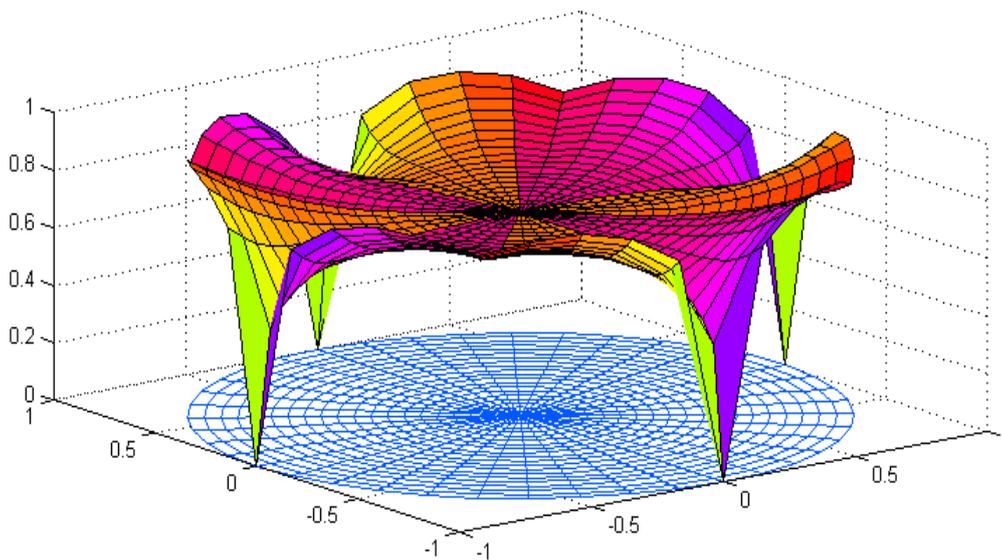


Barekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan

ISSN 1978-7227





jurnal ilmu matematika dan terapan

ISSN 1978-7227

Volume 6 Nomor 1 | Maret 2012

PENANGGUNG JAWAB

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA - Universitas Pattimura

KETUA DEWAN REDAKSI

H. J. Wattimanela, S.Si, M.Si

PENYUNTING AHLI

Prof. Drs. Subanar, Ph.D (UGM Yogyakarta)
Prof. Dr. Edi Baskoro (ITB Bandung)
Dr. Siswadi (IPB Bogor)
Dr. Basuki Widodo, M.Sc (ITS Surabaya)
Prof. Dr. Thomas Pentury, M.Si (Unpatti Ambon)
Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Unpatti Ambon)

PENYUNTING PELAKSANA

M. W. Talakua, S.Pd, M.Si
F. Y. Rumlawang, S.Si, M.Si
L. J. Sinay, S.Si, M.Sc
G. Haumahu, S.Si, M.Stat

SEKRETARIAT

Y. A. Lesnussa, S.Si, M.Si

PENERBIT (PUBLISHER)

Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Pattimura Ambon

ALAMAT EDITOR (EDITORIAL ADDRESS)

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pattimura
Alamat:
Kampus FMIPA UNPATTI
Jl. Ir. M. Putuhena, Poka 97233
Ambon - Maluku



PENELITIAN

- | | | |
|--|--|--------------|
| <p>APLIKASI DISTRIBUSI DERET PANGKAT PADA BEBERAPA JENIS DISTRIBUSI KHUSUS
 <i>Power Series Distribution Applications in Several Types of Special Distributions</i></p> | <p>Mozart Winston Talakua</p> | <p>1–8</p> |
| <p>DISTRIBUSI ANUITAS HIDUP KONTINU
 <i>Distribution of Continuous Life Annuities</i></p> | <p>Thomas Pentury</p> | <p>9–12</p> |
| <p>BEBERAPA TEOREMA KEKONVERGENAN PADA INTEGRAL RIEMANN</p> | <p>Venn Yan Ishak Ilwaru
 H. J. Wattimanela
 M. W. Talakua</p> | <p>13–18</p> |
| <p>ALJABAR-C^* DAN SIFATNYA
 <i>The Properties of C^*-algebras</i></p> | <p>Harmanus Batkunde
 Elvinus Richard
 Persulesy</p> | <p>19–22</p> |
| <p>APLIKASI PETRI NET PADA SISTEM PEMBAYARAN TAGIHAN LISTRIK PT. PLN (Persero) RAYON AMBON TIMUR
 <i>The Application of Petri Net in Electricity Bill Payment System of PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur</i></p> | <p>Freya N. Wattimena
 Thomas Pentury
 Yopi A. Lesnussa</p> | <p>23–30</p> |
| <p>ANALISIS REGRESI KOMPONEN UTAMA UNTUK MENGATASI MASALAH MULTIKOLINERITAS DALAM ANALISIS REGRESI LINIER BERGANDA
 (Studi Kasus: Curah Hujan di Kota Ambon Tahun 2010)
 <i>The Regretion Principal Component Analysis To Overcoming The problem Of Multicolinearity at Doubled Linear Rregretion Analysis (Case Study: Rainfall in Ambon on 2010)</i></p> | <p>G. L. Marcus
 H. J. Wattimanela
 Y. A. Lesnussa</p> | <p>31–40</p> |
| <p>OPTIMASI PLAZA TOL DENGAN MENGGUNAKAN MIXED INTEGER NON-LINEAR PROGRAMMING</p> | <p>Berny P. Tomasouw
 Francis Y. Rumlawang</p> | <p>41–45</p> |
| <p>ANALISIS WARNA CAHAYA LAMPU TERHADAP HASIL TANGKAPAN IKAN</p> | <p>Grace Loupatty</p> | <p>47–49</p> |



merupakan Jurnal Ilmu Matematika dan Terapannya sebagai suatu wahana informasi ilmiah yang menyajikan artikel (naskah) hasil penelitian meliputi bidang-bidang sebagai berikut: matematika analisis, aljabar, matematika terapan, statistika, pendidikan matematika dan ilmu komputer. Jurnal ini diterbitkan dua kali dalam setahun yaitu pada bulan Maret dan bulan Desember. Artikel atau naskah-naskah di dalam jurnal ini merupakan hasil-hasil penelitian pribadi ataupun kelompok yang belum pernah diterbitkan di jurnal-jurnal atau majalah ilmiah lainnya.

Diterbitkan oleh:

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pattimura
Ambon
2012
Copyright © Jurusan Matematika FMIPA Unpatti 2012

APLIKASI DISTRIBUSI DERET PANGKAT PADA BEBERAPA JENIS DISTRIBUSI KHUSUS
Power Series Distribution Applications in Several Types of Special Distributions

MOZART WINSTON TALAKUA
Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
e-mail: ocat_08@yahoo.com

ABSTRACT

This research about the definition and theorem of power series distribution according to its analytical characteristics. Then it discusses about the application to another distribution, and discusses about the relation between it, but it especially discusses about the application of power series distribution on some other special distribution, such as the negative logarithm distribution, the divided logarithm distribution, and inverse sinus distribution.

Keywords: *Distribution, power series, negative logarithm, divided logarithm, inverse sinus*

PENDAHULUAN

Peluang (*probabilitas*) berawal dari sebuah perjudian yang dilakukan oleh matematikawan dan fisikawan Italy, yaitu Girolamo Cardan (1501 – 1576) yang ditulis dalam bukunya yang berjudul *Liber de Ludo Aleae* (Book On Games Of Changes) pada tahun 1565 yang banyak membahas tentang masalah perjudian. Peluang kemudian dibahas oleh para ahli hingga sekarang.

Distribusi normal adalah karya dari Abraham de Moivre yang diperkenalkan pertama kali pada tahun 1737, kemudian ditulis ulang pada tahun 1738 dengan judul *The Doctrine Of Chances* yang membahas tentang pendekatan distribusi binomial untuk n yang besar, kemudian dilanjutkan oleh Laplace dalam bukunya yang berjudul *Analytical Theory Of Probability* pada tahun 1812, yang sekarang dikenal dengan *Teorema De Moivre-Laplace*. Distribusi kemudian dibahas hingga sekarang, yang dijelaskan oleh Peneliti dalam mengidentifikasi karakteristik parameter untuk model distribusi deret pangkat.

Dalam penelitian ini akan dikaji tentang momen, fungsi pembangkit momen, aplikasi pada beberapa distribusi khusus seperti distribusi deret negatif logaritma, distribusi deret log pembagian, distribusi deret invers sinus (Arcsinus) dari distribusi deret pangkat, serta sifat-sifat analitik meliputi Ekepektasi dan variansi.

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam ilmu statistika matematika, teori peluang (*probability theory*) merupakan dasar dan pengantar untuk penyusunan statistika lebih jauh, dimana dipakai pada penentuan selang untuk distribusi peluang yang terbagi atas distribusi peluang diskrit dan distribusi peluang kontinu (Bain, 1991).

Sebelum membahas lebih jauh tentang fungsi peluang deret pangkat, maka terlebih dahulu diperkenalkan apa yang dinamakan fungsi peluang itu sendiri. Misalkan Ω suatu himpunan (disebut ruang sampel), dan titik $\omega \in \Omega$ disebut kejadian dasar (unsur). Kemudian misalkan $P(A)$ adalah fungsi peluang untuk setiap kejadian $A \subseteq \Omega$ yang berkaitan dengannya suatu bilangan $P(A)$ sedemikian sehingga $P(A) \geq 0$ dan $P(\Omega) = 1$ (Kreyszig, 1993).

Model fungsi peluang lain yang perlu diperkenalkan dan dipelajari dalam statistika adalah deret pangkat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = a_0 X^0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + \dots$$

yang hanya ditemukan pada analisis metode dan bagian penentuan fungsi peluang deret pangkat (Dudewicz, 1995).

1. Deret Pangkat.

Definisi 1

Diketahui z_1, z_2, \dots, z_m barisan bilangan riil, didefinisikan barisan jumlah parsial yaitu:

$$S_1 = z_1$$

$$S_2 = z_1 + z_2$$

⋮

$$S_m = z_1 + z_2 + \dots + z_m$$

Jumlah parsial deret ini boleh tak hingga atau biasa disebut deret dan ditulis :

$$\sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + \dots$$

dalam hal ini z_m disebut suku dari deret tersebut.

Definisi 2

Deret pangkat dari $(z - z_0)$ berhubungan dengan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots,$$

$|z - z_0| < R$, dengan z adalah peubah dan a_0, a_1, a_2, \dots adalah konstanta yang di namakan koefisien dari deret tersebut, z_0 adalah konstanta pusat deret. Jika $z_0 = 0$,

maka didapat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$

2. Penurunan Deret Pangkat

Pada deret pangkat diperbolehkan menurunkan suku demi suku deret tersebut, sebagaimana Definisi 2. Penurunan ini dinamakan turunan pertama dari deret pangkat pada Definisi 2 yaitu ;

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots, \quad |z| < R$$

Teorema 1

Suatu deret pangkat dengan jari-jari kekonvergenan R yang tidak nol menggunakan suatu fungsi didalam daerah interior universal kekonvergenannya. Turunan fungsi ini diperoleh dengan mendiferensialkan deret asalnya suku demi suku. Semua deret yang diperoleh dengan cara ini menggunakan jari-jari kekonvergenan yang sama dengan deret asalnya.

$$\frac{d\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(a_n z^n)}{dz}, \quad |z| < R$$

Bukti

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)}{dz} &= \frac{d(a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \dots)}{dz} \\ &= \frac{d}{dz}(a_0 z^0) + \frac{d}{dz}(a_1 z^1) + \frac{d}{dz}(a_2 z^2) + \dots \end{aligned}$$

$$\frac{d\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz}(a_n z^n) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz}(a_n z^n) &= \frac{d}{dz}(a_0 z^0) + \frac{d}{dz}(a_1 z^1) + \frac{d}{dz}(a_2 z^2) + \dots \\ &= \frac{d}{dz}(a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \dots) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz}(a_n z^n) = \frac{d\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)}{dz} \quad (2)$$

dari (1) dan (2) maka terbukti bahwa

$$\frac{d\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(a_n z^n)}{dz} \quad \blacksquare$$

3. Fungsi Distribusi

Definisi 3

Jika himpunan semua kemungkinan nilai peubah acak x adalah himpunan hingga x_1, x_2, \dots, x_n atau tak hingga x_1, x_2, \dots maka x , disebut peubah acak deret, fungsi $f(x) = P(X = x)$, $x = x_1, x_2, x_3, \dots$ yang dianggap peluang untuk setiap himpunan nilai X , yang akan disebut fungsi distribusi peluang.

4. Fungsi Pembangkit Momen

Definisi 4

Jika X peubah acak diskrit maka momen ke- t

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} P(X)$$

disebut fungsi pembangkit momen dari X , jika nilai harapannya ada untuk semua nilai t pada interval $-h < t < h$ dan $h > 0$.

Teorema 3

Jika fungsi pembangkit momen $M_x(t)$ dari peubah acak X ada untuk $|t| < h$ dan $h > 0$, maka $E(X^k)$ ada dan

$$E(X^k) = \left. \frac{dM_x^k(t)}{dt^k} \right|_{t=0}$$

Bukti

Karena $M_x(t)$ ada untuk $|t| < h$ maka dapat mengambil turunannya secara berurutan dengan menurunkannya di dalam tanda integral secara terurut, jadi ;

$$\begin{aligned} M_x^{(k)}(t) &= \frac{d^k}{dt^k} M_x(t) = E\left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} e^{tX}\right] \\ &= E[X^k e^{tX}] \end{aligned}$$

Jika dimasukan $t = 0$, diperoleh $M_x^{(k)}(0) = E(X^k) \quad \blacksquare$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Suatu deret pangkat sesuai Definisi 2 yang seluruhnya terhitung bisa berhingga atau tak berhingga sesuai Definisi 5 yaitu :

$$f(z) = \sum_x a_x z^x \tag{3}$$

dengan $f(z)$ hingga (positif) dan terdefinisi, dan selanjutnya berdasarkan Teorema 2 didapatkan suatu fungsi peluang diskrit $P(X)$ yaitu :

$$P(X=x) = \frac{a_x z^x}{f(z)}, a_x > 0, z > 0, x=0,1,2,\dots \tag{4}$$

dengan demikian $P(X)$ merupakan suatu fungsi peluang distribusi yaitu (Persamaan 4) yang dinamakan distribusi deret pangkat.

1. Hubungan Antara Momen

Hubungan antara momen dapat diperoleh dengan menggunakan :

Teorema 4

Jika M'_k momen ke- k dan M'_1 momen pertama maka momen ke- $(k+1)$ atau $M'_{k+1} = M'_1 M'_k + z \frac{dM'_k}{dz}$

Bukti

Perhatikan $M'_k = \frac{1}{f(z)} \sum_{x=1}^n x^k a_x z^x$,

selanjutnya didiferensialkan terhadap z

$$\frac{dM'_k}{dz} = \frac{1}{f(z)} \sum_{x=1}^n x^k a_x x z^{x-1} - \frac{f'(z)}{f^2(z)} \sum_{x=1}^n x^k a_x z^x$$

$$z \frac{dM'_k}{dz} = \frac{1}{f(z)} \sum_{x=1}^n x^k a_x x z^x - \frac{f'(z)}{f^2(z)} \sum_{x=1}^n x^k a_x z^{x+1}$$

$$= \frac{1}{f(z)} \sum_{x=1}^n x^{k+1} a_x z^x - \frac{f'(z)}{f^2(z)} \sum_{x=1}^n x^k a_x z^x z$$

$$= \frac{1}{f(z)} \sum_{x=1}^n x^{k+1} a_x z^x - \frac{f'(z)}{f^2(z)} \sum_{x=1}^n x^k a_x z^x z$$

$$= M'_{k+1} - \frac{f'(z)}{f(z)} M'_k z$$

$$M'_{k+1} = z \frac{f'(z)}{f(z)} M'_k + z \frac{dM'_k}{dz}$$

$$= E(X) M'_k + z \frac{dM'_k}{dz}$$

$$M'_{k+1} = M'_1 M'_k + z \frac{dM'_k}{dz} \quad \blacksquare$$

2. Momen Sentral

Momen sentral distribusi deret pangkat dapat diproses dengan berdasar pada Definisi 4, momen sentral

$$\text{ke-}k \text{ yaitu } M_k = \frac{1}{f(z)} \sum_x (x - M'_1)^k a_x z^x$$

dari persamaan di atas diperoleh momen-momen sebagai berikut :

$$M_0 = 1, \text{ sebab } \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x (x - M'_1)^0 z^x = 1 \tag{5}$$

$$M_1 = \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x (x - M'_1)^1 z^x$$

$$= \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x x z^x - \frac{1}{f(z)} M'_1 \sum_x a_x z^x$$

$$= M'_1 - \frac{1}{f(z)} M'_1 \sum_x a_x z^x$$

$$= \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x x z^x - \frac{1}{f(z)} M'_1 \sum_x a_x z^x$$

$$= M'_1 - \frac{1}{f(z)} M'_1 \sum_x a_x z^x$$

$$M_1 = M'_1 \left(1 - \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x z^x \right) = 0 \tag{6}$$

$$M_2 = \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x (x - M'_1)^2 z^x$$

$$= \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x (x^2 - 2xM'_1 + M_1'^2) z^x$$

$$= \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x x^2 z^x - \frac{2M'_1}{f(z)} \sum_x a_x x z^x + \frac{M_1'^2}{f(z)} \sum_x a_x z^x$$

$$= M_2' - 2M'_1 M_1' + M_1'^2$$

$M_2 = M_2' - M_1'^2$, jika disubstitusikan nilai dari M'_1 dan M_2' diperoleh

$$M_2 = \text{Var}(X)$$

$$= \frac{1}{f^2(z)} (z^2 f''(z) f(z) + z f'(z) f'(z) - z^2 f'^2(z)) \tag{7}$$

dengan cara yang sama diperoleh

$$M_3 = M_3' - 3M_2' M_1' + 2M_1'^3$$

$$M_3 = \frac{1}{f^3(z)} (f^2(z) [z^3 f'''(z) + 3z^3 f'(z) f''(z)$$

$$+ 2f'(z) z]) - \frac{1}{f^2(z)} (3z^2 f'^2(z) + 3z^3 f'(z) f''(z))$$

$$+ 2 \frac{z^3 f'^3(z)}{f^3(z)} \tag{8}$$

sehingga diperoleh

$$M_k = E(X - M'_1)^k = \sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{k}{s} M_1'^s M_{k-s}' \tag{9}$$

akibat dari momen sentral diatas didapatkan momen jika dicari momen sentralnya sebagai berikut :

$$M_2' = M_2 + M_1'^2$$

$$M_3' = M_3 + 3M_1' M_2 + M_1'^3$$

⋮

$$M_k' = E(X - M'_1 + M_1')^k = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} M_1'^s M_{k-s}'$$

3. Hubungan Antara Momen Sentral

Hubungan antara momen sentral diperoleh dengan menggunakan Teorema 5 di bawah ini.

