dengan:

$$\frac{F}{A} = Y \left(\frac{\Delta \ell}{\ell_0} \right) \tag{5}$$

6. Angka Banding Poisson

Dalam kenyataannya, setiap pemanjangan $\Delta \ell$ dari panjang semula ℓ_0 akan menyebabkan penyusutan lebar $-\Delta b$, misalnya dari lebar semula b_0 . Menurut Poisson (Soedjojo, 2004:36), persentase penyusutan lebar akan sebanding dengan persentase pemanjangan. Maka didefinisikanlah apa yang dikenal dengan angka banding Poisson, m selaku tetapan kesebandingan yang menurut hubungan (Sarojo, 2002:326) berikut:

$$\text{Angka banding Poisson, } m = - \frac{\text{Tegangan transversal}}{\text{Tegangan longitudinal}} \tag{6}$$

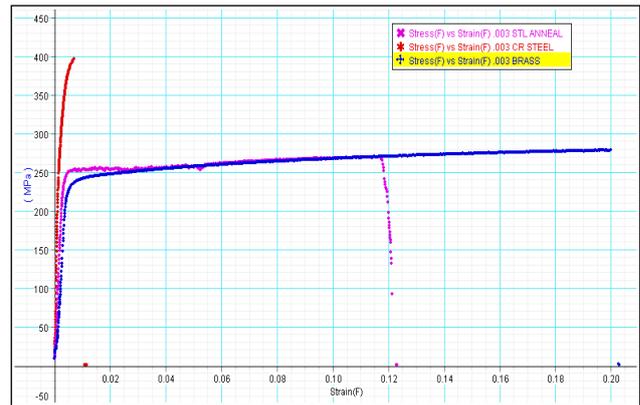
atau ditulis dalam bentuk rumus:

$$m = \frac{-\Delta b / b_0}{\Delta \ell / \ell_0} \tag{7}$$

Besarnya angka banding Poisson tergantung pada jenis bahannya.

HASIL PENELITIAN

Hasil pengambilan data yang ditampilkan dengan *Software DataStudio* menggunakan bahan besi (CR steel), kuningan (brass) dan baja campuran (STL anneal) menggunakan pengujian tarik secara otomatis digambarkan secara grafik untuk mendapatkan hubungan antara tegangan (stress) terhadap regangan (strain) pada masing-masing bahan seperti pada Gambar 3 atau Gambar 4.

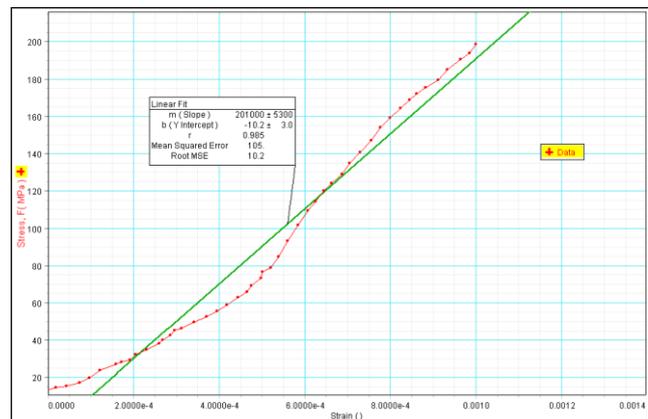


Gambar 3. Tegangan (stress) terhadap regangan (strain) untuk besi, kuningan dan baja campuran dengan perlakuan tarik

Selanjutnya berdasarkan gambar 3 memperlihatkan daerah proposional pada masing-masing bahan, dijadikan sebagai batasan analisis untuk menggunakan metode regresi linear agar supaya dapat menentukan modulus elastisitas bahan seperti tampilan gambar 5 hingga gambar 6. Untuk menganalisis modulus elastisitas pada berbagai dilakukan dengan tahapan sebagai berikut.

1. Penentuan modulus elastisitas besi (CR steel).

Berdasarkan Gambar 4 dapat ditentukan secara langsung rata-rata modulus elastisitas adalah 201×10^9 Pa.



Gambar 4. Tegangan (stress) Terhadap Regangan (strain) Untuk Besi dengan Uji Tarik

Dengan demikian diperoleh modulus elastisitas untuk besi dengan diberikan perlakuan tarik sebesar

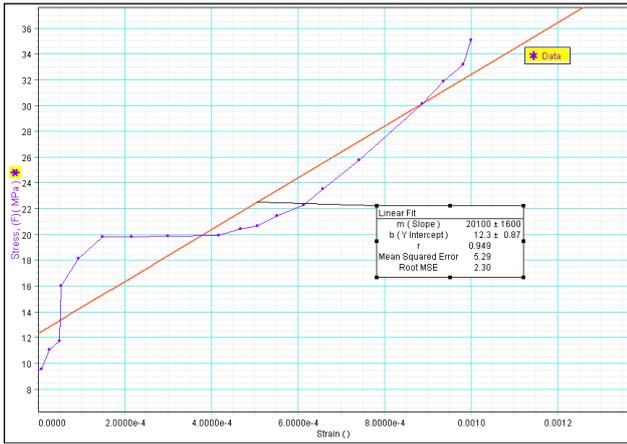
$$\kappa_{\text{steel}} = (201,00 \pm 5,30) \times 10^9 \text{ Pa}$$

2. Penentuan modulus elastisitas kuningan (brass)

Berdasarkan Gambar 5 dapat ditentukan secara langsung rata-rata modulus elastisitas kuningan adalah $20,10 \times 10^9$ Pa.

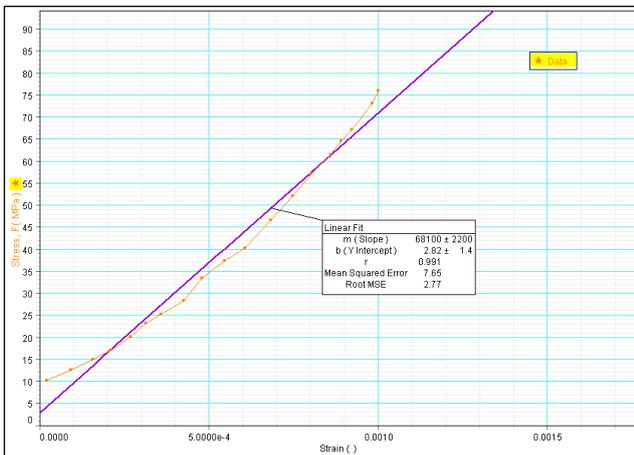
Dengan demikian modulus elastisitas untuk kuningan dengan diberikan perlakuan tarik adalah

$$\kappa_{\text{brass}} = (20,10 \pm 1,60) \times 10^9 \text{ Pa}$$



Gambar 5. Tegangan (*stress*) terhadap regangan (*strain*) untuk kuningan dengan uji tarik

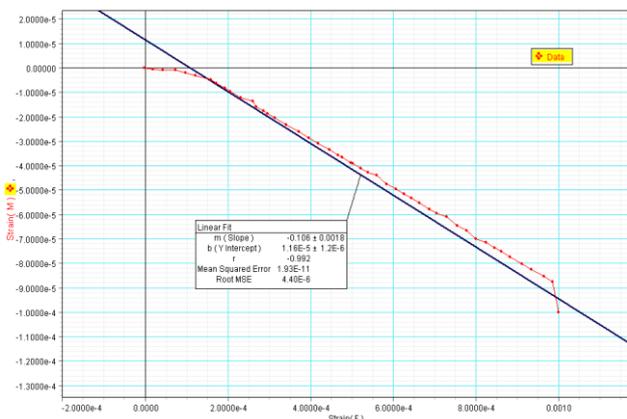
3. Penentuan modulus elastisitas baja campuran (*anneal*)
 Berdasarkan Gambar 6 dapat ditentukan secara langsung rata-rata modulus elastisitas adalah $68,10 \times 10^9$ Pa



Gambar 6. Tegangan (*stress*) terhadap regangan (*strain*) untuk baja campuran dengan uji tarik

Sehingga modulus elastisitas untuk baja campuran dengan diberikan perlakuan tarik adalah $\kappa_{anneal} = (68,10 \pm 2,20) \times 10^9$ Pa

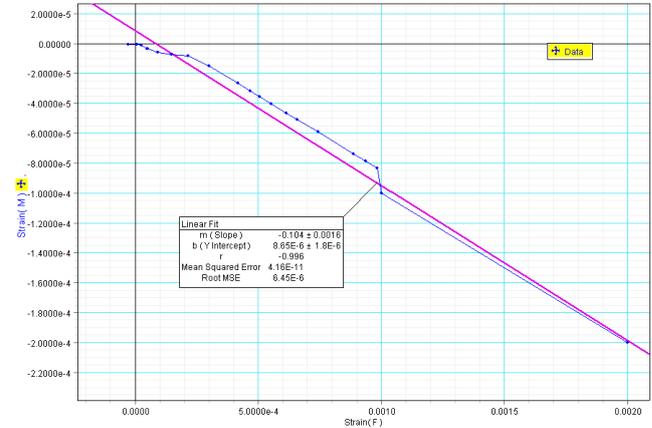
4. Penentuan angka banding Poisson untuk besi (*steel*)



Gambar 7. Tegangan membujur terhadap regangan melintang untuk besi dengan uji tarik

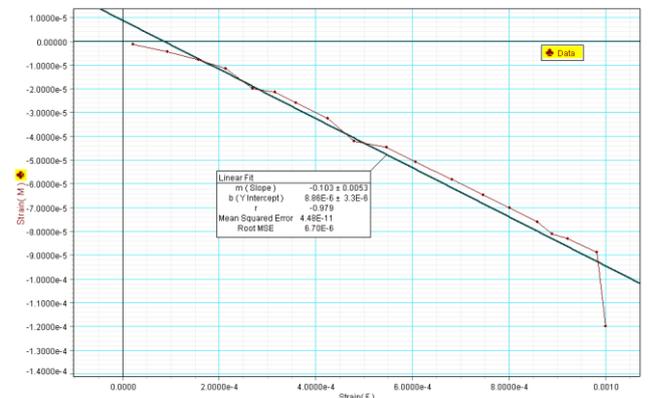
Berdasarkan Gambar 7 dapat diperoleh angka banding Poisson sebenarnya adalah $0,106 \pm 0,002$.

5. Penentuan angka banding Poisson untuk kuningan (*brass*)
 Berdasarkan Gambar 8 dapat diperoleh angka banding Poisson sebenarnya adalah $0,104 \pm 0,002$.



Gambar 8. Regangan membujur terhadap regangan melintang untuk kuningan dengan uji tarik

6. Penentuan angka banding Poisson untuk baja campuran (*anneal*)
 Berdasarkan Gambar 9 dapat diperoleh angka banding Poisson sebenarnya adalah $0,103 \pm 0,005$.



Gambar 9. Regangan membujur terhadap regangan melintang untuk baja campuran dengan uji tarik

PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini, semua bahan (besi, kuningan dan baja campuran) yang terikat kedua ujungnya berubah bentuk karena dipengaruhi oleh gaya tarik sehingga bahan mengalami perpanjangan. Jika gaya tersebut diberikan pada bahan, maka gaya ini akan disalurkan secara merata kedalam bahan sehingga seluruh bahan mengalami tegangan (*stress*). Karena gaya yang diberikan pada bahan adalah gaya tarik maka tegangan yang terjadi pada bahan adalah tegangan tarik. Hal ini berarti bahan mengalami perubahan bentuk dari panjang mula-mula menjadi memanjang, namun lebar bahan menjadi menyusut secara kontinyu apabila bahan mengalami tegangan tarik yang

kontinyu, dan kalau dibiarkan tegangan terus dapat menimbulkan elastisitas menuju ke batas elastik sampai bahan mengalami patahan. Penelitian ini dilakukan pada bahan dengan gaya tarik sampai bahan mengalami patahan.

Suatu bahan yang digunakan dalam penelitian mengalami regangan apabila terjadi perubahan matra atau ukuran seperti bertambah panjang dan berkurangnya lebar akibat adanya tekanan tarik. Setiap bahan akan mengalami deformasi elastik kalau terjadi regangan dalam hal ini regangan tarik. Ketiga bahan (besi, kuningan dan baja campuran) mengalami deformasi elastik maka sudah tentu memiliki hubungan tegangan dan regangan yang disebut sebagai modulus elastisitas atau modulus Young.

Berdasarkan Gambar 3, daerah proporsional pada ketiga bahan berbeda dengan urutan dimana modulus elastisitas yang rendah sampai besar sesuai pengujian linieritas pada bahan kuningan sebesar $\kappa_{brass} = (20,10 \pm 1,60) \times 10^9$ Pa, bahan baja campuran sebesar $\kappa_{anneal} = (68,10 \pm 2,20) \times 10^9$ Pa dan bahan besi sebesar $\kappa_{steel} = (201,00 \pm 5,30) \times 10^9$ Pa. Hal ini disebabkan oleh gaya yang dilakukan pada bahan berbanding lurus dengan elastisitas bahan itu. Misalnya pertambahan panjang bahan berbanding lurus dengan gaya tarik yang menyebabkannya, sehingga bahan kuningan mengalami pertambahan panjang yang lebih besar dari bahan baja campuran maupun bahan besi. Begitupun bahan campuran mengalami pertambahan panjang lebih dari bahan besi. Walhasil, regangan dari bahan kuningan lebih besar dari bahan baja campuran dan bahan besi, sedangkan tegangan bahan kuningan lebih kecil dari bahan baja campuran dan bahan besi. Adanya deviasi nilai modulus elastisitas, karena dalam pencacahan tegangan dan regangan dilakukan mulai dari batas proporsional sampai bahan mengalami patahan.

Hubungan antara tegangan dan regangan mengikuti hukum Hooke untuk elastisitas, dalam batas (limit) elastik suatu bahan, dan hal ini menunjukkan bahwa tegangan berbanding lurus dengan regangan yang dinyatakan sebagai modulus elastisitas. Pada daerah proporsional, modulus elastisitas bahan hasil uji tarik menggunakan bahan besi (CR steel), kuningan (brass) dan baja campuran (STL anneal) terdapat hasilnya sangat berbeda dengan modulus elastisitas bahan yang tertera pada referensi (literature). Karena nilai modulus elastisitas referensi merupakan harga yang sifatnya refresentatif, oleh sebab itu untuk menentukan harga yang sebenarnya sangat sulit, dan untuk menentukan harga sebenarnya pada bahan tertentu biasanya sangat berbeda. Ini terbukti dengan modulus elastisitas penelitian memberikan nilainya juga berbeda. Perbedaan ini disebabkan oleh matra (dimension) bahan yang digunakan memiliki tebalnya 0,3 mm, dan struktur atau komposisi penyusun bahan tersebut berbeda.

Bahan kuningan memiliki batas elastisitas sangat rendah jika dibandingkan dengan bahan baja campuran dan besi. Pada daerah elastik ini terdapat hubungan antara tegangan dan regangan saling ketergantungan atau berbanding lurus, hal ini menunjukkan bahwa jika tegangan makin besar akan menyebabkan regangan pun makin besar, dan sebaliknya jika tegangan semakin kecil maka reganganpun semakin kecil.

Apabila bahan melampaui daerah elastik, kecenderungan bahan sudah berada pada kondisi sangat tegang (kritis) dan bahan akan mengalami perubahan bentuk, sehingga kondisi ini bahan berada pada batas elastik. Dengan kata lain, jika bahan dideformasikan sampai melampaui suatu titik tertentu, bahan tersebut tidak akan kembali kebentuk asalnya jika gaya yang dikenakan padanya ditiadakan, titik ini disebut batas elastik. Sifat bahan yang berada pada batas elastik ini disebut sifat plastik, dan apabila bahan diberikan tegangan terus menerus, maka pada akhirnya bahan mengalami patahan.

Kecenderungan bahan mengalami patahan atau retak lebih cepat jika diberikan tegangan yang sama adalah bahan kuningan kemudian disusul dengan bahan baja campuran dan bahan besi. Hal ini berkaitan dengan kekuatan terhadap bahan tersebut, dimana kuningan memiliki kekuatan tariknya sangat rendah jika dibandingkan dengan bahan baja campuran dan besi. Faktor yang menyebabkan terjadinya patahan, karena laju deformasi dan menyangkut asalnya bahan itu terbentuk.

Dalam pengujian bahan besi, kuningan dan baja campuran dengan uji tarik, jika setiap bahan ditarik maka terjadi pemanjangan dari panjang semula dan hal ini akan menyebabkan terjadinya penyusutan lebar dari lebar semula. Ini berarti persentase akibat dari penyusutan lebar akan sebanding dengan persentase dari pemanjangan bahan tersebut. Adanya perbandingan ini dikenal dengan nama angka banding Poisson. Angka banding Poisson untuk masing-masing bahan yang digunakan berbeda satu dengan lainnya, dimana angka banding Poisson untuk bahan besi adalah $m_{steel} = 0,106 \pm 0,002$, bahan kuningan adalah $m_{brass} = 0,104 \pm 0,002$ dan bahan baja campuran $m_{anneal} = 0,103 \pm 0,005$. Angka banding Poisson pada bahan besi lebih besar daripada angka banding Poisson pada bahan kuningan dan baja campuran. Hal ini berarti kekenyalan daripada bahan besi lebih besar daripada bahan kuningan dan baja campuran, dan disamping itu juga komposisi terbentuknya atau tersusunnya bahan tersebut juga berbeda dengan dilakukan perlakuan tarik oleh gaya yang disistribusikan kepada bahan juga turut mempengaruhi regangan.

Daerah berlakunya elastisitas sesuai dengan Gambar 3 dalam aplikasinya, perlu dianjurkan harus lebih kecil untuk memberikan tegangan, begitupun dengan daerah plastik dimana daerah mencapai batas elastisitas dan melewati batas elastisitas, karena kalau diberikan tegangan besar pada daerah plastik akan menyebabkan deformasi permanen pada bagian bahan/material yang makin lama makin besar deformasinya sehingga membahayakan bahan tersebut. Akibatnya, kalau bahan ini digunakan dalam konstruksi bangunan atau sistem rekayasa akan mempengaruhi konstruksi bangunan itu sendiri. Untuk menjaga kenyamanan atau keselamatan dalam mengkonstruksikan suatu sistem atau bangunan, maka diperlukan tegangan yang diperkenankan atau tegangan ijin harus berada jauh di bawah titik patahnya, dan dianjurkan tidak boleh melebihi batas elastisitasnya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada Tim Redaksi Jurnal Barekeng yang telah memuat hasil penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Blatt F. J. 1986., *Principles of Physics*, 2nd edition. Allyn and Bacon, Inc., Boston.
- Cutnell J. D. and K.W. Johnson, 1995. *Physics* 3rd edition. John Wiley & Sons Inc. New York.
- Frauenfelder P. and P. Huber., 1966. *Introduction to Physics: Mechanics, Hydodynamics, Thermodynamics*, volume . Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts.
- Kane J. W. and M.M.Sternheim., 1976. *terjemahan P. Silaban*, 1991., *Fisika*, edisi ke tiga. AIDAB dan ITB, Bandung
- Sarojo, G. 2002., *Fisika Dasar Seri Mekanika*. Salemba Teknika, Jakarta.
- Sears F. W. 1944., *terjemahan P. J. Soedarjana*, 1986., *Mekanika, Panas dan Bunyi*. Binacipta, Bandung.
- Seireg, A. 1969., *Mechanical System Analysis*. International Textbooks Company, Pennsylvania.
- Simon K. R. 1971., *Mechanics*, 3rd edition. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Philippines. Halaman 301-312
- Soedjojo, P. 2004., *Fisika Dasar*. Andi Offset, Yogyakarta.

KETAKSAMAAN INTEGRAL GRONWALL-BELLMAN UNTUK FUNGSI BERPANGKAT
(Integral Inequalities of Gronwall-Bellman for Power Function)

MONALISA ENGELLINE RIJOLY¹, HENRY JUNUS WATTIMANELA², RUDY WOLTER MATAKUPAN³

¹ *Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura*

^{2,3} *Staf Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura*

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

email: alissangell_ly@yahoo.com; wattimanela@yahoo.com; rwmatakupan@yahoo.com

ABSTRACT

Integral inequality of Gronwall-Bellman is known as an integral inequality which consists of differential and integral forms. Integral inequality of Gronwall-Bellman involving several functions that some definite condition hold and integral values of these functions. In addition, the integral inequality of Gronwall-Bellman shows that if a function is bounded to a certain integral values then that function is also bounded for the other conditions, that is the exponential of integral. Furthermore, by adding some specific conditions the integral inequality of Gronwall-Bellman can be extended to the case of power functions.

Keywords: *Integral Inequalities Of Gronwall-Bellman, Power Function*

PENDAHULUAN

Dalam perkembangan ilmu Matematika, ketaksamaan memainkan peran yang sangat penting, khususnya dalam bidang analisis. Banyak teori-teori tentang ketaksamaan yang dikembangkan, diantaranya yang sudah dikenal adalah ketaksamaan segitiga, ketaksamaan Cauchy-Schwarz, ketaksamaan Holder dan ketaksamaan Minkowski.

Teori ketaksamaan lain yang cukup penting adalah ketaksamaan integral. Ketaksamaan ini merupakan salah satu teori yang sangat dibutuhkan dalam studi persamaan diferensial karena dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai batas serta dapat menganalisis eksistensi, ketunggalan dan stabilitas dari solusi persamaan diferensial tersebut.

Salah satu ketaksamaan integral yang sangat dikenal adalah ketaksamaan integral Gronwall-Bellman. Ketaksamaan integral Gronwall-Bellman terdiri dari dua bentuk yaitu bentuk diferensial dan bentuk integral. Kedua bentuk ini pertama kali diperkenalkan oleh Thomas Hakon Gronwall pada tahun 1919 dalam tulisannya yang berjudul "*Note On The Derivatives With Respects To A Parameter Of The Solutions Of A System Of Differential Equations*". Dalam tulisannya Gronwall hanya mampu membuktikan bentuk diferensial sedangkan bentuk integralnya dibiarkan tanpa bukti. Kemudian pada tahun 1943 bentuk integral (yang diperkenalkan oleh

Gronwall) berhasil dibuktikan oleh Richard Bellman. Oleh karena keberhasilannya maka ketaksamaan ini dinamakan sebagai ketaksamaan integral Gronwall-Bellman.

Secara umum, konsep ketaksamaan integral Gronwall-Bellman melibatkan beberapa fungsi yang memenuhi syarat tertentu dan nilai integral dari fungsi-fungsi tersebut. Di sisi lain, ternyata dengan menambahkan beberapa syarat lagi maka ketaksamaan integral Gronwall-Bellman dapat diperluas untuk kasus fungsi berpangkat.

Berdasarkan paparan di atas, maka dalam penelitian ini akan dibahas tentang ketaksamaan integral Gronwall-Bellman untuk fungsi berpangkat.

TINJAUAN PUSTAKA

Pada tahun 1919, T. H Gronwall menemukan konsep ketaksamaan integral saat sedang mempelajari ketergantungan sistem persamaan diferensial terhadap parameter. Ketaksamaan ini kemudian dikenal sebagai ketaksamaan integral Gronwall. Selanjutnya pada tahun 1943 dalam bukunya yang berjudul "*Stability Theory of Differential Equations*" R. Bellman menggunakan ketaksamaan Gronwall untuk menyusun sifat-sifat ketaksamaan yang baru, yang dikenal sebagai ketaksamaan integral Gronwall-Bellman.