Teorema 5

Jika M_k momen sentral ke- k dan M_{k-1} momen sentral ke- $(k-1)$, maka momen sentral ke- $(k-1)$ yaitu :

$$M_{k+1} = z \left(\frac{dM_k}{dz} + k \frac{dM_1}{dz} M_{k-1} \right), \text{ dengan } k \text{ positif}$$

Bukti

Dengan menggunakan nilai dari M_k (momen sentral ke-

$$k) \text{ yaitu : } M_k = \frac{1}{f(z)} \sum_x (x - M_1)' a_x z^x$$

selanjutnya didiferensialkan terhadap z maka didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{dM_k}{dz} &= \frac{1}{f(z)} \sum_x (x - M_1)' a_x x z^{x-1} - \frac{1}{f(z)} k \frac{dM_1}{dz} \\ &\quad \sum_x (x - M_1)'^{k-1} - \frac{f'(z)}{f^2(z)} \sum_x (x - M_1)' a_x z^x \\ \frac{z dM_k}{dz} &= \frac{1}{f(z)} \sum_x (x - M_1)' a_x x z^x \\ &\quad - z \frac{f'(z)}{f^2(z)} \sum_x (x - M_1)' a_x z^x \\ &\quad - \frac{1}{f(z)} z^k \frac{dM_1}{dz} \sum_x (x - M_1)'^{k-1} a_x z^x \\ &= \frac{1}{f(z)} \sum_x (x - M_1)' a_x z^x \left(x - z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{f(z)} z^k \frac{dM_1}{dz} \sum_x (x - M_1)'^{k-1} a_x z^x \\ &= \frac{1}{f(z)} \sum_x (x - M_1)' a_x z^x (x - M_1) \\ &\quad - z^k \frac{dM_1}{dz} \frac{1}{f(z)} \sum_x (x - M_1)'^{k-1} a_x z^x \\ &= \frac{1}{f(z)} \sum_x (x - M_1)' a_x z^x (x - M_1) \\ &\quad - z^k \frac{dM_1}{dz} \frac{1}{f(z)} M_{k-1} \\ &= \frac{1}{f(z)} \sum_x (x - M_1)'^{k+1} a_x z^x - z^k \frac{dM_1}{dz} \frac{1}{f(z)} M_{k-1} \\ &= M_{k+1} - z^k \frac{dM_1}{dz} \frac{1}{f(z)} M_{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= z^k \frac{dM_1}{dz} M_{k-1} + \frac{z dM_k}{dz} \\ M_{k+1} &= z \left(\frac{dM_k}{dz} + k \frac{dM_1}{dz} M_{k-1} \right) \blacksquare \end{aligned}$$

Akibat 1

Jika M_k momen sentral ke- k , M_2 momen sentral ke-2 dan M_{k-1} momen sentral ke- $(k-1)$ maka

$$M_{k+1} = z \frac{dM_k}{dz} + k M_2 M_{k-1}$$

Bukti

Dengan $k=1$ dari Teorema 3, diperoleh :

$$M_2 = z \left(\frac{dM_1}{dz} + \frac{dM_1}{dz} M_0 \right)$$

karena $M_1=0$ dan $M_0=1$ maka, diperoleh

$$M_2 = z \frac{dM_1}{dz}$$

dengan demikian persamaan pada Teorema 3 dapat ditulis seperti berikut

$$M_{k+1} = z \frac{dM_k}{dz} + k M_2 M_{k-1} \blacksquare$$

4. Momen Faktorial

Fungsi pembangkit momen faktorial $G_x(t)$, dari model distribusi deret pangkat diperoleh dengan menggunakan

$$G_x(t) = E(t^X) = \sum_x t^x P(X=x) \tag{10}$$

sehingga didapatkan,

$$\begin{aligned} G_x(t) &= \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x t^x z^x \\ &= \frac{1}{f(z)} (a_1 t z + a_2 (t z)^2 + a_3 (t z)^3 + \dots) \\ &= \frac{t}{f(z)} (a_1 z + a_2 t z^2 + a_3 t^2 z^3 + \dots) \\ &= \frac{t}{f(z)} \sum_x a_x t^{(x-1)} z^x = \frac{f(z t)}{f(z)} \end{aligned}$$

dengan menyamakan (10) dengan nilai $E(X^1), \dots, E(X^k)$ kemudian didiferensialkan terhadap t didapatkan

$$\begin{aligned} G_x'(t) \Big|_{t=1} &= E(X^{[1]}) = M^{[1]} = \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x x z^x = \frac{z f'(z)}{f(z)} \\ G_x''(t) \Big|_{t=1} &= E(X^{[2]}) = M^{[2]} = \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x x(x-1) z^x \\ &= \frac{z^2 f''(z)}{f(z)} \\ &\dots \end{aligned}$$

maka momen faktorial ke- k adalah

$$\begin{aligned} G_x^k(t) \Big|_{t=1} &= E(X^{[k]}) \\ &= M^{[k]} = \frac{1}{f(z)} \sum_x a_x x(x-1) \dots (x-(k+1)) z^x \\ &= \frac{z^k f^k(z)}{f(z)} \tag{11} \end{aligned}$$

5. Hubungan Antara Momen Faktorial

Hubungan antara momen faktorial dari distribusi deret pangkat diperoleh dengan menggunakan Teorema 3 dibawah ini.

Teorema 5

Jika $M^{[k]}$ momen faktorial ke- k dan M_1' momen pertama, maka momen faktorial ke- $(k+1)$ yaitu :

$$M^{[k+1]} = \frac{z dM^{[k+1]}}{dz} + M^{[k]} M_1' - kM^{[k]},$$

dengan k bilangan bulat positif.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa Teorema 5 benar.

$$E(X^{(k)}) = M^{[k]} = \frac{1}{f(z)} \sum_{x=1}^{\infty} x^{[k]} a_x z^x$$

selanjutnya didiferensialkan terhadap z , maka didapat :

$$\frac{dM^{[k]}}{dz} = \frac{1}{f(z)} \sum_x x^{[k]} a_x z^{(x-1)} - \frac{f'(z)}{f^2(z)} \sum_x x^{[k]} a_x z^x$$

$$= \frac{1}{z f(z)} \sum_x x^{[k+1]} a_x z^x - k \frac{1}{z f(z)} \sum_x x^{[k]} a_x z^x$$

$$- \frac{f'(z)}{f^2(z)} \sum_x x^{[k]} a_x z^x$$

$$= \frac{1}{z} M^{[k+1]} + k \frac{1}{z} M^{[k]} - \frac{f'(z)}{f(z)} M^{[k]}$$

$$= \frac{1}{z} M^{[k+1]} + M^{[k]} \left(\frac{k}{z} - \frac{f'(z)}{f(z)} \right)$$

$$\frac{1}{z} M^{[k+1]} = \frac{dM^{[k]}}{dz} - M^{[k]} \left(\frac{k}{z} - \frac{f'(z)}{f(z)} \right)$$

$$= z \frac{dM^{[k]}}{dz} - M^{[k]} (k - M_1')$$

$$= z \frac{dM^{[k]}}{dz} - M^{[k]} k + M^{[k]} M_1'$$

$$M^{[k+1]} = z \frac{dM^{[k]}}{dz} - M^{[k]} \left(k - \frac{z f'(z)}{f(z)} \right)$$

$$= z \frac{dM^{[k]}}{dz} - M^{[k]} (k - M_1')$$

$$= z \frac{dM^{[k]}}{dz} - M^{[k]} k + M^{[k]} M_1' \quad \blacksquare$$

6. Aplikasi Deret Pangkat Pada Beberapa Jenis Distribusi Khusus

6.1 Distribusi Deret Negatif Logaritma

Jika diketahui deret sebagai berikut

$$z + \frac{z^2}{z} + \frac{z^3}{z} + \dots = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{t^x}{x} = -\log(1-z) \quad |z| < 1 \quad (12)$$

Didapat distribusi

$$P(X=x) = -\frac{z^x}{x \log(1-z)}, \quad 0 < t < 1, \quad x = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Maka diperoleh

$$a_x = \frac{1}{x}, \quad f(z) = -\log(1-z) = \log(1-z)^{-1} \quad (14)$$

Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen didapatkan

$$M_x(t) = \frac{e^t}{-\log(1-z)} \sum_x \frac{1}{x} e^{t(x-1)} z^x$$

$$= -\frac{e^t}{\log(1-z)} \sum_x \frac{1}{x} e^{t(x-1)} z^x \quad (15)$$

$$= \frac{\log(1-z e^t)}{\log(1-z)} \quad t < -\log(z) \quad (16)$$

Selanjutnya diturunkan terhadap t maka berdasarkan (11) didapat

$$\left. \frac{M_x'(t)}{dt} \right|_{t=0} = E(X) = \frac{z f'(z)}{f(z)}$$

Karena $f(z) = -\log(1-z)$ maka

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)} \quad (17)$$

Jadi

$$\left. \frac{M_x'(t)}{dt} \right|_{t=0} = E(X) = \frac{z \frac{1}{(1-z)}}{-\log(1-z)}$$

$$E(X) = -\frac{z}{(1-z) \log(1-z)} \quad (18)$$

$$\left. \frac{M_x''(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = E(X^2) = \frac{z f'(z) + z^2 f''(z)}{f(z)}$$

Karena $f'(z) = \frac{1}{1-z}$ maka

$$f''(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \quad (19)$$

Maka

$$\left. \frac{M_x''(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = E(X^2) = \frac{z \left(\frac{1}{(1-z)} \right) + z^2 \left(\frac{1}{(1-z)^2} \right)}{-\log(1-z)}$$

$$= \frac{1}{(1-z)^2} \left((z(1-z)) + z^2 \right) = \frac{1}{-\log(1-z)}$$

$$E(X^2) = -\frac{z}{(1-z)^2 \log((1-z))} \quad (20)$$

Jadi

$$Var(X) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$= -\frac{z}{(1-z)^2 \log(1-z)} - \left(-\frac{z}{(1-z) \log(1-z)} \right)^2$$

$$= -\frac{z^2 + z \log(1-z)}{(1-z)^2 \log^2(1-z)} \quad (21)$$

Selanjutnya dari persamaan (10) diperoleh

$$G_x(t) = \frac{t}{-\log(1-z)} \sum_x \frac{1}{x} t^{(x-1)} z^x \tag{22}$$

$$= \frac{\log(1-zt)}{\log(1-z)} \Big|_{t < \frac{1}{z}} \tag{23}$$

Kemudian dari menyamakan persamaan (10) didapat

$$\left. \frac{G'_x(t)}{dt} \right|_{t=1} = E(X) = \mu_1 = \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{z(1-z)^{-1}}{-\log(1-z)}$$

$$E(X) = -\frac{z}{(1-z)\log(1-z)} \tag{24}$$

$$\left. \frac{G''_x(t)}{dt^2} \right|_{t=1} = E(X^2) = \mu_2 = \frac{z^2 f''(z)}{f(z)} = \frac{z^2(1-z)^2}{-\log(1-z)}$$

$$E(X^2) = -\frac{z^2}{(1-z)^2 \log(1-z)} \tag{25}$$

Selanjutnya moment faktorial ke-k

$$\left. \frac{G_x^k(t)}{dt^k} \right|_{t=1} = E(X^{(k)}) = -\frac{(k-1)! z^k}{(1-z)^k \log(1-z)} \tag{26}$$

6.2 Distribusi Deret Log Pembagian

Diketahui deret

$$2 \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \dots \right) = 2 \sum_x \left(\frac{z^{2x+1}}{2x+1} \right)$$

$$= \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right), \quad |z| < 1 \tag{27}$$

Didapatkan distribusi

$$P(X=2x+1) = \frac{2z^{2x+1}}{(2x+1)\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \tag{28}$$

Untuk $0 < z < 1, x = 0, 1, 2, \dots$

Didapat

$$a_x = \frac{2}{2x+1}, \quad f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \tag{29}$$

Dari definisi fungsi pembangkit momen didapat

$$M_x(t) = \frac{e^t}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \sum_x \frac{2}{2x+1} e^{t(x-1)} z^{2x+1}$$

$$= \frac{2e^t}{\log(1+z)} \sum_x \frac{e^{t(x-1)} z^{2x+1}}{2x+1}$$

$$= \frac{\log\left(\frac{1+ze^t}{1-ze^t}\right)}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}, \quad t < -\log z \tag{30}$$

Kemudian diturunkan terhadap t diperoleh

$$\left. \frac{M'_x(t)}{dt} \right|_{t=0} = E(X) = \frac{z \frac{2}{(1-z^2)}}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

Sebab

$$f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$f'(z) = \frac{1}{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \frac{2}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^2} \tag{31}$$

$$= \frac{2t}{(1-z^2)\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \tag{32}$$

$$\left. \frac{M''_x(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = E(X^2) = \frac{2f'(z) + z^2 f''(z)}{f(z)}$$

Diketahui

$$f'(z) = 2(1-z^2)^{-1}$$

$$f''(z) = 2(-1)(1-z^2)^{-2}(-2z) = \frac{4z}{(1-z^2)^2} \tag{33}$$

Maka

$$E(X^2) = \frac{z \frac{2}{(1-z^2)} + z^2 \frac{4z}{(1-z^2)^2}}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{(1-z^2)^2} (2z(1-z^2) + 4z^3)}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

$$= \frac{(2z - 2z^3 + 4z^3)}{(1-z^2)^2 \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

$$E(X^2) = \frac{2(z^3 + z)}{(1-z^2)^2 \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \tag{34}$$

Jadi

$$Var(X) = E(X) - (E(X))^2$$

$$= \frac{2(z^3 + z)}{(1-z^2)^2 \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} - \left(\frac{2z}{(1-z)\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \right)^2$$

$$Var(X) = 2z \frac{(1+z^2) \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}{(1+z^2)^2 \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \quad (35)$$

Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen faktorial didapat

$$G_x(t) = \frac{t}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \sum_x \frac{2}{(2x+1)} t^{(x-1)} z^{(2x+1)} \quad (36)$$

$$= \frac{\log\left(\frac{1+zt}{1-zt}\right)}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \quad |t| < \frac{1}{2} \quad (37)$$

Berdasarkan dengan menyamakan persamaan (10) didapat

$$\left. \frac{G'_x(t)}{dt} \right|_{t=1} = E(X^{(1)}) = \mu_1 = \frac{z2(1-z^2)^{-1}}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \quad (38)$$

$$E(X^{(1)}) = \frac{2z}{(1-z^2) \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

$$\left. \frac{G''_x(t)}{dt^2} \right|_{t=1} = E(X^2) = \mu_2 = \frac{z^2 \left(\frac{4z}{(1-z^2)^2} \right)}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

$$E(X^2) = \frac{4z^3}{(1-z^2)^2 \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \quad (39)$$

$$\left. \frac{G'''_x(t)}{dt^3} \right|_{t=1} = E(X^3) = \mu_3 = \frac{z^3 f'''(z)}{f(z)}$$

$$= \frac{z^3 \frac{4}{(1-z^2)^3} (1+3z^2)}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

$$= \frac{4z^3 (1+3z^2)}{(1-z^2)^3 \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

$$E(X^3) = \frac{2z^2 (2z+6z^3)}{(1-z^2)^3 \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \quad (40)$$

6.3 Distribusi Deret Invers Sinus (Arcsinus)

Diketahui deret invers sinus

$$z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{z^5}{5} + \dots = z + \sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2x-1)}{2 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2x)} z^{2x+1}$$

$$z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{z^5}{5} + \dots = \sin^{-1} z, \quad |z| < 1 \quad (41)$$

Dapat ditulis

$$P(X = 2x+1) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2x-1)}{2 \cdot 4 \dots (2x)} \cdot \frac{z^{2x+1}}{2x+1} (\sin^{-1} z)^{-1} \quad (42)$$

untuk $0 < z < 1, \quad x = 1, 2, \dots$

Didapat

$$a_x = \frac{1 \cdot 3 \dots (2x-1)}{2 \cdot 4 \dots (2x)} \cdot \frac{1}{2x+1}$$

$$f(z) = \sin^{-1} z$$

Dari definisi fungsi pembangkit momen didapat

$$M_x(t) = \frac{e^t}{\sin^{-1} z} \cdot \sum_x \frac{1 \cdot 3 \dots (2x-1)}{2 \cdot 4 \dots (2x)} \cdot \frac{1}{2x+1} \cdot e^{t(x-1)} z^{2x+1}$$

$$= e^t (\sin^{-1})^{-1} \sum_x \frac{1 \cdot 3 \dots (2x-1)}{2 \cdot 4 \dots (2x)} \cdot \frac{1}{(2x+1)} \cdot e^{t(x-1)} z^{2x+1}$$

$$M_x(t) = \frac{\sin^{-1}(ze^t)}{\sin^{-1} z}, \quad t < -\log z \quad (43)$$

Selanjutnya ditunjukkan terhadap t . Maka berdasarkan hasil dari (43) didapatkan

$$\left. \frac{M'_x(t)}{dt} \right|_{t=0} = E(X) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

karena

$$f(z) = \sin^{-1} z$$

$$f'(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \quad (44)$$

Maka

$$E(X) = \frac{z \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}}{\sin^{-1} z} = \frac{z}{\sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z} \quad (45)$$

$$\left. \frac{M''_x(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = E(X^2) = \frac{z \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + z^2 \cdot \frac{z}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2}}}{\sin^{-1} z}$$

$$= \frac{\frac{z}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2}} \cdot ((1-z^2) + z^2)}{\sin^{-1} z}$$

$$E(X^2) = \frac{z}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z} \quad (46)$$

Kemudian

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{z}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z} - \left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z} \right)^2$$

$$= \frac{z}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z} - \frac{z^2}{(1-z^2)(\sin^{-1} z)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{z \sin^{-1} z - z^2 \sqrt{1-z^2}}{(1-z^2) \sqrt{1-z^2} (\sin^{-1} z)^2} \\
 \text{Var}(X) &= z \frac{\sin^{-1} z - z \sqrt{1-z^2}}{(1-z^2) \sqrt{1-z^2} (\sin^{-1} z)^2} \quad (47)
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan definisi fungsi pembangkit momen faktorial didapat

$$\begin{aligned}
 G_x(t) &= \frac{t}{\sin^{-1} z} \sum_x \frac{1 \cdot 3 \dots (2x-1)}{2 \cdot 4 \dots (2x)} \left(\frac{1}{(2x+1)} \right) t^{(x-1)} z^{(2x+1)} \\
 &= \frac{\sin^{-1}(zt)}{\sin^{-1} z}, |t| < \frac{1}{z} \quad (48)
 \end{aligned}$$

Sehingga didapat

$$\begin{aligned}
 G'_x(t) \Big|_{t=1} &= E(X^{[1]}) = \mu_1 = \frac{z f'(z)}{f(z)} \\
 &= \frac{z(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sin^{-1} z} \\
 &= \frac{z}{\sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z} \quad (49)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G''_x(t) \Big|_{t=1} &= E(X^{[2]}) = \mu_2 = \frac{z^2 f''(z)}{f(z)} \\
 &= \frac{z^2 \frac{z}{(1-z^2) \sqrt{1-z^2}}}{\sin^{-1} z} \\
 &= \frac{z^3}{(1-z^2) \sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z} \quad (50)
 \end{aligned}$$

$$G'''_x(t) \Big|_{t=1} = E(X^{[3]}) = \frac{z^3 + 2z^5}{(1-z^2)^2 \sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z} \quad (51)$$

KESIMPULAN

Karakteristik parameter untuk model distribusi deret pangkat yang telah dibahas pada bab sebelumnya, ditarik kesimpulan tentang sifat-sifat analitik beberapa distribusi khusus sebagai berikut:

1. Distribusi deret negatif pembagian:

$$E(X) = -\frac{z}{(1-z) \log(1-z)}$$

$$\text{Var}(X) = -\frac{z^2 + z \log(1-z)}{(1-z)^2 \log^2(1-z)}$$

2. Distribusi deret log pembagian:

$$E(X) = \frac{z \frac{2}{(1-z^2)}}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

$$\text{Var}(X) = 2z \frac{(1+z^2) \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}{(1-z^2)^2 \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

3. Distribusi invers sinus (Arcsinus)

$$E(X) = \frac{z}{\sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z}$$

$$\text{Var}(X) = z \frac{\sin^{-1} z - z \sqrt{1-z^2}}{(1-z^2) \sqrt{1-z^2} (\sin^{-1} z)^2}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Bain, L. J; Engelhardt, M., (1991), "Introduction to Probability and Mathematical Statistics" The Duxbury Advanced Series In Statistics And Decision Sciences.
- Dudewicz, E. J; Misra, S. N., (1995), "Statistika Matematika Modern", Penerbit ITB Bandung.
- Kreyszig, E., (1993), *Matematika Telaah Lanjutan* (Statistik lanjutan) edisi ke-6. Penerbit PT Gramedia pustaka, Jakarta
- Purcell, E. J; Varberg, D., (1992), "Kalkulus dan Geometri Analisis". Edisi Kelima, Penerbit Erlangga.