Drumi Bainov dan Pavel Simeonov (1991) dalam bukunya yang berjudul “Integral Inequalities and Applications” mengkaji ulang ketaksamaan integral Gronwall-Bellman sehingga lebih sederhana dan mudah dimengerti. Drumi dan Pavel juga membahas aplikasi dari ketaksamaan Gronwall-Bellman dalam persamaan diferensial.

Kemudian H. El-Owady, A. Ragab dan A. Abdeldaim (1999) dalam jurnalnya yang berjudul “On Some New Integral Inequalities of Gronwall-Bellman type” menyusun sifat-sifat ketaksamaan yang baru khususnya untuk fungsi berpangkat.

Dengan menggunakan dua sumber utama di atas dan didukung oleh beberapa literatur yang lain, maka peneliti mencoba menyusun penelitian tentang “Ketaksamaan Integral Gronwall-Bellman Untuk Fungsi Berpangkat” dengan harapan dapat mudah dimengerti.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas beberapa teorema yang memperlihatkan sifat-sifat dari ketaksamaan integral Gronwall-Bellman dan dilanjutkan dengan membahas perluasan dari ketaksamaan ini untuk fungsi berpangkat.

1. Ketaksamaan Integral Gronwall-Bellman

Teorema 1.1 berikut ini merupakan bentuk integral yang diperkenalkan oleh Gronwall dan berhasil dibuktikan oleh Bellman. Teorema ini sangat penting dan juga menjadi dasar dalam pengembangan ketaksamaan integral Gronwall-Bellman.

Teorema 1.1.

Misalkan $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Misalkan juga $u(t)$ dan $b(t)$ adalah fungsi kontinu yang non negatif untuk $t \geq \alpha$ dimana $\alpha \in \mathbb{R}$. Jika $a \geq 0$ adalah konstanta dan berlaku

$$u(t) \leq a + \int_{\alpha}^t b(s) u(s) ds, \quad t \geq \alpha \tag{1}$$

maka

$$u(t) \leq a \exp\left(\int_{\alpha}^t b(s) ds\right), \quad t \geq \alpha \tag{2}$$

Bukti :

i. Jika $a > 0$ maka dari Persamaan (1) dapat diperoleh

$$\frac{u(t)}{a + \int_{\alpha}^t b(s) u(s) ds} \leq 1, \quad t \geq \alpha \tag{3}$$

Misalkan $\tau \geq \alpha$ maka Persamaan (3) dapat ditulis sebagai

$$\frac{u(\tau)}{a + \int_{\alpha}^{\tau} b(s) u(s) ds} \leq 1$$

Selanjutnya kalikan $b(\tau)$ terhadap kedua ruas maka

$$\text{diperoleh } \frac{b(\tau) u(\tau)}{a + \int_{\alpha}^{\tau} b(s) u(s) ds} \leq b(\tau)$$

$$\frac{d}{d\tau} \ln\left(a + \int_{\alpha}^{\tau} b(s) u(s) ds\right) \leq b(\tau)$$

Integralkan kedua ruas dari α ke t maka diperoleh

$$\int_{\alpha}^t \frac{d}{d\tau} \ln\left(a + \int_{\alpha}^{\tau} b(s) u(s) ds\right) d\tau \leq \int_{\alpha}^t b(s) ds$$

$$\ln\left(a + \int_{\alpha}^{\tau} b(s) u(s) ds\right) \Big|_{\alpha}^t \leq \int_{\alpha}^t b(s) ds$$

$$\ln\left(a + \int_{\alpha}^t b(s) u(s) ds\right) - \ln(a + 0) \leq \int_{\alpha}^t b(s) ds$$

$$\ln\left(a + \int_{\alpha}^t b(s) u(s) ds\right) - \ln a \leq \int_{\alpha}^t b(s) ds$$

$$\ln\left(\frac{a + \int_{\alpha}^t b(s) u(s) ds}{a}\right) \leq \int_{\alpha}^t b(s) ds$$

$$\exp\left[\ln\left(\frac{a + \int_{\alpha}^t b(s) u(s) ds}{a}\right)\right] \leq \exp\left(\int_{\alpha}^t b(s) ds\right)$$

$$\frac{a + \int_{\alpha}^t b(s) u(s) ds}{a} \leq \exp\left(\int_{\alpha}^t b(s) ds\right)$$

$$a + \int_{\alpha}^t b(s) u(s) ds \leq a \exp\left(\int_{\alpha}^t b(s) ds\right)$$

Berdasarkan Persamaan (1) dan hasil di atas maka diperoleh

$$u(t) \leq a \exp\left(\int_{\alpha}^t b(s) ds\right), \quad t \geq \alpha$$

ii. Jika $a = 0$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku

$$u(t) \leq \varepsilon + \int_{\alpha}^t b(s) u(s) ds$$

Dengan menggunakan hasil Bagian i. maka diperoleh

$$u(t) \leq \varepsilon \exp\left(\int_{\alpha}^t b(s) ds\right)$$

Selanjutnya jika $\varepsilon \rightarrow 0$ maka diperoleh $u(t) = 0$. □

Selanjutnya dalam pembahasan ini setiap fungsi yang diberikan merupakan fungsi bernilai riil. Sifat berikut ini memperlihatkan akibat yang bisa diperoleh dari Teorema 1.1 di atas jika terdapat dua konstanta dalam ketaksamaan.

Akibat 1.2.

Misalkan $u(t)$ dan $b(t)$ adalah fungsi non negatif untuk $t \geq \alpha$ dimana $\alpha \in \mathbb{R}$. Jika $a \geq 0$ dan γ adalah konstanta,

serta berlaku

$$u(t) \leq ae^{-\gamma(t-\alpha)} + \int_{\alpha}^t e^{-\gamma(t-s)} b(s) u(s) ds, \quad t \geq \alpha \quad (4)$$

maka

$$u(t) \leq a \exp\left(-\gamma(t-\alpha) + \int_{\alpha}^t b(s) ds\right), \quad t \geq \alpha \quad (5)$$

$$\ln\left(a + \int_{\alpha}^t b(s) u(s) ds\right) - \ln\left(a + \int_{\alpha}^{\alpha} b(s) u(s) ds\right) \leq \int_{\alpha}^t b(s) ds$$

Bukti :

Dari Persamaan (4) dapat diperoleh

$$u(t) \leq ae^{-\gamma t + \gamma \alpha} + \int_{\alpha}^t e^{-\gamma t + \gamma s} b(s) u(s) ds$$

$$u(t) \leq e^{-\gamma t} \left(ae^{\gamma \alpha} + \int_{\alpha}^t e^{\gamma s} b(s) u(s) ds \right)$$

$$e^{\gamma t} u(t) \leq ae^{\gamma \alpha} + \int_{\alpha}^t e^{\gamma s} b(s) u(s) ds$$

Misalkan $w(t) = e^{\gamma t} u(t)$ maka diperoleh

$$w(t) \leq ae^{\gamma \alpha} + \int_{\alpha}^t b(s) w(s) ds$$

Berdasarkan Teorema 1.1. maka diperoleh

$$w(t) \leq ae^{\gamma \alpha} \exp\left(\int_{\alpha}^t b(s) ds\right)$$

Karena $w(t) = e^{\gamma t} u(t)$ maka

$$u(t) \leq ae^{-\gamma t} e^{\gamma \alpha} \exp\left(\int_{\alpha}^t b(s) ds\right)$$

sehingga terbukti $u(t) \leq ae^{-\gamma(t-\alpha)} \exp\left(\int_{\alpha}^t b(s) ds\right)$ atau

$$u(t) \leq a \exp\left(-\gamma(t-\alpha) + \int_{\alpha}^t b(s) ds\right) \quad \square$$

Teorema 1.3. berikut ini merupakan bentuk diferensial yang diperkenalkan dan dibuktikan oleh Gronwall. Sama seperti Teorema 1.1. di atas, teorema ini sangat penting dalam pengembangan ketaksamaan integral Gronwall-Bellman.

Teorema 1.3.

Misalkan $b(t)$ dan $f(t)$ adalah fungsi kontinu untuk $t \geq \alpha$ dimana $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $v(t)$ adalah fungsi yang terdiferensiasi untuk $t \geq \alpha$.

Jika berlaku

$$v'(t) \leq b(t) v(t) + f(t), \quad t \geq \alpha \quad (6)$$

dan

$$v(\alpha) \leq a, \text{ dimana } a \text{ konstanta} \quad (7)$$

$$v(t) \leq a \exp\left(\int_{\alpha}^t b(s) ds\right) + \int_{\alpha}^t f(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds \quad (8)$$

Bukti :

Misalkan $s \geq \alpha$ maka dari Persamaan (6) dapat diperoleh

$$v'(s) - b(s) v(s) \leq f(s)$$

$$[v'(s) - b(s) v(s)] \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) \leq f(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right)$$

$$v'(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) - b(s) v(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) \leq f(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right)$$

$$\frac{d}{ds} \left[v(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) \right] \leq f(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right)$$

Integralkan kedua ruas dari α ke t maka diperoleh

$$\int_{\alpha}^t \frac{d}{ds} \left[v(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) \right] ds \leq \int_{\alpha}^t f(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds$$

$$v(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) \Big|_{\alpha}^t$$

$$\leq \int_{\alpha}^t f(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds$$

$$v(t) \exp\left(\int_t^t b(\tau) d\tau\right) - v(\alpha) \exp\left(\int_{\alpha}^t b(\tau) d\tau\right)$$

$$\leq \int_{\alpha}^t f(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds$$

$$v(t) \exp(0) - v(\alpha) \exp\left(\int_{\alpha}^t b(\tau) d\tau\right)$$

$$\leq \int_{\alpha}^t f(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds$$

$$v(t) \leq v(\alpha) \exp\left(\int_{\alpha}^t b(\tau) d\tau\right)$$

$$+ \int_{\alpha}^t f(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds$$

Karena $v(\alpha) \leq a$ maka terbukti

$$v(t) \leq a \exp\left(\int_{\alpha}^t b(s) ds\right) + \int_{\alpha}^t f(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds \quad \square$$

Teorema 1.4.

Misalkan $b(t)$ dan $u(t)$ adalah fungsi non negatif yang kontinu pada $J = [\alpha, \beta]$ dimana $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Jika $a \geq 0$ dan berlaku

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^t b(s) u(s) |ds|, \quad t, t_0 \in J \quad (9)$$

maka

$$u(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^t b(s) |ds|\right), \quad t, t_0 \in J \quad (10)$$

Bukti :

Nilai mutlak pada Persamaan (9) akan menjamin

$\int_{t_0}^t b(s) u(s) |ds|$ bernilai non negatif, sehingga dengan

Teorema 1.1. maka Teorema 1.4. terbukti.

Teorema 1.5.

Misalkan $a(t)$, $b(t)$ dan $u(t)$ adalah fungsi kontinu pada $J = [\alpha, \beta]$ dimana $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan $b(t)$ adalah fungsi non negatif pada J .

Jika berlaku

$$u(t) \leq a(t) + \int_{\alpha}^t b(s) u(s) ds, \quad t \in J \quad (11)$$

maka

$$u(t) \leq a(t) + \int_{\alpha}^t a(s) b(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds, \quad t \in J \quad (12)$$

Bukti :

Misalkan $v(t) = \int_{\alpha}^t b(s) u(s) ds$, maka

$$u(t) \leq a(t) + v(t)$$

dan jelas bahwa $v(\alpha) = 0$. Selanjutnya

$$\begin{aligned} v'(t) &= b(t) u(t) \\ &\leq b(t) [a(t) + v(t)] \\ &= b(t) v(t) + a(t) b(t), \quad t \in J \end{aligned}$$

Misalkan bahwa $f(t) = a(t) b(t)$ maka

$$v'(t) \leq b(t) v(t) + f(t).$$

Dengan menggunakan Teorema 1.3. diperoleh

$$\begin{aligned} v(t) &\leq v(\alpha) \exp\left(\int_{\alpha}^t b(\tau) d\tau\right) \\ &+ \int_{\alpha}^t f(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t) &\leq (0) \exp\left(\int_{\alpha}^t b(\tau) d\tau\right) \\ &+ \int_{\alpha}^t a(s) b(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds \end{aligned}$$

$$v(t) \leq \int_{\alpha}^t a(s) b(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds$$

Karena $u(t) \leq a(t) + v(t)$ maka terbukti

$$u(t) \leq a(t) + \int_{\alpha}^t a(s) b(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds \quad \square$$

Berdasarkan Teorema 1.5 dapat diperoleh beberapa akibat yang diperlihatkan dalam sifat-sifat berikut ini.

Akibat 1.6.

Misalkan jika dalam Teorema 1.5. fungsi $a(t)$ juga merupakan fungsi tidak turun dalam J , maka berlaku

$$u(t) \leq a(t) \exp\left(\int_{\alpha}^t b(s) ds\right), \quad t \in J$$

Bukti :

Karena $a(t)$ juga merupakan fungsi tidak turun dalam J maka Persamaan (12) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} u(t) &\leq a(t) + a(t) \int_{\alpha}^t b(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds \\ &= a(t) \left(1 + \int_{\alpha}^t b(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds\right) \\ &= a(t) \left(1 - \int_{\alpha}^t \frac{d}{ds} \left[\exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) \right] ds\right) \\ &= a(t) \left(1 - \left(\exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) \right) \Big|_{\alpha}^t\right) \\ &= a(t) \left(1 - \left(\exp\left(\int_t^t b(\tau) d\tau\right) - \exp\left(\int_{\alpha}^t b(\tau) d\tau\right) \right)\right) \\ &= a(t) \left(1 - \left(\exp(0) - \exp\left(\int_{\alpha}^t b(\tau) d\tau\right) \right)\right) \\ &= a(t) \left(1 - 1 + \exp\left(\int_{\alpha}^t b(\tau) d\tau\right)\right) \\ &= a(t) \exp\left(\int_{\alpha}^t b(\tau) d\tau\right) \end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$u(t) \leq a(t) \exp\left(\int_{\alpha}^t b(s) ds\right), \quad t \in J \quad \square$$

Akibat 1.7.

Misalkan $b(t)$ dan $u(t)$ adalah fungsi kontinu pada $J = [\alpha, \beta]$ dimana $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Jika $b(t)$ adalah fungsi non negatif pada J dan a adalah konstanta serta berlaku

$$u(t) \leq a + \int_{\alpha}^t b(s) u(s) ds, \quad t \in J$$

maka

$$u(t) \leq a \exp\left(\int_{\alpha}^t b(s) ds\right), \quad t \in J$$

Bukti :

Jelas dengan menggunakan Akibat 1.6.

Akibat 1.8.

Misalkan $u(t)$ adalah fungsi kontinu pada $J = [\alpha, \beta]$ dimana $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Jika a dan $b > 0$ adalah konstanta serta berlaku

$$u(t) \leq a + \int_{\alpha}^t b u(s) ds, \quad t \in J$$

maka

$$u(t) \leq a e^{b(t-\alpha)}, \quad t \in J$$

Bukti :

Berdasarkan Akibat 1.7 diperoleh

$$\begin{aligned} u(t) &\leq a \exp\left(\int_{\alpha}^t b ds\right) \\ &= a \exp(b(t-\alpha)) \\ &= a e^{b(t-\alpha)} \quad \square \end{aligned}$$

Akibat 1.9.

Misalkan $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ dan $u(t)$ adalah fungsi kontinu pada $J = [\alpha, \beta]$ dimana $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Jika $b(t)$ dan $c(t)$ adalah fungsi non negatif pada J dan berlaku

$$u(t) \leq a(t) + \int_{\alpha}^t (b(s) u(s) + c(s)) ds$$

(13)

maka

$$u(t) \leq \left[\sup_{s \in [\alpha, t]} a(s) + \int_{\alpha}^t c(s) ds \right] \exp\left(\int_{\alpha}^t b(s) ds\right), \quad t \in J$$

(14)

Bukti :

Dari Persamaan (13) dapat diperoleh

$$u(t) \leq a(t) + \int_{\alpha}^t b(s) u(s) ds + \int_{\alpha}^t c(s) ds$$

$$u(t) \leq \sup_{s \in [\alpha, t]} a(s) + \int_{\alpha}^t c(s) ds + \int_{\alpha}^t b(s) u(s) ds$$

Misalkan $A(t) = \sup_{s \in [\alpha, t]} a(s) + \int_{\alpha}^t c(s) ds$ maka hasil di atas dapat ditulis menjadi

$$u(t) \leq A(t) + \int_{\alpha}^t b(s) u(s) ds$$

Karena $A(t) = \sup_{s \in [\alpha, t]} a(s) + \int_{\alpha}^t c(s) ds$ adalah fungsi tidak turun pada J maka berdasarkan Akibat 1.6. diperoleh

$$u(t) \leq A(t) \exp\left(\int_{\alpha}^t b(s) ds\right), \quad t \in J$$

atau terbukti bahwa

$$u(t) \leq \left[\sup_{s \in [\alpha, t]} a(s) + \int_{\alpha}^t c(s) ds \right] \exp\left(\int_{\alpha}^t b(s) ds\right)$$

untuk $t \in J$ \square

Sifat berikut ini merupakan penyempurnaan dari Akibat 1.9.

Teorema 1.10.

Misalkan $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ dan $u(t)$ adalah fungsi kontinu pada $J = [\alpha, \beta]$ dimana $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Jika $b(t)$ adalah fungsi non negatif pada J dan berlaku

$$u(t) \leq a(t) + \int_{\alpha}^t (b(s) u(s) + c(s)) ds, \quad t \in J \quad (15)$$

maka

$$\begin{aligned} a(t) &\leq a(t) + \int_{\alpha}^t \left\{ [a(s) b(s) + c(s)] \right. \\ &\quad \left. \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) \right\} ds, \quad t \in J \end{aligned} \quad (16)$$

Bukti :

Misalkan $v(t) = \int_{\alpha}^t [b(s) u(s) + c(s)] ds$ maka

$u(t) \leq a(t) + v(t)$ dan jelas bahwa $v(\alpha) = 0$.

Selanjutnya

$$\begin{aligned} v'(t) &= b(t) u(t) + c(t) \\ &\leq b(t) [a(t) + v(t)] + c(t) \\ &= b(t) v(t) + a(t) b(t) + c(t) \end{aligned}$$

Misalkan $f(t) = a(t) b(t) + c(t)$ maka

$v'(t) = b(t) v(t) + f(t)$ sehingga berdasarkan

Teorema 1.3. diperoleh

$$\begin{aligned} v(t) &\leq v(\alpha) \exp\left(\int_{\alpha}^t b(\tau) d\tau\right) \\ &\quad + \int_{\alpha}^t f(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds \\ v(t) &\leq (0) \exp\left(\int_{\alpha}^t b(\tau) d\tau\right) \\ &\quad + \int_{\alpha}^t [a(s) b(s) + c(s)] \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds \end{aligned}$$

$$v(t) \leq \int_{\alpha}^t [a(s)b(s) + c(s)] \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds$$

Karena $u(t) \leq a(t) + v(t)$

maka didapat

$$u(t) \leq a(t)$$

$$+ \int_{\alpha}^t [a(s)b(s) + c(s)] \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds \quad \square$$

Akibat 1.11.

Jika pada Teorema 1.10 fungsi $a(t)$ adalah fungsi tidak turun maka berlaku

$$u(t) \leq a(t) \exp\left(\int_{\alpha}^t b(\tau) d\tau\right) + \int_{\alpha}^t c(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds$$

Bukti :

$$u(t) \leq a(t) + \int_{\alpha}^t a(s)b(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds + \int_{\alpha}^t c(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds$$

$$u(t) \leq a(t) + a(t) \int_{\alpha}^t b(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds + \int_{\alpha}^t c(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds$$

Dengan menggunakan hasil pada Akibat 1.6 maka diperoleh

$$u(t) \leq a(t) \exp\left(\int_{\alpha}^t b(\tau) d\tau\right) + \int_{\alpha}^t c(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds \quad \square$$

Akibat 1.12.

Jika pada Teorema 1.10, fungsi $a(t)$ diganti dengan konstanta d maka berlaku

$$u(t) \leq d \exp\left(\int_{\alpha}^t b(\tau) d\tau\right) + \int_{\alpha}^t c(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau) d\tau\right) ds, \quad t \in J$$

Bukti :

Jelas dengan menggunakan Akibat 1.11.

Akibat 1.13.

Misalkan $u(t)$ adalah fungsi kontinu untuk $t \geq \alpha$ dimana $\alpha \in \mathbb{R}$. Jika $b > 0$, a , c dan $\gamma \neq b$ adalah konstanta dan berlaku

$$u(t) \leq ae^{-\gamma(t-\alpha)} + \int_{\alpha}^t e^{-\gamma(t-s)} [bu(s) + c] ds, \quad t \geq \alpha \quad (17)$$

maka

$$u(t) \leq ae^{(b-\gamma)(t-\alpha)} + \frac{c}{\gamma-b} (1 - e^{(b-\gamma)(t-\alpha)}), \quad t \geq \alpha \quad (18)$$

Bukti :

$$\begin{aligned} u(t) &\leq ae^{-\gamma(t-\alpha)} \exp\left(\int_{\alpha}^t b d\tau\right) + \int_{\alpha}^t e^{-\gamma(t-s)} c \exp\left(\int_s^t b d\tau\right) ds \\ &= ae^{-\gamma(t-\alpha)} \exp(b(t-\alpha)) \\ &\quad + \int_{\alpha}^t e^{-\gamma(t-s)} c \exp(b(t-s)) ds \\ &= ae^{-\gamma(t-\alpha)} e^{b(t-\alpha)} + \int_{\alpha}^t e^{-\gamma(t-s)} c e^{b(t-s)} ds \\ &= ae^{(b-\gamma)(t-\alpha)} + \int_{\alpha}^t c e^{(b-\gamma)(t-s)} ds \\ &= ae^{(b-\gamma)(t-\alpha)} + \int_{\alpha}^t c e^{(b-\gamma)(t-s)} ds \\ &= ae^{(b-\gamma)(t-\alpha)} + \left(\frac{c}{(\gamma-b)} e^{(b-\gamma)(t-s)} \right) \Big|_{\alpha}^t \\ &= ae^{(b-\gamma)(t-\alpha)} + \left(\left(\frac{c}{(\gamma-b)} e^{(b-\gamma)(t-\alpha)} \right) - \left(\frac{c}{(\gamma-b)} e^{(b-\gamma)(t-\alpha)} \right) \right) \\ &= ae^{(b-\gamma)(t-\alpha)} + \frac{c}{(\gamma-b)} (1 - e^{(b-\gamma)(t-\alpha)}) \end{aligned}$$

Sehingga

$$u(t) \leq ae^{(b-\gamma)(t-\alpha)} + \frac{c}{\gamma-b} (1 - e^{(b-\gamma)(t-\alpha)}), \quad t \geq \alpha \quad \square$$

Akibat 1.14.

Misalkan $u(t)$ adalah fungsi kontinu pada $J = [\alpha, \beta]$ dimana $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Jika $b > 0$, a , dan c adalah konstanta dan berlaku

$$u(t) \leq a + \int_{\alpha}^t (bu(s) + c) ds, \quad t \in J$$

maka

$$u(t) \leq ae^{b(t-\alpha)} + \frac{c}{b} (e^{b(t-\alpha)} - 1), \quad t \in J$$

Bukti :

Dengan menggunakan Akibat 1.13. dan diambil $\gamma = 0$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
u(t) &\leq ae^{(b-\gamma)(t-\alpha)} + \frac{c}{\gamma-b} (1 - e^{(b-\gamma)(t-\alpha)}) \\
&= ae^{(b-0)(t-\alpha)} + \frac{c}{0-b} (1 - e^{(b-0)(t-\alpha)}) \\
&= ae^{b(t-\alpha)} - \frac{c}{b} (1 - e^{b(t-\alpha)}) \\
&= ae^{b(t-\alpha)} + \frac{c}{b} (e^{b(t-\alpha)} - 1)
\end{aligned}$$

sehingga $u(t) \leq ae^{b(t-\alpha)} + \frac{c}{b} (e^{b(t-\alpha)} - 1), t \in J$ \square

Teorema 1.15.

Misalkan $u(t)$ dan $b(t)$ fungsi kontinu pada $J = [\alpha, \beta]$ dimana $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sedangkan $a(t)$ dan $q(t)$ fungsi yang terintegral Rieman pada J . Misalkan juga $b(t)$ dan $q(t)$ adalah fungsi non negatif pada J .

Jika $u(t) \leq a(t) + q(t) \int_{\alpha}^t b(s)u(s) ds, t \in J$

maka

$$\begin{aligned}
u(t) &\leq a(t) + q(t) \left[\int_{\alpha}^t a(s)b(s) \right. \\
&\quad \left. \exp\left(\int_s^t b(\tau)q(\tau) d\tau \right) ds \right], t \in J \quad (19)
\end{aligned}$$

Bukti :

Misalkan $v(t) = \int_{\alpha}^t b(s)u(s) ds$ maka

$$u(t) \leq a(t) + q(t)v(t)$$

dan jelas bahwa $v(\alpha) = 0$. Selanjutnya

$$\begin{aligned}
v'(t) &= b(t)u(t) \\
&\leq b(t)[a(t) + q(t)v(t)] \\
&= b(t)q(t)v(t) + a(t)b(t)
\end{aligned}$$

Misalkan $h(t) = b(t)q(t)$ dan $f(t) = b(t)a(t)$ maka $v'(t) \leq h(t)v(t) + f(t)$ sehingga berdasarkan Teorema 1.3. diperoleh

$$v(t) \leq \int_{\alpha}^t a(s)b(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau)q(\tau) d\tau \right) ds, t \in J.$$

Karena $u(t) \leq a(t) + q(t)v(t)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
u(t) &\leq a(t) + q(t) \\
&\quad \left(\int_{\alpha}^t a(s)b(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau)q(\tau) d\tau \right) ds \right)
\end{aligned}$$

dimana $t \in J$ \square

2. Ketaksamaan Integral Gronwall-Bellman Untuk Fungsi Berpangkat

Dalam Bagian 1. sebelumnya telah diperlihatkan sifat-sifat dasar dari ketaksamaan integral Gronwall-Bellman. Dalam bagian ini akan diperlihatkan beberapa sifat-sifat ketaksamaan integral Gronwall-Bellman yang baru khususnya untuk fungsi berpangkat.

Teorema 2.1

Misalkan $u(t)$ adalah fungsi yang positif dan kontinu pada $J = [0, \infty)$. Misalkan juga $b(t)$ adalah fungsi non negatif yang kontinu pada J . Jika $p \geq 2$ dan a adalah konstanta positif serta berlaku

$$u^p(t) \leq a + \int_0^t b(s)u(s) ds, t \in J \quad (1)$$

maka

$$u(t) \leq \left[a^{\frac{q}{p}} + \frac{q}{p} \int_0^t b(s) ds \right]^{\frac{1}{q}}, t \in J \quad (2)$$

dimana $p - q = 1$.

Bukti :

Berdasarkan (1), diferensialkan $u^p(t)$ terhadap t

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [u^p(t)] &\leq \frac{d}{dt} \left[a + \int_0^t b(s)u(s) ds \right] \\
pu^{p-1}(t) &\leq b(t)u(t) \text{ maka } pu^{(p-2)}(t) \leq b(t)
\end{aligned}$$

Integralkan kedua ruas dari 0 ke t

$$\int_0^t pu^{(p-2)}(t) dt \leq \int_0^t b(s) ds$$

$$\frac{p}{(p-2)+1} u^{(p-2)+1}(t) \Big|_0^t \leq \int_0^t b(s) ds$$

$$\frac{p}{p-1} u^{(p-1)}(t) \Big|_0^t \leq \int_0^t b(s) ds$$

karena $p - q = 1$ maka $q = p - 1$ sehingga dapat ditulis

$$\frac{p}{q} u^q(t) \Big|_0^t \leq \int_0^t b(s) ds$$

$$\frac{p}{q} u^q(t) - \frac{p}{q} u^q(0) \leq \int_0^t b(s) ds$$

$$\frac{p}{q} u^q(t) \leq \frac{p}{q} u^q(0) + \int_0^t b(s) ds$$

Berdasarkan (1), $u^p(0) \leq a$ maka $u^q(0) \leq a^{\frac{q}{p}}$ sehingga

$$\frac{p}{q} u^q(t) \leq \frac{p}{q} a^{\frac{q}{p}} + \int_0^t b(s) ds$$

Kedua ruas dikalikan dengan $\frac{q}{p}$, sehingga diperoleh

$$u^q(t) \leq a^{\frac{q}{p}} + \frac{q}{p} \int_0^t b(s) ds$$

kemudian kedua ruas dipangkatkan $\frac{1}{q}$, sehingga

$$\text{diperoleh } u(t) \leq \left[a^{\frac{q}{p}} + \frac{q}{p} \int_0^t b(s) ds \right]^{\frac{1}{q}} \quad \square$$

Teorema 2.2

Misalkan $u(t)$ dan $b(t)$ adalah fungsi non negatif yang kontinu pada $J = [0, \infty)$. Misalkan juga $a(t)$ adalah fungsi positif, monoton, tidak turun dan kontinu pada J . Jika $p \geq 2$ adalah konstanta dan berlaku

$$u^p(t) \leq a^p(t) + \int_0^t b(s) u(s) ds, \quad t \in J \quad (3)$$

maka

$$u(t) \leq a(t) \left[1 + \frac{q}{p} \int_0^t b(s) a^{-q}(s) ds \right]^{\frac{1}{q}}, \quad t \in J \quad (4)$$

dimana $p - q = 1$.

Bukti :

Karena $a(t)$ adalah fungsi positif, monoton, dan tidak turun maka Persamaan (3) dapat ditulis sebagai

$$\frac{u^p(t)}{a^p(t)} \leq 1 + \int_0^t b(s) \left[\frac{u(s)}{a^p(t)} \right] ds$$

$$\left[\frac{u(t)}{a(t)} \right]^p \leq 1 + \int_0^t b(s) \left[\frac{u(s)}{a^p(t)} \right] ds$$

Karena $p - q = 1$ maka $p = 1 + q$ sehingga dapat ditulis

$$\left[\frac{u(t)}{a(t)} \right]^p \leq 1 + \int_0^t b(s) \left[\frac{u(s)}{a^{(1+q)}(s)} \right] ds$$

$$\left[\frac{u(t)}{a(t)} \right]^p \leq 1 + \int_0^t b(s) \left[\frac{u(s)}{a(s) \cdot a^q(s)} \right] ds$$

$$\left[\frac{u(t)}{a(t)} \right]^p \leq 1 + \int_0^t b(s) a^{-q}(s) \left[\frac{u(s)}{a(s)} \right] ds$$

Misalkan

$$m(t) = \frac{u(t)}{a(t)} \quad (5)$$

maka

$$m^p(t) \leq 1 + \int_0^t b(s) a^{-q}(s) m(s) ds, \quad t \in J$$

Berdasarkan Teorema 2.1 maka dapat diperoleh

$$m(t) \leq \left[1 + \frac{q}{p} \int_0^t b(s) a^{-q}(s) ds \right]^{\frac{1}{q}}, \quad t \in J \quad (6)$$

$$\frac{u(t)}{a(t)} \leq \left[1 + \frac{q}{p} \int_0^t b(s) a^{-q}(s) ds \right]^{\frac{1}{q}}, \quad t \in J$$

$$u(t) \leq a(t) \left[1 + \frac{q}{p} \int_0^t b(s) a^{-q}(s) ds \right]^{\frac{1}{q}}, \quad t \in J \quad \square$$

Teorema 2.3

Misalkan $b(t)$ dan $f(t)$ adalah fungsi non negatif yang kontinu pada $J = [0, \infty)$. Jika $v(t)$ adalah fungsi non negatif yang terdiferensiasi dan memenuhi

$$v'(t) \leq b(t)v(t) + f(t)v^p(t), \quad t \in J \quad (7)$$

maka berlaku

$$v(t) \leq \exp \left(\int_0^t b(s) ds \right) \quad (8)$$

$$\left[v^q(0) + q \int_0^t f(s) \exp \left(-q \int_0^s b(\tau) d\tau \right) ds \right]^{\frac{1}{q}}$$

dimana $0 < p < 1$ dan $p + q = 1$.

Bukti :

Misalkan $z(t) = \frac{v^q(t)}{q}$, maka

$$\begin{aligned} z'(t) &= (v^{q-1}(t))v'(t) \\ &\leq v^{q-1}(t)(b(t)v(t) + f(t)v^p(t)) \\ &= v^q(t)b(t) + f(t)v^{q-1+p}(t) \\ &= q \frac{v^q(t)}{q} b(t) + f(t)v^0(t) \end{aligned}$$

atau $z'(t) \leq qb(t)z(t) + f(t)$.

Berdasarkan Teorema 1.3 maka diperoleh

$$\begin{aligned} z(t) &\leq z(0) \exp \left(\int_0^t qb(s) ds \right) \\ &\quad + \int_0^t f(s) \exp \left(\int_s^t qb(\tau) d\tau \right) ds \end{aligned}$$

Karena $z(t) = \frac{v^q(t)}{q}$ maka

$$\begin{aligned} \frac{v^q(t)}{q} &\leq \frac{v^q(0)}{q} \exp \left(\int_0^t qb(s) ds \right) \\ &\quad + \int_0^t f(s) \exp \left(\int_s^t qb(\tau) d\tau \right) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^q(t) &\leq v^q(0) \exp \left(\int_0^t qb(s) ds \right) \\ &\quad + q \int_0^t f(s) \exp \left(\int_s^t qb(\tau) d\tau \right) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= v^q(0) \exp\left(\int_0^t qb(s) ds\right) \\
 &\quad + q \int_0^t f(s) \exp\left(\int_0^s qb(\tau) d\tau + \int_s^t qb(\tau) d\tau\right) ds \\
 &= v^q(0) \exp\left(\int_0^t qb(s) ds\right) + \exp\left(\int_0^t qb(\tau) d\tau\right) \\
 &\quad \left[q \int_0^t f(s) \exp\left(-\int_0^s qb(\tau) d\tau\right) ds \right] \\
 &= v^q(0) \exp\left(\int_0^t qb(s) ds\right) + \exp\left(\int_0^t qb(s) ds\right) \\
 &\quad \left[q \int_0^t f(s) \exp\left(-\int_0^s qb(\tau) d\tau\right) ds \right] \\
 &= \exp\left(\int_0^t qb(s) ds\right) \\
 &\quad \left[v^q(0) + q \int_0^t f(s) \exp\left(-\int_0^s qb(\tau) d\tau\right) ds \right]
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 v^q(t) &\leq \exp\left(q \int_0^t b(s) ds\right) \\
 &\quad \left[v^q(0) + q \int_0^t f(s) \exp\left(-q \int_0^s b(\tau) d\tau\right) ds \right]
 \end{aligned}$$

Pangkatkan kedua ruas persamaan di atas dengan $\frac{1}{q}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 v(t) &\leq \left[\exp\left(q \int_0^t b(s) ds\right) \right]^{\frac{1}{q}} \\
 &\quad \left[v^q(0) + q \int_0^t f(s) \exp\left(-q \int_0^s b(\tau) d\tau\right) ds \right]^{\frac{1}{q}} \\
 &= \exp\left(\int_0^t b(s) ds\right) \\
 &\quad \left[v^q(0) + q \int_0^t f(s) \exp\left(-q \int_0^s b(\tau) d\tau\right) ds \right]^{\frac{1}{q}}
 \end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned}
 v(t) &\leq \exp\left(\int_0^t b(s) ds\right) \\
 &\quad \left[v^q(0) + q \int_0^t f(s) \exp\left(-q \int_0^s b(\tau) d\tau\right) ds \right]^{\frac{1}{q}} \quad \square
 \end{aligned}$$

Teorema 2.4

Misalkan $u(t)$, $b(t)$ dan $c(t)$ adalah fungsi non negatif yang kontinu pada $J = [0, \infty)$. Jika a adalah konstanta non negatif dan untuk $0 < p < 1$ berlaku

$$u(t) \leq a + \int_0^t b(s) \left(u^p(s) + \int_0^s c(\tau) u(\tau) d\tau \right) ds \quad (9)$$

dimana $t \in J$, maka

$$u(t) \leq a + \int_0^t b(s) k(s) \exp\left(\int_0^s c(\tau) d\tau\right) ds \quad (10)$$

dimana

$$k(t) = \left(a^{pq} + pq \int_0^t b(s) \exp\left(-q \int_0^s c(\tau) d\tau\right) ds \right)^{\frac{1}{q}}$$

dan

$$p + q = 1 \quad (11)$$

Bukti :

Diferensiasikan $u(t)$ terhadap t pada Persamaan (9) maka diperoleh

$$u'(t) \leq b(t) \left(u^p(t) + \int_0^t c(s) u(s) ds \right), t \in J \quad (12)$$

Misalkan $v(t) = u^p(t) + \int_0^t c(s) u(s) ds$, $t \in J$ maka

Persamaan (12) menjadi

$$u'(t) \leq b(t)v(t) \quad (13)$$

Selanjutnya jelas bahwa

$$\begin{aligned}
 v(0) &= u^p(0) \\
 &\leq a^p
 \end{aligned}$$

Diferensiasikan $v(t)$ terhadap t maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 v'(t) &= pu^{p-1}(t) u'(t) + c(t)u(t)a \\
 &\leq pu^{p-1}(t) [b(t)v(t)] + c(t)u(t)
 \end{aligned}$$

Karena $u(t) \leq v(t)$

$$\begin{aligned}
 v'(t) &\leq pv^{p-1}(t) [b(t)v(t)] + c(t)v(t) \\
 &= pv^p(t) b(t) + c(t)v(t)
 \end{aligned}$$

atau

$$v'(t) \leq c(t)v(t) + pb(t) v^p(t) \quad (14)$$

Dari Persamaan (14) dan berdasarkan Teorema 2.3 maka untuk $t \in J$ diperoleh

$$\begin{aligned}
 v(t) &\leq \exp\left(\int_0^t c(s) ds\right) \\
 &\quad \left(v^q(0) + pq \int_0^t b(s) \exp\left(-q \int_0^s c(\tau) d\tau\right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq \exp\left(\int_0^t c(s) ds\right) \\
 &\quad \left(a^{pq} + pq \int_0^t b(s) \exp\left(-q \int_0^s c(\tau) d\tau\right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= k(t) \exp\left(\int_0^t c(s) ds\right)
 \end{aligned}$$

Dimana $t \in J$

sehingga

$$k(t) = \left(a^{pq} + pq \int_0^t b(s) \exp\left(-q \int_0^s c(\tau) d\tau\right) ds \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Selanjutnya, substitusikan hasil di atas ke Persamaan (13) maka diperoleh

$$u'(t) \leq b(t)k(t) \exp\left(\int_0^t c(s) ds\right) \quad (15)$$

Integralkan Persamaan (15) dari 0 ke t terhadap kedua ruas sehingga diperoleh

$$\int_0^t \frac{d}{ds}(u(s)) ds \leq \int_0^t b(s)k(s) \exp\left(\int_0^s c(\tau) d\tau\right) ds$$

$$u(s)\Big|_0^t \leq \int_0^t b(s)k(s) \exp\left(\int_0^s c(\tau) d\tau\right) ds$$

$$u(t) - u(0) \leq \int_0^t b(s)k(s) \exp\left(\int_0^s c(\tau) d\tau\right) ds$$

$$u(t) - \left(a + \int_0^t b(s) \left(u^p(s) + \int_0^s c(\tau)u(\tau) d\tau \right) ds \right) \leq \int_0^t b(s)k(s) \exp\left(\int_0^s c(\tau) d\tau\right) ds$$

$$u(t) - (a+0) \leq \int_0^t b(s)k(s) \exp\left(\int_0^s c(\tau) d\tau\right) ds$$

$$u(t) - a \leq \int_0^t b(s)k(s) \exp\left(\int_0^s c(\tau) d\tau\right) ds$$

atau

$$u(t) \leq a + \int_0^t b(s)k(s) \exp\left(\int_0^s c(\tau) d\tau\right) ds, \quad t \in J \quad \square$$

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, maka dapat diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Ketaksamaan integral Gronwall-Bellman merupakan salah satu teori ketaksamaan yang terdiri dari beberapa sifat, dimana sifat-sifat tersebut melibatkan beberapa fungsi yang didefinisikan sebagai fungsi tertentu dan nilai integral dari fungsi-fungsi tersebut. Dalam hal ini jika fungsi-fungsi tersebut terbatas terhadap nilai integral tertentu maka fungsi tersebut juga terbatas pada kondisi lain, yakni terhadap eksponensial dari integral tersebut.
2. Sifat dasar dari ketaksamaan integral Gronwall-Bellman hanya melibatkan dua fungsi yang didefinisikan sebagai fungsi tertentu dan satu konstanta. Sifat dasar tersebut kemudian dapat dikembangkan dengan melibatkan lebih dari dua fungsi serta beberapa konstanta yang terbatas pada interval tertentu.

Di sisi lain, dengan menambahkan beberapa syarat lagi yaitu pangkat dari suatu fungsi atau konstanta, maka

ketaksamaan integral tersebut menghasilkan beberapa sifat baru khususnya untuk fungsi berpangkat.

DAFTAR PUSTAKA

- Bainov, Drumi. & Simeonov, Pavel. (1991). *Integral Inequalities And Applications*, Kluwer Academic Publishers, USA.
- Choy, Sung Kyu. Kang, Bowon. & Koo, Namjip. (2007). *On Inequalities Of Gronwall Type*, hlm. 561 – 586, Department of Mathematics Chungnam University Daejeon 305-764, Republic of Korea.
- Negoro ST. & Harahap, B. (2005). *Ensiklopedia Matematika*, Ghalia, Bogor Selatan.
- Oguntuase, James Adedayo. (2001). *On An Inequality Of Gronwall*, hlm. 1 – 6, Department Of Mathematical Sciences, University Of Agriculture, Abeokuta, Nigeria.
- Owaidy, H. El , Ragab, A. & Abdeldaim, A. (1999). *On Some New Integral Inequalities Of Gronwall – Bellman Type*, hlm. 289 – 303, Department of Mathematics, Faculty of Science, AL-Azhar University, Nasr – City.
- Purcell, Edwin J. dkk. (2003). *Kalkulus Jilid 1 Edisi Kedelapan*, Erlangga, Jakarta.
- Riyanto, M. Zaki. 2008. *Pengantar Analisis Real I*, Yogyakarta.
- <http://www.google.co.id/url?sa=t&source=web&cd=2&ved=0CCEQFjAB&url=http%3A%2F%2Fwww.emis.de%2Fjournals%2FDM%2FvXI2%2Fart4.pdf&rct=j&q=integral%20inequality&ei=EFLZTc7ODI7evQP I-PWkBW&usq=AFQjCNGX8Hm1t4ZnSkpqNQGC MufH0qXUzw&cad=rja.18 Mei 2011, Pkl. 21.45 WIT>
- http://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski_inequality. 20 Mei 2011, Pkl. 20.00 WIT

MODEL GEOGRAPHICALLY WEIGHTED POISSON REGRESSION DENGAN PEMBOBOT FUNGSI KERNEL GAUSS
Studi Kasus: Jumlah Kematian Bayi di Jawa Timur Tahun 2007

SALMON NOTJE AULELE

Staf Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
email: once_cancer@yahoo.com

ABSTRAK

Kematian bayi adalah suatu kematian yang dialami anak sebelum mencapai usia satu tahun. Angka kematian bayi (AKB) adalah besarnya kemungkinan bayi meninggal sebelum mencapai usia satu tahun, dinyatakan dalam perseribu kelahiran hidup. Analisis regresi merupakan analisis statistik yang bertujuan untuk memodelkan hubungan antara variabel respon dengan variabel prediktor. Apabila variabel respon berdistribusi Poisson, maka model regresi yang digunakan adalah regresi Poisson. *Geographically Weighted Poisson Regression* (GWPR) adalah bentuk lokal dari regresi Poisson dimana lokasi diperhatikan yang berasumsi bahwa data berdistribusi Poisson. Dalam penelitian ini akan mengetahui faktor-faktor apa saja yang mempengaruhi jumlah kematian bayi di Provinsi Jawa Timur dengan menggunakan model GWPR dengan menggunakan pembobot fungsi kernel gauss. Hasil penelitian menunjukkan bahwa secara keseluruhan faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kematian bayi di Jawa Timur berdasarkan model GWPR dengan pembobot fungsi kernel gauss adalah persentase persalinan yang dilakukan dengan bantuan tenaga non medis (X_1), rata-rata usia perkawinan pertama wanita (X_2), rata-rata pemberian ASI eksklusif (X_4) dan jumlah sarana kesehatan (X_7). Berdasarkan variabel yang signifikan maka kabupaten/kota di Jawa Timur dapat dikelompokkan menjadi 2 kelompok. Dengan membandingkan nilai AIC antara model regresi Poisson dan model GWPR diketahui bahwa model GWPR dengan pembobot fungsi kernel Gauss merupakan model yang lebih baik digunakan untuk menganalisis jumlah kematian bayi di Propinsi Jawa Timur tahun 2007.

Kata Kunci: *Kematian Bayi, Geographically Weighted Poisson Regression, Maximum Likelihood Estimator, Fungsi Kernel Gauss*

PENDAHULUAN

Pembangunan kesehatan pada hakekatnya merupakan penyelenggaraan upaya kesehatan untuk mencapai kemampuan hidup sehat secara mandiri dengan upaya peningkatan derajat kesehatan masyarakat yang optimal, peningkatan sumber daya manusia dan pemerataan jangkauan pelayanan kesehatan. *Millenium Development Goals* (MDGs) adalah sebuah komitmen bersama masyarakat internasional untuk mempercepat pembangunan manusia dan pengentasan kemiskinan. Salah satu tujuan MDGs yaitu menurunkan Angka Kematian Balita sebesar dua pertiga dari tahun 1990 sampai dengan tahun 2015. Indikator angka kematian balita yang paling penting adalah angka kematian bayi. Angka kematian bayi adalah salah satu indikator penting

dalam menentukan tingkat kesehatan masyarakat. Negara Indonesia masih harus berjuang keras untuk memperbaiki indikator pembangunan kesehatan, khususnya angka kematian bayi, karena tren angka kematian bayi selama beberapa tahun terakhir belum menurun. Berdasarkan prediksi dari tim BPS-UNDP-Bappenas (2005) penurunan angka kematian bayi tidak berlangsung cepat, tetapi turun perlahan secara eksponensial. Berdasarkan pola ini, diperkirakan di tahun 2015 angka kematian bayi di Indonesia mencapai 21 kematian bayi tiap 1000 kelahiran. Angka ini belum memenuhi target dari MDGs yaitu sebesar 17 kematian bayi tiap 1000 kelahiran. Untuk itu pemerintah harus berupaya keras melalui berbagai program untuk menekan angka kematian bayi.