DISTRIBUSI ANUITAS HIDUP KONTINU
Distribution of Continuous Life Annuities

THOMAS PENTURY
Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
e-mail: tpentury@gmail.com

ABSTRAK

Anuitas adalah suatu pembayaran dalam jumlah tertentu yang dilakukan dalam periode waktu tertentu secara berkelanjutan. Anuitas terdiri atas anuitas pasti dan anuitas hidup. Pada prinsipnya kedua anuitas tersebut sama yaitu menggunakan tingkat bunga (*interest rate*) untuk melakukan pembayaran. Anuitas hidup menggunakan faktor kelangsungan hidup seseorang (*survival*). Faktor kelangsungan hidup yang dimaksud merupakan peluang hidup seseorang dimulai dari kelahiran sampai kematian. Oleh karena itu, faktor kelangsungan hidup merupakan sebuah distribusi peluang yang dikenal sebagai distribusi waktu hidup yang akan datang (*future lifetime distribution*). Dengan demikian, anuitas hidup membentuk sebuah distribusi peluang yang disebut sebagai distribusi anuitas hidup kontinu.

Kata kunci: Anuitas, anuitas hidup, anuitas pasti, tingkat bunga, kelangsungan hidup, distribusi waktu hidup yang akan datang, distribusi anuitas hidup kontinu

PENDAHULUAN

Aktuaria merupakan bagian dari ilmu matematika tentang asuransi. Aktuaria berkembang pada akhir abad ke-17 di dataran Eropa. Perkembangan aktuaria seiring dengan meningkatnya permintaan untuk jangka panjang jaminan asuransi seperti asuransi jiwa dan tunjangan hari tua (dana pensiun). Perkembangan ini tidak lepas dari pendefinisian premi yang dibayar dan pendefinisian manfaat yang akan diperoleh di waktu yang akan datang (masa depan). Untuk pendefinisian premi ada unsur yang paling penting dalam membentuk premi yaitu anuitas hidup.

Pada umumnya anuitas adalah suatu pembayaran dalam jumlah tertentu yang dilakukan setiap selang waktu dan jangka waktu tertentu secara berkelanjutan. Anuitas ini sering disebut dengan anuitas pasti karena tidak bergantung oleh faktor-faktor yang lain, selain tingkat suku bunga dan jangka waktu pembayaran. Anuitas ini sering ditemui dalam sistem pembayaran di perbankan dan lembaga keuangan lainnya, seperti pengembalian

kredit oleh pengambil kredit kepada bank atau institusi lainnya, pembayaran bunga bulanan oleh bank, dan pembayaran-pembayaran lainnya.

Berbeda dengan anuitas pasti, pembayaran anuitas dalam aktuaria sering disebut sebagai anuitas hidup. Anuitas hidup merupakan suatu pembayaran jumlah tertentu yang dilakukan dalam selang waktu dan jangka waktu tertentu yang disertai dengan faktor kelangsungan hidup (*survival*). Dengan kata lain, anuitas hidup merupakan anuitas pasti yang disertai dengan faktor usia hidup. Faktor kelangsungan hidup sangat diperhatikan dalam aktuaria, karena pembayaran dan manfaat yang diberikan dalam asuransi jiwa atau dana pensiun berkaitan dengan usia hidup seseorang (bergantung pada hidup atau meninggalnya seseorang).

Anuitas hidup dapat digambarkan sebagai pembayaran yang dilakukan oleh seseorang dengan usia hidup x , dinotasikan dengan (x) akan hidup sampai t tahun. Untuk (x) dapat hidup sampai t tahun merupakan sesuatu yang belum pasti, karena (x) kemungkinan dapat

meninggal dalam jangka waktu t tahun. Untuk itu, faktor kelangsungan hidup yang dimaksud merupakan suatu kemungkinan hidup (peluang hidup). Secara matematis, faktor kelangsungan hidup tersebut dapat diberikan dalam sebuah fungsi peluang yang sering disebut sebagai fungsi *survival*.

TINJAUAN PUSTAKA

Terdapat dua jenis anuitas yaitu anuitas pasti dan anuitas hidup. Anuitas hidup analog dengan anuitas pasti hanya saja dalam anuitas hidup terdapat faktor *survival* dan berhubungan dengan endowmen murni.

Anuitas hidup merupakan rangkaian pembayaran yang terbentuk selama hidup dari seseorang yang berusia x tahun (Takashi Futami, 1993). Sehingga anuitas hidup dapat disajikan sebagai anuitas tertentu dengan term yang bergantung pada sisa hidup nasabah. Karena merupakan rangkaian pembayaran maka di dalamnya terdapat premi yang harus dibayarkan. Premi berkaitan erat dengan suku bunga.

Tingkat suku bunga merupakan kompensasi yang harus dibayarkan oleh pihak peminjam kepada pihak yang meminjamkan dana atau dalam hal asuransi tingkat suku bunga dibayarkan oleh pihak tertanggung kepada pihak penanggung.

Misalkan seseorang berusia x tahun dinotasikan dengan (x) sedangkan waktu hidup yang akan datang dari orang tersebut dinotasikan dengan $T(x)$ adalah dua faktor penting dalam anuitas hidup. Di dalamnya terdapat faktor *survival*.

Jika Y adalah anuitas hidup kontinu dimana $Y = \bar{a}_{T|}$ maka fungsi distribusi dari Y bergantung pada distribusi dari T (Bowers et al, 1997). Distribusi dari anuitas hidup kontinu dapat digambarkan oleh bentuk *cumulative distribution function (cdf)* dan *probability density function (pdf)* – nya. Juga terdapat keterkaitan antara distribusi usia hidup seseorang sekarang dan usia hidup yang akan datang.

Berikut ini akan diberikan beberapa teori-teori dasar yang mendukung pembahasan.

Waktu Hingga Kematian (*Future Life Time*)

Jika x adalah bilangan bulat, variabel random $S = S(x)$ maka waktu hingga kematian adalah

$$T = K + S$$

dimana

$K = \text{curtate} - \text{future} - \text{lifetime}$.

$S =$ variabel random yang menunjukkan bagian fraksional dari tahun hidup pada tahun kematian.

Misalkan seseorang berumur x memiliki waktu hidup $T(x)$, maka umur orang tersebut pada saat meninggal adalah $x + T(x)$. T merupakan variabel random, dengan fungsi distribusi G , dengan

$$G(t) = P(T \leq t), t \geq 0$$

Merupakan probabilitas seorang yang berumur x akan meninggal pada saat t tahun. Fungsi $G(t)$ umumnya dinotasikan dengan ${}_t q_x$ sehingga ${}_t q_x = G(t)$.

Fungsi bertahan hidup $s(t)$ didefinisikan

$$s(t) = 1 - G(t) = P(T > t), t \geq 0$$

adalah probabilitas seorang yang berumur x akan bertahan hidup pada saat t tahun. Fungsi $s(t)$ umumnya dinotasikan dengan ${}_t p_x$ sehingga ${}_t p_x = s(t)$

Anuitas Pasti dengan Pembayaran Kontinu

Suatu anuitas dengan pembayaran sebesar 1 yang dilakukan secara kontinu setiap tahun dengan jangka waktu pembayaran selama n tahun disebut sebagai anuitas kontinu.

Nilai sekarang (*present value*) dari anuitas ini dinotasikan dengan $\bar{a}_{n|}$ yang didefinisikan oleh formula seperti berikut ini.

$$\bar{a}_{n|} = \int_0^n e^{-\delta s} ds = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

DISTIBUSI DARI ANUITAS HIDUP KONTINU

Untuk anuitas seumur hidup (*whole life annuity*) yang disediakan sampai tertanggung meninggal, jika nilai sekarang (*present value*) dari pembayaran adalah $Y = \bar{a}_{T|}$ untuk semua $T \geq 0$ dimana T adalah waktu yang akan datang dari (x) . Fungsi distribusi dari Y dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) = \Pr(\bar{a}_{T|} \leq y) = \Pr(1 - v^T \leq \delta y) \\ &= \Pr(v^T \geq 1 - \delta y) = \Pr\left(T \leq \frac{-\log(1 - \delta y)}{\delta}\right) \\ &= F_T\left(\frac{-\log(1 - \delta y)}{\delta}\right); 0 < y < \frac{1}{\delta} \end{aligned}$$

Kemudian dapat diperoleh *pdf* dari Y yaitu

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_T\left(\frac{-\log(1 - \delta y)}{\delta}\right) \\ &= \frac{f_T\left(\frac{-\log(1 - \delta y)}{\delta}\right)}{1 - \delta y}; 0 < y < \frac{1}{\delta} \end{aligned}$$

Fungsi distribusi dari Y bergantung pada distribusi dari T .

Actuarial present value untuk anuitas seumur hidup kontinu dinotasikan oleh \bar{a}_x . Jika *pdf* mortalitas dari T adalah ${}_t p_x \mu(x+t)$ maka *actuarial present value* – nya adalah

$$\bar{a}_x = E[Y] = \int_0^\infty \bar{a}_{t|} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

Dengan mengintegrasikan

$$f(t) = \bar{a}_{\overline{t}|}, dg(t) = {}_t p_x \mu(x+t) dt, g(t) = -{}_t p_x,$$

dan

$$df(t) = v^t,$$

diperoleh

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t {}_t p_x dt = \int_0^\infty {}_t E_x dt$$

Persamaan tersebut dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \bar{a}_x &= \int_0^1 v^t {}_t p_x dt + \int_1^\infty v^t {}_t p_x dt \\ &= \bar{a}_{x:\overline{1}|} + v p_x \int_0^\infty v^s {}_s p_{x+1} ds \\ &= \bar{a}_{x:\overline{1}|} + v p_x \bar{a}_{x+1} \end{aligned}$$

dimana $\mu(x) = \bar{a}_x, c(x) = \bar{a}_{x:\overline{1}|}$, dan $d(x) = v p_x$. Nilai awal untuk anuitas seumur hidup adalah $\bar{a}_\omega = 0$.

ILUSTRASI NUMERIK

Pada bagian sebelumnya telah dibahas anuitas hidup secara teoritis. Bagian ini akan memberikan ilustrasi secara numerik dari perhitungan nilai anuitas pasti dan anuitas hidup kontinu menggunakan hukum Makeham. Ilustrasi numerik ini juga membandingkan antara nilai anuitas pasti dan anuitas hidup kontinu.

Anuitas Pasti

Nilai-nilai anuitas pasti yang diperoleh pada pagian ini merupakan penerapan langsung rumus anuitas pasti yang dibayarkan secara kontinu dengan cara mensubstitusi percepatan pembungaan sebagai berikut:

$$0,00; 0,01; 0,02; \dots; 0,15$$

maka diperoleh nilai anuitas pasti seperti yang diperlihatkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Nilai-nilai anuitas pasti

δ	$n = 5$	$n = 10$
0,00	5	10
0,01	4,8771	9,5163
0,02	4,7581	9,0635
0,03	4,6431	8,6394
0,04	4,5317	8,2420
0,05	4,4240	7,8694
0,06	4,3197	7,5198
0,07	4,2187	7,1916
0,08	4,1210	6,8834
0,09	4,0264	6,5937
0,10	3,9347	6,3212
0,11	3,8459	6,0648
0,12	3,7599	5,8234
0,13	3,6766	5,5959
0,14	3,5958	5,3815
0,15	3,5176	5,1791

Fungsi Survival Yang Didasarkan Atas Hukum Makeham

Nilai-nilai anuitas hidup yang diperoleh pada bagian ini menggunakan ${}_t p_x$ merupakan fungsi survival yang

telah dibahas pada bagian sebelumnya. Fungsi survival tersebut didasarkan atas hukum Makeham dengan asumsi sebagai berikut:

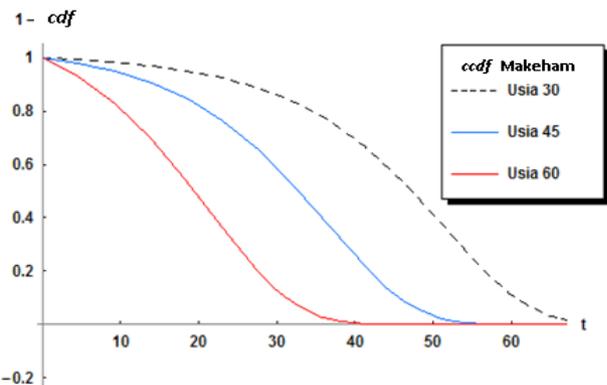
$$A = 0,0007, B = 5 \times 10^{-5}, \text{ dan } c = 10^{0,04}, m = \frac{b}{\log c}$$

(Actuarial Mathematics (Bowers et al., 1997)).

Berdasarkan asumsi Bowers untuk hukum Makeham maka diperoleh fungsi survival untuk usia 30 tahun, 45 tahun, dan 60 tahun sebagai berikut :

- Usia 30 tahun $1,00864e^{(-0,0086)1,09648^t - 0,0007t}$
- Usia 45 tahun $1,03485e^{(-0,0343)1,09648^t - 0,0007t}$
- Usia 60 tahun $1,1461e^{(-0,1364)1,09648^t - 0,0007t}$

Secara visual bentuk fungsi survival dari ketiga usia di atas dapat diperlihatkan seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Grafik cdf Makeham Usia 30, 45, 60 Tahun

Grafik yang diperlihatkan oleh Gambar 1 menunjukkan fungsi survival dari usia hidup 30 tahun, 45 tahun, dan 60 tahun. Pada Gambar tersebut terlihat jelas bahwa grafik usia hidup 30 tahun posisinya lebih ke kanan kemudian diikuti oleh usia 45 tahun dan 60 tahun. Hal ini menunjukkan bahwa peluang hidup dari seseorang yang berusia 30 tahun lebih besar dibandingkan usia hidup 45 tahun dan 60 tahun. Demikian juga untuk usia hidup 45 tahun peluang hidupnya lebih besar dari usia hidup 60 tahun.

Distribusi Anuitas Hidup

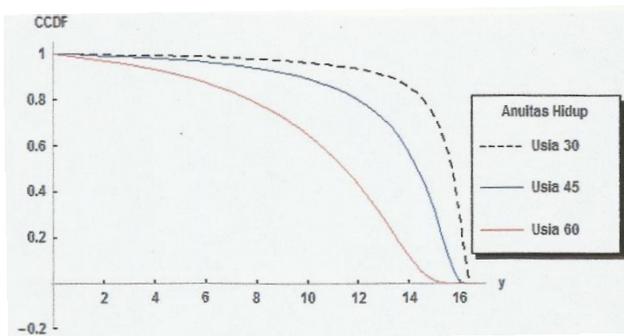
Distribusi dari anuitas hidup kontinu dapat diperoleh dari pdf cdf – nya. Selain distribusi anuitas hidup hal lain yang dapat ditentukan melalui software mathematica® versi 5.1 adalah nilai – nilai dalam Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Nilai Ekspektasi, Variansi, dan standar Deviasi

	Usia 30 Tahun	Usia 45 Tahun	Usia 60 Tahun
Ekspektasi	14,9999	13,3451	10,4854
Variansi	4,26312	8,03594	12,2489
Standar Deviasi	2,06473	2,83654	3,49985

Keterangan : $n = \infty, \delta = 0,06$

Bentuk grafik distribusi dari anuitas hidup kontinu untuk usia 30 tahun, 45 tahun, dan 60 tahun dapat digambarkan seperti Gambar 2.



Gambar 2. Distribusi Anuitas Hidup

Nilai – Nilai Anuitas Hidup

Berdasarkan hasil perhitungan menggunakan software *mathematica*® versi 5.1 dengan percepatan pembungaan

$$0,00;0,01;0,02;...;0,15$$

untuk usia hidup 30 tahun, 45 tahun, dan 60 tahun maka diperoleh nilai anuitas hidup yang diperlihatkan dalam Tabel 3.

Tabel 3. Nilai Anuitas Hidup

δ	Usia 30 Tahun			Usia 45 Tahun			Usia 60 Tahun		
	$n=5$	$n=10$	$n=\infty$	$n=5$	$n=10$	$n=\infty$	$n=5$	$n=10$	$n=\infty$
0,00	4,97969	9,9104	45,0669	4,94541	9,7499	31,4076	4,81216	9,1473	19,0923
0,01	4,85742	9,4325	35,6692	4,82428	9,2827	26,4332	4,69546	8,7199	17,0221
0,02	4,73914	8,9852	28,8808	4,7071	8,8453	22,3404	4,58254	8,3194	15,2745
0,03	4,6247	8,5662	23,8791	4,59372	8,4354	19,4575	4,47326	7,9438	13,7898
0,04	4,51396	8,1735	20,1212	4,484	8,0513	16,9874	4,3675	7,5913	12,5207
0,05	4,40679	7,8052	17,2437	4,37782	7,6909	14,9855	4,26512	7,2604	11,4294
0,06	4,30306	7,4597	14,9999	4,27503	7,3527	13,3451	4,166	6,9495	10,4854
0,07	4,20264	7,1353	13,2199	4,17552	7,0351	11,9866	4,07003	6,6573	9,66425
0,08	4,10542	6,8306	11,7848	4,07918	6,7366	10,8503	3,97708	6,3824	8,94609
0,09	4,01127	6,5441	10,6105	3,98388	6,4560	9,89059	3,88706	6,1237	8,31469
0,10	3,92009	6,2746	9,63621	3,89351	6,1920	9,07275	3,79986	5,8801	7,75678
0,11	3,83177	6,0211	8,81768	3,80798	5,9435	8,36986	3,71537	5,6505	7,26143
0,12	3,74621	5,7822	8,1221	3,72317	5,7094	7,76096	3,6335	5,4341	6,81962
0,13	3,66331	5,5572	7,52482	3,641	5,4888	7,22957	3,55416	5,2298	6,42382
0,14	3,58297	5,3450	7,00713	3,56137	5,2806	6,76262	3,47726	5,0369	6,06777
0,15	3,50511	5,1448	6,55457	3,48418	5,0842	6,34965	3,40271	4,8548	5,74621

Jika dihubungkan dengan cicilan pembayaran, misalkan besarnya tanggungan seseorang adalah sebesar satu juta rupiah selama kurun waktu 5 tahun maka besarnya cicilan yang harus dibayarkan untuk anuitas pasti dan anuitas hidup adalah sebagai berikut :

Tabel 4. Cicilan yang Harus Dibayarkan untuk Anuitas Pasti dan Anuitas Hidup dengan Tanggungan Sebesar Rp1.000.000,-

δ	Anuitas Pasti	Anuitas Hidup		
		Usia 30 Tahun	Usia 45 Tahun	Usia 60 Tahun
0,00	200000	200816	202298	207807
0,01	205039	205871	207285	212972
0,02	210167	211009	212445	218220
0,03	215373	216230	217689	223550
0,04	220667	221535	223015	228964
0,05	226039	226922	228424	234460
0,06	231497	232393	233916	240038
0,07	237039	237946	239491	245699
0,08	242659	243581	245147	251440
0,09	248360	249298	250886	257264
0,10	254148	255096	256706	263168
0,11	260017	260976	262607	269152
0,12	265964	266937	268588	275216
0,13	271990	272977	274605	281360
0,14	278102	279098	280791	287583
0,15	284284	285298	287011	293884

Berdasarkan Tabel 4 di atas, dapat dilihat bahwa cicilan anuitas hidup lebih mahal daripada anuitas pasti. Hal ini disebabkan karena faktor *survival* berperan dalam perhitungan premi anuitas hidup. Selain itu, semakin tua usia seseorang cicilan yang harus dibayarkan juga semakin besar.

KESIMPULAN

Dalam pembahasan materi sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa :

1. Bentuk *cdf* dari anuitas hidup kontinu adalah $F_T \left(\frac{-\log(1-\delta y)}{\delta} \right)$, sedangkan bentuk *pdf* - nya adalah $\frac{f_T \left(\left[-\log(1-\delta y) \right] / \delta \right)}{1-\delta y}$.
2. Distribusi dari anuitas hidup kontinu adalah $F_Y(y) = P(Y \leq y) = F_T \left(\frac{-\log(1-\delta y)}{\delta} \right)$; untuk $0 < y \leq \frac{1}{\delta}$
3. Premi anuitas hidup lebih mahal dibandingkan dengan premi anuitas pasti.