Geographically Weighted Poisson Regression (GWPR) adalah bentuk lokal dari regresi poisson dimana

lokasi diperhatikan yang berasumsi bahwa data berdistribusi Poisson. Nakaya, dkk (2004) menggunakan model GWPR untuk suatu himpunan data pekerjaan dengan usia kematian di Tokyo. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa ada variasi yang signifikan dalam hubungan kerja dan usia kematian di Tokyo. Hedayeghi, dkk (2009) menunjukkan bahwa model GWPR lebih baik digunakan untuk menyelidiki variasi dalam hubungan jumlah *zonal collisions* daripada *Generalized Linear Model* yang konvensional. Model GWPR akan diterapkan untuk pemodelan jumlah kematian bayi di Provinsi Jawa Timur tahun 2007 dengan menggunakan pembobot fungsi kernel gauss dan fungsi kernel bisquare.

Berdasarkan uraian di atas dapat dirumuskan permasalahan dalam penelitian ini yaitu faktor-faktor apa saja yang berpengaruh terhadap jumlah kematian bayi di Jawa Timur berdasarkan model GWPR dengan menggunakan pembobot fungsi kernel Gauss. Sehingga, tujuan penelitian ini adalah menjawab permasalahan tersebut agar dapat dijadikan acuan untuk menurunkan tingkat kematian bayi.

TINJAUAN PUSTAKA

1. Model Regresi Poisson

Regresi Poisson merupakan suatu bentuk analisis regresi yang digunakan untuk memodelkan data yang berbentuk *count* (jumlah), misalnya data tersebut dilambangkan dengan Y yaitu banyaknya kejadian yang terjadi dalam suatu periode waktu dan/atau wilayah tertentu. Regresi Poisson mengasumsikan bahwa variabel random Y berdistribusi Poisson. Suatu variabel random Y didefinisikan mempunyai distribusi Poisson jika densitas (fungsi peluangnya) diberikan sebagai berikut (Mood, Graybill & Boes, 1974):

$$f_Y(y) = f_Y(y; \mu) = \begin{cases} \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!}, & y=0,1,2,\dots \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \quad (1)$$

Dengan parameter $\mu > 0$. Persamaan di atas disebut juga sebagai fungsi peluang Poisson. Model regresi Poisson dapat ditulis sebagai berikut:

$$\log(\mu_i) = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$\text{dengan } \mu_i = \mu_i(x_i) = \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ij}\right).$$

Penaksiran parameter regresi Poisson dilakukan dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) kemudian diselesaikan dengan metode iterasi numerik yaitu Newton-Raphson. Pengujian parameter model regresi Poisson menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT).

1.1.1 Model Geographically Weighted Poisson Regression (GWPR)

Penaksiran parameter model GWPR menggunakan metode MLE. Langkah awal dari metode tersebut adalah dengan membentuk fungsi likelihood. Karena variabel

respon berdistribusi Poisson ($Y_i \sim \text{Poisson}(\mu(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}))$) maka fungsi likelihood adalah sebagai berikut:

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^n \frac{\exp(-\mu(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})) (\mu(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}))^{y_i}}{y_i!} \quad (3)$$

Setelah diperoleh bentuk likelihood kemudian dilakukan operasi logaritma natural sehingga diperoleh:

$$\text{Ln} L(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n (-\mu(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}) + y_i \text{Ln} \mu(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}) - \text{Ln} y_i!) \quad (4)$$

Berdasarkan persamaan (2) maka persamaan (4) dapat ditulis sebagai :

$$\text{Ln} L(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} - \sum_{i=1}^n \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) - \sum_{i=1}^n \text{Ln} y_i! \quad (5)$$

Faktor letak geografis merupakan faktor pembobot pada model GWPR. Faktor ini memiliki nilai yang berbeda untuk setiap daerah yang menunjukkan sifat lokal pada model GWPR. Oleh karena itu pembobot diberikan pada bentuk log-likelihoodnya untuk model lokal GWPR, maka diperoleh :

$$\text{Ln} L^*(\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)) = \sum_{j=1}^n \left[y_j \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_j, v_j) - \text{Ln} y_j! - \exp(\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_j, v_j)) \right] w_{ij}(u_i, v_i) \quad (6)$$

Estimasi parameter $\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)$ diperoleh dengan mendiferensialkan persamaan (6) terhadap $\boldsymbol{\beta}(u_j, v_j)$ maka diperoleh :

$$\frac{\partial \text{Ln} L^*(\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}^T(u_j, v_j)} = \sum_{j=1}^n \left[y_j \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_j \exp(\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_j, v_j)) \right] w_{ij}(u_i, v_i) \quad (7)$$

Nilai estimasi diperoleh dengan memaksimumkan bentuk differensial tersebut sehingga diperoleh

$$\frac{\partial \text{Ln} L^*(\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}^T(u_j, v_j)} = \sum_{j=1}^n \left[y_j \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_j \exp(\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_j, v_j)) \right] w_{ij}(u_i, v_i) = 0 \quad (8)$$

Karena fungsi pada persamaan (8) berbentuk implisit, maka digunakan suatu prosedur iterasi numerik yaitu metode Newton-Raphson. Iterasi Newton-Raphson adalah

$$\boldsymbol{\beta}_{(m+1)}(u_i, v_i) = \boldsymbol{\beta}_m(u_i, v_i) - \mathbf{H}_{(m)}^{-1}(\boldsymbol{\beta}_m(u_i, v_i)) \mathbf{g}_{(m)}(\boldsymbol{\beta}_m(u_i, v_i)) \quad (9)$$

Dimana

$$\mathbf{g}_{(m)}(\boldsymbol{\beta}_m(u_i, v_i)) = \frac{\partial \text{Ln} L^*(\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}^T(u_i, v_i)}$$

$$\mathbf{g}_{(m)}(\boldsymbol{\beta}_m(u_i, v_i)) = -\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i w_{ij}(u_i, v_i) \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)) + \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i w_{ij}(u_i, v_i) y_i \quad (10)$$

$$\mathbf{H}_{(m)}(\boldsymbol{\beta}_m(u_i, v_i)) = \frac{\partial \ln L^{*2}(\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i))}{\partial \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) \partial \boldsymbol{\beta}^T(u_i, v_i)} = -\sum_{i=1}^n \left[\mathbf{x}_i w_{ij}(u_i, v_i) \mathbf{x}_i^T \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)) \right] \quad (11)$$

Apabila persamaan (10) dan (11) disubstitusikan ke persamaan (9), maka diperoleh:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m+1)}(u_i, v_i) = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i w_{ij}(u_i, v_i) \hat{\boldsymbol{\mu}}_{i(m)} \mathbf{x}_i^T \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i w_{ij}(u_i, v_i) \hat{\boldsymbol{\mu}}_{i(m)} \left\{ \left(\frac{y_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{i(m)}}{\hat{\boldsymbol{\mu}}_{i(m)}} \right) + \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}(u_i, v_i) \right\} \right) \quad (12)$$

Persamaan (12) dapat ditulis menjadi

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m+1)}(u_i, v_i) = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i w_{ij}(u_i, v_i) \hat{y}_{i(m)} \mathbf{x}_i^T \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i w_{ij}(u_i, v_i) \hat{y}_{i(m)} \left\{ \left(\frac{y_i - \hat{y}_{i(m)}}{\hat{y}_{i(m)}} \right) + \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}(u_i, v_i) \right\} \right) \quad (13)$$

Apabila digunakan pendekatan matriks maka persamaan (13) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\beta}^{(m+1)}(u_i, v_i) = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{W}(u_i, v_i) \mathbf{A}(u_i, v_i)^{(m)} \mathbf{X} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}^T \mathbf{W}(u_i, v_i) \mathbf{A}(u_i, v_i)^{(m)} \mathbf{z}(u_i, v_i)^{(m)} \right) \quad (14)$$

Dimana \mathbf{X} : Matriks prediktor, sebagai berikut :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{W}(u_i, v_i)$: matriks pembobot, dinotasikan seperti

$$\mathbf{W}(u_i, v_i) = \text{diag} [w_{i1} \ w_{i2} \ \dots \ w_{in}]$$

$\mathbf{A}(u_i, v_i)$: Matriks pembobot varians yang berhubungan dengan Fisher Scoring untuk setiap lokasi i , dinotasikan sebagai berikut :

$$\mathbf{A}(u_i, v_i)^{(m)} = \text{diag} \left[\hat{y}_1(\boldsymbol{\beta}^{(m)}(u_i, v_i)) \hat{y}_2(\boldsymbol{\beta}^{(m)}(u_i, v_i)) \dots \hat{y}_n(\boldsymbol{\beta}^{(m)}(u_i, v_i)) \right]$$

$\mathbf{z}(u_i, v_i)$: Vektor *adjusted* dari variabel respon, didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathbf{z}_i^{(m)}(u_i, v_i) = \left\{ \left(\frac{y_i - \hat{y}_i \boldsymbol{\beta}^{(m)}(u_i, v_i)}{\hat{y}_i \boldsymbol{\beta}^{(m)}(u_i, v_i)} \right) \left(\mathbf{1} \right) + \left(\boldsymbol{\beta}_i^{(m)}(u_i, v_i) + \sum_{k=1}^p \boldsymbol{\beta}_i^{(m)}(u_i, v_i) x_{kj} \right) \right\}$$

Dengan mengulang prosedur iterasi untuk setiap titik regresi ke- i , maka penaksir parameter lokal akan didapatkan. Iterasi berhenti pada saat konvergen, yaitu pada saat $\|\boldsymbol{\beta}^{(m+1)}(u_i, v_i) - \boldsymbol{\beta}^{(m)}(u_i, v_i)\| \leq \varepsilon$, dimana ε merupakan bilangan yang sangat kecil.

Uji hipotesis yang pertama dilakukan adalah pengujian kesamaan model regresi Poisson dan GWPR untuk menguji signifikansi dari faktor geografis. Bentuk hipotesisnya adalah :

$$H_0 : \beta_k(u_i, v_i) = \beta_k ; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, p$$

(tidak ada perbedaan yang signifikan antara model regresi Poisson dan model GWPR)

$$H_1 : \text{paling tidak ada satu } \beta_k(u_i, v_i) \neq \beta_k$$

(ada perbedaan yang signifikan antara model regresi Poisson dengan model GWPR) (13)

Pengujian kesamaan model regresi Poisson dan GWPR menggunakan perbandingan nilai devians model regresi Poisson dan model GWPR. Misalkan model regresi Poisson dinyatakan dengan model A dengan derajat bebas df_A dan model GWPR dinyatakan dengan model B dengan derajat bebas df_B maka :

$$F_{hit} = \frac{\text{Devians Model A} / df_A}{\text{Devians Model B} / df_B} \quad (15)$$

Akan mengikuti distribusi F dengan derajat bebas df_A dan df_B . Kriteria pengujiannya adalah tolak H_0 jika

$$F_{hit} > F_{(\alpha; df_A; df_B)}$$

Pengujian parameter model dilakukan dengan menguji parameter secara parsial. Pengujian ini untuk mengetahui parameter mana saja yang signifikan mempengaruhi variabel responnya. Bentuk hipotesis pengujian parameter model secara parsial adalah :

$$H_0 : \beta_k(u_i, v_i) = \beta_k ; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$H_1 : \beta_k(u_i, v_i) \neq 0$$

Unyuk pengujian hipotesis di atas, digunakan:

$$Z = \frac{\hat{\beta}_k(u_i, v_i)}{se(\hat{\beta}_k(u_i, v_i))} \quad (16)$$

Nilai standar error $\widehat{\beta}_k(u_i, v_i)$ diperoleh dari :

$$se(\widehat{\beta}_k(u_i, v_i)) = \sqrt{\text{var}(\widehat{\beta}_k(u_i, v_i))} \quad (17)$$

Dengan $\text{var}(\widehat{\beta}_k(u_i, v_i))$ merupakan elemen ke- k diagonal pada matriks $\text{var}(\widehat{\beta}(u_i, v_i))$ yang berukuran $((p+1) \times (p+1))$ dan $\widehat{\beta}_k(u_i, v_i)$ merupakan taksiran parameter model yang memaksimumkan fungsi log-likelihood. Kriteria pengujianya adalah tolak H_0 jika $|Z_{hit}| > Z_{\alpha/2; n-(p+1)}$

Pembobot yang digunakan untuk mengestimasi parameter dalam model GWPR adalah fungsi kernel Gauss yaitu :

$$w_{ij}(u_i, v_i) = \exp\left(-\left(d_{ij}/h\right)^2\right) \quad (18)$$

dengan d_{ij} jarak antara lokasi (u_i, v_i) ke lokasi (u_j, v_j) dan h adalah parameter non negatif yang diketahui dan biasanya disebut parameter penghalus (*bandwidth*). Salah satu metode yang digunakan untuk memilih *bandwidth* optimum adalah metode *Cross Validation* (CV) yang didefinisikan sebagai berikut:

$$CV(h) = \sum_{i=1}^n (y_i - \widehat{y}_{\neq i}(h))^2 \quad (19)$$

dengan

$\widehat{y}_{\neq i}(h)$: Nilai penaksir y_i (*fitting value*) dimana pengamatan dilokasi (u_i, v_i) dihilangkan dari proses penaksiran

$\widehat{y}_i(h)$: Nilai penaksir y_i (*fitting value*) dimana pengamatan dilokasi (u_i, v_i) dimasukkan dalam proses penaksiran

v_1 : Jumlah penaksir yang efektif

n : Jumlah sampel

Metode yang digunakan untuk memilih model terbaik untuk GWPR yaitu *Akaike Information Criterion* (AIC) yang didefinisikan sebagai berikut :

$$AIC = D(G) + 2K(G) \quad (20)$$

dengan $D(G)$ merupakan nilai devians model dengan *bandwidth* (G) dan $K(G)$ merupakan jumlah parameter dalam model dengan *bandwidth* (G). Model terbaik adalah model dengan nilai *AIC* terkecil

1.1.2 Kematian Bayi

Kematian bayi adalah suatu kematian yang dialami anak sebelum mencapai usia satu tahun. Angka kematian bayi (AKB) adalah besarnya kemungkinan bayi meninggal sebelum mencapai usia satu tahun, dinyatakan dalam perseribu kelahiran hidup. Kematian bayi sangat dipengaruhi oleh kondisi kesehatan perumahan dan

keadaan sosial ekonomi orang tua (BPS, 2009). Menurut Mosley & Chen (1981), faktor sosial ekonomi dan budaya merupakan faktor penentu morbiditas dan kematian bayi, namun pengaruh ini bersifat tidak langsung karena harus melalui mekanisme biologi tertentu (variabel antara) yang kemudian akan menimbulkan resiko morbiditas, kemudian bayi sakit dan apabila tidak sembuh maka bayi akan cacat atau meninggal. Dalam masalah ini morbiditas dan kematian bayi sebagai masalah pokok sedangkan sosial ekonomi dan budaya serta variabel-variabel antara sebagai faktor yang memengaruhi kematian bayi.

METODE PENELITIAN

Data yang dipergunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik yaitu data survei Sosial Ekonomi Nasional (SUSENAS) tahun 2007 untuk Provinsi Jawa Timur. Untuk mendukung proses penelitian digunakan paket program komputer yaitu software MINITAB dan GWR4.

Variabel yang digunakan yaitu Jumlah kematian bayi (Y), Persentase persalinan yang dilakukan dengan bantuan non medis (X_1), Rata-rata usia perkawinan pertama wanita (X_2), Rata-rata jumlah pengeluaran rumah tangga perkapita sebulan (X_3), Rata-rata pemberian ASI eksklusif (X_4), Persentase penduduk miskin (X_5), Jumlah Tenaga Kesehatan (X_6), Jumlah Sarana Kesehatan (X_7), Garis Lintang (u_i) dan Garis Bujur (v_i)

Untuk mengetahui faktor-faktor yang berpengaruh pada jumlah kematian bayi di Provinsi Jawa Timur tahun 2007 dengan menggunakan model GWPR dilakukan analisis dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- Menganalisis model regresi Poisson dengan langkah-langkah sebagai berikut :
 - Pemeriksaan kolinieritas antara variabel prediktor
 - Menaksir parameter model regresi Poisson
 - Pengujian kesesuaian model regresi Poisson
- Menganalisis model GWPR dengan langkah-langkah sebagai berikut:
 - Menentukan u_i dan v_i setiap kabupaten/kota di Provinsi Jawa Timur
 - Menentukan *bandwidth* optimum dengan menggunakan metode *Cross Validation* (CV)
 - Menghitung jarak Eucliden anantara lokasi pengamatan berdasarkan posisi geografis.
 - Menghitung matriks pembobot dengan menggunakan fungsi kernel gauss dan fungsi kernel bisquare
 - Menaksir parameter model GWPR
 - Melakukan pengujian kesamaan model regresi Poisson dan GWPR untuk menguji signifikansi dari faktor geografis dengan menggunakan hipotesis berikut :

$$H_0 : \beta_k(u_i, v_i) = \beta_k, k = 1, 2, \dots, p$$

$$H_1 : \text{paling tidak ada satu } \beta_k(u_i, v_i) \neq \beta_k$$

- Melakukan pengujian parameter secara parsial dengan menggunakan hipotesis berikut :

$$H_0 : \beta_k(u_i, v_i) = 0$$

$$H_1 : \beta_k (u_i, v_i) \neq 0 ; k = 1, 2, \dots, p$$

8. Membuat kesimpulan
c. Membandingkan model regresi Poisson dengan model GWPR

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebagai langkah awal untuk analisis model GWPR, maka perlu dibentuk regresi global yaitu model regresi Poisson. Sebelum membentuk regresi Poisson maka perlu dilakukan uji kolinieritas untuk mengetahui apakah variabel prediktor telah memenuhi kondisi saling tidak berkorelasi.

Beberapa kriteria yang dapat digunakan untuk mengetahui adanya kolinieritas diantara variabel prediktor yaitu dengan menggunakan koefisien korelasi (*Pearson Correlation*) dan nilai *Variance Inflation Factors* (VIF). Kedua kriteria menunjukkan hasil yang sama yaitu tidak adanya kolinieritas diantara variabel-variabel prediktor sehingga variabel-variabel prediktor yang digunakan dalam penelitian ini di provinsi Jawa Timur tahun 2007 dapat digunakan dalam pembentukan model regresi Poisson. Berikut ini estimasi parameter model regresi Poisson Jawa Timur.

Tabel 1. Estimasi Parameter Model Regresi Poisson di Jawa Timur

Parameter	Estimasi	Standar Error	T Hitung
β_1	3,0119	0,0368	81,8899*
β_2	-0,2445	0,0766	-3,1999*
β_3	-0,3910	0,1004	-3,8937*
β_4	0,0538	0,1003	0,5363
β_5	0,0998	0,0371	2,6874*
β_6	0,0902	0,0777	1,1614
β_7	0,1015	0,0938	1,0825
β_8	-0,2396	0,0811	-2,9534*

*) Parameter yang berpengaruh secara signifikan pada $\alpha = 5\%$

Dari Tabel 1 terdapat 5 parameter yang signifikan yaitu β_0 , β_1 , β_2 , β_4 dan β_7 , sehingga model regresi Poisson yang dibentuk untuk jumlah kematian bayi di provinsi Jawa Timur adalah :

$$\hat{\mu}_i = \exp(3,0119 - 0,2445X_1 - 0,3910X_2 + 0,0998X_4 - 0,2396X_7)$$

Berdasarkan nilai deviance $D(\hat{\beta})$, model regresi Poisson untuk provinsi Jawa Timur layak dan sesuai untuk menggambarkan hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor.

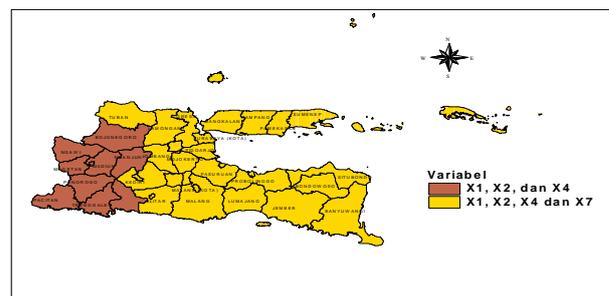
Selanjutnya dilakukan pemodelan dengan menggunakan model GWPR. Langkah pertama untuk membangun model GWPR adalah dengan menentukan letak geografis tiap kabupaten/kota di provinsi Jawa Timur, setelah diperoleh letak geografis maka langkah selanjutnya yaitu memilih bandwidth optimum. Nilai bandwidth untuk provinsi Jawa Timur yang diperoleh dari hasil iterasi adalah $q:0,947373$ dengan nilai kriteria CV:20209,69. Untuk setiap lokasi pusat akan diperoleh nilai bandwidth optimum yang berbeda-beda.

Setelah mendapatkan nilai bandwidth optimum, maka langkah selanjutnya adalah mendapatkan matriks pembobot, dimana dalam penelitian ini akan digunakan pembobot yaitu fungsi kernel gauss dan fungsi kernel bisquare. Misalkan matriks pembobot di lokasi (u_1, v_1) adalah $W(u_1, v_1)$ maka langkah awal sebelum mendapatkan matriks pembobot ini adalah dengan mencari jarak euclid lokasi (u_1, v_1) ke semua lokasi penelitian. Matriks pembobot yang dibentuk dengan fungsi kernel gauss pada lokasi (u_1, v_1) yaitu kabupaten Pacitan di provinsi Jawa Timur adalah :

$$W(u_1, v_1) = \text{diag}(1,0000 \ 0,7807 \ 0,8889 \ 0,8595 \ 0,7412 \\ 0,6915 \ 0,6393 \ 0,5183 \ 0,4879 \ 0,3679 \ 0,4528 \\ 0,4393 \ 0,5407 \ 0,5651 \ 0,6020 \ 0,6304 \ 0,6556 \\ 0,7550 \ 0,7768 \ 0,7927 \ 0,7532 \ 0,7001 \ 0,5554 \\ 0,6069 \ 0,6095 \ 0,5722 \ 0,4799 \ 0,4610 \ 0,4258 \\ 0,6994 \ 0,7206 \ 0,6366 \ 0,5032 \ 0,5922 \ 0,6309 \\ 0,7812 \ 0,5854 \ 0,6439)$$

Penaksiran parameter model GWPR menggunakan metode Newton-Raphson dapat diselesaikan dengan menggunakan software GWR4, sehingga didapatkan nilai taksiran parameter disemua lokasi (u_1, v_1) , $i = 1, 2, \dots, 38$.

Pengujian kesamaan model regresi Poisson dan GWPR dilakukan dengan menggunakan uji *F*. Diperoleh kesimpulan bahwa tidak ada perbedaan yang signifikan antara model GWPR dengan menggunakan pembobot fungsi kernel gauss dengan model regresi Poisson di Jawa Timur. Selanjutnya dilakukan pengujian parameter model untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kematian bayi disetiap lokasi. Dengan menggunakan $\alpha = 5\%$, Kabupaten/Kota di Jawa Timur dikelompokkan berdasarkan variabel-variabel yang signifikan dalam mempengaruhi jumlah kematian bayi yaitu:



Gambar 1 Pengelompokan Kab/Kota di Jawa Timur Berdasarkan Variabel Yang Signifikan Dengan Menggunakan Pembobot Fungsi Kernel Gauss

Berdasarkan Gambar 1 terlihat bahwa di Jawa Timur dengan menggunakan pembobot fungsi kernel gauss terdapat 2 kelompok Kabupaten/Kota. Secara keseluruhan faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kematian bayi di Jawa Timur berdasarkan model GWPR dengan pembobot fungsi kernel gauss adalah persentase persalinan yang dilakukan dengan bantuan tenaga non

medis (X_1), rata-rata usia perkawinan pertama wanita (X_2), rata-rata pemberian ASI eksklusif (X_4) dan jumlah sarana kesehatan (X_7). Sehingga model GWPR dengan menggunakan pembobot fungsi kernel gauss yang dibentuk untuk jumlah kematian bayi di Kabupaten Pacitan adalah :

$$\mu_i = \exp(2,9962 - 0,3076X_1 - 0,4248X_2 + 0,1194X_4)$$

Model diatas menjelaskan bahwa jumlah kematian bayi di Kabupaten Pacitan tahun 2007 akan berkurang sebesar $\exp(0,3076)$ jika variabel X_1 bertambah sebesar satu satuan dengan syarat variabel prediktor yang lain adalah konstan, hal yang sama juga berlaku untuk variabel X_2 . Sebaliknya jumlah kematian bayi di Kabupaten Pacitan tahun 2007 akan bertambah sebesar $\exp(0,1194)$ jika variabel X_4 bertambah sebesar satu satuan dengan syarat variabel prediktor yang lain adalah konstan.

Perbandingan model regresi Poisson dan model GWPR dengan menggunakan pembobot fungsi kernel gauss dilakukan untuk mengetahui model mana yang lebih baik diterapkan untuk jumlah kematian bayi di provinsi Jawa Timur. Kriteria kebaikan model yang digunakan adalah dengan membandingkan nilai AIC dari model tersebut. Model yang terbaik adalah model dengan nilai AIC terkecil. Hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut :

Tabel 2 Perbandingan Kesesuaian Model

	Devians	AIC
Model Regresi Poisson	626,501	642,501
Model GWPR (Kernel Gauss)	546,319*	564,647*

*) Model Terbaik

Berdasarkan Tabel 2 diperoleh bahwa model GWPR dengan menggunakan pembobot fungsi kernel gauss lebih baik digunakan untuk menganalisis jumlah kematian bayi di provinsi Jawa Timur karena mempunyai nilai AIC yang terkecil.

KESIMPULAN

Dari hasil analisa data dan pembahasan dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Secara keseluruhan faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kematian bayi di Jawa Timur berdasarkan model GWPR dengan pembobot fungsi gauss adalah persentase persalinan yang dilakukan dengan bantuan tenaga non medis (X_1), rata-rata usia perkawinan pertama wanita (X_2), rata-rata pemberian ASI eksklusif (X_4) dan jumlah sarana kesehatan (X_7).
2. Model GWPR dengan menggunakan pembobot fungsi kernel gauss lebih baik digunakan untuk menganalisis jumlah kematian bayi di provinsi Jawa Timur tahun 2007 karena mempunyai nilai AIC yang terkecil.

Dari penelitian ini saran yang dapat diberikan adalah dalam penelitian lebih lanjut hendaknya sampel yang digunakan sampai ke level lebih kecil (kecamatan) sehingga mampu mempertajam analisis spasialnya. Variabel-variabel yang digunakan pun hendaknya memasukan unsur sosial budaya yang bersifat lokal, sehingga hasil akhir yang diharapkan mampu menerangkan kondisi lokal daerah tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Aulele, N.S. and Purnadi. 2009. Geographically Weighted Poisson Regression Model. *Proceeding of IndoMS International Conference on Mathematics and Its Applications (IICMA) 2009*, 1041-1048. Yogyakarta, Indonesia
- BPS. 2009. Angka Kematian Bayi, Data Statistik Indonesia. Badan Pusat Statistik Jakarta, Indonesia
- Bappenas (2005), *Laporan Perkembangan Pencapaian Tujuan Pembangunan Milenium (Millenium Development Goals/MDGs)*. Bappenas Jakarta, Indonesia
- Brunsdon, C., Fotheringham, A.S. and Charlton, M. 1998. Geographically Weighted Regression: a method for exploring spatial nonstationarity, *Geographical Analysis*, 28, 281-298.
- Chasco, C., Garcia, I. and Vicens, J. 2007. *Modeling Spastial Variations in Household Disposable Income with Geographically Weighted Regression*, Munich Personal RePEc Arkhive (MPRA) Working Paper No. 1682.
- Famoye, F., Wulu, J.T. and Singh, K.P. 2004. On The Generalized Poisson Regression Model with an Application to Accident Data. *Journal of Data Science*, 2 (2004) 287-295
- Hadayeghi, A., Shalaby, A. and Persaud, B. 2009. Development of Planning-Level Transportation Safety Tools Using Geographically Weighted Poisson Regression, *National Academy of Sciences*.
- Hocking, R. 1996. *Methods and Application of Linear Models*. John Wiley & Sons, New York
- Huang, Y. and Leung, Y. 2002. Analysing Regional Industrialisation in Jiangsu Province Using Geographically Weighted Regression, *Journal of Geographical System*, 4 : 233-249
- Mei, C. L. 2005. *Geographically Weighted Regression Technique for Spatial Data Analysis*, School of Science Xi'an Jiaotong University.
- McCullagh, P. and Nelder, J.A. 1989. *Generalized Linear Models*, Second Edition, Chapman & Hall, London.
- Mood, A.M., Graybill, F.A. and Boes, D.C. 1974. *Introduction to The Theory of Statistics*, Third Edition, McGraw-Hill, Singapura
- Nakaya, T., Fotheringham, A.S., Brunsdon, C. and Charlton, M. 2004. Geographically Weighted Poisson Regression for Disease Association Mapping, *Statistics in Medicine*, Volume 24 Issue 17, pages 2695-2717.

PROYEKSI PENDUDUK BERLIPAT GANDA DI KABUPATEN MALUKU TENGAH
(Population Projection Than Doubled in Central Maluku Regency)

JEFRI TIPKA

Badan Pusat Statistik Kabupaten Maluku Tengah
Jl. R. A. Kartini No. 15 Kelurahan Namaelo, Masohi 97511
email: jefri.tipka@bps.go.id

ABSTRAK

Indonesia masih merupakan Negara dengan jumlah penduduk terbesar ke-4 di dunia setelah Cina, India, Amerika Serikat. Laju pertumbuhan penduduk 1,35% rata-rata pertahun dan diperkirakan akan mencapai 400 juta jiwa pada tahun 2050 (Gambaran penduduk Indonesia di awal melenium III Badan Kependudukan Nasional, Jakarta 2002). Untuk itu laju pertumbuhan penduduk masih harus ditekan. Semakin rendahnya tingkat mortalitas sebagai akibat dari meningkatnya kondisi kesehatan masyarakat, hal ini berdampak pada meningkatnya penduduk usia produktif (15 – 64 tahun) dan penduduk usia lanjut (65+ tahun). Meningkatnya penduduk usia lanjut (lansia) maka sasaran pelayanan penduduk perlu diperluas tidak saja pada bayi, balita dan orang dewasa; tetapi penduduk lansia harus mendapatkan perlakuan khusus. Kabupaten Maluku tengah merupakan bagian dari Provinsi Maluku yang memiliki jumlah penduduk yang sangat besar di Provinsi Maluku.

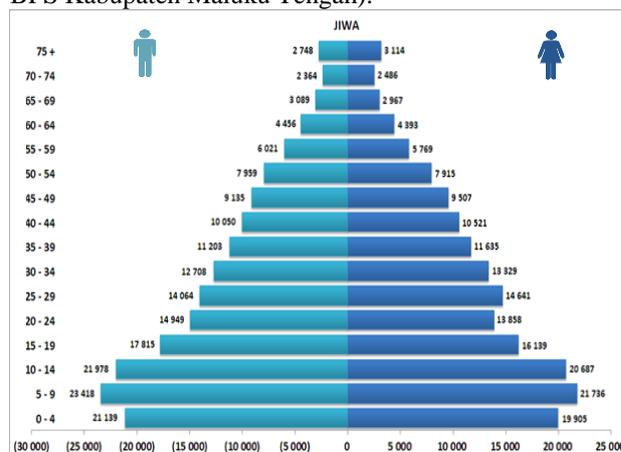
Kata Kunci: Kabupaten Maluku Tengah, Penduduk

PENDAHULUAN

Berdasarkan data sensus penduduk 1990 jumlah penduduk Kabupaten Maluku Tengah sebanyak 295.095 jiwa meningkat menjadi 317.476 jiwa pada tahun 2000. Laju pertumbuhan penduduk rata-rata selama 10 tahun sebesar 1,03%. Jumlah penduduk tersebut tersebar di 9 Kecamatan dalam kondisi tahun 2000. Pada tahun 2004 terjadi pemekaran daerah di kabupaten Maluku tengah sehingga juga berpengaruh pada jumlah penduduk Maluku tengah. Wilayah Seram Bagian Barat, Seram Bagian Timur dan Pulau Buru terlepas dari Kabupaten Maluku Tengah. Berdasarkan hasil Sensus Penduduk 2010 jumlah penduduk Maluku Tengah tercatat sebesar 361.698 jiwa mengalami peningkatan walaupun telah terjadi pemekaran daerah-daerah baru. Jumlah penduduk tersebut tersebar dalam 14 Kecamatan dalam kondisi sensus penduduk tahun 2010.

Kecamatan-kecamatan tersebut antara lain Kecamatan Banda 9.324 jiwa, Tehoru 28.191 jiwa, Amahai 38.932 jiwa, Kota Masohi 31.480 jiwa, Teluk Elpaputih 10.822 jiwa, Teon Nila Serua 12.857 jiwa, Saparua 32.475 jiwa, Nusalaut 5.322 jiwa, Pulau Haruku 24.207 jiwa, Salahutu 46.703 jiwa, Leihitu 46.978 Jiwa, Seram utara 39.249 jiwa, Leihitu Barat 16.678 jiwa, dan Seram Utara Barat 9.260 jiwa. dari 14 Kecamatan

tersebut, penduduk terbesar berada pada kecamatan Leihitu dengan jumlah jiwa 46.978 dan terendah berada pada kecamatan Nusalaut sebesar 5.322 jiwa (sumber BPS Kabupaten Maluku Tengah).



Gambar 1. Piramida Penduduk Maluku Tengah, 2010

Ditinjau dari kondisi Geografis Kabupaten Maluku Tengah memiliki luas wilayah sebesar 275.907 Km² yang terdiri dari luas laut 264.311,43 Km² dan luas dataran sebesar 11.595,57 Km² ini artinya 95,8% adalah wilayah lautan. Sebelah utara berbatasan dengan laut seram,

sebelah selatan berbatasan dengan Laut Banda, sebelah barat berbatasan dengan Kabupaten Seram Bagian Barat dan sebelah Timur berbatasan dengan Kabupaten Seram Bagian Timur.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini bersifat diskriptif kualitatif dengan pendekatan kepustakaan. Data yang digunakan bersumber dari data sensus penduduk tahun 1990, tahun 2000 dan tahun 2010. Analisis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah Analisis secara Aritmetika, Metode Geometri, dan Metode Eksponensial.

PEMBAHASAN

1. Penghitungan Angka Pertumbuhan Penduduk di Kabupaten Maluku Tengah.

Sumber data kependudukan yang dianggap paling lengkap dan akurat adalah sensus penduduk. Sensus Penduduk dilakukan 10 tahun sekali, Sensus Penduduk telah enam kali dilaksanakan di Indonesia antara lain SP1961, SP1971, SP1980, SP1990, SP2000 dan SP2010. Untuk keperluan perencanaan pembangunan maka data kependudukan sangat dibutuhkan karena penduduk merupakan sebagai objek pembangunan.

Pertumbuhan penduduk disuatu daerah di pengaruhi oleh kelahiran, kematian dan migrasi, dengan bersumber pada data sensus penduduk tahun 1990, tahun 2000 dan tahun 2010 maka penduduk Kabupaten Maluku Tengah dapat diproyeksikan dengan menggunakan 3 metode pertumbuhan yaitu Metode Pertumbuhan secara Aritmatika, Metode Pertumbuhan secara Geometri dan Metode Pertumbuhan secara Eksponensial.

1.1. Penghitungan Pertumbuhan Penduduk di Kabupaten Maluku Tengah dengan Metode Pertumbuhan Aritmatika.

Rumus yang digunakan :

$$P_t = P_0(1 + rt)$$

dengan :

P_t = Jumlah penduduk tahun t

P_0 = Jumlah penduduk tahun dasar

r = Angka pertumbuhan penduduk

t = Waktu

Diketahui: SP2000 (Sensus Penduduk Tahun 2000) : Penduduk Kabupaten Maluku Tengah = 317.476 jiwa. SP2010 (Sensus Penduduk Tahun 2010) : Penduduk Kabupaten Maluku Tengah = 361.698 jiwa

Penghitungan :

Laju Pertumbuhan Penduduk 2000 – 2010 :

$$361.698 = 317.476(1 + r \times 10)$$

$$1 + 10r = \frac{361.698}{317.476} \Leftrightarrow 10r = 1,139292 - 1$$

$$10r = 0,139292 \Leftrightarrow r = 0,0139292$$

$$r = 1,393\%$$

Hasil penghitungan penduduk dengan menggunakan Metode Aritmatika diperoleh laju pertumbuhan rata-rata pertahun untuk Kabupaten Maluku Tengah sebesar 1,393%. Pertumbuhan penduduk seperti ini menunjukkan pertumbuhan yang cukup tinggi oleh karena itu perlu ditekan.

1.2. Penghitungan Pertumbuhan Penduduk di Kabupaten Maluku Tengah dengan Metode Pertumbuhan Geometri.

Rumus yang digunakan :

$$P_t = P_0(1 + r)^t$$

dengan :

P_t = Jumlah penduduk tahun t

P_0 = Jumlah penduduk tahun dasar

r = Angka pertumbuhan penduduk

t = Waktu

Diketahui: SP2000 (Sensus Penduduk Tahun 2000): Penduduk Kabupaten Maluku Tengah = 317.476 jiwa. SP2010 (Sensus Penduduk Tahun 2010): Penduduk Kabupaten Maluku Tengah = 361.698 jiwa

Penghitungan :

Laju Pertumbuhan Penduduk 2000 – 2010 :

$$361.698 = 317.476(1 + r)^{10} \Leftrightarrow (1 + r)^{10} = \frac{361.698}{317.476}$$

$$(1 + r)^{10} = 1,139292 \Leftrightarrow \log(1 + r)^{10} = \log(1,139292)$$

$$10 \log(1 + r) = 0,056635 \Leftrightarrow \log(1 + r) = \frac{0,056635}{10}$$

$$e^{\log(1+r)} = e^{(0,0056635)} \Leftrightarrow 1 + r = 1,00568$$

$$r = 1,00568 - 1 \Leftrightarrow r = 0,00568$$

$$r = 0,568\%$$

Hasil penghitungan penduduk dengan menggunakan Metode Geometri diperoleh laju pertumbuhan rata-rata pertahun untuk Kabupaten Maluku Tengah sebesar 0,568%.

1.3. Penghitungan Pertumbuhan Penduduk di Kabupaten Maluku Tengah dengan Metode Pertumbuhan Eksponensial.

Rumus yang digunakan :

$$P_t = P_0 e^{rt}$$

dengan :

P_t = Jumlah penduduk tahun t

P_0 = Jumlah penduduk tahun dasar

r = Angka pertumbuhan penduduk

t = Waktu

Diketahui: SP2000 (Sensus Penduduk Tahun 2000) : Penduduk Kabupaten Maluku Tengah = 317.476 jiwa. SP2010 (Sensus Penduduk Tahun 2010) : Penduduk Kabupaten Maluku Tengah = 361.698 jiwa

Penghitungan :

Laju Pertumbuhan Penduduk 2000 – 2010 :

$$361.698 = 317.476(2,718292)^{10r}$$

$$(2,718292)^{10r} = \frac{361.698}{317.476} \Leftrightarrow (2,718292)^{10r} = 1,139292$$

$$\log(2,718292)^{10r} = \log 1,139292$$

$$10r \log(2,718292) = \log 1,139292$$

$$10r (0,434296) = 0,056635 \Leftrightarrow r = \frac{0,056635}{4,34296}$$

$$r = 0,013041 \Leftrightarrow r = 1,3041\%$$

Hasil penghitungan penduduk dengan menggunakan Metode Aritmatika diperoleh laju pertumbuhan rata-rata pertahun untuk Kabupaten Maluku Tengah sebesar 1,3041%. Pertumbuhan penduduk seperti ini menunjukkan pertumbuhan yang cukup tinggi oleh karena itu perlu ditekan

Dari ketiga metode tersebut dapat dilihat, penghitungan dengan menggunakan Metode Geometri lebih kecil yaitu 0,568%. Dengan Metode Aritmatika dan Metode Eksponensial tidak jauh berbeda berturut-turut 1,393% dan 1,3041%. Dapat dikatakan pertumbuhan penduduk Kabupaten Maluku Tengah dalam jangka waktu 10 tahun dari tahun 1990 sampai tahun 2000 berkisar antara 0,5% – 1,4%.

2. Perkiraan Penduduk Antara Sensus (SP2000–SP2010) di Kabupaten Maluku Tengah.

Perkiraan penduduk antara sensus diketahui dengan asumsi pertumbuhan penduduk linier, dimana setiap tahun penduduk akan bertambah dengan jumlah yang sama.

2.1. Perkiraan Penduduk Tahun 2003

Rumus yang digunakan :

$$P_m = P_0 + \frac{m}{n}(P_n - P_0)$$

dengan :

P_m = Jumlah penduduk antara sensus (yang dicari)

P_0 = Jumlah penduduk tahun dasar/tahun awal

P_n = Jumlah penduduk tahun n

m = Selisih tahun yang dicari dengan tahun awal

n = Selisih tahun dari dua sensus yang diketahui

Diketahui: SP2000 (Sensus Penduduk Tahun 2000) : Penduduk Kabupaten Maluku Tengah = 317.476 jiwa.

SP2010 (Sensus Penduduk Tahun 2010) : Penduduk Kabupaten Maluku Tengah = 361.698 jiwa

Penghitungan: Berdasarkan data sensus penduduk yang diketahui maka dapat diperkirakan dengan menggunakan rumus tersebut.

SP2000 = 317.476 (P_0) dan SP2010 = 361.698 (P_n)

maka :

$$P_m = 317.476 + \left(\frac{2003 - 2000}{2010 - 2000}\right)(361.698 - 317.476)$$

$$= 317.476 + \left(\frac{3}{10}\right)(44.222) = 317.476 + 13.267$$

$$= 330.743$$

Berdasarkan data Sensus Penduduk Tahun 2000 dan Sensus Penduduk 2010 maka penduduk Kabupaten Maluku Tengah antar sensus yaitu tahun 2003 berjumlah 330.743 jiwa.

2.2. Perkiraan Penduduk Tahun 2007

Rumus yang digunakan :

$$P_m = P_0 + \frac{m}{n}(P_n - P_0)$$

dengan :

P_m = Jumlah penduduk antara sensus (yang dicari)

P_0 = Jumlah penduduk tahun dasar/tahun awal

P_n = Jumlah penduduk tahun n

m = Selisih tahun yang dicari dengan tahun awal

n = Selisih tahun dari dua sensus yang diketahui

Diketahui: SP2000 (Sensus Penduduk Tahun 2000) :

Penduduk Kabupaten Maluku Tengah = 317.476 jiwa.

SP2010 (Sensus Penduduk Tahun 2010) :

Penduduk Kabupaten Maluku Tengah = 361.698 jiwa

Penghitungan: Berdasarkan data sensus penduduk yang diketahui maka dapat diperkirakan dengan menggunakan rumus tersebut.

SP2000 = 317.476 (P_0) dan SP2010 = 361.698 (P_n)

maka :

$$P_m = 317.476 + \left(\frac{2007 - 2000}{2010 - 2000}\right)(361.698 - 317.476)$$

$$= 317.476 + \left(\frac{7}{10}\right)(44.222) = 317.476 + 30.955$$

$$= 348.431$$

Berdasarkan data Sensus Penduduk Tahun 2000 dan Sensus Penduduk 2010 maka penduduk Kabupaten Maluku Tengah antar sensus yaitu tahun 2003 berjumlah 348.431 jiwa.

3. Perkiraan Penduduk Kabupaten Maluku Tengah Setelah Sensus Penduduk 2010

Penghitungan penduduk setelah penduduk sensus asumsinya pertumbuhan penduduk dianggap linier, dimana setiap tahun penduduk akan bertambah dengan jumlah yang sama.

3.1. Perkiraan Penduduk Tahun 2012

Rumus yang digunakan :

$$P_m = P_0 + \left(\frac{n+m}{n}\right)(P_n - P_0)$$

dengan :

P_m = Jumlah penduduk antara sensus (yang dicari)

P_0 = Jumlah penduduk tahun dasar/tahun awal

P_n = Jumlah penduduk tahun n

m = Selisih tahun yang dicari dengan tahun awal

n = Selisih tahun dari dua sensus yang diketahui

Diketahui: SP2000 (Sensus Penduduk Tahun 2000) :

Penduduk Kabupaten Maluku Tengah = 317.476 jiwa.

SP2010 (Sensus Penduduk Tahun 2010) :

Penduduk Kabupaten Maluku Tengah = 361.698 jiwa

Penghitungan: Berdasarkan data sensus penduduk yang diketahui maka dapat diperkirakan dengan menggunakan rumus tersebut.

SP2000 = 317.476 dan SP2010 = 361.698 maka :

$$P_m = 317.476 + \left(\frac{(2012-2010) + (2010-2000)}{2010-2000} \right) (361.698 - 317.476)$$

$$= 317.476 + \left(\frac{12}{10} \right) (44.222) = 317.476 + 53.542$$

$$= 370.542$$

Berdasarkan data Sensus Penduduk Tahun 2000 dan Sensus Penduduk 2010 maka penduduk Kabupaten Maluku Tengah setelah sensus penduduk tahun 2010 yaitu tahun 2012 berjumlah 370.542 jiwa.

3.2. Perkiraan Penduduk Tahun 2016

Rumus yang digunakan :

$$P_m = P_0 + \left(\frac{n+m}{n} \right) (P_n - P_0)$$

dengan :

P_m = Jumlah penduduk antara sensus (yang dicari)

P_0 = Jumlah penduduk tahun dasar/tahun awal

P_n = Jumlah penduduk tahun n

m = Selisih tahun yang dicari dengan tahun awal

n = Selisih tahun dari dua sensus yang diketahui

Diketahui: SP2000 (Sensus Penduduk Tahun 2000) :
Penduduk Kabupaten Maluku Tengah = 317.476 jiwa.
SP2010 (Sensus Penduduk Tahun 2010) :
Penduduk Kabupaten Maluku Tengah = 361.698 jiwa

Penghitungan: Berdasarkan data sensus penduduk yang diketahui maka dapat diperkirakan dengan menggunakan rumus tersebut.