DAFTAR PUSTAKA

Bowers, N. L. Jr., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., dan Nesbitt, C. J., (1997). *Actuarial Mathematics*. Edisi Kedua, Society of Actuaries, Schaumburg, IL.

Dudewicz, E. J. dan Mishra, S. N. (1998). *Statistika Matematika Modern*, ITB Bandung.

Futami, Takashi. (1993). *Matematika Asuransi Jiwa*, The Kyoei Life Insurance co.ltd.Tokyo,Japan.

BEBERAPA TEOREMA KEKONVERGENAN PADA INTEGRAL RIEMANN

VENN YAN ISHAK ILWARU¹, H. J. WATTIMANELA², M. W. TALAKUA³

^{1,2,3} Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

e-mail: vennilwaru@yahoo.co.id

ABSTRACT

Riemann Integral is integral concept using the sum of lower Riemann and upper Riemann. The sufficient condition for the function sequence which is R -integralable at $[a, b]$ is the limit function also R -integralable at $[a, b]$. If function sequence $\{f_n\}$ convergence to f at $[a, b]$ and f_n R -integralable for every n , then the sufficient condition that function f also R -integralable at $[a, b]$ is $\{f_n\}$ uniform convergence to f at $[a, b]$. This research studies about sum convergence theorems in Riemann Integral.

Keyword : *Riemann Integral, Convergence, Uniform Convergence, Sufficient Condition*

PENDAHULUAN

Sekitar tahun 1670, Kalkulus berhasil ditemukan dan tokoh-tokoh matematika yang berperan dalam penemuan Kalkulus adalah Newton dan Leibniz. Kedua tokoh ini berhasil mengembangkan teorema fundamental, yaitu mengenai anti derivatif. Kemudian A. Cauchy (1789-1857) mulai mengembangkan teori tersebut, dan berhasil meneliti tentang integral dari fungsi kontinu.

Pada tahun 1584, Benhard Riemann mulai memperhalus definisi yang digunakan oleh Cauchy, dan Riemann pun mengadakan penelitian tentang integral fungsi diskontinu. Dari penelitian tersebut Riemann berhasil menemukan suatu metode khusus dari integral yang sangat simpel untuk didefinisikan, sehingga metode integral itu disebut Integral Riemann.

TINJAUAN PUSTAKA

Pada tahun 1875 Darboux berhasil memodifikasi Integral Riemann dengan mendefinisikan integral atas dan integral bawah sehingga terdefinisi suatu integral baru yang ekuivalen dengan Integral Riemann. Meskipun ada beberapa jenis teori integral tetapi Riemann-lah yang banyak memberi inspirasi pembentukan integral lain dan sudah banyak pemakaiannya di bidang matematika

maupun di bidang lainnya. Namun dalam teori integral ada beberapa fungsi yang tidak terintegral Riemann pada selang-selang tertentu. Namun pada dasarnya suatu fungsi dikatakan terintegral Riemann maka fungsi tersebut harus memenuhi beberapa syarat diantaranya kekontinuan dan kekonvergenan pada fungsi tersebut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema Kekonvergenan pada Integral Riemann (Integral- R)

Di dalam bagian ini akan dibicarakan syarat cukup agar barisan fungsi yang terintegral- R pada $[a, b]$, fungsi limitnya terintegral- R pada $[a, b]$. Contoh di bawah ini menunjukkan bahwa ada fungsi limit suatu barisan fungsi yang terintegral- R pada $[a, b]$ tak terintegral- R pada $[a, b]$.

Contoh 1.

Banyaknya anggota Q , himpunan semua bilangan rasional, terhitung dan oleh karena itu dapat ditulis $Q \cap [0, 1] = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ dengan $r_i < r_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$
Diketahui fungsi dibawah ini ;

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ jika } x = r_i \text{ dengan } r \in Q \cap [0,1], i = 1, 2, \dots, n \\ 0 & , \text{ untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Untuk n yang cukup besar diperoleh

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ jika } x = r_i \text{ dengan } r \in Q \cap [0,1], i = 1, 2, \dots, n \\ 0 & , \text{ untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Mudah dipahami bahwa barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen ke f pada $[0,1]$ dan untuk setiap n fungsi f_n terintegral- R pada $[0,1]$, sebab f_n terbatas dan kontinu kecuali di titik-titik yang diskontinu, fungsi f tersebut di atas tidak terintegral- R pada $[0,1]$.

Berdasarkan contoh di atas, jika diketahui barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen ke f pada $[a,b]$ dan f_n terintegral- R pada $[a,b]$ untuk setiap n , maka dapat dipelajari syarat cukup agar fungsi f juga terintegral- R pada $[a,b]$. Teorema di bawah ini memperlihatkan salah satu syarat cukup agar fungsi limit suatu barisan fungsi yang terintegral- R pada $[a,b]$ juga terintegral- R pada $[a,b]$.

Teorema 1.

Diketahui fungsi f_n terintegral- R pada $[a,b]$ untuk setiap n dan $\{f_n\}$ konvergen ke f pada $[a,b]$. Syarat cukup agar fungsi f terintegral- R pada $[a,b]$ dan

$$(R) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^b f_n$$

adalah $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada $[a,b]$

Bukti

Diambil bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada $[a,b]$ maka terdapat bilangan asli N_ε yang tak tergantung pada $\xi \in [a,b]$, sehingga berlaku

$$|f_n(\xi) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Untuk setiap $n \geq N_\varepsilon$ dan $\xi \in [a,b]$. Karena f_n terintegral- R pada $[a,b]$ berdasarkan kriteria Cauchy, maka terdapat bilangan $\delta_n > 0$ sehingga untuk setiap dua partisi P_1 dan P_2 dengan $\|P_1\| < \delta_n$ dan $\|P_2\| < \delta_n$ berlaku

$$\left| \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$\left| \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - (R) \int_a^b f_n \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Diambil bilangan asli n tetap asalkan $n \geq N_\varepsilon$. Diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{P_1} f(\xi)(v-u) - \sum_{P_2} f(\xi)(v-u) \right| \\ &= \left| \sum_{P_1} f(\xi)(v-u) - \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) + \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u) + \right. \\ & \quad \left. \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P_2} f(\xi)(v-u) \right| \\ &\leq \left| \sum_{P_1} f(\xi)(v-u) - \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) \right| + \left| \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u) \right| + \\ & \quad \left| \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P_2} f(\xi)(v-u) \right| \\ &\leq \sum_{P_1} |f_n(\xi) - f(\xi)|(v-u) + \left| \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u) \right| + \\ & \quad \sum_{P_2} |f_n(\xi) - f(\xi)|(v-u) \\ &< \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

Untuk setiap partisi P_1 dan P_2 pada $[a,b]$ dengan $\|P_1\| < \delta_n$ dan $\|P_2\| < \delta_n$ dan $\delta = \delta_n$. Dengan kata lain terbukti f terintegral- R pada $[a,b]$.

Selanjutnya karena telah terbukti f terintegral- R pada $[a,b]$ maka terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap partisi P pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta_0$ berlaku:

$$\left| (R) \int_a^b f - \sum_P f(\xi)(v-u) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Untuk n di atas pilih $\delta_1 = \min\{\delta, \delta_0\}$. Jika P partisi pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta_1$ diperoleh:

$$\begin{aligned} & \left| (R) \int_a^b f - (R) \int_a^b f_n \right| \\ &= \left| (R) \int_a^b f - \sum_P f(\xi)(v-u) + \sum_P f(\xi)(v-u) - \sum_P f_n(\xi)(v-u) \right. \\ & \quad \left. + \sum_P f_n(\xi)(v-u) - (R) \int_a^b f_n \right| \\ &\leq \left| (R) \int_a^b f - \sum_P f(\xi)(v-u) \right| + \left| \sum_P f(\xi)(v-u) - \sum_P f_n(\xi)(v-u) \right| \\ & \quad + \left| \sum_P f_n(\xi)(v-u) - (R) \int_a^b f_n \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \sum_P |f(\xi) - f_n(\xi)|(v-u) + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Dengan kata lain $(R) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^b f_n$ ■

Definisi 1

Barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan terintegral serempak- R pada $[a, b]$, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ yang tak bergantung kepada n sehingga untuk setiap P partisi pada $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berlaku:

$$\left| (R) \int_a^b f_n - \sum_P f_n(v-u) \right| < \varepsilon$$

untuk setiap n .

Berikut ini rumusan syarat cukup yang lain agar fungsi limit suatu barisan fungsi yang terintegral- R pada $[a, b]$ juga terintegral serempak- R pada $[a, b]$.

Teorema 2

Diketahui f_n terintegral- R pada $[a, b]$ untuk setiap n dan $\{f_n\}$ konvergen ke f pada $[a, b]$. Syarat cukup agar f terintegral- R pada $[a, b]$ dan $(R) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^b f_n$ adalah $\{f_n\}$ terintegral serempak- R pada $[a, b]$.

Bukti

Diambil bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $\{f_n\}$ terintegral serempak- R pada $[a, b]$ maka terdapat bilangan $\delta > 0$ yang tak bergantung kepada n sehingga berlaku:

$$\left| \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - (R) \int_a^b f_n \right| < \frac{\varepsilon}{6}$$

Untuk setiap n dan untuk setiap P_1 partisi pada $[a, b]$ dengan $\|P_1\| < \delta$. Jika P_2 sebarang partisi pada $[a, b]$ dengan $\|P_2\| < \delta$ diperoleh:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u) \right| \\ &= \left| \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - (R) \int_a^b f_n + (R) \int_a^b f_n - \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u) \right| \\ &\leq \left| \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - (R) \int_a^b f_n \right| + \left| (R) \int_a^b f_n - \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Karena $\{f_n\}$ konvergen ke f pada $[a, b]$ maka untuk setiap $\xi \in [a, b]$ terdapat bilangan asli N_ξ sehingga berlaku:

$$|f_n(\xi) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \text{ untuk setiap } n \geq N_\xi.$$

Diambil sebarang dua partisi P' dan P'' pada $[a, b]$ dengan $\|P'\| < \delta$ dan $\|P''\| < \delta$. Dipilih titik partisi ξ yang merupakan titik tengah selang $[u, v]$ pada P' dan P'' . Karena banyaknya titik-titik ξ pada P' dan P'' berhingga maka banyaknya bilangan N_ξ yang bersesuaian dengan kekonvergenan barisan fungsi $\{f_n\}$ ke fungsi f pada $[a, b]$ juga berhingga.

Dipilih $N = \text{Maks}\{N_\xi; \xi \in P' \cup P''\}$.

Selanjutnya diperoleh:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{P'} f(\xi)(v-u) - \sum_{P''} f(\xi)(v-u) \right| \\ &= \left| \sum_{P'} f(\xi)(v-u) - \sum_{P'} f_N(\xi)(v-u) + \sum_{P'} f_N(\xi)(v-u) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{P''} f_N(\xi)(v-u) + \sum_{P''} f_N(\xi)(v-u) - \sum_{P''} f(\xi)(v-u) \right| \\ &\leq \left| \sum_{P'} f(\xi)(v-u) - \sum_{P'} f_N(\xi)(v-u) \right| + \left| \sum_{P'} f_N(\xi)(v-u) - \sum_{P''} f_N(\xi)(v-u) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{P''} f_N(\xi)(v-u) - \sum_{P''} f(\xi)(v-u) \right| \\ &\leq \left| \sum_{P'} f(\xi) - f_N(\xi) \right| (v-u) + \left| \sum_{P'} f_N(\xi)(v-u) - \sum_{P''} f_N(\xi)(v-u) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{P''} f(\xi) - f_N(\xi) \right| (v-u) \\ &< \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

kriteria Cauchy f terintegral- R pada $[a, b]$. ■

Teorema Kekonvergenan pada Integral Riemann Kontinu Lengkap (Integral- R^*)

Di dalam bagian ini akan dibicarakan syarat cukup agar fungsi limit suatu barisan fungsi yang terintegral- R^* pada $[a, b]$ juga terintegral- R^* pada $[a, b]$.

Teorema di bawah ini memperlihatkan salah satu syarat cukup agar fungsi limit suatu barisan fungsi yang terintegral- R pada $[a, b]$ juga terintegral- R pada $[a, b]$.

Teorema 3 (Teorema Kekonvergenan Seragam)

Diketahui fungsi f_n terintegral- R^* pada $[a, b]$ untuk setiap n dan $\{f_n\}$ konvergen ke f hampir di mana-mana pada $[a, b]$. Syarat cukup agar fungsi f terintegral pada $[a, b]$ dan $(R^*) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (R^*) \int_a^b f_n$ adalah $\{f_n\}$

konvergen seragam ke f pada $[a, b]$.

Bukti

Diambil bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada $[a, b]$ maka terdapat bilangan asli N_ε yang tak bergantung pada $\xi \in [a, b]$, sehingga berlaku

$$|f_n(\xi) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Untuk setiap $n \geq N_\varepsilon$ dan $\xi \in [a, b]$. Karena f_n terintegral- R^* pada $[a, b]$, berdasarkan Kriteria Cauchy terdapat fungsi positif $\delta_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap dua partisi- δ_n P_1 dan P_2 pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

dan

$$\left| \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - (R^*) \int_a^b f_n \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Diambil bilangan asli n tetap asalkan $n \geq N_\varepsilon$. Diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{P_1} f(\xi)(v-u) - \sum_{P_2} f(\xi)(v-u) \right| \\ &= \left| \sum_{P_1} f(\xi)(v-u) - \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) + \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P_2} f(\xi)(v-u) \right| \\ &\leq \left| \sum_{P_1} f(\xi)(v-u) - \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) \right| + \left| \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P_2} f(\xi)(v-u) \right| \\ &\leq \sum_{P_1} |f(\xi) - f_n(\xi)|(v-u) + \left| \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u) \right| \\ & \quad + \sum_{P_2} |f_n(\xi) - f(\xi)|(v-u) \\ &< \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

Untuk setiap dua partisi- δ_n P_1 dan P_2 pada $[a, b]$ dengan $\delta = \delta_n$. Dengan kata lain terbukti f terintegral- R pada $[a, b]$.

Selanjutnya karena telah terbukti f terintegral- R pada $[a, b]$ maka terdapat fungsi positif $\bar{\delta} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga setiap P partisi- $\bar{\delta}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (R^*) \int_a^b f - \sum_{P_1} f(\xi)(v-u) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Untuk n di atas pilih $\delta_1(\xi) = \min \{ \delta(\xi), \bar{\delta}(\xi) \}$ untuk setiap $\xi \in [a, b]$. Jika P partisi- δ_1 pada $[a, b]$ diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| (R^*) \int_a^b f - (R^*) \int_a^b f_n \right| \\ &= \left| (R^*) \int_a^b f - \sum_P f(\xi)(v-u) + \sum_P f(\xi)(v-u) - \sum_P f_n(\xi)(v-u) \right. \\ & \quad \left. + \sum_P f_n(\xi)(v-u) - (R^*) \int_a^b f_n \right| \\ &\leq \left| (R^*) \int_a^b f - \sum_P f(\xi)(v-u) \right| + \left| \sum_P f(\xi)(v-u) - \sum_P f_n(\xi)(v-u) \right| \\ & \quad + \left| \sum_P f_n(\xi)(v-u) - (R^*) \int_a^b f_n \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \sum_P |f(\xi) - f_n(\xi)|(v-u) + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{(b-a)}(b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

Dengan kata lain $(R^*) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (R^*) \int_a^b f_n$ ■

Berikut ini rumusan cukup yang lain agar fungsi f terintegral- R^* pada $[a, b]$, jika diketahui barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen ke f pada $[a, b]$ dan f_n terintegral- R^* pada $[a, b]$ untuk setiap n .

Definisi 2

Barisan fungsi $\{f_n\}$ terintegral serempak- R^* pada $[a, b]$, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ yang tak tergantung kepada n sehingga berlaku

$$\left| \sum_P f_n(\xi)(v-u) - (R^*) \int_a^b f_n \right| < \varepsilon$$

Untuk setiap n dan untuk setiap partisi- δ pada $[a, b]$

Teorema 3.4 (Teorema Kekonvergenan serempak- R^*)

Diketahui f_n terintegral- R^* pada $[a, b]$ untuk setiap n dan $\{f_n\}$ konvergen ke f pada $[a, b]$. Syarat cukup agar f terintegral- R^* pada $[a, b]$ dan

$(R^*) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow 0} (R^*) \int_a^b f_n$ adalah $\{f_n\}$ terintegral serempak- R^* pada $[a, b]$.

Bukti

Diambil bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $\{f_n\}$ terintegral- R^* pada $[a, b]$ maka terdapat fungsi $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga berlaku

$$\left| \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - (R^*) \int_a^b f_n \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Untuk setiap n dan untuk setiap P_1 partisi- δ pada $[a, b]$. Diambil P_2 sebarang partisi- δ pada $[a, b]$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u) \right| \\ &= \left| \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - (R^*) \int_a^b f_n + (R^*) \int_a^b f_n - \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u) \right| \\ &\leq \left| \sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - (R^*) \int_a^b f_n \right| + \left| (R^*) \int_a^b f_n - \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Karena $\{f_n\}$ konvergen ke f pada $[a, b]$ maka untuk setiap $\xi \in [a, b]$ terdapat bilangan asli N_ξ sehingga berlaku $|f_n(\xi) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$.

Untuk setiap $n \geq N_\xi$. Diambil sebarang dua partisi- δ P' dan P'' pada $[a, b]$, dengan

$$P' = \{a = a_0, a_1, \dots, a_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

dan

$$P'' = \{a = a'_0, a'_1, \dots, a'_m; \xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_m\}.$$

Karena banyaknya titik-titik ξ_i untuk $i = 1, 2, \dots, n$ pada P' dan ξ'_j untuk $j = 1, 2, \dots, m$ pada P'' berhingga maka banyaknya bilangan N_ξ, ξ mewakili ξ_i dan ξ_j pada P' dan P'' , yang bersesuaian dengan kekonvergenan barisan fungsi $\{f_n\}$ ke fungsi f pada $[a, b]$ juga berhingga. Dipilih

$$N = \text{maks} \{N_\xi; \xi \in P' \cup P''\}$$

Selanjutnya diperoleh:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{P'} f(\xi)(v-u) - \sum_{P''} f(\xi)(v-u) \right| \\ &= \left| \sum_{P'} f(\xi)(v-u) - \sum_{P'} f_n(\xi)(v-u) + \sum_{P'} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P''} f_n(\xi)(v-u) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{P''} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P''} f(\xi)(v-u) \right| \\ &\leq \left| \sum_{P'} f(\xi)(v-u) - \sum_{P'} f_n(\xi)(v-u) \right| + \left| \sum_{P'} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P''} f_n(\xi)(v-u) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{P''} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P''} f(\xi)(v-u) \right| \\ &\leq \sum_{P'} |f_n(\xi) - f(\xi)|(v-u) + \left| \sum_{P'} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P''} f_n(\xi)(v-u) \right| \\ & \quad + \sum_{P''} |f_n(\xi) - f(\xi)|(v-u) \\ &< \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

Untuk setiap P_1 dan P_2 dua partisi- δ pada $[a, b]$, berdasarkan kriteria Cauchy maka f terintegral- R pada $[a, b]$. ■

KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan dan uraian pada bab-bab sebelumnya maka dapat diambil beberapa kesimpulan antara lain :

1. Syarat cukup agar fungsi f terintegral- R pada $[a, b]$ dan

$$(R) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^b f_n$$

adalah $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada $[a, b]$, jika diketahui fungsi f_n terintegral- R pada $[a, b]$ untuk setiap n dan $\{f_n\}$ konvergen ke f pada $[a, b]$.

2. Barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan terintegral serempak- R pada $[a, b]$, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ yang tak bergantung kepada n sehingga untuk setiap P partisi pada $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berlaku:

$$\left| (R) \int_a^b f_n - \sum_P f_n(\xi)(v-u) \right| < \varepsilon$$

untuk setiap n .

3. Syarat cukup agar f terintegral- R pada $[a, b]$ dan $(R) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^b f_n$ adalah $\{f_n\}$ terintegral serempak- R pada $[a, b]$, jika diketahui f_n terintegral- R pada $[a, b]$ untuk setiap n dan $\{f_n\}$ konvergen ke f pada $[a, b]$.

4. Syarat cukup agar fungsi f terintegral pada $[a, b]$ dan $(R^*) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow 0} (R^*) \int_a^b f_n$ adalah $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada $[a, b]$, jika diketahui fungsi f_n terintegral- R^* pada $[a, b]$ untuk setiap n dan $\{f_n\}$ konvergen ke f hampir dimana-mana pada $[a, b]$.

5. Syarat cukup agar f terintegral- R^* pada $[a, b]$ dan $(R^*) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow 0} (R^*) \int_a^b f_n$ adalah $\{f_n\}$ terintegral serempak- R^* pada $[a, b]$ jika diketahui f_n

terintegral- R^* pada $[a, b]$ untuk setiap n dan $\{f_n\}$
konvergen ke f pada $[a, b]$.

DAFTAR PUSTAKA

- Bartle, R. G. (1994), *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons, USA
- Gordon, R. A., (1994), *The Integrals Of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock., Graduate Studies In Mathematics 4*, Volume 4., American Mathematical Society.,USA.
- Hutahaean, E., (1989), *Analisis Real II*, Penerbit Karunika, Universitas Terbuka, Jakarta.
- Jain, P. K. and Gupta, V. P., (1986), *Lebesgue Measure and Integration*. Wiley Eastern Limited, New Delhi.
- Lee, P. Y. (1989). *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*. Series in Real Analysis vol.2. World Scientific, Singapore.
- Muslich., (2005), *Analisis Real II*, Lembaga Pengembangan Pendidikan, Surakarta.
- Royden, H. L., (1989), *Real Analysis*, Third Edition, Macmillan Publishing Company, New York.
- Soeparna, D., (2006), *Pengantar Analisis Real*, Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.
- Soeparna, D., (2006), *Pengantar Analisis Abstrak*, Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

ALJABAR- C^* DAN SIFATNYA
The Properties of C^ -algebras*

HARMANUS BATKUNDE¹, ELVINUS RICHARD PERSULESSY²

^{1,2} Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

e-mail: batkunde@yahoo.com; richardelvinus@yahoo.com

ABSTRACT

These notes in this paper form an introductory of C^* -algebras and its properties. Some results on more general Banach algebras and C^* -algebras, are included. We shall prove and discuss basic properties of Banach Algebras, C^* -algebras, and commutative C^* -algebras. We will also give important examples for Banach Algebras, C^* -algebras, and commutative C^* -algebras.

Keywords: Banach algebras, C^* -algebras, commutative C^* -algebras.

PENDAHULUAN

Tak dapat dipungkiri bahwa konsep-konsep dalam analisis fungsional maupun aljabar banyak memberikan masukan penting dalam mengembangkan ilmu matematika, baik dalam penerapan langsung maupun dalam menyediakan berbagai alat yang dapat dipakai dalam pengembangan konsep-konsep matematika yang lebih lanjut.

Aljabar- C^* (dibaca: aljabar C bintang/star) sendiri adalah salah satu konsep lanjut yang dihasilkan dari tinjauan-tinjauan lanjut pada konsep-konsep dalam analisis fungsional dan konsep operator aljabar. Konsep inilah yang akan dikenalkan dan diulas dalam penulisan ini.

Lebih lanjut berbagai teori dasar dari aljabar- C^* akan turut dijelaskan dalam penulisan ini, mulai dari teori norm, aljabar- $*$ (dibaca: aljabar bintang/star) aljabar Banach, aljabar Banach- $*$, aljabar- C^* , aljabar- C^* dengan elemen satuan juga aljabar- C^* komutatif. Selain teori dasar, beberapa contoh aljabar- C^* juga akan dilihat dalam tulisan ini.

TINJAUAN PUSTAKA

Aljabar- C^* dipercaya sebagai konsep pertama yang dipertimbangkan untuk digunakan dalam mekanika kuantum untuk memodelkan aljabar dari bentuk fisik yang dapat diamati. Garis penelitian ini dimulai dengan mekanika matriks Werner Heisenberg dan dalam suatu

pengembangan lebih lanjut yang lebih matematik dari Pasqal Jordan sekitar tahun 1933. (Emch, 1972)

Sesudah itu John Von Neumann mencoba menyusun kerangka umum untuk aljabar-aljabar ini yang puncaknya diterbitkan dalam kumpulan tulisan pada operator ring. Tulisan ini disebut sebagai kelas khusus dari aljabar- C^* yang dikenal sebagai aljabar Von Neumann. (Neumann, 1961)

Sekitar tahun 1940an, C. E. Rickart mendeskripsikan aljabar- B^* yang kemudian dikenal sebagai aljabar Banach- $*$ (Rickart, 1946). Kemudian di periode tahun yang sama yaitu tahun 1940an, penelitian dari Israel Gelfand dan Mark Naimark menghasilkan suatu karakterisasi abstrak dari aljabar- C^* . (Doran & Belfi, 1986)

Definisi 1. (Ruang norm, ruang Banach)

Misalkan X adalah suatu ruang vektor. Fungsi $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi:

- 1) $\|x\| \geq 0$; untuk setiap $x \in X$;
- 2) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$;
- 3) $\|\alpha x\| = \alpha \|x\|$; untuk setiap $x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$;
- 4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; untuk setiap $x, y \in X$;

merupakan **norm** pada X dan pasangan $(\|\cdot\|, X)$ disebut **ruang norm**. Lebih lanjut, ruang norm yang lengkap disebut **ruang Banach**.

Definisi 2. (Fungsional linear terbatas, ruang dual)

Suatu **fungsional linear** f adalah suatu pemetaan linear dengan domain suatu ruang vector X dan *range*-nya berupa lapangan K , dengan demikian :

$$f : D(f) \rightarrow K.$$

Di sini, $K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$. Jika ada $c \in \mathbb{R}$ sehingga

$$|f(x)| \leq c\|x\| \text{ dengan } x \in X$$

maka f disebut **fungsiional linear terbatas**. Himpunan semua fungsiional linear terbatas di X membentuk suatu ruang norm dengan norm yang didefinisikan oleh

$$\|f\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, \|x\|=1} |f(x)|.$$

Himpunan ini disebut **ruang dual** dari X dan dinotasikan dengan X' .

Definisi 3. (Aljabar, aljabar komutatif)

Suatu aljabar A atas lapangan K adalah suatu ruang vector A atas lapangan K yang bersifat tertutup terhadap perkalian yakni $x, y \in A$, maka $xy \in A$, yang didefinisikan dengan memenuhi sifat-sifat:

- (1) $(xy)z = x(yz)$;
- (2) $x(y + z) = xy + xz$;
 $(x + y)z = xy + yz$;
- (3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$;

untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $\alpha \in K$. Dalam hal ini $K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$.

Lebih lanjut A disebut komutatif jika perkaliannya komutatif, yaitu untuk setiap $xy \in A$ berlaku:

$$xy = yx, \quad (4)$$

dan A disebut aljabar dengan elemen satuan jika terdapat suatu $e \in A$ sehingga untuk setiap $y \in A$ berlaku:

$$ex = xe = x. \quad (5)$$

Definisi 4. (Aljabar bernorm, aljabar Banach)

Suatu **aljabar bernorm** A adalah ruang norm yang merupakan suatu aljabar, sedemikian hingga untuk setiap $x, y \in A$, berlaku:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|,$$

dan jika A memiliki elemen satuan e ,

$$\|e\| = 1.$$

Aljabar bernorm yang lengkap (terhadap normnya) disebut **aljabar Banach**.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 5. (involusi, aljabar-*, aljabar Banach-*)

Suatu **involusi** adalah suatu pemetaan $*$: $A \rightarrow A$ ($a \mapsto a^*$), dengan A adalah ruang vector atas lapangan K yang memenuhi sifat:

1. $x^{**} = x$;
2. $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha}x^* + \bar{\beta}y^*$;
3. $(xy)^* = y^*x^*$;

untuk setiap $x, y \in A$ dan $\alpha, \beta \in K$. Disini $K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$.

Aljabar-* adalah suatu aljabar yang dilengkapi involusi. Suatu aljabar Banach yang dilengkapi dengan involusi dan memenuhi sifat:

4. $\|x^*\| = \|x\|$,
- disebut **Aljabar Banach-***.

Definisi 6. (aljabar -C*)

Suatu aljabar Banach-* yang memenuhi:

$$\|x^*x\| = \|x\|^2, \quad (6)$$

disebut **aljabar -C***.

Persamaan (6) disebut aksioma-C* atau kondisi -C*.

Definisi 7.

Misalkan A_1 dan A_2 masing-masing adalah aljabar-C*, suatu **homomorfisma-*** $\phi: A_1 \rightarrow A_2$ adalah suatu homomorfisma aljabar sedemikian sehingga

$$\phi(x^*) = \phi(x)^*; x \in A_1.$$

Suatu **isomorfisma-*** dari A_1 ke A_2 adalah suatu homomorfisma-* bijektif.

Secara mudah dapat dilihat bahwa untuk suatu aljabar Banach-* A , involusinya adalah isometrik, yaitu:

$$\|x - y\| = \|(x - y)^*\| = \|x^* - y^*\|. \quad (7)$$

Contoh 8.

1. $M_n(\mathbb{C})$ yakni himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ adalah aljabar Banach-* dengan operator norm dan involusi Hermitian. Lebih lanjut $M_n(\mathbb{C})$ adalah aljabar-C* dengan involusi yang sama.
2. Misalkan X adalah suatu ruang Hausdorff kompak local dan $C_0(X)$ adalah himpunan semua fungsi-fungsi kontinu yang bernilai 0 saat menuju tak hingga. Definisikan $f^*(t) = \overline{f(t)}$ (untuk $t \in X$). Maka $C_0(X)$ adalah aljabar-*. Dengan $\|f\| = \text{Sup}_{t \in X} |f(t)|$, $C_0(X)$ adalah aljabar-C*. $C_0(X)$ memiliki elemen satuan jika dan hanya jika X kompak.
3. Misalkan X adalah ruang Hausdorff kompak dan $\mathcal{B}(X)$ adalah himpunan semua fungsi Borel terbatas pada X . Jika didefinisikan $\|f\| = \text{Sup}_{x \in X} |f(x)|$ dan $f^*(t) = \overline{f(t)}$, $\mathcal{B}(X)$ adalah aljabar-C*.

Definisi 9. (Spektrum)

Jika A adalah Aljabar Banach dengan elemen satuan 1_A dan $x \in A$, maka spectrum dari x di A adalah himpunan

$$\sigma_A = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda \cdot 1 \text{ tidak invertible}\}.$$

Jari-jari spectrum dari $x \in A$ didefinisikan sebagai

$$r(x) = \text{Sup}_{\lambda \in \sigma(x)} \{|\lambda|\}.$$

dan $\|1_A\| = 1$.

Definisi 10. (Aljabar-C* satuan dan komutatif)

Suatu aljabar-C* yang memiliki elemen satuan disebut **aljabar-C* satuan** dan aljabar-C* yang di dalamnya berlaku sifat komutatif perkalian disebut **aljabar-C* komutatif**.

Teorema 11.

Misalkan A adalah aljabar Banach -, maka A memiliki penyatuan \tilde{A} dimana terdapat isomorfik dari A ke suatu subruang dari \tilde{A} (*embedding*). Penyatuan menyatakan bahwa \tilde{A} juga aljabar Banach-* dan A subgroup dari \tilde{A} .

Bukti.

Misalkan $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ dengan penjumlahan perkomponen (*componentwise*), dan perkaliannya didefinisikan sebagai

$$(x, \lambda)(y, k) = (xy + \lambda y + \kappa x, \lambda \kappa),$$

dan definisikan

$$\|x, \lambda\| = \|x\| + |\lambda|,$$

dan $(x, \lambda)^* = (x^*, \bar{\lambda})$. *Embedding*-nya didefinisikan oleh $x \mapsto (x, 0)$ dan identitasnya adalah $(0, 1)$. ■

Lebih lanjut, jika A adalah aljabar- C^* , maka norm alternative $\|(x, \lambda)\| = \sup_{\|u\|=1} \{\|xu + \lambda u\|\}$, yang membuat \tilde{A} menjadi suatu aljabar- C^* .

Definisi 12.

Misalkan A adalah aljabar- C^* . Maka $x \in A$ disebut

Self-adjoint jika $x = x^*$.

Normal jika $xx^* = x^*x$.

Proyeksi jika x self adjoint dan $x^2 = x$.

Isometri parsial jika x^*x adalah proyeksi.

Isometri jika $x^*x = 1$.

Coisometri jika $xx^* = 1$.

Uniter jika x adalah isometri dan coisometri.

Proposisi 13.

Jika A adalah aljabar- C^* , maka proyeksi tak nol memiliki norm 1. Lebih lanjut jika x uniter, maka $\sigma(x^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(x)\}$.

Bukti.

Jika x adalah proyeksi tak nol, maka $\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|x^2\| = \|x\|$, dengan demikian $\|x\| = 1$. Jika x uniter maka $xx^* = 1$ (ini adalah invertible dengan involusi sebagai inversnya) ■

Proposisi 14.

Misalkan A adalah aljabar- C^* dan $x \in A$ normal. Maka

$$r(x) = \|x\|.$$

Bukti

Aksioma- C^* mengakibatkan $\|x^*x\| = \|x\|^2$. Perhatikan juga bahwa xx^* adalah self-adjoint. Dengan demikian diperoleh $\|(x^*x)^2\| = \|x^*x\|^2 = \|x\|^4$. Dengan induksi matematika diperoleh $\|(x^*x)^{2^n}\| = \|x\|^{2^{n+1}}$.

$$\begin{aligned} r(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{2^n}\|^{2^{-n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{2^n}\|^{2^{-(n-1)+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|((x^*)^{2^n} x^{2^n})^{2^{-n-1}}\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|((x^*x)^{2^n})^{2^{-n-1}}\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(x^*x)^{2^{-1}}\| \\ &= \|x^*x\|^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|x\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|x\|. \end{aligned}$$

Proposisi 15.

Terdapat paling banyak satu norm pada suatu aljabar- C^* A yang membuat A menjadi suatu aljabar- C^* .

Bukti

Misalkan $\|\cdot\|_1$ dan $\|\cdot\|_2$ adalah dua norm di aljabar- C^* A yang membuatnya menjadi suatu aljabar- C^* , maka

$$\|x\|_i^2 = \|x^2x\| = \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x^*x)\}; i = 1, 2.$$

Dengan demikian $\|x\|_1$ dan $\|x\|_2$. ■

Proposisi 16.

Misalkan A adalah suatu aljabar- C^* dan $x \in A$, dimana x self-adjoint, maka $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$. Jika $u \in A$ uniter, maka $\sigma(u)$ subhimpunan dari suatu lingkaran satuan.

Bukti

Misalkan u uniter dalam suatu aljabar- C^* A dengan elemen satuan dan $\lambda \in \sigma(x)$.

Karena $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|1\|$, $|\lambda| \leq 1$. Perhatikan bahwa $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1})$. Karena $u^{-1} = u^*$ uniter, kita simpulkan bahwa $|\lambda| = 1$. Untuk $x \in A$ uniter, dengan mempertimbangkan \tilde{A} , kita asumsikan A memiliki elemen satuan. Fungsi $\exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}$. Dapat dilihat bahwa $u = \exp(ix)$ uniter (dengan $u^* = \exp(-ix)$). Jika $\lambda \in \sigma(x)$ dan $b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^n (x-\lambda)^{n-1}}{n}$, maka

$$\begin{aligned} e^{ix} - e^{i\lambda} &= (e^{i(x-\lambda)} - 1)e^{i\lambda} \\ &= (x - \lambda)be^{i\lambda}. \end{aligned}$$

Karena b komutatif dengan x , dan $x - \lambda$ tidak invertible, $\exp(ix) - e^{i\lambda}$. Dengan demikian $|e^{i\lambda}| = 1$, dan oleh karena itu $\lambda \in \mathbb{R}$. Dengan kata lain, $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.

Definisi 17.

Suatu **fungsional linear multiplikatif** pada suatu aljabar Banach tak nol A adalah homomorfisma tak nol dari A ke \mathbb{C} . Himpunan semua fungsional linear multiplikatif pada A disebut **ruang ideal maksimal**, dan dinotasikan dengan $\Omega(A)$.

Teorema 18.

Misalkan A adalah aljabar Banach komutatif dengan elemen satuan,

- 1) Jika $\phi \in (A)$, maka $\|\phi\| = 1$.
- 2) Ruang $\Omega(A)$ tak kosong, dan pemetaan $\phi \mapsto \ker(\phi)$ adalah suatu bijeksi dari $\Omega(A)$ pada pada himpunan semua ideal maksimal dari A .

Bukti

- 1) Andaikan $\phi \in \Omega(A)$ dan $a \in A$ sedemikian hingga $\|a\| < 1 = \phi(a)$. Misalkan $b = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$. Maka $a + ab = b$, dan

$$\phi(b) = \phi(a) + \phi(a)\phi(b) = 1 + \phi(b).$$

Hal ini tidaklah mungkin. Jadi, $\|\phi\| \leq 1$. Karena $\phi(1) = 1$, maka terbukti bahwa $\|\phi\| = 1$.

- 2) Misalkan $\phi \in \Omega(A)$, berlaku bahwa $M = \ker\phi$ adalah suatu ideal tutup dari kodimensi 1 pada A , dengan demikian merupakan maksimal. Jika $\phi_1, \phi_2 \in \Omega(A)$ dan $\ker\phi_1 = \ker\phi_2$, maka untuk setiap $a \in A$, $a - \phi_2(a) \in \ker\phi_1$. Hal ini mengakibatkan $\phi_1(a - \phi_2(a)) = 0$ atau $\phi_1(a) = \phi_2(a)$. Ini menunjukkan bahwa pemetaan ini satu-satu.

Sebaliknya, jika M adalah ideal maksimal, maka $d(M, 1) \geq 1$ karena bola buka satuan dengan pusat 1, memuat elemen-elemen yang dapat dibalik, sehingga closure dari M tetap tidak memuat 1. Dapat dilihat bahwa closure juga merupakan ideal, lebih lanjut merupakan ideal sejati. Disimpulkan bahwa M sendiri tutup. Jadi kuosien A/M adalah aljabar Banach komutatif sederhana, dan karena satu-satunya aljabar Banach komutatif sederhana adalah \mathbb{C} maka pemetaan kuosien ϕ memberikan suatu homomorfisma kontinu dari $A \rightarrow \mathbb{C}$. Lebih lanjut, pemetaan ini bijektif.

Untuk melihat bahwa $\Omega(A)$ tak kosong, kita asumsikan $A \neq \mathbb{C}$, (jika tidak, identifikasi A dengan \mathbb{C} menghasilkan homomorfisma tak nol) jadi A tidak sederhana. Misalkan I adalah suatu ideal sejati dari A .

Karena A memiliki identitas, maka terdapat suatu ideal sejati maksimal dari A yang memuat I . ■

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, kesimpulan yang dapat diambil yakni, Suatu aljabar Banach- $*$ yang dilengkapi sifat $\|x^*x\| = \|x\|^2$ disebut aljabar $-C^*$. Paling banyak hanya ada satu norm pada aljabar- $*$ yang dapat membuatnya menjadi suatu aljabar- C^* . Suatu homomorfisma- $*$ dari suatu aljabar- C^* ke yang lainnya merupakan suatu homomorfisma aljabar.

Konsep aljabar- C^* dapat ditinjau lebih luas lagi dengan menggunakan transformasi Gelfand, dimana hal ini akan sangat berperan penting dalam kasus aljabar- C^* komutatif maupun nonkomutatif.