SP2000 = 317.476 dan SP2010 = 361.698 maka :

$$P_m = 317.476$$

$$+ \left(\frac{(2012-2016) + (2010-2000)}{2010-2000} \right) (361.698 - 317.476)$$

$$= 317.476 + \left(\frac{16}{10} \right) (44.222) = 317.476 + 70.755$$

$$= 388.231$$

Berdasarkan data Sensus Penduduk Tahun 2000 dan Sensus Penduduk 2010 maka penduduk Kabupaten Maluku Tengah setelah sensus penduduk tahun 2010 yaitu tahun 2016 berjumlah 388.231 jiwa.

4. Proyeksi Penduduk Kabupaten Maluku Tengah Akan Berlipat Ganda

Data sensus penduduk tahun 2000 (**SP2000**) dan sensus penduduk tahun 2010 (**SP2010**) maka akan dihitung proyeksi berlipat ganda penduduk Kabupaten Maluku Tengah.

Penduduk Kabupaten Maluku Tengah tahun 2000
= 317.476 jiwa

Penduduk Kabupaten Maluku Tengah tahun 2010
= 361.698 jiwa

Laju Pertumbuhan Penduduk :

0,568% (Metode Geometri)

1,393% (Metode Aritmatika)

1,030% (Metode Eksponensial)

Dengan Menggunakan Rumus : $P_t = P_0 e^{rt}$

Maka dapat diproyeksi penduduk berlipat ganda sebagai berikut :

$$P_1 = 2P_0 \rightarrow \frac{P_1}{P_0} = 2 \text{ dan } P_t = 2P_0 \rightarrow \frac{P_t}{P_0} = 2$$

sehingga

$$P_t = P_0 e^{rt} \Leftrightarrow \frac{P_t}{P_0} = e^{rt} \Leftrightarrow 2 = e^{rt} \Leftrightarrow \log 2 = \log e^{rt}$$

$$\log 2 = rt \log e \Leftrightarrow 0,301029995 = (0,01) t (\log 2, 718292)$$

$$0,301029995 = (0,01) t 0,4342995 \Leftrightarrow 0,01t = \frac{0,301029995}{0,4342995}$$

$$0,01t = 0,6931446 \Leftrightarrow t = \frac{0,6931446}{0,01} \Leftrightarrow t = 69,31446$$

$$t = 69,3 \text{ atau } 70 \text{ Tahun}$$

Jika laju pertumbuhan 1% maka penduduk akan berlipat ganda dalam kurun waktu 70 tahun. Dengan tiga cara penghitungan pertumbuhan penduduk Kabupaten Maluku Tengah akan berlipat ganda

- Cara Aritmatika :

$$\frac{70}{1,3939} = 50,2516 \text{ tahun atau } 50 \text{ tahun}$$

- Cara Geometri :

$$\frac{70}{0,568} = 123,2484 \text{ tahun atau } 123 \text{ tahun}$$

- Cara Eksponensial :

$$\frac{70}{1,030} = 53,67814 \text{ tahun atau } 54 \text{ tahun}$$

KESIMPULAN

Laju pertumbuhan penduduk rata-rata pertahun selama 10 tahun antara dua sensus penduduk yaitu sensus penduduk tahun 2000 (SP2000) dan sensus penduduk tahun 2010 (SP2010), dengan menggunakan tiga metode penghitungan penduduk yaitu berkisar antara 0,5% - 1,4%. Penduduk Kabupaten Maluku Tengah diproyeksikan akan berlipat ganda membutuhkan waktu 50 - 54 tahun di hitung dengan Metode Aritmatika dan Metode Eksponensial, sedangkan jika dilihat dengan metode Geometri proyeksi berganda penduduk Maluku Tengah membutuhkan waktu 123 tahun.

Berdasarkan data yang ada laju pertumbuhan penduduk cukup tinggi, oleh karena itu pertumbuhan penduduk perlu ditekan, sehingga di masa mendatang tingkat pertumbuhan penduduk dapat menurun.

DAFTAR PUSTAKA

- Badan Pusat Statistik Kabupaten Maluku Tengah, *Maluku Tengah Dalam Angka 2010*, Masohi 2010.
- Badan Pusat Statistik Kabupaten Maluku Tengah, *Maluku Tengah Dalam Angka 2011*, Masohi 2011.
- Badan Pusat Statistik Kabupaten Maluku Tengah, *Kecamatan Saparua Dalam Angka 2011*, Saparua 2011.
- Pollard, *Teknik Kependudukan*, PT. Bima Aksana, Jakarta 1989.
- Rumbia, Waya Ali., *Jurnal Ekonomi Pembangunan Fakultas Ekonomi UNHALU*, Desember 2008.

APLIKASI FUZZY PADA PERMASALAHAN PROGRAM TAK-LINIER
(Application of Fuzzy in the Non Linear Programing Problem)

ABRAHAM ZACARIA WATTIMENA

Staf Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
email: ampiwattimena@rocketmail.com

ABSTRACT

One of the most purpose of non linear programing is to determine the optimal solution of its objective function. If the objective function of a certain non linear programing only possess a uniqe value function, it is easy to calculate its optimal solution. However, if the objective function of non linier programing possess multi functions, so there are two possibilities to determine their optimal solutions. Theses depend on whether there are conflic among them or not. In order to make them more easier, the fuzzy parameter could be applied to calculate the optimal solution.

Keywords: Non linear progaming, optimal solution, objective function, fuzzy parameter.

PENDAHULUAN

Salah satu tujuan dalam permasalahan program tak-linier (NLP) adalah menentukan solusi optimal. Jika fungsi tujuan (*objective*) dari NLP merupakan fungsi bernilai tunggal maka solusi optimal dapat ditentukan. Tetapi jika fungsi tujuannya merupakan multi-objektif (*multiobjective*) sehingga NLP menjadi permasalahan progmr tak-linier multi-objektif (MONLP), maka ada dua kasus dalam menentukan solusi dari MONLP tersebut. Kasus pertama, jika pada fungsi-fungsi tujuan tersebut tidak terjadi konflik maka solusi MONLP disebut solusi optimal. Kasus kedua, jika pada fungsi-fungsi tujuan terjadi konflik maka solusinya disebut solusi optimal *pareto*.

Di samping itu juga, dalam masalah program tak-linier banyak dijumpai adanya parameter-parameter yang bersifat *fuzzy*, misalnya kapasitas yang tersedia kira-kira m satuan. Proses pengambilan keputusan untuk menentukan suatu nilai ini tentunya memerlukan suatu teori. Untuk itu peranan teori *fuzzy* sangat perlu dikembangkan. Evolusi penting tentang kekaburan atau ketidak-pastian dari suatu konsep yang modern telah diperkenalkan oleh Lofti A. Zadeh pada tahun 1965 (Klir and Yuan, 1995), yang mengemukakan tentang teori himpunan *fuzzy*, dimana anggota-anggotanya tidak hanya berdasarkan pada masalah ketegasan atau penguatan, tetapi juga pada masalah kederajatan.

TINJAUAN PUSTAKA

Pemakaian bilangan *fuzzy* yang digunakan dalam konteks pengambilan keputusan, khususnya dalam masalah program linear tidak konveks (*nonconvex*) telah dikemukakan oleh Sakawa dan Yauchi (1995). Begitu juga dengan Ali (2001) mengemukakan tentang pendekatan persamaan diferensial untuk menyelesaikan masalah optimal dengan vector *fuzzy*, dimana vector *fuzzy* diasumsikan mempunyai karakteristik yang sama dengan bilangan *fuzzy*. Dari pembahasan tersebut menunjukkan bahwa bilangan *fuzzy* dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan tetapi masih bersifat umum.

Berdasarkan uraian di atas, maka dalam penelitian ini akan dibahas secara khusus, yaitu tentang aplikasi bilangan *fuzzy* yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan program tak-linier multi-objektif dengan parameter *fuzzy* (MONLP-FP).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bentuk umum permasalahan (MONLP-FP) dinyatakan dengan:

$$\begin{aligned} \min f(x, \bar{a}) &= f_1(x, \bar{a}_1), \dots, f_k(x, \bar{a}_k) \\ \text{s.t. } x \in X(\bar{b}) &= \{x \in R^n / g_j(x, \bar{a}_k) \leq 0, j = \\ &1, \dots, m\} \end{aligned} \quad (1)$$

dimana $\bar{a} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k)$ adalah parameter fuzzy .
 $\bar{b} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m)$ adalah parameter fuzzy pada fungsi Kendal $gj(x, \bar{b}_j)$; $j = 1, \dots, m$. Parameter-parameter fuzzy di sini diasumsikan sebagai bilangan fuzzy, sebagaimana yang dikemukakan oleh Dubois dan Prade (1978), yaitu bilangan fuzzy \bar{p} dengan fungsi keanggotannya $\mu_{\bar{p}}(p)$ merupakan pemetaan kontinu dari $-$ ke interval tertutup $[0, 1]$, $\mu_{\bar{p}}(p) = 0$ untuk semua $p \in (-\infty, p_1]$, $\mu_{\bar{p}}(p)$ tidak turun sempurna dan kontinu pada $[p_1, p_2]$, $\mu_{\bar{p}}(p) = 1$ untuk semua $p \in [p_2, p_3]$, $\mu_{\bar{p}}(p)$ tidak naik sempurna dan kontinu pada $[p_3, p_4]$ dan $\mu_{\bar{p}}(p) = 0$ untuk semua $p \in [p_4, \infty)$ (Sakawa, 1993).

Definisi 1.

Misalkan A adalah himpunan fuzzy. A dikatakan bilangan fuzzy jika A adalah himpunan fuzzy normal. A adalah himpunan fuzzy konveks, A mempunyai support terbatas dan semua α level dari A adalah interval tertutup (Wang, 1997).

Bilangan fuzzy triangular A dinyatakan dengan $A = (a, b, c)$ adalah himpunan fuzzy A yang fungsi keanggotaannya adalah

$$\mu_A(x) = \begin{cases} f_A(x), & a \leq x < b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ g_A(x), & c < x \leq d \\ 0, & \text{untuk yang lainnya} \end{cases} \quad (4)$$

dimana $a, b, c, d \in A$ dengan $a < b < c < d$, f_A adalah fungsi bernilai riil yang monoton naik dan kontinu kanan, dan g_A adalah fungsi bernilai real yang monoton turun dan kontinu kiri.

Himpunan α - level dari interval fuzzy A untuk semua $\alpha \in (0, 1]$ dinyatakan dengan

$$A_\alpha = \begin{cases} [f_A^{-1}(\alpha), g_A^{-1}(\alpha)] & , \alpha \in (0, 1) \\ [b, c] & , \alpha = 1 \end{cases} \quad (5)$$

dimana f_A^{-1} dan g_A^{-1} adalah fungsi invers dari f_A dan g_A (Klir, 1997).

Berdasarkan persamaan (5), maka himpunan α - level dari bilangan fuzzy triangular adalah

$$A_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha] \quad (6)$$

Untuk menentukan solusi optimal dari masalah pada persamaan (1) maka parameter-parameter fuzzy diasumsikan sebagai bilangan fuzzy triangular yaitu bilangan fuzzy \bar{p} dengan fungsi keanggotannya $\mu_{\bar{p}}(p)$ dinyatakan dengan

$$\mu_{\bar{p}_i}(p_i) = \begin{cases} 0 & , -\infty < p_i < p_i^1 \\ \frac{p_i - p_i^1}{p_i^2 - p_i^1} & , p_i^1 \leq p_i \leq p_i^2 \\ \frac{p_i^3 - p_i}{p_i^3 - p_i^2} & , p_i^2 \leq p_i \leq p_i^3 \\ 0 & , p_i^3 \leq p_i < +\infty \end{cases} \quad (7)$$

dimana \bar{p}_i menyatakan parameter fuzzy \bar{a}_i , $i = 1, \dots, k$; dan \bar{b}_j , $j = 1, \dots, m$; p_i^t diasumsikan sebagai bilangan fuzzy a_i^t , $i = 1, \dots, k$; dan b_j^t , $j = 1, \dots, m$; dengan $t = 1, 2, 3$.

Definisi 2.

Himpunan α - level dari bilangan fuzzy \bar{a}_i ($i = 1, \dots, k$) dan \bar{b}_j ($j = 1, \dots, m$) didefinisikan sebagai himpunan bias $L_\alpha(\bar{a}, \bar{b})$ dengan degree dari fungsi keanggotaan lebih besar atau sama dengan level α , yaitu (Sakawa, 1993 dan Ammar, 1997)

$$L_\alpha(\bar{a}, \bar{b}) = \{(a, b) \mid \mu_{\bar{a}_i}(a_i) \geq \alpha (i = 1, \dots, k), \mu_{\bar{b}_j}(b_j) \geq \alpha (j = 1, \dots, m)\} \quad (8)$$

Himpunan α -level dari bilangan fuzzy \bar{a}_i dan \bar{b}_j dapat juga ditentukan berdasarkan persamaan (5) sehingga himpunan α -level persamaan (7) adalah

$$p_{i(\alpha)} = [z_1, z_2] \quad (9)$$

Dengan $z_1 = (p_i^2 - p_i^1)\alpha + p_i^1$ dan $z_2 = p_i^3 - (p_i^3 - p_i^2)\alpha$. Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (9) maka persamaan (1) dapat diformulasikan ke bentuk a -MONLP, yaitu

$$\left. \begin{aligned} \min f(x, a) &= (f_1(x, a_1), f_2(x, a_2), \dots, f_k(x, a_k)) \\ \text{s. t. } x &\in X(b) = \{x \in R^n \mid \\ g_j(x, b_j) &\leq 0, j = 1, \dots, m\} \\ (a, b) &\in L_\alpha(\bar{a}, \bar{b}) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Solusi optimal persamaan (10) untuk degree α tertentu, dinamakan solusi optimal α - pareto yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.

$\bar{x} \in X(b)$ dikatakan solusi optimal α - pareto pada permasalahan α -MONLP jika dan hanya jika tidak ada selain $x \in X(b)$, $(a, b) \in L_\alpha(\bar{a}, \bar{b})$ sedemikian sehingga $f_i(\bar{x}, \bar{a}_i)$ dan memenuhi ketaksamaan tegas sedikitnya untuk satu i , dimana nilai dari parameter (\bar{a}, \bar{b}) dikatakan parameter optimal α - level (Sakawa, 1993 dan Ammar, 1997).

Solusi optimal α - pareto persamaan (10) ditentukan menggunakan pendekatan metode bobot yang dinyatakan dengan

$$\left. \begin{aligned} \min \sum_{i=1}^k w_i f_i(x, a_i) \\ \text{s. t. } x \in X(b), (a, b) \in L_\alpha(\bar{a}, \bar{b}) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Dimana $w_i \leq 0, i = 1, \dots, k$; adalah himpunan bobot dengan

$$\sum_{i=1}^k w_i = 1$$

Himpunan bobot dinyatakan dengan

$$w_i = \frac{f_i^{max} - f_i^{min}}{\sum_{i=1}^k (f_i^{max} - f_i^{min})} \quad (12)$$

Persamaan (12) dihitung berdasarkan solusi *compromise*, yaitu menentukan nilai minimum dan nilai maksimum dari setiap fungsi tujuan, dengan $\alpha = 0$ untuk nilai minimum dan $\alpha = 1$ untuk nilai maksimum, yang dinyatakan dengan

$$\left. \begin{array}{l} \min f_1(x, a_i) \\ s. t. x \in X(b) \\ \mu_{\bar{a}_i}(x, a_i) = 0, \mu_{\bar{b}_j}(x, b_j) = 0 \end{array} \right\} \quad (13)$$

Dan

$$\left. \begin{array}{l} \min f_1(x, a_i) \\ s. t. x \in X(b) \\ \mu_{\bar{a}_i}(x, a_i) = 1, \mu_{\bar{b}_j}(x, b_j) = 1 \end{array} \right\} \quad (14)$$

Permasalahan di bawah ini merupakan suatu contoh nyata yang berbentuk MONLP-FP, yang hasil perhitungannya diperoleh dengan implementasi program *Matlab* 5.3.0.

Misalkan sebuah perusahaan membangun dua pabrik, yaitu pabrik A dan pabrik B. Keuntungan total diperkirakan a_1 (kira-kira 3) kali dari hasil kali dua pabrik ($a_1 x_1 x_2$) dalam ratusan dolar per ton, dimana x_1 adalah produksi dari pabrik A dan x_2 adalah produksi dari pabrik B (x_1 dan x_2 dalam ton per hari). Adapun biaya proses inventory dari pabrik A adalah $(x_1 - a_2)^2$, dimana a_2 adalah "kira-kira 4" dan dari pabrik B sebesar $(x_2)^2$ dalam ratusan dolar per ton. Asumsikan bahwa produksi yang dikombinasikan dari pabrik A dan pabrik B diperkirakan tidak melebihi b_1 (kira-kira 5) ton per hari.

Tujuan perusahaan adalah untuk memaksimalkan keuntungan total dan juga meminimumkan biaya proses inventory.

Persoalan tersebut dapat diformulasikan menjadi

$$\left. \begin{array}{l} \min[-\bar{a}_1 x_1 x_2, (x_1 - \bar{a}_2)^2 + x_2^2] \\ s. t. x_1 + x_2 - \bar{b}_1 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (15)$$

dengan fungsi keanggotaan sebagaimana persamaan (7), dimana \bar{p}_i menyatakan parameter fuzzy $\bar{a}_i, i = 1, 2$ dan \bar{b}_1 .

Parameter fuzzy pada permasalahan di atas dapat dinyatakan sebagaimana persamaan (3) sehingga diperoleh :

$a_1 =$ "kira-kira 3" atau $a_1^t = (1, 2, 3)$ dimana $m = b = 3$ dan $m_1 = 2$; $a_2 =$ "kira-kira 4" atau $a_2^t = (2, 4, 6)$ dimana $m = b = 4$ dan $m_1 = 2$; $b_1 =$ "kira-kira 5" atau $b_1^t = (3, 5, 7)$ dimana $m = b = 5$ dan $m_1 = 2$.

Berdasarkan persamaan (9) untuk $\alpha = 0.64$ maka diperoleh $a_{1(0.64)} = [4.3, 5.7]$. sehingga persamaan (15) dapat diformulasikan menjadi bentuk $\alpha - MNOLP$, yaitu:

$$\left. \begin{array}{l} \min w_1[-a_1 x_1 x_2, (x_1 - a_2)^2 + x_2^2] \\ s. t. x_1 + x_2 - b_1 \leq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ a_1 \in [2.3, 3.7], a_2 \in [3.3, 4.7], b_1 \in [4.3, 5.7] \end{array} \right\} \quad (16)$$

Selanjutnya persamaan (11) dapat ditulis menjadi:

$$\left. \begin{array}{l} w_2((x_1 - a_2)^2 + x_2^2) \\ s. t. x_1 + x_2 - b_1 \leq 0, \\ 2.3 \leq a_1 \leq 3.7, \\ 3.3 \leq a_2 \leq 4.7 \\ 4.3 \leq b_1 \leq 5.7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (17)$$

Nilai minimum bilangan fuzzy berlaku untuk $\alpha = 0$, sehingga diperoleh $\min(1, 3, 5) = 1$, $\min(2, 4, 6) = 2$ dan $\min(3, 5, 7) = 3$. Sedangkan nilai maksimum bilangan fuzzy berlaku untuk $\alpha = 1$, sehingga diperoleh maks $(3, 5, 7) = 5$.

Berdasarkan nilai maksimum dan nilai minimum bilangan fuzzy tersebut, maka dengan menggunakan persamaan (13) diperoleh $f_1^{min} = -2.25$ dan $f_2^{min} = 0$, sedangkan menggunakan persamaan (14) diperoleh $f_1^{max} = 0$, dan $f_2^{max} = 14$. Dengan mensubstitusikan nilai-nilai ini pada persamaan (12) maka diperoleh $w_1 = 0.052$ dan $w_2 = 0.948$. selanjutnya nilai w_1 dan w_2 disubstitusikan kepersamaan (17). Akhirnya dengan menyelesaikan persamaan (17) diperoleh $(x_1, x_2, a_1, a_2, b_1) = (4.8, 0.5, 3.2, 4.7, 5.3)$ yang merupakan solusi optimal *pareto*, dengan nilai minimum $f = -0.15799$ dimana $f_1 = -7.7784$ dan $f_2 = 0.26$.

Hasil ini menunjukkan bahwa untuk $\alpha = 0.64$ akan diperoleh hasil produksi dari pabrik A sebesar 480 ton per hari dan hasil produksi dari pabrik B sebesar 50 ton per hari. Keuntungan total sebesar 777.84 Dolar per ton dan biaya proses inventiri sebesar 26 dolar per ton.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas maka dapat disimpulkan :

1. Masalah program tak-linier multi-objektif dengan parameter fuzzy dapat diformulasikan menjadi masalah program tak-linier multi-objektif *tidak-fuzzy* dengan menggunakan himpunan $\alpha - level$ dari bilangan fuzzy *triangular*;
2. Solusi optimal pada permasalahan program tak-linier multi-objektif dengan parameter fuzzy untuk degree α tertentu, $\alpha \in (0, 1)$ diperoleh dengan menyelesaikan permasalahan program tak-linier multi-objektif *tidak-fuzzy* menggunakan pendekatan metode bobot.
3. Solusi optimal yang diharapkan bergantung pada pemilihan nilai $\alpha \in (0, 1)$, jika nilai α semakin kecil (mendekati 0) maka akan diperoleh solusi yang lebih optimal. Disamping itu juga bergantung pada penentuan bilangan fuzzy *triangular* "di sekitar m " atau "kira-kira m ", yaitu jika $m_1 (m - a = c - m)$ semakin kecil maka diperoleh solusi yang lebih optimal.

DAFTAR PUSTAKA

- Ali, M.F., 2001. *A differential equation approach to fuzzy vector optimization problems and sensitivity analysis*. *Fuzzy Sets and Systems*. 119(1). pp 87-95.
- Ammar, E.I., 1997. *Stability of multiobjective NLP problems with fuzzy parameters in the objective and constraints functions*. *Fuzzy Sets and Systems*. 109. pp 225–234.
- Sakawa, M., 1993. *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*. Plenum Press. New York.

ANALISA KESTABILAN MODEL PENYEBARAN PENYAKIT RABIES
(*The Analysis of Model Stability for the Spread of Rabies Disease*)

FRANCIS Y. RUMLAWANG¹, MARIO IVAN NANLOHY²

¹ Staf Jurusan Matematika, FMIPA, Unpatti

² Alumni Jurusan Matematika, FMIPA Unpatti

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

e-mail: rumlawang@yahoo.com

ABSTRACT

Rabies is a dangerous disease that can cause death due to rabies virus attacks the spinal cord of the infected and can cause paralysis. But if it enters the limbic system or midbrain, it will cause aggression and loss of sense. The widespread dissemination of this disease is growth increasingly. This research will discuss about the model of the spread rabies and then analyze stability of this model by using simple epidemiological model to determine the initial equilibrium point and eigenvalues, which would be analyzed the stability of this model. This model has two main variables S and I , where S is the susceptible and I is the infectives. This research found the stability model at $(1, 0)$ equilibrium point with the value of c parameter is $c \geq 2\sqrt{1-m}$.