DAFTAR PUSTAKA

- Emch, G. (1972) Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, Wiley-Interscience
- Neumann, J. Von. (1961) Collected works. Vol.III. Rings of Operator, Pergamon Press, New York
- Rickart, C. E. (1946) Banach Algebras with an Adjoint Operation. Ann. Of. Math (2) 47:528-550
- Doran, Robert S; Belfi, Victor A. (1986), Characterization of C^* -algebras: The Gelfand-Neimark Theorems, CRC press
- Landsman, N. P. (2003) Lectures Notes on C^* -Algebras and K-Theory. Korteweg-de Vries Institute for Mathematics University of Amsterdam.

**APLIKASI PETRI NET PADA SISTEM PEMBAYARAN TAGIHAN LISTRIK
PT. PLN (Persero) RAYON AMBON TIMUR**
*(The Application of Petri Net in Electricity Bill Payment System of
PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur)*

FREYA N. WATTIMENA¹, THOMAS PENTURY², YOPI A. LESNUSSA³
^{1,2,3} *Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI*
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
e-mail: ya.lesnussa@staff.unpatti.ac.id

ABSTRACT

Petri Net is a model of Mathematics used in the system event discri to illustrate certain event. One application of Petri Nets is to sketch the entrance occurs in a place like the public service system. This reserce will simply describe the use of Petri Net to sketch the entrance occurs in electricity bill payment system of PT.PLN (Persero) Rayon Ambon Timur by the number of place is 7 and the transition is 8, and to determine the matrix representation and the *coverability tree* of the model.

Keywords: *Eigenvalues, Equilibrium point, Jacobian-matrix, Rabies, SIR-models.*

PENDAHULUAN

Adanya keterbatasan sumber daya dalam suatu sistem ekonomi dan dunia usaha (bisnis) menyebabkan orang-orang, barang-barang maupun komponen-komponen harus menunggu untuk mendapatkan jasa pelayanan. Dalam kasus tersebut barisan tunggu yang terjadi sering disebut dengan antrian (*queues*).

Antrian terjadi bilamana banyaknya pelanggan yang akan dilayani melebihi kapasitas layanan yang tersedia. Sistem tersebut seringkali dan hampir terlihat setiap hari, seperti antrian kendaraan mobil-mobil yang memasuki tempat usaha pencucian mobil, antrian para nasabah di bank untuk mendapatkan pelayanan dari para teller, antrian para pelanggan di suatu swalayan untuk melakukan pembayaran di kasir.

Penulis mengambil salah satu contoh sistem antrian yaitu sistem antrian pada loket pembayaran tagihan listrik. Diketahui bahwa listrik merupakan salah satu kebutuhan pokok masyarakat untuk mempermudah dalam menjalani kegiatan sehari-hari mulai dari instansi yang paling kecil yaitu rumah tangga sampai yang paling besar meliputi industri-industri terbesar sekalipun.

PT. PLN (Persero) adalah perusahaan penyedia jasa listrik yang berusaha melayani konsumen dengan sebaik-baiknya. Untuk itu masyarakat sebagai konsumen diharuskan membayar tagihan listrik setiap bulannya. Proses pembayaran tagihan listrik ini dapat dilakukan di

kantor-kantor PLN terdekat atau koperasi-koperasi yang telah ditunjuk, atau bisa dilakukan di bank-bank yang telah menjamin kerjasama dengan PT. PLN bahkan sekarang pelanggan dapat melakukan pembayaran melalui ATM (Anjungan Tunai Mandiri).

Sistem pembayaran tagihan listrik pada kantor-kantor PLN tersebut mempunyai tahapan-tahapan yang dimulai dari input sampai dengan output. Sehingga penulis ingin mengubah sistem tersebut ke dalam model matematika dengan menggunakan Petri Net dan mengamati prosesnya pada PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur.

TINJAUAN PUSTAKA

Petri Net pertama kali dikembangkan oleh Carl Adam Petri pada tahun 1962. Ia adalah seorang matematikawan asal Jerman. Pada awal 1960-an ia mendefinisikan tujuan umum model matematika untuk menggambarkan hubungan antara kondisi dan peristiwa (*R.David & H.Alla,1965*).

Petri Net merupakan suatu alat bantu untuk mempelajari sistem. Dengan menggunakan teori Petri Net maka suatu sistem dapat dimodelkan menjadi suatu Jaringan Petri, yang merupakan representasi matematika dari sistem tersebut. Dengan melakukan analisis dari Jaringan Petri tersebut diharapkan dapat diperoleh

informasi penting tentang struktur dan perilaku yang dinamis dari sistem yang dimodelkan dan mengusulkan peningkatan-peningkatan serta perubahan-perubahan yang diperlukan. Jadi perkembangan dari teori Jaringan Petri didasarkan pada pemakaian Jaringan Petri dalam memodelkan dan merancang sistem (J.L.Peterson,1981).

Petri Net merupakan salah satu alat untuk memodelkan *system event discrete*. *System event discrete* adalah sistem dimana ruang keadaan dari sistem tersebut diuraikan oleh himpunan diskrit $\{0,1,2,\dots\}$ dan transisi keadaan hanya diamati pada titik diskrit dalam waktu. Jadi, berubahnya keadaan pada *system event discrete* diakibatkan oleh terjadinya *event* (Cassandras, 1993).

Petri Net merupakan *direct bipartite graph* (graph berarah) yang memiliki 2 *node* yang dinamakan sebagai *Place* dan *Transisi*. *Arc* dilambangkan dengan anak panah (*arrow*), *Place* dilambangkan sebagai lingkaran (*circles*) dan *Transisi* dilambangkan sebagai persegi panjang (*bars*). *Arc* secara tidak langsung menghubungkan *place* dengan *place* atau transisi dengan transisi, tetapi menghubungkan *place* dengan transisi atau transisi dengan *place*. Tiap *place* dapat berisi satu atau beberapa *token* yang dilambangkan dengan bulatan kecil (*dots*) yang merupakan material atau bahan yang ditrasfer dalam satu sistem Petri Net.

Definisi 1

Petri Net terdiri dari 4-tuple (P, T, A, w) dengan (Cassandras, 1993) :

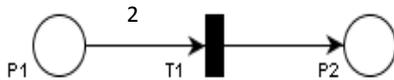
- P : himpunan berhingga *Place*, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$
- T : himpunan berhingga transisi, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$
- A : himpunan *arc*, $A \subseteq (PxT) \cup (TxP)$
- w : fungsi bobot , $w : A \rightarrow \{1,2,3, \dots\}$

Dalam membahas representasi Petri Net secara grafik akan digunakan notasi $I(t_j)$ dan $O(t_j)$ yang masing-masing menyatakan himpunan *place* input dan *place* output ke transisi t_j . Secara matematis definisi tersebut dapat ditulis menjadi persamaan berikut (Cassandras, 1993).

$$I(t_j) = \{p_i : (p_i, t_j) \in A\}$$

$$O(t_j) = \{p_i : (t_j, p_i) \in A\}$$

Contoh 1:



Gambar 1. Petri Net Sederhana

Perhatikan gambar 1, terdapat dua *place* pada Petri Net tersebut yaitu p_1 dan p_2 ditulis $P = \{p_1, p_2\}$. Untuk menyatakan bahwa terdapat sebuah transisi yaitu t_1 maka ditulis $T = \{t_1\}$. *Arc* dinyatakan dengan pasangan berurutan, elemen pertama menyatakan asal dan elemen kedua menyatakan tujuan misalnya *arc* dari *place* p_1 ke transisi t_1 ditulis (p_1, t_1) dan (t_1, p_2) menyatakan *arc* dari transisi t_1 ke *place* p_2 yang secara lengkap ditulis $A = \{(p_1, t_1), (t_1, p_2)\}$. Bobot *arc* dari *place* p_1 ke transisi t_1 adalah 2 yang digambarkan dengan dua buah *arc* sehingga dapat ditulis $w(p_1, t_1) = 2$ dan bobot dari

transisi t_1 ke *place* p_2 adalah 1 yaitu $w(t_1, p_2) = 1$, pada contoh ini $I(t_1) = \{p_1\}$ dan $O(t_1) = \{p_2\}$.

Perlu membedakan antara Petri Net yang *pure* dan *impure*. Petri Net disebut *pure* jika tidak ada *place* yang menjadi *input* dan *output* untuk suatu transisi. Jika terdapat *place* yang dapat menjadi input sekaligus output untuk transisi tertentu maka Petri Net dikatakan *impure*, yang secara formal ditulis

$$p_i \in P, t_j \in T \ni \{(p_i, t_j), (t_j, p_i)\} \subseteq A$$

Jelas bahwa Petri Net pada Gambar 1 adalah *pure* karena tidak ada *place* yang menjadi input sekaligus output untuk suatu transisi (Cassandras, 1993).

Transisi pada Petri Net menyatakan *event* pada *system event discrete* dan *place* merepresentasikan kondisi agar *event* dapat terjadi. Diperlukan mekanisme untuk mengindikasikan apakah kondisi telah terpenuhi. *Token* adalah sesuatu yang diletakan di *place* yang menyatakan terpenuhi tidaknya suatu kondisi. Secara grafik *token* digambarkan dengan *dot* dan diletakan di dalam *place*.

Definisi 2.2.

Penanda (*marking*) m pada Petri Net adalah fungsi $m: P \rightarrow \{0,1,2, \dots\}$ (Cassandras, 1993).

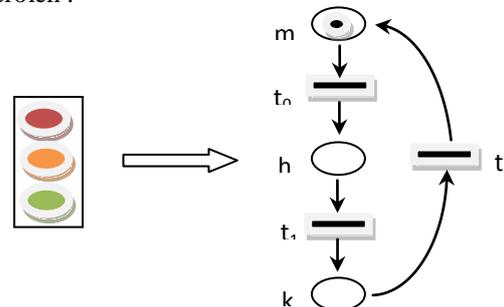
Penanda dinyatakan dengan vektor yang berisi bilangan bulat tak negatif yang menyatakan jumlah token yaitu $m = [m(p_1), m(p_2), \dots, m(p_n)]^T$. Jumlah elemen m sama dengan banyaknya *place* p_i , $m(p_i) \in \{0,1,2, \dots\}$.

Definisi 2.3

Petri Net bertanda (*marked*) terdiri dari 5-tuple (P, T, A, w, m_0) dimana (P, T, A, w) adalah Petri Net dan m_0 adalah penanda awal (Cassandras, 1993).

Contoh 2:

Lampu lalu lintas pada jalan raya yang dibuat dalam model Petri Net. Lampu berwarna Merah (m), Kuning (k), Hijau (h). Jika diubah dalam bentuk Petri Net maka diperoleh :

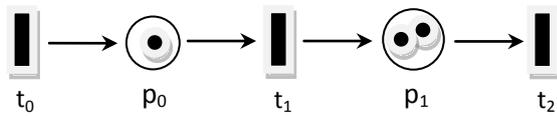


Gambar 2. Petri Net bertanda (*marked*)

Transisi Sumber dan Transisi Akhir

Suatu transisi T tanpa *input place* dinamakan transisi sumber (*source transition*). Suatu transisi T tanpa *output place* dinamakan dengan transisi akhir (*sink transition*). Suatu transisi dapat *difire* (diselesaikan prosesnya) jika sistem Petri Net mulai dijalankan. Jika suatu transisi *difire* maka ada sejumlah *token* yang dipindahkan dari *input place*

sesuai dengan aturan dari Petri Net sendiri, tapi tidak ada *token* yang diproduksi pada *output*. Jika suatu transisi *difire*, ada sejumlah *token* yang berpindah ke suatu *place* dan jika tidak ada token yang berpindah dari suatu *place* maka transisi tersebut disebut *source* (sumber).



Gambar 3. Transisi sumber (t_0), transisi akhir (t_2), dan $m_0 = [1 \ 2]$

Transisi Enable

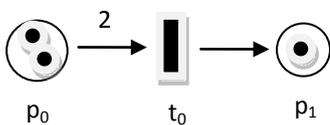
Jika semua keadaan yang diperlukan sudah terpenuhi maka transisi dapat terjadi. Dalam hal ini keadaan merupakan *place input* dari transisi. Bobot *arc* dari *place input* ke transisi menunjukkan *token* minimum di *place* agar transisi *enable*. Jika semua *place input* mempunyai *token* lebih dari atau sama dengan jumlah *token* minimum yang dibutuhkan maka transisi *enable*.

Definisi 2.4.

Transisi $t_j \in T$ pada Petri Net bertanda *enable* jika, $m(p_i) \geq w(p_i, t_j), \forall p_i \in I(t_j)$. (Cassandras, 1993).



Gambar 4(a). Transisi tidak *enable*



Gambar 4(b). Transisi yang *enable*

Gambar 4(a). merupakan contoh transisi yang tak *enable*. Jelas bahwa $I(t_0) = \{p_0\}$. $m(p_0) = 1$ dan $w(p_0, t_0) = 2$. Transisi t_0 tidak *enable* karena $1 = m(p_0) < w(p_0, t_0) = 2$. Transisi t_0 *enable* jika jumlah *token* pada *place* p_0 lebih dari atau sama dengan 2. Pada Gambar 4(b) terlihat bahwa $m(p_0) = 2$ sehingga transisi t_0 pada Petri Net tersebut *enable*. Maka dapat disimpulkan bahwa agar transisi t_j *enable* maka jumlah token pada *place* p_i paling sedikit sebesar bobot *arc* yang menghubungkan p_i ke t_j . Kenyataan ini sesuai dengan definisi transisi *enable* yang telah dituliskan sebelumnya.

Perlu diperhatikan bahwa jika tidak ada *arc* dari *place* p_i ke t_j maka $w(p_i, t_j) = 0$. Dan ingat jumlah *token* pada *place* merupakan bilangan bulat tak negatif yaitu $m(p_i) \geq 0$ sehingga berapapun nilai $m(p_i)$ pernyataan $m(p_i) \geq w(p_i, t_j)$ selalu benar.

Dinamika Petri Net.

Jika Petri Net digunakan untuk memodelkan sistem dinamik *event discrete*, seharusnya Petri Net dilengkapi dengan mekanisme yang mirip dengan transisi keadaan (*state transition*) pada automata. Mekanisme ini berupa

menjalankan *token* melewati jaringan (*net*) ketika transisi menjadi *enable* dan proses ini mengubah keadaan Petri Net.

Hanya transisi *enable* yang dapat *difire*. Transisi *difire* saat *event* yang dinyatakan oleh transisi terjadi. Berikut ini adalah proses yang terjadi pada pemfirean transisi. Semua *token* di *place input* dikurangi atau diambil sebanyak bobot *arc* yang menghubungkannya. Berdasarkan Definisi 2.4 Jumlah *token* di *place input* setelah dikurangi adalah bilangan bulat tak negatif. *Token* di *place* ditambahkan sebanyak bobot *arc* yang menghubungkannya.

Representasi Petri Net dengan menggunakan matriks.

Pada bagian ini akan dikaji representasi Petri Net dalam notasi matriks. Hal ini bertujuan untuk memudahkan dalam implementasi, Petri Net dapat direpresentasikan dalam dua matriks yang disebut *backward incidence* dan *forward incidence*. Kedua matriks ini masing-masing berukuran $n \times m$ dengan n adalah jumlah *place* dan m adalah jumlah transisi. Elemen matriks ini adalah bilangan bulat tak negatif.

Elemen pada matriks *backward incidence* merupakan bobot *arc* yang menghubungkan *place* ke transisi sedangkan elemen pada matriks *forward incidence* merupakan bobot *arc* yang menghubungkan transisi ke *place*. Jika tidak ada *arc* yang menghubungkan *place* ke transisi maka *bobot arc* diisi nol.

Definisi 2.5

Matriks *backward* dan *forward incidence* yang mempresentasikan Petri Net adalah matriks berukuran $n \times m$ dengan elemen baris ke- i , kolom ke- j adalah

$$A_b(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} w(p_i, t_j), A_f(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} w(t_j, p_i).$$

Salah satu kegunaan matriks *backward incidence* adalah menentukan transisi yang *enable*. Jika (p_i) bukan merupakan *place input* dari transisi (t_j) yaitu $p_i \notin I(t_j)$ maka *bobot arc* dari *place* (p_i) ke transisi (t_j) adalah nol karena tidak ada *arc* yang menghubungkannya, ditulis $w(p_i, t_j) = 0$. Sehingga dapat ditulis dalam notasi vektor berikut.

$$\begin{aligned} m([p_1, \dots, p_n]^T) &\geq w([p_1, \dots, p_n]^T, t_j) \\ &= A_b(:, j) \\ &= A_b e_j \end{aligned} \tag{i}$$

Dengan $A_b(:, j)$ menunjukkan kolom ke- j dari matriks A_b dan e_j merupakan kolom ke- j matriks identitas berorder m . Dari persamaan (i) maka transisi yang *enable* dapat dilakukan dengan mencari kolom dari matriks *backward incidence* yang kurang dari atau sama dengan vektor keadaan, sehingga dapat ditulis secara ringkas menjadi

$$m \geq A_b e_j \tag{i}$$

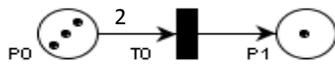
dan

$$m' = m + Au \tag{ii}$$

Dengan u merupakan vektor kolom yang mempunyai elemen sebanyak m yaitu diperoleh dari kolom identitas.

Contoh 3:

Menentukan transisi yang *enable* setelah transisi t_1 *difire* !!



Gambar 5. Sebelum transisi t_1 *difire*

Penyelesaian :

Diketahui : $i = 2$ place, $j = 1$ transisi.
 $m_0 = [3 \ 1]^T$, $A_b = [2 \ 0]^T$, $A_f = [0 \ 1]^T$
 $A = A_f - A_b$
 $= [0 \ 1]^T - [2 \ 0]^T$
 $= [-2 \ 1]^T$

Dengan menggunakan persamaan (iii) diperoleh $m_1 = m_0 + Au$

$$m_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Contoh 4 :

Terdapat 5 place dan 3 transisi pada Petri Net sehingga $n=5$ dan $m=3$. Matriks *backward incidence* dan *forward incidence* masing-masing berukuran 5×3 sebagai berikut

$$A_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad A_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Keadaan awal Petri Net adalah $m_0 = [2 \ 2 \ 0 \ 0 \ 1]^T$

Transisi t_1 *enable* karena $m_0 \geq A_b(:,1)$ sedangkan transisi t_2 dan t_3 tidak *enable* karena $m_0 \not\geq A_b(:,j)$ untuk $j=2,3$. Selanjutnya, dihitung matriks *incidence* yang dapat digunakan untuk menentukan keadaan berikutnya.

$$A = A_f - A_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan keadaan berikutnya, gunakan persamaan (iii). Transisi yang *difire* adalah t_1 karena transisi tersebut yang *enable*.

$$m_1 = m_0 + Au = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $m_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$. Karena $m_1 \geq A_b(:,j)$, $1 \leq j \leq 3$, jadi yang *enable* adalah t_1, t_2, t_3 .

Liveness dan Deadlocks

Jika membahas mengenai Petri Net pasti sering dijumpai istilah *deadlock* yang secara mudah berarti keadaan dimana tidak ada transisi yang *enable*. *Deadlock* dapat disebabkan persaingan memperoleh *resource*. Ketika semua pihak tidak memperoleh *resource* yang dibutuhkan maka terjadi *deadlock*. *Resource* dalam Petri net biasanya dinyatakan dengan *token* dan pihak yang bersaing memperoleh *token* adalah transisi. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa *deadlock* terjadi ketika transisi tertentu atau himpunan transisi pada Petri net tidak dapat *difire*.

Transisi yang tidak berhubungan dengan *deadlock* disebut *live*. Perhatikan bahwa transisi yang *live* tidak harus *enable*. Istilah *liveness* dapat diartikan dengan transisi yang mungkin *enable*. Idealnya setiap transisi pada Petri net dapat *difire* setelah beberapa pemfirean, hal ini menjamin *deadlock* tidak terjadi.