Keywords: *Eigenvalues, Equilibrium point, Jacobian-matrix, Rabies, SIR-models.*

PENDAHULUAN

Rabies bukanlah penyakit baru dalam sejarah peradaban manusia. Catatan tertulis mengenai perilaku anjing yang tiba-tiba menjadi buas ditemukan pada kode Mesopotamia yang ditulis 4000 tahun lalu serta pada kode Babilonia Eshunna yang ditulis pada 2300 SM. Democritus pada 500 SM juga menuliskan karakteristik gejala penyakit yang menyerupai rabies. Goldwasser dan Kissling menemukan cara diagnosis rabies secara modern pada tahun 1958, yaitu dengan teknik antibodi *imunofluoresens* untuk menemukan antigen rabies pada jaringan. Secara etimologi, kata rabies berasal dari bahasa Sansekerta kuno *rabhas* yang artinya melakukan kekerasan atau kejahatan. Dalam bahasa Yunani, rabies disebut *Lyssa* atau *Lytta* yang artinya kegilaan dan dalam bahasa Prancis, rabies disebut *rage* berasal dari kata benda *robere* yang artinya menjadi gila.

Rabies sendiri di Indonesia sudah lama ditemukan dan hampir semua daerah tertular virus. Rabies pertama kali ditemukan pada kerbau oleh Esser (1884), anjing oleh Penning (1889), dan pada manusia oleh E.V.de Haan (1894) yang ketiganya ditemukan di Jawa Barat. Rabies di Indonesia merupakan masalah kesehatan masyarakat yang serius karena hampir selalu menyebabkan kematian (*always almost fatal*) setelah timbul gejala klinis dengan tingkat kematian sampai 100%.

Solusi pencegahan, pemberantasan, dan penyebaran penyakit rabies telah banyak dilakukan dan dikaji dari sisi kesehatan. Salah satu disiplin ilmu yang bisa membantu mengatasi permasalahan tersebut adalah matematika. Pemodelan matematika dapat dimanfaatkan untuk menyelesaikan masalah penyebaran penyakit rabies dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu yang solusinya dapat diperoleh baik secara analitis maupun numerik.

Model SIR (*Susceptible, Infectives, Recovered*) pada awalnya dikembangkan untuk mengetahui laju penyebaran dan kepunahan suatu penyakit dalam populasi tertutup dan bersifat epidemik. Selanjutnya dari model yang sudah ada akan dianalisa kestabilannya.

Tujuan dari penelitian ini adalah menjelaskan model penyebaran penyakit rabies dan menganalisa kestabilan model penyebaran penyakit rabies.

TINJAUAN PUSTAKA

Sebelum masuk ke model matematika, akan dilihat sedikit tentang rabies itu sendiri. Dalam tulisannya pada *Natural History of Animals* edisi 8, Aristotle (400 SM) menulis, “Anjing itu menjadi gila. Hal ini menyebabkan mereka menjadi agresif dan semua binatang yang digigitnya juga mengalami sakit yang sama”.

Rabies disebabkan oleh virus rabies yang masuk ke keluarga *Rhabdoviridae* dan genus *Lysavirus*. Karakteristik utama virus adalah hanya memiliki satu utas negatif RNA yang tidak bersegmen. Virus ini hidup pada beberapa jenis hewan yang berperan sebagai perantara penularan antara lain rakun, rubah merah, anjing dan lain-lain. Hewan perantara menginfeksi inang yang bisa berupa hewan lain atau manusia melalui gigitan. (Madigan MT, Martinko JM, Dunlap PV, Clark DP 2009).

Rabies adalah virus mengerikan yang menyerang sistem saraf utama. Semua hewan berdarah panas dapat terinfeksi rabies (Twisleton-Wykeham-Fiennes, 1987).

Penyebaran rabies spasial merupakan sebuah proses yang kompleks. Salah satu pendekatan untuk memodelkan penyebarannya adalah memulai dengan model epidemiologi sederhana untuk melihat peningkatan penyebarannya (Kallen *et al.*, 1985; Murray *et al.*, 1986).

Selain itu juga teori kestabilan berikut sangat diperlukan dalam menganalisa kestabilan dari model yang sudah ada.

Diberikan sistem persamaan linier

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (1)$$

dengan kondisi awal $x_{t_0}(t_0) = x_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Sistem (1) dapat ditulis sebagai

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

dengan $\frac{dx}{dt} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T \in \mathbb{R}^n$ dan memenuhi kondisi awal $x(t_0) = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})^T$. Selanjutnya notasi $x_t = x(x_0, t)$ menyatakan solusi sistem (1) di atas yang melalui x_0 .

Diberikan sistem persamaan diferensial non linear

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2)$$

dengan f adalah fungsi non linear dan kontinu, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n, E \subset \mathbb{R}^n$.

Perilaku solusi pada persekitaran titik kesetimbangan sistem non linear pada Persamaan (2) dapat ditentukan setelah dilakukan pelinieran pada persekitaran titik kesetimbangan sistem.

Definisi 1

Sistem $\frac{dx}{dt} = J(f(\bar{x}))x$ disebut linearisasi sistem (2) di \bar{x} .

Definisi 2 (Titik Kesetimbangan)

Titik $x \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan (titik equilibrium) sistem jika $f(x) = 0$.

Definisi 3 (Titik Kesetimbangan)

1. Titik kesetimbangan \underline{x} dikatakan stabil jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi $y(t)$ yang memenuhi $|y(t_0) - \underline{x}| < \delta$ berlaku $|x(t) - \underline{x}| < \epsilon$ untuk $t \geq t_0$.

2. Titik kesetimbangan \underline{x} dikatakan stabil asimtotik jika \underline{x} stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi $y(t)$ yang memenuhi $|y(t_0) - \underline{x}| < \delta_0$ berlaku $|y(t) - \underline{x}| \rightarrow 0$ untuk $t \rightarrow \infty$.

Dengan melakukan pelinieran terhadap sistem yakni melalui ekspansi Taylor di sekitar titik tetap \underline{x} diperoleh matriks Jacobian untuk sistem (2) sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Perilaku dinamik untuk sistem dapat diidentifikasi secara lengkap oleh nilai eigen dari matriks J , yaitu:

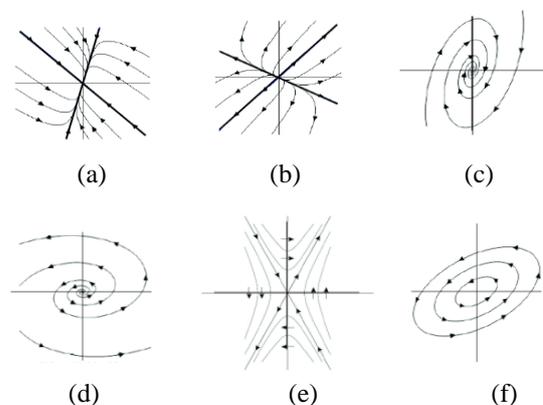
$$|\lambda I - J| = 0$$

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \lambda - \frac{\partial f_1}{\partial x} & -\frac{\partial f_1}{\partial y} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x} & \lambda - \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} \\ &= \left(\lambda - \frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\left(\lambda - \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) - \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = 0 \\ &\lambda^2 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\lambda + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = 0 \\ &\lambda^2 - Tr(J)\lambda + Det(J) = 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian berdasarkan kajian terhadap nilai eigen λ_1 dan λ_2 jenis kestabilan dari sistem adalah sebagai berikut:

- a. $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$, maka disebut simpul stabil
- b. $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 > 0$, maka disebut simpul tidak stabil
- c. λ_1 dan λ_2 kompleks dengan bagian real negatif maka dikatakan fokus stabil.
- d. λ_1 dan λ_2 kompleks dengan bagian real positif maka disebut fokus tidak stabil.
- e. λ_1 dan λ_2 real tapi satunya negatif dan lainnya positif maka disebut titik sadel.
- f. λ_1 dan λ_2 kompleks murni maka disebut pusat.

Jenis kestabilan dalam bidang fase dapat dilihat pada Gambar 1 berikut ini



Gambar 1. Jenis kestabilan dalam bidang fase

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Penyebaran Penyakit Rabies

Penyebaran penyakit rabies sudah banyak diteliti. Penyebaran spasial penyakit rabies merupakan sebuah proses yang kompleks. Oleh karena itu berdasarkan Kallen dan Murray yang menyatakan bahwa salah satu pendekatan untuk memodelkan penyebaran penyakit rabies adalah memulai dengan model epidemiologi sederhana untuk melihat peningkatan penyebarannya setelah itu akan dianalisis kestabilan dari model tersebut.

Dari model SIR, hanya akan digunakan dua variabel untuk model penyebaran rabies. Diperkirakan dua kelompok objek rabies, kelompok pertama yaitu, *Susceptible* (*S*) atau objek yang rentan terserang rabies, dan kelompok yang kedua yaitu, *Infective* (*I*) atau objek yang terinfeksi rabies. Objek yang terinfeksi berinteraksi dengan objek yang rentan, dan kemudian menjangkitkan rabies. Asumsi umum dari model yang akan digunakan ialah migrasi dari objek yang terinfeksi menentukan kondisi perubahan epidemi ke depan.

Ada beberapa asumsi khusus yang mendasari model ini. Asumsi-asumsi tersebut adalah :

- (i). Virus rabies terdapat dalam air liur dari objek yang terinfeksi dan biasanya ditularkan oleh gigitan. Oleh karena itu kontak antara objek yang terinfeksi dan objek yang rentan diperlukan untuk penularan penyakit.
- (ii). Rabies adalah selalu fatal.
- (iii). Laju kelahiran sama dengan laju kematian.
- (iv). Terdapat kontak yang tetap antara objek yang rentan dan objek yang terinfeksi dalam populasi.
- (v). Perubahan waktu dari jumlah objek yang terinfeksi pada sebuah wilayah yang kecil adalah sama dengan rata-rata waktu peralihan dari jumlah populasi objek yang rentan dikurangi rata-rata tingkat kematian dan jumlah migrasi dari wilayah tersebut.
- (vi). Interval waktu yang pendek diasumsikan kurang dari satu tahun.
- (vii). Jika virus rabies memasuki sumsum tulang belakang dari objek yang terinfeksi, maka hal ini dapat menyebabkan kelumpuhan. Namun jika memasuki sistem limbik atau otak tengah yang posisinya sedikit lebih ke depan dan terdiri atas Talamus dan Ganglia Basal, maka mungkin akan menyebabkan agresi dan hilangnya rasa.

Penjelasan untuk asumsi khusus yang terakhir, sistem limbik terdiri dari *hipotalamus* dan *amigdala* yang berfungsi penting bagi pembelajaran dan ingatan jangka pendek tetapi juga menjaga homeostatis di dalam tubuh (tekanan darah, suhu tubuh dan kadar gula darah). Sistem limbik terlibat dalam emosi ketahanan hidup dari hasrat seksual atau perlindungan diri. Akibatnya, objek yang terinfeksi, bisa berkeliaran secara acak dan tidak terkendali.

Dengan demikian, manusia juga termasuk dalam objek yang rentan untuk terinfeksi rabies. Sementara itu perubahan dari jumlah populasi objek yang rentan cukup sederhana yaitu dengan menghitung angka kematian dari populasi objek yang sudah terinfeksi rabies.

Model awal yang akan digunakan dan dianalisa kestabilannya dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -r S I \tag{3a}$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = r S I - a I + D \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \tag{3b}$$

dengan,

- S* : Objek yang rentan terserang rabies
- I* : Objek yang telah terinfeksi rabies
- r* : Koefisien penyebaran rabies
- a* : Peluang objek terinfeksi dapat bertahan
- D* : Koefisien penyebaran pada wilayah epidemi

Untuk koefisien penyebaran *D* dapat diperkirakan menggunakan persamaan,

$$D = kA$$

dengan,

- k* : Tetapan pada saat objek yang terinfeksi meninggalkan wilayah epidemi
- A* : Rata-rata luas wilayah

Dari penjelasan ini, diperoleh nilai $\frac{1}{k}$ adalah rata-rata waktu sampai objek yang terinfeksi rabies meninggalkan wilayah epidemi. Tetapi perkiraan yang lebih akurat untuk nilai *D* bisa diperoleh dengan observasi langsung di lapangan dengan menghitung jarak perjalanan dari objek yang terinfeksi selama periode waktu observasi.

Parameter pada Persamaan (3a) dan (3b) dapat dinondimensikan. Jika diberikan,

$$\tilde{I} \equiv \frac{I}{S_0}, \tilde{S} \equiv \frac{S}{S_0},$$

$$\tilde{x} \equiv \sqrt{\frac{rS_0}{D}} x, \quad \tilde{t} \equiv rS_0 t, \quad m \equiv \frac{a}{rS_0}$$

Dengan *S*₀ adalah nilai awal dari objek yang rentan dengan tetapan nilainya adalah 1. Kemudian dengan mengabaikan tanda tilda pada persamaan untuk penyederhanaan notasi akhirnya diperoleh,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -S I$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = I(S - m) + \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$$

Kemudian akan dicari solusi pergerakan gelombang untuk sistem ini dalam bentuk,

$$S(x, t) = S(x - ct) \equiv S(z)$$

$$I(x, t) = I(x - ct) \equiv I(z)$$

Maka diperoleh dua persamaan diferensial biasa

$$c S' = I S, \tag{4a}$$

$$I'' + c I' + (S - m)I = 0 \tag{4b}$$

Untuk mengantisipasi pergerakan di depan dua gelombang *S* dan *I* yang berjalan, maka diberikan kondisi batas,

$$S(+\infty) = 1, \quad I(+\infty) = 0$$

Di samping itu, diberikan juga kondisi batas untuk objek yang rentan sebagai berikut

$$S(-\infty) = 0, \quad I(-\infty) = 0$$

Jika Persamaan (4a) disubstitusikan ke Persamaan (4b), maka diperoleh

$$I'' + c I' + \frac{c S'(S - m)}{S} = 0 \tag{5}$$

Kemudian diintegrasikan sehingga hasil yang didapatkan adalah,

$$\int I''(S) + c I'(S) + \frac{c S'(S - m)}{S} dS = \int 0 dS$$

$$I' + c I + c S - cm \ln S = k \text{ (konstan)} \quad (6)$$

Dengan menggunakan pendekatan kondisi batas z tak hingga di atas dapat disimpulkan bahwa Persamaan (6) akan konstan jika nilai k hanya sama dengan c . Sehingga Persamaan (6) menjadi,

$$I' + c I + c S - cm \ln S = c \quad (7)$$

Ini berarti bahwa tidak ada objek terinfeksi sebelum epidemi. Setelah epidemi, ada peluang bahwa akan ada objek rentan yang terinfeksi (karena rabies hampir selalu fatal).

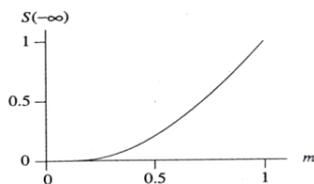
Sekarang dengan pendekatan z negatif pada kondisi batas yang sudah ditentukan maka Persamaan (7) menjadi,

$$S(-\infty) - m \ln S(-\infty) = 1$$

atau

$$\frac{S(-\infty) - 1}{\ln S(-\infty)} = m = \frac{a}{r S_0}$$

Hal ini memungkinkan bagian populasi dari objek yang rentan dapat ditentukan. Pada Gambar 4 terlihat bahwa hubungan antara parameter m dan nilai dari objek yang rentan dimulai dengan nilai $m = 0$ kemudian naik dan berbanding lurus dengan pergerakan objek yang rentan sampai di titik (1,1). Hal ini memberikan pengertian bahwa proses epidemi telah terjadi.



Gambar 2. Grafik fungsi dari parameter m

Parameter m adalah ukuran dari tingkat kondisi objek epidemi, dengan nilai yang lebih rendah menandakan objek yang rentan berpeluang hidup.

Untuk terjadinya epidemi, diperlukan nilai $m < 1$. Jika $m > 1$, sehingga $a > r S_0$, angka kematian pada objek yang terinfeksi lebih besar dari tingkat terbentuknya objek terinfeksi yang baru dan objek yang terinfeksi rabies tidak akan dapat bertahan. Nilai $m = 1$ juga memberikan titik kritis objek rentan, $S_0 = \frac{a}{r}$, yang menjadi syarat terjadinya epidemi.

Titik Kesetimbangan

Persamaan (4a) dan (7) digabungkan, kemudian akan dicari titik kesetimbangannya dengan menggunakan Definisi 2 dan Definisi 3 tentang titik kesetimbangan.

$$S' = \frac{1}{c} S I, \quad (8a)$$

$$I' = -c(S + I) + cm \ln S + c \quad (8b)$$

Sistem (8a) dan (8b) dapat dianalisis dengan cara biasa.

Pertumbuhan awal objek yang rentan diberikan oleh $S = 0$

dan

$$I = 0$$

Sedangkan pertumbuhan awal objek yang terinfeksi diberikan oleh

$$I = m \ln S - S + 1$$

Dari Persamaan (8a) dan (8b) didiferensialkan masing-masing terhadap S dan I sebagai berikut,

$$S' = f(x) = \frac{1}{c} S I$$

maka diperoleh,

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{I}{c} \text{ dan } \frac{\partial f}{\partial I} = \frac{S}{c}$$

kemudian,

$$I' = g(x) = -c(S + I) + cm \ln S + c$$

maka diperoleh,

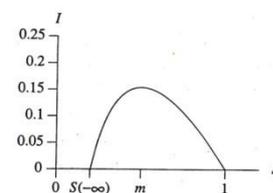
$$\frac{\partial g}{\partial S} = -c + \frac{cm}{S} \text{ dan } \frac{\partial g}{\partial I} = -c$$

Sehingga matriks Jacobian yang dibentuk adalah sebagai berikut,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{I}{c} & \frac{S}{c} \\ -c + \frac{cm}{S} & -c \end{pmatrix} \quad (9)$$

Dari Persamaan (8a) dan (8b) diperoleh dua kesetimbangan yang menarik. Salah satunya adalah di $[S(-\infty), 0]$ dan yang lainnya adalah di (1,0)



Gambar 3. Bidang fase (S, I)

Gambar 3 menunjukkan bidang fase dari (S, I) yang dibentuk dari persamaan $I = m \ln S - S + 1$, dimana titik-titik kritis dibentuk pada $[S(-\infty), 0]$ dan (1,0). Kurva yang dibentuk dari kedua titik tersebut menunjukkan penyebaran penyakit menjadi epidemi dan mencapai puncak pada saat m bernilai 0,5, setelah itu akan menurun sampai pada titik (1,0).

Selanjutnya, pada $[S(-\infty), 0]$, matriks Jacobian direduksi menjadi

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{S(-\infty)}{c} \\ -c + \frac{cm}{S(-\infty)} & -c \end{pmatrix}$$

Dari matriks Jacobian tersebut diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + c\lambda - [m - S(-\infty)] = 0 \quad (10)$$

Persamaan karakteristik tersebut memiliki nilai eigen dengan tanda berlawanan atau titik $(S(-\infty), 0)$ memiliki kesetimbangan dengan bentuk *saddle point*.

Sedangkan pada (1,0), matriks Jacobian direduksi menjadi

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ c + (m - 1) & -c \end{pmatrix}$$

dari matriks Jacobian tersebut diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + c\lambda + (1 - m) = 0 \tag{11}$$

Analisa Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Rabies

Berdasarkan hasil dari persamaan karakteristik untuk titik (1, 0) di atas, maka dengan demikian diperoleh

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4(1 - m)}}{2} \tag{12}$$

Dari Persamaan (12) akan dianalisa kestabilannya. Akan diperhatikan terlebih dahulu nilai yang di bawah tanda akar yaitu,

$$c^2 - 4(1 - m)$$

Untuk menghasilkan nilai λ berupa bilangan kompleks, maka nilai $c^2 - 4(1 - m)$ harus kurang dari nol.

$$c^2 - 4(1 - m) < 0$$

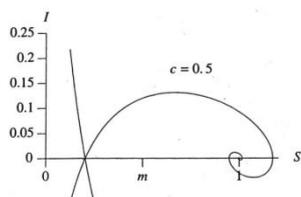
$$c^2 < 4(1 - m)$$

$$c < 2\sqrt{1 - m}$$

Sehingga untuk $c < 2\sqrt{1 - m}$, diperoleh nilai λ_1 dan λ_2 berupa bilangan kompleks dengan bagian riilnya sama-sama bernilai negatif.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}c \pm \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - 4(1 - m)}$$

Dari persamaan ini diketahui $-\frac{1}{2}c$ adalah bagian riil dan $\pm\frac{1}{2}\sqrt{c^2 - 4(1 - m)}$ adalah bagian imajiner. Untuk nilai λ_1 dan λ_2 kompleks dengan bagian riil negatif, maka berdasarkan bagian 2.2.5 tentang teori kestabilan, kesetimbangan pada titik (1,0) dapat dikatakan *stable focus* atau fokus stabil untuk nilai $c < 2\sqrt{1 - m}$. Untuk kesetimbangan, ini tidak mungkin ada hubungan heteroklinik dengan jumlah nonnegatif dari infeksi.



Gambar 4. Fokus stabil untuk $c < 2\sqrt{1 - m}$

Gambar 6 memberikan hasil bentuk kestabilan yang diperoleh adalah fokus stabil, dengan menggunakan nilai parameter $c = 0,5$. Kurva yang dibentuk menunjukkan model yang digunakan dengan nilai parameter $c < 2\sqrt{1 - m}$ akan bergerak menuju titik (1,0). Artinya penyebaran stabil jika menuju pusat (1,0).

Kemudian yang berikutnya, untuk menghasilkan nilai λ berupa bilangan riil, maka nilai $c^2 - 4(1 - m)$ harus lebih dari nol.

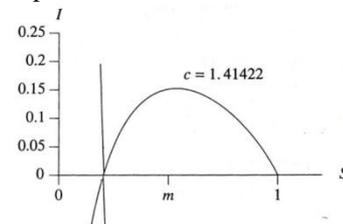
$$c^2 - 4(1 - m) \geq 0$$

$$c^2 \geq 4(1 - m)$$

$$c \geq 2\sqrt{1 - m}$$

Selanjutnya tinggal ditentukan nilai λ_1 dan λ_2 bernilai riil negatif atau riil positif.

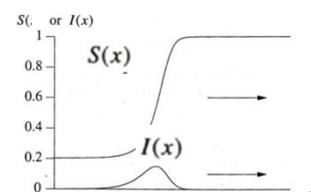
Dari persamaan $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}c \pm \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - 4(1 - m)}$ diketahui $-\frac{1}{2}c$ dinamakan bagian pertama dan $\pm\frac{1}{2}\sqrt{c^2 - 4(1 - m)}$ dinamakan bagian kedua. Bagian pertama pasti lebih dari bagian kedua. Untuk nilai $c \geq 2\sqrt{1 - m}$ bernilai riil. Sehingga jika negatif bagian pertama dijumlahkan dengan bagian yang kedua, maka pasti bernilai negatif, dan jika negatif bagian pertama dikurangi dengan negatif bagian kedua, maka pasti akan bernilai negatif juga. Dengan demikian kestabilan pada titik kesetimbangan (1,0) berdasarkan bagian 2.2.5 tentang teori kestabilan, diperoleh jenis kestabilannya adalah *stable node* atau simpul stabil. Oleh karena itu kesetimbangan di titik (1,0) adalah stabil dan memiliki hubungan heteroklinik positif yang berarti penyebaran penyakit terjadi epidemi.



Gambar 5. Simpul stabil untuk $c \geq 2\sqrt{1 - m}$

Gambar 5 memberikan pola kurva penyebaran yang membentuk simpul stabil dan berujung pada titik (1,0). Garis lurus sejajar sumbu I, menunjukkan kondisi populasi yang belum terinfeksi. Arah penyebarannya juga sesuai dengan epidemi yang mencapai puncak pada saat nilai $m = 0,5$ sehingga nilai parameter c yang diperoleh dari gambar tersebut adalah $c = 1,41422$. Hal ini memberikan kecepatan gelombang minimum untuk pergerakan gelombang S dan I yang berjalan.

Analisa dari model penyebaran rabies memiliki populasi objek yang rentan monoton menurun pada saat epidemi dan puncak tunggal pada objek yang terinfeksi terjadi pada saat epidemi.



Gambar 6. Pergerakan gelombang model rabies

Sebaliknya Gambar 6 menunjukkan pergerakan pada jumlah objek yang terinfeksi $I(x)$ yang ditunjukkan oleh garis gelombang yang dibawah dan objek yang rentan $S(x)$ ditunjukkan oleh garis gelombang yang di atas, membelakangi pergerakan gelombang yang berjalan kemudian dalam penelitian ini merupakan penyebaran rabies itu sendiri. Setelah bagian yang membelakangi gelombang maka bagian depan gelombang merupakan populasi dari objek yang rentan dan akan mulai meningkat lagi. Hal ini berakibat, Persamaan (3a) dan

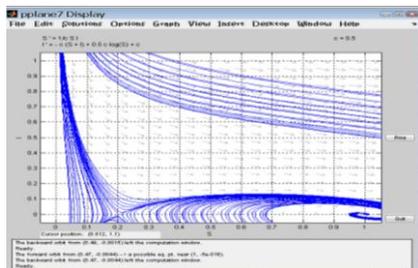
(3b) dapat dijadikan acuan sebagai model awal untuk penyebaran penyakit ini.

Visualisasi Kestabilan

Dari pembahasan pada bagian sebelumnya, telah dilihat dan dipelajari secara teoritis tentang kajian dari analisa kestabilan model penyebaran penyakit rabies. Secara sederhana proses tersebut diawali dengan model awal yang sudah ada, kemudian diturunkan hingga mendapatkan matriks Jacobian yang sesuai dengan persamaan, selanjutnya dengan titik tetap yang sudah diperoleh, akan ditemukan nilai λ untuk menentukan arah dan bentuk kestabilan dari model penyebaran rabies tersebut.

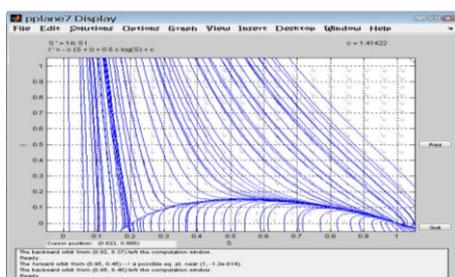
Pada bagian ini, akan dilihat visualisasi tampilan dari kestabilan model penyebaran penyakit rabies yang akan menggunakan bantuan *software* MATLAB. Analisa disini akan menggunakan bantuan *toolbox* MATLAB *pplane* atau *phase plane*. *Pplane* adalah *toolbox* MATLAB yang kodenya ditulis oleh John Polking dari Rice University, dapat memberikan tampilan visualisasi dari sebuah sistem persamaan diferensial yang seringkali berguna untuk sketsa pada bidang vektor dimensi dua maupun bidang fase. Dengan menggunakan *pplane* juga akan sangat membantu dalam proses linearisasi, menentukan kestabilan titik tetap walaupun dalam beberapa contoh kasus, *pplane* tidak selalu akurat dalam memprediksi pusat. Tetapi dengan menggunakan bantuan *pplane* MATLAB, setidaknya diperoleh gambaran tentang kestabilan.

Berikut di bawah ini adalah merupakan hasil visualisasi dari pengolahan analisa model penyebaran penyakit rabies dengan menggunakan *pplane* MATLAB.



Gambar 7. Visualisasi pada $c < 2\sqrt{1-m}$

Nilai parameter $c < 2\sqrt{1-m}$ dalam penelitian ini dipilih 0,5, kestabilannya membentuk *stable focus* (fokus stabil) di titik (1,0) seperti yang terlihat pada Gambar 7. Bentuk kestabilan ini akan tetap sama untuk setiap pemilihan nilai parameter $c < 1,41422$.



Gambar 8. Visualisasi pada $c \geq 2\sqrt{1-m}$

Gambar 8 memberikan tampilan dari kestabilan yang dicari pada penelitian ini. Pada gambar 8, kestabilan yang dibentuk pada nilai parameter $c \geq 2\sqrt{1-m}$ adalah *stable node* (simpul stabil). Ini berarti pada titik kesetimbangan (1,0), model ini akan stabil dengan mengambil nilai parameter $c \geq 1,41422$.

KESIMPULAN

Dari pembahasan pada bagian sebelumnya, maka ada dua kesimpulan yang diperoleh pada penelitian ini yaitu,

1. Model penyebaran rabies diberikan oleh $\frac{\partial S}{\partial t} = -rSI$ dan $\frac{\partial I}{\partial t} = rSI - aI + D\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$, dengan S (*Susceptible*) adalah objek yang rentan dan I (*Infectives*) adalah objek yang sudah terinfeksi rabies. Kemudian setelah diturunkan, diperoleh persamaan $f(x) = S' = \frac{1}{c}SI$, dan $g(x) = I' = -c(S+I) + cm \ln S + c$ yang nantinya membantu dalam menganalisa kestabilan penyebaran penyakit rabies.
2. Persamaan $f(x) = S' = \frac{1}{c}SI$, dan $g(x) = I' = -c(S+I) + cm \ln S + c$, memberikan dua titik tetap di $[S(-\infty), 0]$ dan (1,0). Hasil analisa kestabilan bergantung pada nilai λ dan parameter c , yang memberikan analisa akhir bahwa, pada saat endemi populasi objek yang terinfeksi meningkat dan setelah endemi, populasi objek yang rentan akan kembali meningkat. Dan jika $c < 2\sqrt{1-m}$, maka model akan stabil dan penyebarannya tidak terjadi pada populasi. Sedangkan jika $c \geq 2\sqrt{1-m}$, modelnya stabil tetapi penyebarannya terjadi dan meluas.

DAFTAR PUSTAKA

- Kallen, A., Arcuri, P., and Murray, J. D. 1985. A simple model for the spatial spread and control of rabies. *Journal of Theoretical Biology*, 337-393
- Kot, Mark. 2001. *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge University Press. USA.
- Madigan, M. T., Martinko J. M., Dunlap P. V., Clark D. P. (2009). *Brock Biology of Microorganisms Twelfth Edition*. hlm. 1003-1005.
- Steele, JH; Fernandez, J. 1991. "History of Rabies and Global Aspects", di dalam Baer, GM, *The Natural History of Rabies* (edisi ke-2), Boca Raton, Florida: CRC Press, Inc., hlm. 1, [ISBN 0849367603](https://doi.org/10.1080/0849367603)
- Twisleton-Wykeham-Fiennes, N. 1978. *Zoonoses and the Origins and Ecology of Human Disease*. Academic Press, London.

SEMIRING
(Semiring)

SUSAN RIALITA LISAPALY¹, ELVINUS RICHARD PERSULESSY²

¹Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura

²Staf Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

email: susan_lisapaly@yahoo.com; richardelvinus@yahoo.com

ABSTRAK

Dalam aljabar, semiring merupakan suatu struktur yang serupa dengan ring, tetapi tanpa syarat bahwa setiap elemen harus memiliki invers terhadap operasi penjumlahan. Jika pada ring, $\langle R, + \rangle$ adalah grup komutatif atau grup abelian maka pada semiring, $\langle S, + \rangle$ hanya membentuk monoid komutatif, yang berarti setiap elemennya tidak perlu memiliki invers terhadap operasi penjumlahan.

Keywords: Grup Komutatif, Monoid Komutatif, Ring, Semiring.

PENDAHULUAN

Himpunan $R \neq \emptyset$ merupakan ring jika terhadap operasi penjumlahan, R grup abelian, terhadap operasi perkalian R tertutup dan asosiatif, serta memenuhi distributif kiri dan kanan.

Jika pada ring R , dilepas satu aksioma yaitu keberadaan elemen invers terhadap operasi penjumlahan, maka diperoleh struktur baru yang dikenal dengan nama semiring.

Walaupun hanya dilepaskan satu aksioma, namun hal ini membuat perbedaan yang sangat mendasar antara ring dan semiring. Hal-hal tersebut yang melatarbelakangi penelitian ini.

TINJAUAN PUSTAKA

Istilah ring pertama kali diperkenalkan oleh David Hilbert (1862-1943), tetapi sebatas pendekatan definisi yang masih abstrak. Himpunan R dikatakan ring jika terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan padanya, R memenuhi sifat-sifat yaitu terhadap operasi penjumlahan, R adalah grup abelian, terhadap operasi perkalian R memenuhi sifat tertutup dan asosiatif serta terhadap operasi penjumlahan dan perkalian R memenuhi sifat distributif kiri dan distributif kanan. (Fraleigh, 2000)

Dari ring R dapat dibentuk struktur baru yang dinamakan semiring jika dilepaskan satu sifat yaitu keberadaan elemen invers terhadap operasi penjumlahan. (Kandasamy, 2002). Semua ring adalah semiring, tapi sebaliknya belum tentu berlaku. (Kandasamy, 2002).

Definisi 1 (Semigrup)

Himpunan $S \neq \emptyset$ merupakan semigrup terhadap operasi biner " $*$ " jika memenuhi sifat tertutup dan asosiatif. Himpunan S yang membentuk semigrup terhadap operasi biner " $*$ " dinotasikan dengan $\langle S, * \rangle$.

Definisi 2 (Semigrup Komutatif)

Diberikan himpunan $S \neq \emptyset$. Himpunan S merupakan semigrup komutatif jika $\langle S, * \rangle$ memenuhi sifat komutatif terhadap operasi " $*$ ".

Definisi 3 (Monoid)

Himpunan $\langle S, * \rangle$ merupakan semigrup dengan elemen identitas jika S memuat elemen netral terhadap operasi " $*$ ", yaitu

$$(\exists e \in S) (\forall s \in S) [e * s = s * e = s]$$

Selanjutnya, $\langle S, * \rangle$ disebut monoid.

Definisi 4 (Ring)

Himpunan $R \neq \emptyset$ dengan dua operasi biner, penjumlahan "+" dan pergandaan "." disebut mempunyai struktur suatu ring, selanjutnya R disebut Ring (Gelanggan) jika memenuhi aksioma-aksioma:

- I. Terhadap penjumlahan $\langle R, + \rangle$ merupakan grup abelian, yaitu
 1. Tertutup
 $(\forall a, b \in R) (\exists! c \in R) a + b = c$
 2. Asosiatif
 $(\forall a, b, c \in R) (a + b) + c = a + (b + c)$
 3. Ada elemen netral
 $(\exists e \in R) (\forall a \in R) e + a = a + e$
 4. Setiap elemen R mempunyai invers
 $(\forall a \in R) (\exists -a \in R) a + (-a) = (-a) + a = 0$
 5. Komutatif
 $(\forall a, b \in R) a + b = b + a$
- II. Terhadap pergandaan $\langle R, \cdot \rangle$ memenuhi sifat
 6. Tertutup
 $(\forall a, b \in R) (\exists! c \in R) a \cdot b = c$
 7. Asosiatif
 $(\forall a, b, c \in R) (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- III. Distributif
 8. Distributif kiri
 $(\forall a, b, c \in R) a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
 9. Distributif kanan
 $(\forall a, b, c \in R) (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

HASIL DAN PEMBAHASAN**Semiring****Definisi 1**

Diberikan himpunan $S \neq \emptyset$. Pada S didefinisikan operasi-operasi biner "+" dan ".". Himpunan S disebut semiring terhadap kedua operasi biner tersebut jika memenuhi :

- i. $\langle S, + \rangle$ adalah monoid komutatif.
 - ii. $\langle S, \cdot \rangle$ adalah semigrup.
 - iii. Distributif kanan dan kiri.
- Himpunan S yang membentuk semiring terhadap operasi "+" dan "." dinotasikan $(S, +, \cdot)$.

Contoh 1

Himpunan semua bilangan riil positif dan nol merupakan semiring terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan bilangan riil.

Bukti :

Misalkan R^0 himpunan semua bilangan riil positif dan nol.

- i. $\langle R^0, + \rangle$ adalah monoid komutatif
 - a. Tertutup
 $(\forall r_1, r_2 \in R^0) [r_1 + r_2 \in R^0]$

- b. Asosiatif

$$(\forall r_1, r_2, r_3 \in R^0) [(r_1 + r_2) + r_3 = r_1 + (r_2 + r_3)]$$

- c. Terdapat elemen identitas

$$(\exists 0 \in R^0) (\forall r \in R^0) [0 + r = r + 0 = r]$$

- d. Komutatif

$$(\forall r_1, r_2 \in R^0) [r_1 + r_2 = r_2 + r_1]$$

- ii. $\langle R^0, \cdot \rangle$ semigrup

- a. Tertutup

$$(\forall r_1, r_2 \in R^0) [r_1 \cdot r_2 \in R^0]$$

- b. Asosiatif

$$(\forall r_1, r_2, r_3 \in R^0) [(r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3)]$$

- iii. Hukum distributif

- a. Distributif kiri

$$(\forall r_1, r_2, r_3 \in R^0) [r_1 \cdot (r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3]$$

- b. Distributif kanan

$$(\forall r_1, r_2, r_3 \in R^0) [(r_1 + r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3]$$

Definisi 2

Semiring $(S, +, \cdot)$ disebut semiring komutatif jika semigrup $\langle S, \cdot \rangle$ adalah semigrup komutatif.

Contoh 2

Himpunan pada Contoh 1 merupakan semiring komutatif, karena pada himpunan semua bilangan riil positif dan nol, sifat komutatif berlaku terhadap operasi pergandaan.

Definisi 3

Semiring $(S, +, \cdot)$ disebut semiring dengan elemen identitas jika didalam $(S, +, \cdot)$, $\langle S, \cdot \rangle$ monoid, yaitu :

$$(\exists 1 \in S) (\forall s \in S) [1 \cdot s = s \cdot 1 = s]$$

Contoh 3

$(R^0, +, \cdot)$ merupakan semiring komutatif dengan elemen identitas 1 karena didalam $(R^0, +, \cdot)$, $\langle R^0, \cdot \rangle$ monoid komutatif, yaitu :

- a. Terdapat elemen satuan

$$(\exists 1 \in R^0) (\forall r \in R^0) [1 \cdot r = r \cdot 1 = r]$$

- b. Komutatif

$$(\forall r_1, r_2 \in R^0) [r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1]$$

Definisi 4

Semiring $(S, +, \cdot)$ disebut semiring berkarakteristik m jika

$$(\forall s \in S \setminus \{0\}) [m \cdot s = \underbrace{s+s+\dots+s}_m = 0]$$

Jika tidak ada $m \in \mathbb{Z}^+$ yang memenuhi maka karakteristik $(S, +, \cdot)$ adalah nol.

Contoh 4

$(\mathbb{R}^0, +, \cdot)$ merupakan semiring berkarakteristik nol.

Bukti :

Telah diketahui $(\mathbb{R}^0, +, \cdot)$ merupakan semiring.

Ambil sebarang $r \in \mathbb{R}^0 \setminus \{0\}$.

Diperoleh

$$m \cdot r = \underbrace{r+r+\dots+r}_{m \text{ suku}} = 0$$

Karena tidak ada bilangan bulat positif m yang memenuhi $m \cdot r = 0$ dimana $r \in \mathbb{R}^+$ maka karakteristik \mathbb{R}^0 adalah nol. Dengan demikian terbukti $(\mathbb{R}^0, +, \cdot)$ merupakan semiring berkarakteristik nol.

Definisi 5

Misalkan himpunan S merupakan semiring dan $P \subseteq S$ dengan $P \neq \emptyset$. Himpunan P disebut semiring bagian dari S jika P merupakan semiring terhadap operasi-operasi yang didefinisikan pada S .

Contoh 5

Telah diketahui $(\mathbb{Z}^0, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}^0, +, \cdot)$ dan $(\mathbb{R}^0, +, \cdot)$ masing-masing merupakan semiring berkarakteristik nol dan $\mathbb{Z}^0 \subseteq \mathbb{Q}^0 \subseteq \mathbb{R}^0$. Dengan demikian \mathbb{Z}^0 merupakan semiring bagian dari \mathbb{Q}^0 dan \mathbb{R}^0 .

Definisi 6

Semiring $(S, +, \cdot)$ disebut *strict semiring* jika

$$(\forall s_1, s_2 \in S)[s_1 + s_2 = 0 \Rightarrow s_1 = 0 \wedge s_2 = 0]$$

Contoh 6

$(\mathbb{R}^0, +, \cdot)$ merupakan *strict semiring*.

Bukti :

Telah diketahui $(\mathbb{R}^0, +, \cdot)$ merupakan semiring.

Ambil sebarang $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^0$.

Akan ditunjukkan untuk setiap $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^0$ jika $r_1 + r_2 \in \mathbb{R}^0$ maka $r_1 = 0$ dan $r_2 = 0$.

Andaikan $r_1 \neq 0$ atau $r_2 \neq 0$.

Karena $r_1 \neq 0$ maka $r_1 + r_2 \neq 0$ dan karena $r_2 \neq 0$ maka $r_1 + r_2 \neq 0$

Sehingga kontradiksi dengan $r_1 + r_2 = 0$.

Jadi terbukti jika $r_1 + r_2 = 0$ maka $r_1 = 0$ dan $r_2 = 0$.

KESIMPULAN

Dengan berpegang pada definisi-definisi yang ada dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

Karena terhadap operasi penjumlahan, suatu himpunan yang membentuk semiring hanyalah merupakan monoid komutatif dan bukan grup komutatif atau grup abelian, maka setiap elemen dalam himpunan itu tidak perlu memiliki invers terhadap operasi penjumlahan yang didefinisikan padanya. Sehingga himpunan yang membentuk semiring bukanlah grup.

DAFTAR PUSTAKA

- Fraleigh, J.B. 2000. *A First Course In Abstract Algebra*. Sixth Edition. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts.
- Kandasamy, V. W. B., 1993, *Semivector Spaces Over Semifields*, American Research Press, USA.
- Kandasamy, V. W. B., 2002, *Smarandache Semirings, Semifields, And Semivector Spaces*, American Research Press, USA.

Barekeng terbit dua kali dalam setahun yaitu Bulan Maret dan Desember. *Barekeng* menerima naskah dalam bentuk hasil penelitian, catatan penelitian (*note*) atau artikel ulas balik (*review/ minireview*) dan ulasan (*feature*) baik dalam bahasa Indonesia maupun dalam bahasa Inggris yang berkaitan dengan bidang Matematika dan Terapannya. Naskah yang dikirimkan merupakan naskah asli yang belum pernah diterbitkan di media manapun.

PENGIRIMAN NASKAH

Naskah dikirimkan kepada:

Redaksi *Barekeng*

Jurusan Matematika

Fakultas MIPA

Universitas Pattimura

Jl. Ir. M. Putuhena, Poka-Ambon

Email: jurnalbarekeng@gmail.com

Naskah yang dikirimkan harus dalam bentuk naskah cetak (*hard copy*) dan naskah lunak (*soft copy*), disertai dengan alamat korespondensi lengkap dan alamat *email* yang dapat dihubungi.

Naskah cetak (*hard copy*):

Naskah cetak dikirim sebanyak satu eksemplar dengan format pengetikan menggunakan *Microsoft Word* seperti berikut:

- Naskah diketik 1 spasi pada kertas HVS Ukuran A4 dengan batas tepi 2 cm dan berbentuk 2 kolom dengan jarak antar kolom 0.5 cm. Tipe huruf *Times New Roman* berukuran 10 point.
- Jumlah halaman maksimum 12 halaman termasuk Lampiran (Gambar dan Tabel). Setiap halaman diberi nomor secara berurutan pada tepi kanan atas. Untuk keterangan Lampiran: Tipe huruf *Times New Roman* berukuran 9 point.
- Persamaan matematika (*equations*) dapat diketik dengan menggunakan *MS Equations* atau *MathType* dengan tipe huruf *Cambria* atau *Times New Roman* berukuran 10 point.

Naskah lunak (*soft copy*):

Naskah lunak harus dalam format *Microsoft Word* dan dikirimkan dalam bentuk disk (CD, DVD), *flashdisk*, atau *attachment email*.

SUSUNAN NASKAH

- a. Judul dalam Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris untuk artikel berbahasa Indonesia dan Judul dalam Bahasa Inggris untuk artikel berbahasa Inggris.
- b. Nama Lengkap Penulis (tanpa gelar).
- c. Nama Lembaga atau Institusi, disertai Alamat Lengkap dengan nomor kode pos. Untuk korespondensi dilengkapi No. Telp., fax dan *email*.
- d. Judul Ringkas (*Running Title*) (jika diperlukan).

- e. Abstrak (*Abstract*) dalam Bahasa Inggris atau Bahasa Indonesia.
- f. Kata Kunci (*Keywords*) dalam Bahasa Inggris atau Bahasa Indonesia.
- g. Pendahuluan (*Introduction*) meliputi latar belakang, masalah dan tujuan penelitian.
- h. Tinjauan Pustaka meliputi ulasan (*review*) penelitian dari beberapa literatur serta teori-teori dasar yang mendukung penelitian.
- i. Metode Penelitian (*Methods and Materials*) meliputi bahan, cara, dan analisis dalam penelitian (jika ada).
- j. Hasil dan Pembahasan (*Results and Discussion*) ditulis secara berkesinambungan dalam satu rangkaian naskah penulisan.
- k. Kesimpulan (*Conclusion*)
- l. Ucapan Terima Kasih (*Acknowledgements*) (Jika diperlukan)
- m. Daftar Pustaka ditulis memakai sistem nama dan disusun menurut abjad. Di bawah ini beberapa contoh penulisan sumber acuan:

Jurnal :

Efron, B. 1983. *Estimating the Error Rate of Prediction Rule: Improvement on Cross-Validation*. J. Amer. Statist. Assoc., 78:316-331.

Buku :

Dennis, G. Z., 1986, *Differential Equations with Boundary Value Problems*. Ed ke-2. Boston: Massachusetts. PWS Publishers.

Skripsi/Tesis/Disertasi :

Mochamad Apri., *Model Biaya Total Jaringan Pipa Transmisi Gas dan Optimasinya*, Departemen Matematika ITB Bandung, Tugas Akhir, 2002.

Informasi dari Internet :

Mallat, Stephane, 1999, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Second Edition, Academic Press 24-28 Oval Road, London NW1 7DX UK, <http://www.hbuk.co.uk/ap/>

- n. Lampiran meliputi Gambar dan Tabel beserta keterangannya (jika diperlukan).

CATATAN (NOTE)

- Naskah harus dikirimkan ke redaksi selambat-lambatnya 2 (dua) bulan sebelum bulan penerbitan jurnal (Maret dan Desember).
- Naskah akan dinilai oleh tim penilai yang relevan sebelum diterbitkan dan tim redaksi berhak merubah struktur naskah tanpa merubah isi naskah.
- Naskah dapat diterima atau ditolak. Naskah ditolak, jika tidak memenuhi kriteria penulisan, pelanggaran hak cipta, kualitas rendah, dan tidak menanggapi korespondensi redaksi. Pengumuman naskah ditolak atau diterima paling lambat 1 (satu) bulan setelah naskah terkirim.
- Penulis atau penulis pertama yang akan mendapat 1 (satu) eksemplar jurnal yang sudah diterbitkan.

Barekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan



© Jurusan Matematika FMIPA Unpatti 2011