Coverability Tree

Coverability tree merupakan teknik yang digunakan untuk menyelesaikan beberapa aspek analisis pada *system event discrete*. *Coverability tree* dapat dibangun dari Petri Net dengan keadaan awal. Keadaan awal Petri Net didefinisikan sebagai *node root*. Anak dari *node root* merupakan keadaan yang dapat dicapai dari keadaan awal dengan memfire sebuah transisi. Keadaan-keadaan ini dihubungkan ke *node root* dengan *edge*. Setiap *edge* pada *coverability tree* mempunyai bobot sebuah transisi yaitu transisi yang *difire* untuk mencapai keadaan tersebut.

Coverability tree dari Petri Net (P, T, A, w) dapat dinyatakan dengan 3-tuple yaitu (S, E, v) yang masing-masing menyatakan himpunan keadaan, himpunan *edge* dan fungsi bobot. Anggota dari himpunan keadaan merupakan n -tuple dengan n adalah jumlah *place* pada Petri Net. Selain berupa bilangan bulat tak negatif, keadaan pada *coverability tree* juga bisa berupa ω . Untuk membedakan dengan Petri Net maka pada *coverability tree* digunakan istilah *edge*.

Definisi 2.6

Coverability tree untuk Petri Net (P, T, A, w) dinyatakan dengan 4-tuple (S, E, T, v) dimana :

- S : himpunan berhingga keadaan (*state*), $S \in \{\omega, 0, 1, \dots\}^n$
- E : himpunan berhingga *edge*, $E \in S \times S$
- T : himpunan berhingga transisi, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$
- v : fungsi bobot, $v : E \rightarrow T$

Beberapa istilah yang digunakan untuk menjelaskan langkah-langkah yang dilakukan membangun *coverability tree* dengan jumlah *node* berhingga.

1. *Node root*, adalah *node* pertama dari *tree* dan merupakan keadaan awal.
2. *Node terminal*, adalah *node* yang menyatakan keadaan *deadlock* yaitu tidak ada transisi yang *enable*.
3. *Node duplicated*, adalah *node* yang sama dengan *node* yang sudah ada di *tree*.
4. Hubungan dominasi *node*. Misalkan notasi $x = [x(p_1), \dots, x(p_n)]^T$ dan notasi $y = [y(p_1), \dots, y(p_n)]^T$ menyatakan dua keadaan, yaitu *node* pada *coverability*

tree. Node x mendominasi y yang dinotasikan $x > dy$ jika kedua kondisi berikut terpenuhi.

- (a). $x(p_i) \geq y(p_i)$ untuk semua $i = 1, \dots, n$
- (b). $x(p_i) > y(p_i)$ untuk satu atau lebih $i = 1, \dots, n$

Untuk membangun *converability tree* dengan jumlah node berhingga dapat dituliskan sebagai berikut :

1. Inisialisasi $x = x_0$ (keadaan awal)
2. Untuk setiap *node* x , evaluasi nilai fungsi transisi $f(x, t_j)$ untuk semua $t_j \in T$ seperti dibawah ini :
 - (a). Jika $f(x, t_j)$ tidak terdefinisi untuk semua $t_j \in T$ (tidak ada transisi yang enable pada keadaan x) maka x adalah node terminal.
 - (b). Jika $f(x, t_j)$ terdefinisi untuk satu atau lebih $t_j \in T$, maka hitung keadaan x' sebagai node baru dengan persamaan $x' = f(x, t_j)$.

Jika terdapat *node* y pada path dari *node* *root* x_0 (termasuk) ke x sedemikian hingga $x' > dy$ maka $x'(p_i) = \omega$ untuk semua p_i yang memenuhi $x'(p_i) > y(p_i)$.

3. Jika semua *node* baru merupakan *node* terminal atau *duplicated* maka berhenti.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai model Petri Net untuk salah satu layanan publik yang melibatkan antrian. Salah satu contoh layanan publik yang akan dibuat sistemnya dengan menggunakan model Petri Net adalah sistem pembayaran tagihan listrik PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur.

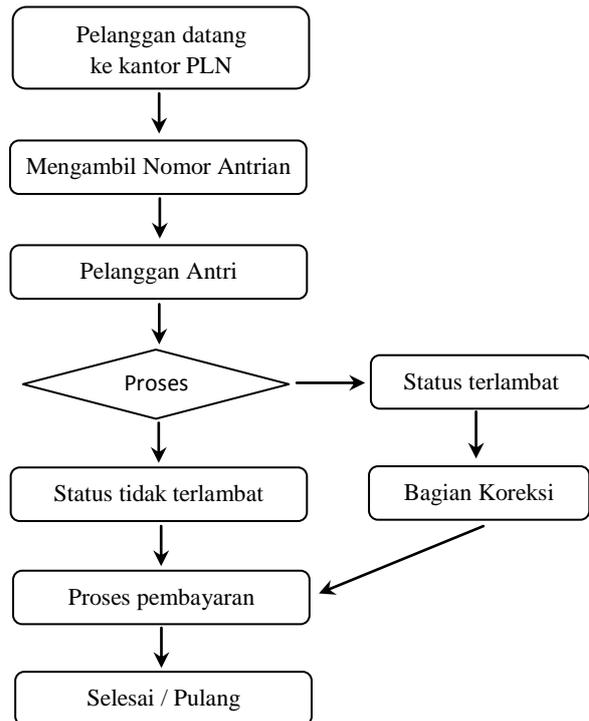
Analisis sistem pembayaran tagihan listrik PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur

Salah satu organisasi yang bergerak dalam bidang pelayanan publik adalah Perusahaan Listrik Negara atau PLN. PLN adalah perusahaan penyedia jasa listrik yang berusaha melayani konsumen sebaik-baiknya. Untuk itu pembayaran tagihan listrik setiap bulannya merupakan tanggung jawab atau kewajiban dari setiap pelanggan atau pengguna listrik PLN yang harus dipenuhi.

Tidak semua pelanggan yang mengetahui bagaimana membayar tagihan listrik di kantor-kantor PLN terdekat, bank atau tempat-tempat pembayar tagihan listrik lainnya. Dalam penulisan ini akan diambil salah satu contoh tempat pembayaran tagihan listrik yaitu kantor PLN (Persero) Rayon Ambon Timur. Loker pembayaran tagihan listrik yang ada pada kantor PLN (Persero) Rayon Ambon Timur berjumlah 2 loket, dimana setiap loket terdapat satu petugas (server).

Kondisi yang terjadi di kantor PLN (Persero) Rayon Ambon Timur adalah sering terjadi antrian yang panjang pada tanggal-tanggal tertentu dan besarnya jumlah pelanggan yang datang untuk melakukan pembayaran listrik bisa mencapai ratusan perharinya. Dalam membayar tagihan listrik ada beberapa *event* yang terjadi diantaranya antrian, pengecekan meteran, pengecekan denda, sampai proses membayar. Berikut adalah ilustrasi pembayaran tagihan listrik PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur.

Alur :

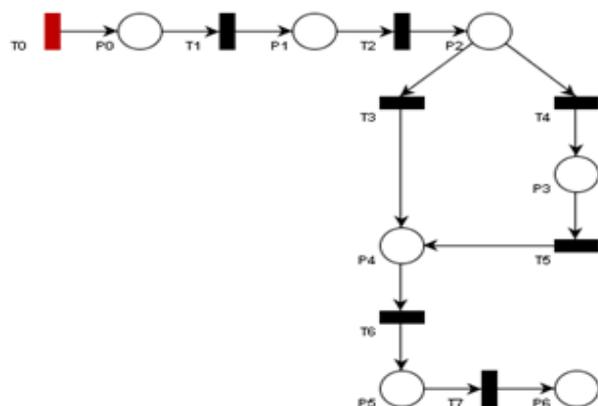


Gambar 7. Alur pembayaran tagihan listrik PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur

Model jaringan Petri Net sistem pembayaran tagihan listrik PT.PLN (Persero) Rayon Ambon Timur

Dari hasil analisis sistem pembayaran tagihan listrik PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur, maka permasalahan pembayaran tagihan listrik dapat dimodelkan dengan *software pipe* versi 2.5cr5 untuk memperoleh jaringan Petri Net.

Setiap *event* yang terjadi adalah berkaitan dengan transisi dan *place* yang merupakan kondisi yang harus dipenuhi agar transisi dapat terjadi. Model Petri Net dari sistem pembayaran tagihan listrik pada PLN (Persero) Rayon Ambon Timur seperti pada Gambar 8 yang terdiri dari 7 *place* dan 8 transisi.



Gambar 8. Model Petri Net sistem pembayaran tagihan listrik

Dari Gambar 8 didefinisikan bahwa pembayaran tagihan listrik dilayani pelanggan yang berstatus terlambat dan yang tidak terlambat dalam membayar tagihan listrik. Adapun penjelasan yang diberikan untuk setiap notasi *place* dan transisi sebagai berikut:

Place:

- p_0 : Pelanggan datang ke kantor PLN
- p_1 : Pelanggan mengantri dan siap dilayani
- p_2 : Mengecek nomor tagihan
- p_3 : Ke bagian koreksi
- p_4 : Pengecekan tagihan bulan lalu
- p_5 : Proses pembayaran
- p_6 : Pulang

Transisi:

- t_0 : Sumber (*source*)
- t_1 : Pelanggan mengambil nomor antrian
- t_2 : Pelayanan dimulai
- t_3 : Pelanggan tidak berstatus terlambat
- t_4 : Pelanggan berstatus terlambat
- t_5 : Hitung denda
- t_6 : Siap membayar
- t_7 : Proses pembayaran selesai

Penentuan keadaan awal Petri Net pada sistem pembayaran tagihan listrik dimulai dengan penempatan satu token pada *place* p_0 sebagai inisialisasi *marking*. Berdasarkan Gambar 8, setiap *place* tidak terisi token ini menyatakan bahwa loket pembayaran tagihan listrik belum dilakukan sampai waktu yang ditentukan. Dari model Petri Net yang diperlihatkan terdapat transisi t_0 yang selalu *enable*, sehingga apabila transisi t_0 *difire* maka token akan selalu bertambah pada *place* p_0 . Berikut prosedur *pfire*-an yang akan dilakukan [$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7$].

Jika proses dilanjutkan maka transisi yang *enable* adalah transisi t_0 dan t_1 , yang menyatakan bahwa pelanggan datang ke kantor PLN dan mengambil nomor antrian. Setelah transisi t_1 *difire*, maka token dari *place* p_0 akan dipindahkan ke *place* p_1 yaitu suatu keadaan dimana pelanggan sudah mengantri dan siap dilayani. *Place* p_0 akan tetap terisi minimal satu token yang menyatakan terjadinya proses kedatangan yang berlangsung hingga batas waktu yang disediakan. Pada keadaan *place* p_1 yang berisi satu token, maka transisi yang *enable* adalah transisi t_0, t_1 dan t_2 . Setelah transisi t_2 *difire* maka token akan berpindah ke *place* p_2 yang menyatakan suatu keadaan dimana *server* akan mengecek nomor tagihan pelanggan. Keadaan *place* p_2 akan mengakibatkan transisi yang *enable* adalah t_0, t_3 dan t_4 . Transisi t_3 menyatakan bahwa status tidak terlambat yang berarti pelanggan membayar tagihan tepat waktu dan tidak dikenai denda. Transisi t_4 menyatakan status terlambat yang berarti pelanggan terlambat membayar tagihan dan akan dikenai denda.

Pada saat t_3 *difire* maka akan menyebabkan transisi t_4 menjadi tidak *enable* dan *place* p_4 akan berisi satu token. Hal ini berarti mekanisme denda pada *place* p_3 tidak akan dilalui, *place* p_4 yang berisi satu token menyatakan keadaan pengecekan tagihan bulan lalu. Sebaliknya jika transisi t_4 *difire* maka akan menyebabkan

transisi t_3 tidak *enable*, sehingga *place* p_3 akan berisi satu token yang menyatakan keadaan pelanggan harus menuju ruang koreksi. Pada *place* p_4 akan tetap kosong sampai transisi t_3 atau t_5 *difire*. Ini berarti proses perhitungan tagihan bulan lalu akan siap jika denda keterlambatan selesai dihitung. Jika transisi t_6 *difire* maka token akan berpindah dari *place* p_4 ke *place* p_5 .

Place p_5 yang berisi satu token ini berarti pelanggan akan melakukan proses pembayaran, dan transisi yang *enable* adalah t_6 . Jika transisi t_6 *difire* maka satu token akan berpindah dari *place* p_5 ke *place* p_6 yang menyatakan bahwa proses pembayaran telah selesai dan pelanggan boleh pulang. Proses yang serupa akan berulang untuk pelanggan berikutnya.

Model matematika dalam bentuk representasi matriks.

Untuk merepresentasikan Petri Net dalam bentuk matriks yang dinyatakan dalam matriks *incidence*. Ada dua matriks *incidence* yaitu matriks *forwards incidence* dan matriks *backward incidence*. Elemen matriks *forwards incidence* adalah bobot *arc* yang menghubungkan transisi ke *place*, dan elemen matriks *backwards incidence* adalah bobot *arc* yang menghubungkan *place* ke transisi.

Berdasarkan model Petri Net pada Gambar 8 terdapat 7 *place* dan 8 transisi, sehingga banyak baris (n) = 7 dan banyaknya kolom (m) = 8. Dengan demikian akan terbentuk matriks *forward* dan *backwards incidence* dengan ordo 7x8. Representasi dalam bentuk matriks *incidence* adalah sebagai berikut:

- o Matriks *forwards incidence* (A_f)

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- o Matriks *backwards incidence* (A_b)

$$A_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Keadaan awal Petri Net dari Gambar 8 adalah $m_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$. Transisi t_0 *enable* karena memenuhi $m_0 \geq A_b(:,0)$. Untuk matriks *incidence* akan dihasilkan dari persamaan $A = A_f - A_b$ dan menghasilkan matriks *incidencenya* sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan keadaan berikutnya maka digunakan persamaan : $m_1 = m_0 + Ae_1$ dengan e_1 menyatakan vektor kolom yang mempunyai elemen sebanyak m yaitu diperoleh dari kolom matriks identitas.

Petri Net pada Gambar 8 keadaan awalnya adalah

$$m_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

sehingga akan dihasilkan keadaan setelah transisi t_1 difire sebagai berikut :

$$m_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan tersebut diperoleh

$$m_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

Hal ini berarti bahwa keadaan yang baru transisi yang *enable* adalah t_0 dan t_1 . Untuk penentuan keadaan yang baru selanjutnya, maka m_1 menjadi keadaan awal untuk m_2 , demikian seterusnya.

Model Coverability Tree

Untuk membangun *coverability tree* pada Gambar 8, terlebih dulu ditentukan *node root* dari Petri Net yaitu keadaan awal

$$m_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

Keadaan ini menandakan bahwa *place* p_0 belum terisi oleh token sampai transisi t_0 difire. Untuk menentukan *child* dari *node* tersebut berdasarkan keadaan yang dihasilkan setelah transisi sumber t_0 difire, yaitu pada saat transisi t_0 dan t_1 *enable*. Dari bentuk *coverability tree* yang dihasilkan setelah transisi t_0 difire, maka *place* p_0 akan terisi satu token sehingga transisi t_1 menjadi *enable* dan diperoleh

$$m_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

Pada saat transisi t_1 difire maka token akan berpindah dari *place* p_0 ke *place* p_1 sehingga transisi yang *enable* adalah t_0 dan t_2 dan diperoleh

$$m_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

ketika transisi t_2 difire maka token akan berpindah dari *place* p_1 ke p_2 dan diperoleh

$$m_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

hal ini berarti *node root* mempunyai satu *child*. Pada keadaan *place* p_2 berisi satu token maka transisi t_3 dan t_4

menjadi *enable*, m_2 menjadi keadaan awal untuk menghitung keadan

$$m_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

dan

$$m_5 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

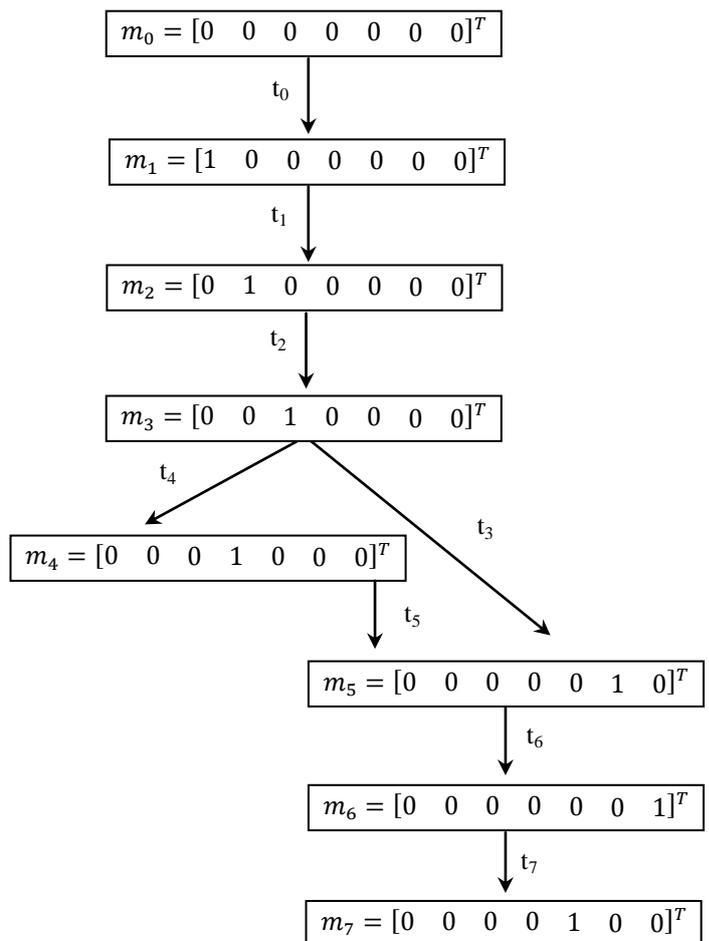
dengan demikian m_2 mempunyai dua *child*. Untuk keadaan m_4 akan menyebabkan transisi t_5 menjadi *enable*, sedangkan pada m_5 menyebabkan transisi t_6 *enable* dan jika transi t_5 difire maka akan menghasilkan m_5 . Jadi m_5 merupakan *child* dari m_3 sekaligus m_4 . Selanjutnya m_5 digunakan sebagai keadaan awal untuk memperoleh m_6 dan diperoleh

$$m_6 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$$

yaitu keadaan dimana transisi t_6 difire. Dalam hal ini m_5 mempunyai satu *child* yaitu m_6 . Pada saat transisi t_7 *enable* diperoleh dengan memasukkan m_6 sebagai keadaan awal, sehingga diperoleh

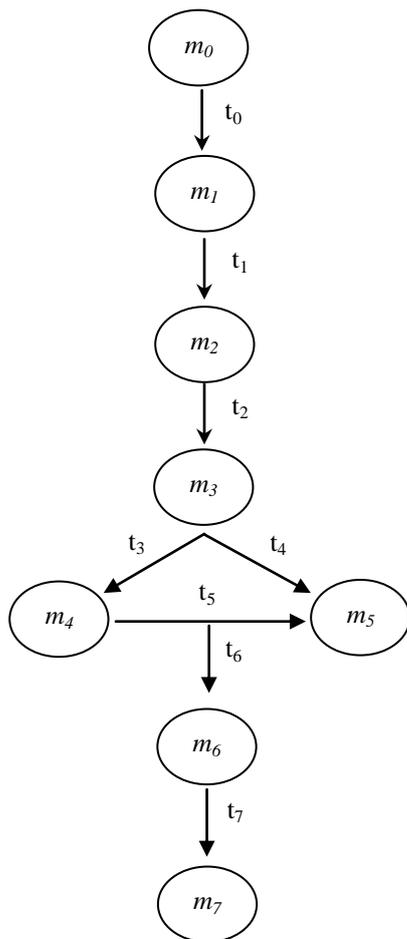
$$m_7 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T.$$

Dengan demikian akan muncul keadaan awal yang membuat t_0 kembali *enable* dan prosesnya akan berulang seterusnya. Secara lengkap *coverability tree* dari Petri Net pada gambar 7 adalah sebagai berikut:



Gambar 9. *Coverability Tree* dari model jaringan Petri Net Sistem pembayaran tagihan listrik

Atau dapat juga digambarkan sebagai berikut :



Gambar 10. Bentuk lain dari *Coverability Tree*.

DAFTAR PUSTAKA

- Cassandras, C.G. 1993. *Discret Event System : Modeling and Performance Analysis*, Aksen Associates Incorporated Publishers, Boston.
- David, R dan H. Alla. 1992. *Discret, Continuous and Hybrid Petri Nets*. Springer. Germany.
- Kordache, M dan P.J.Antsalis. 2006. *Supervisory Control of Concurrent System*. Birkhauser. Amerika.
- Moen. A. 2003. *Introduction to Petri Nets-Part I*. Berlin.
- Murata, T. 1989. *Petri Nets : Properties, Analysis and Application*. Proceeding of the IEEE.
- Nurwan dan Subiono. 2008. *Model Petri Net Antrian Klinik Kesehatan Serta Kajian Dalam Aljabar Max Plus*. ITS, Surabaya.
- Peterson.J.L. 1981. *Teori Petri Net dan Pemodelan Sistem*. Prentice Hall. New York.
- Tjahyono, H. 1998. *Aplikasi Jaringan Petri dan Manufaktur Sistem; Pemodelan, Pengendalian dan Analisis Kinerja*. IEEE press.
<http://daimi.au.dk/Petrinets>, Tgl 30 Mei 2011, Pkl.23.15.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab 4 di atas, maka dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Penggunaan model Petri Net sangat baik untuk menganalisis sistem antrian pada sistem pembayaran tagihan listrik PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur sehingga dapat diperoleh model matematikanya.
2. Petri Net merupakan suatu alat bantu untuk memodelkan suatu *system event discrete* dalam kasus sistem pembayaran tagihan listrik yang dapat dinyatakan secara matematis dalam bentuk jaringan Petri Net dan Matriks *incidence*.
3. *Coverability tree* merupakan suatu teknik untuk menganalisis beberapa aspek *system even discrete* dan dapat dibangun dari Petri Net untuk kasus sistem pembayaran tagihan listrik PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur.

**ANALISIS REGRESI KOMPONEN UTAMA UNTUK MENGATASI MASALAH MULTIKOLINIERITAS
DALAM ANALISIS REGRESI LINIER BERGANDA
(Studi Kasus: Curah Hujan di Kota Ambon Tahun 2010)**

*The Regretion Principal Component Analysis To Overcoming The problem Of Multicolinearity
At Doubled Linear Rregretion Analysis
(Case Study: Rainfall in Ambon on 2010)*

G. L. MARCUS¹, H. J. WATTIMANELA², Y. A. LESNUSSA³
^{1,2,3} *Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI*
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
e-mail: ya.lesnussa@staff.unpatti.ac.id

ABSTRACT

The climate in Ambon, are influenced by sea climate and season climate, cause of this island arrounded by sea, it is make very high rainfall intensity. A very high collinearity between independent variables, make the estimate can not rely be ordinary least square method so it market with not real regretion coefficient and the collinearity. Collinearity can be detected by linier correlation coefficient between independent variables and also with VIF way. Regretion principal component analysis is used to remove collinearity and all of independent variable into model, this analysis is regretion analysis technique wher eare combined with principal component analysis technique. The object of this analysis is to simplify the variable by overcast it dimension, we can do it removes the correlation between coefficient by transformation. Regression can help to solve this case rainfall in Ambon on 2010. So the colinearity to independent variables can be overcome and then we can get the best regretion rutes.

Keywords: *Rainfall, Principal Component, ordinary Least Square, Colinearty, Regretion*

PENDAHULUAN

Analisis regresi linier adalah teknik statistika yang dapat digunakan untuk menjelaskan pengaruh variabel bebas (*independent variable*) terhadap variabel tak bebas (*dependent variable*). Salah satu asumsi yang harus dipenuhi untuk melakukan pengujian hipotesis terhadap parameter pada analisis regresi linier berganda adalah tidak terjadinya korelasi antar variabel bebas (multikolinier).

Jika antara variabel berkolerasi tinggi, pengujian hipotesis parameter berdasarkan metode kuadrat terkecil (*Ordinary Least Square*) memberikan hasil yang tidak valid (galat yang dihasilkan akan menjadi besar, variansi dan kovariansi parameter tidak berhingga), diantaranya variabel-variabel bebas yang seharusnya berpengaruh

signifikan terhadap variabel tak bebas akan dinyatakan sebaliknya (tidak nyata secara statistik), tanda koefisien regresi dugaan yang dihasilkan bertentangan dengan kondisi aktual, penduga koefisien regresi bersifat tidak stabil sehingga mengakibatkan sulitnya menduga nilai-nilai variabel tak bebas yang tentunya akan mengakibatkan tidak akuratnya pada peramalan (Myers, 1991).

Kondisi ini mendorong untuk dikembangkannya suatu cara atau teknik yang dapat digunakan untuk mengatasi masalah multikolinieritas pada analisis regresi linier berganda. Salah satu solusi yang dapat digunakan adalah dengan menggunakan analisis komponen utama (*principal component analysis/PCA*), melalui penggunaan analisis ini akan dihasilkan variabel-variabel baru yang merupakan kombinasi linier dari variabel-variabel bebas

asal dan antar variabel baru ini bersifat saling bebas. Variabel-variabel yang baru ini disebut komponen utama, dan selanjutnya diregresikan dengan variabel tak bebas.

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan di atas, maka masalah yang dibahas dalam penelitian ini adalah menggunakan analisis regresi komponen utama untuk mengatasi masalah multikolinieritas antara variabel-variabel bebas sehingga diperoleh persamaan regresi linier yang lebih baik dalam analisis linier berganda, serta penerapannya pada kasus Curah Hujan di Kota ambon.

TINJAUAN PUSTAKA

Prinsip metode kuadrat terkecil diperlukan untuk menafsir β_1 dan β_2 sehingga $\sum e_i^2$ minimum. Artinya, akan dicari β_1 dan β_2 sedemikian hingga model regresi yang terestimasi dekat sekali dengan model regresi yang sesungguhnya. Secara matematis, β_1 dan β_2 dipilih sedemikian hingga bentuk berikut terpenuhi (Djalal Nachrowi *et al*, 2002):

$$\text{Meminimumkan } \sum e_i^2 = \sum (Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_i)^2$$

Istilah multikolinieritas merupakan hubungan linier yang sempurna atau eksak diantara variabel-variabel bebas dalam model regresi. Istilah kolinieritas sendiri berarti hubungan linier tunggal, sedangkan kolinieritas ganda atau multikolinieritas menunjukkan adanya lebih dari satu hubungan linier yang sempurna (Supranto, 1992).

Cara dalam menghadapi multikolinieritas berdasarkan metode kuadrat terkecil memberikan hasil yang tidak valid, sehingga dapat digunakan analisis komponen utama. Analisis komponen utama adalah teknik yang digunakan untuk menyederhanakan suatu data, dengan cara mentransformasi data secara linier sehingga terbentuk [sistem koordinat](#) baru dengan [varians](#) maksimum. Analisis komponen utama dapat digunakan untuk mereduksi dimensi suatu data tanpa mengurangi karakteristik data tersebut secara signifikan (Johnson, 2002).

Analisis komponen utama juga dikenal dengan Transformasi Karhunen-Loève (dinamakan untuk menghormati [Kari Karhunen](#) dan [Michel Loève](#)) atau Transformasi Hotelling (dinamakan untuk menghormati [Harold Hotelling](#)). Analisis komponen utama juga merupakan salah satu teknik [statistika multivariat](#) yang dapat menemukan karakteristik data yang tersembunyi. Dalam penerapannya, analisis komponen utama, justru dibatasi oleh asumsi-asumsinya, yaitu asumsi kelinearan model regresi, asumsi keortogonalan komponen utama,

dan asumsi varians yang memiliki struktur yang penting (Harvey, 2009).

Multikolinieritas

Istilah Multikolinieritas mula-mula ditemukan oleh Ragnar Frisch pada tahun 1934 yang berarti adanya hubungan linier antara variabel X_i . Maksud dari adanya hubungan linier antara variabel X_i adalah sebagai berikut: misalkan hubungan linier antara X_1 dan X_2 . Misalkan secara substansi diketahui bahwa total pendapatan (X_1) adalah penjumlahan pendapatan dari upah (X_2) dan pendapatan bukan dari (X_3), hubungannya adalah $X_1 = X_2 + X_3$. Bila model ini diestimasi dengan metode kuadrat terkecil maka β_1 tidak diperoleh karena $[X'X]^{-1}$ tidak dapat dicari, kejadian inilah yang dinamakan multikolinieritas sempurna.

Dalam hal lain, misalkan:

$$\text{Konsumsi} = \beta_1 + \beta_2 \text{pendapatan} + \beta_3 \text{kekayaan} + \varepsilon$$

Ada hubungan positif antara kekayaan dan pendapatan, dalam arti seseorang yang kaya cenderung berpendapatan tinggi. Jika model ini diestimasi dengan metode kuadrat terkecil, β dapat ditentukan, tetapi variansi yang dihasilkan besar yang mengakibatkan galatnya besar dan interval kepercayaannya semakin besar, sehingga β kurang tepat. Disimpulkanlah terjadi multikolinieritas yang hampir sempurna. Permasalahan ini mengakibatkan dampak yang tidak baik bagi model. Pada analisis regresi, multikolinieritas dikatakan ada apabila beberapa kondisi berikut dipenuhi:

- Dua variabel berkorelasi sempurna (oleh karena itu vektor-vektor yang menggambarkan variabel tersebut adalah kolinier).
- Dua variabel bebas hampir berkorelasi sempurna yaitu koefisien korelasinya mendekati ± 1 .
- Kombinasi linier dari beberapa variabel bebas berkorelasi sempurna atau mendekati sempurna dengan variabel bebas yang lain.
- Kombinasi linier dari satu sub-himpunan variabel bebas berkorelasi sempurna dengan satu kombinasi linier dari sub-himpunan variabel bebas yang lain.

Pendeteksian Multikolinieritas

Ada beberapa cara untuk mengetahui ada tidaknya multikolinieritas diantaranya adalah:

- Nilai korelasi (korelasi antar variabel bebas)
Pendeteksian ini merupakan pendeteksian yang paling sederhana dan paling mudah. Jika elemen $|r_{ij}|$ mendekati satu atau $|r_{ij}| > 0.75$, maka X_i dan X_j mungkin adalah benar-benar masalah multikolinieritas.

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1p} & r_{2p} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_{ik} = \frac{1}{n-2} \sum_{r=1}^n \left(\frac{x_{ir} - \bar{x}_i}{\sqrt{S_{ii}}} \right) \left(\frac{x_{kr} - \bar{x}_k}{\sqrt{S_{kk}}} \right)$$

Untuk $i = k$ menghasilkan $r = 1$

- b. Faktor variansi inflasi (*Variance Inflation Factor/VIF*)

Adalah merupakan elemen diagonal utama dari invers matriks korelasi. Faktor variansi inflasi kecil, maka multikolinieritas lebih sederhana. Faktor inflasi yang melebihi 10 maka multikolinieritas dikatakan ada.

- c. Nilai Determinan

Nilai determinan terletak antara 0 dan 1. Bila nilai determinan 1, kolom matriks X adalah ortogonal dan bila nilainya 0 disana ada sebuah ketergantungan linier yang nyata antara kolom X . Nilai yang lebih kecil determinannya maka tingkat multikolinieritasnya lebih besar.

- d. Jika pengujian F untuk regresi adalah nyata tetapi pengujian pada koefisien regresi secara individu tidak nyata, maka multikolinieritas mungkin menjadi ada.

Analisis Komponen Utama

Analisis komponen utama merupakan teknik statistik yang digunakan untuk menjelaskan struktur variansi-kovariansi dari sekumpulan variabel melalui beberapa variabel baru dimana variabel baru ini saling bebas, dan merupakan kombinasi linier dari variabel asal. Selanjutnya variabel baru ini dinamakan komponen utama. Secara umum tujuan dari analisis komponen utama adalah mereduksi dimensi data sehingga lebih mudah untuk menginterpretasikan data-data tersebut.

Analisis komponen utama bertujuan untuk menyederhanakan variabel yang diamati dengan cara menyusutkan dimensinya. Hal ini dilakukan dengan menghilangkan korelasi variabel melalui transformasi variabel asal ke variabel baru yang tidak berkorelasi. Variabel baru (Y) disebut komponen utama yang merupakan hasil transformasi dari variabel asal X yang modelnya dalam bentuk catatan matriks adalah:

$$Y = AX \quad (1)$$

dengan:

A = matriks yang melakukan transformasi terhadap variabel asal x , sehingga diperoleh vektor komponen y .

Penjabarannya adalah sebagai berikut:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_p \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}$$

Curah hujan

Iklim di Kota Ambon adalah iklim laut tropis dan iklim musim, karena letak pulau Ambon di kelilingi oleh laut. Oleh karena itu iklim di sini sangat dipengaruhi oleh lautan dan berlangsung bersamaan dengan iklim musim, yaitu musim Barat atau Utara dan musim Timur atau Tenggara. Pergantian musim selalu diselingi oleh musim Pancaroba yang merupakan transisi dari kedua musim tersebut. Musim Barat umumnya berlangsung dari bulan Desember sampai dengan bulan Maret, sedangkan pada bulan April merupakan masa transisi ke musim Timur dan musim Timur berlangsung dari bulan Mei sampai dengan bulan Oktober disusul oleh masa pancaroba pada bulan Nopember yang merupakan transisi ke musim Barat.

tahun 2010 di Kota Ambon Curah Hujan dengan intensitas tinggi disertai angin kencang telah memicu terjadinya sejumlah bencana banjir, tanah longsor, dan terjangan angin puting beliung di beberapa Desa. Terjadinya penyimpangan iklim yang memicu tingginya curah hujan di Kota Ambon tidak terlepas dari beberapa faktor pengendali curah hujan seperti pemanasnya suhu muka laut, tekanan angin, kelembaban, penyinaran matahari, kecepatan angin. Hasil prediksi Badan Meteorologi Klimatologi dan Geofisika (BMKG). Pada bulan Agustus hingga September 2010 diprediksi Curah Hujan di Kota Ambon sedang, pada Oktober 2010 hingga Januari 2011 Curah Hujan di Kota Ambon tinggi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Regresi Komponen Utama

Regresi komponen utama merupakan teknik analisis regresi yang dikombinasikan dengan analisis komponen utama, dimana analisis komponen utama dijadikan sebagai tahap analisis. Analisis komponen utama merupakan analisis yang memperkecil dimensi variabel tanpa kehilangan banyak informasi, dengan tujuan menyederhanakan variabel yang diamati dengan cara mereduksi dimensinya.

Cara pembentukan regresi komponen utama melalui analisis komponen utama ada dua cara. Kedua cara tersebut digunakan tergantung pada kondisi range amatan pada variabel bebas.

1. Regresi komponen utama yang dibentuk berdasarkan matriks kovariansi

Misalkan matriks P adalah matriks ortogonal dengan memenuhi $P'P = PP' = 1$. Karena $W = X_c P$, maka proses persamaan regresi linier berganda menjadi regresi komponen utama yaitu :

$$Y = X_c + \varepsilon$$

$$Y = X_c P P' \beta + \varepsilon$$

$$Y = W \alpha + \varepsilon \tag{2}$$

Model regresi komponen utama yang telah direduksi menjadi k komponen utama adalah : $Y = \alpha_0 1 + W_k \alpha_k + \varepsilon$ (3)

Dengan :

X_c = matriks yang elemen-elemennya dikurang dengan rataannya yang mensyaratkan rataan nol dan variansi σ^2

Y = variabel tak bebas

α_0 = intersep

1 = vektor yang elemen – elemennya adalah 1 berukuran $n \times 1$

W_k = suatu matriks berukuran $n \times k$ yang elemennya terdapat komponen utama

α_k = vektor koefisien komponen utama berukuran $k \times 1$

ε = vektor galat berukuran $n \times 1$

2. Regresi komponen utama yang dibentuk berdasarkan matriks korelasi

Persamaan regresi komponen utama berdasarkan matriks korelasi yaitu variabel X_1, X_2, \dots, X_p diganti dengan variabel baku Z_p, Z_p, \dots, Z_p . Umumnya proses untuk memperoleh persamaan regresi komponen utama berdasarkan matriks korelasi mempunyai proses yang sama pada penurunan persamaan regresi komponen utama berdasarkan matriks kovariansi, maka model regresi komponen utama berdasarkan matriks korelasi adalah sebagai berikut:

$$Y = \alpha_0 1 + W_k \alpha_k + \varepsilon \tag{4}$$

Dengan :

Y = adalah variabel tak bebas

α_0 = intersep

1 = vektor yang elemen-elemennya adalah 1 berukuran $n \times 1$

W_k = suatu matriks berukuran $n \times k$ yang elemennya terdapat komponen utama, dimana $W_k = Z P_k$

α_k = vektor koefisien komponen utama berukuran $k \times 1$

ε = vektor galat berukuran $n \times 1$

Nilai Ekspektasi dan Variansi Penduga Koefisien Regresi Komponen Utama

Nilai ekspektasi bias penduga koefisien regresi komponen utama yaitu:

$$\sum_{m=k+1}^p ((n-1)\lambda_m)^{-1} e_m e_m' Z_c' Y$$

sementara itu, nilai variansi regresi komponen utama adalah

$$\sigma^2 ((n-1)\lambda_1)^{-1}$$

dimana nilai

$$Cov(W_1, W_j) = 0; i, j = 1, 2, \dots, p \text{ dan } i \neq j.$$

Sementara itu nilai variansi β_1^* adalah:

$$\beta_1^* = \frac{\hat{\sigma}^2}{n-1} \left(\sum_{m=1}^k \frac{e_{mj}^2}{\lambda_m} \right),$$

dan nilai variansi penduga adalah:

$$\hat{Y}_j = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{jj}(n-1)} \sum_{m=1}^k \frac{e_{mj}^2}{\lambda_m}$$

Analisis Curah Hujan di Kota Ambon tahun 2010 dengan Analisis Regresi Komponen Utama

Sebagai langkah awal untuk analisis regresi komponen utama, maka perlu dibentuk komponen utama dari p variabel yang kemudian direduksi menjadi 1, 2, ..., p komponen prinsip. Sebelum membentuk komponen utama maka perlu dilakukan uji kolinieritas untuk mengetahui apakah variabel bebas telah memenuhi kondisi tidak berkorelasi. Beberapa kriteria yang dapat digunakan untuk mengetahui adanya multikolinieritas diantara variabel bebas yaitu dengan menggunakan koefisien korelasi dan VIF (*Variance Inflation Factors*).

Berikut adalah data curah hujan Kota Ambon tahun 2010 beserta faktor-faktor yang mempengaruhinya yang disajikan dalam Tabel 3 berikut :

Tabel 3: Data curah hujan tahun 2010 Bulan Januari-Desember

Bulan	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅
Januari	165.6	27.3	48.8	1010.0	81.0	4.6
Ferbuari	32.2	28.0	72.8	1011.0	78.0	4.2
Maret	109.4	27.8	64.4	1010.8	81.0	3.8
April	113.0	27.6	66.6	1010.4	83.0	3.8
Mei	353.1	27.3	64.2	1009.4	87.0	3.5
Juni	833.0	26.0	33.9	1011.5	90.0	3.3
Juli	736.3	25.9	40.6	1010.9	90.0	3.3
Agustus	848.9	25.7	43.0	1011.5	91.0	3.5
September	213.3	26.4	60.9	1009.7	88.0	3.5
Oktober	105.8	27.0	62.4	1008.7	86.0	3.6
November	145.5	27.0	64.9	1008.4	85.0	3.6
Desember	275.6	26.8	45.0	1006.3	85.0	3.6

Berdasarkan pada Tabel 3, model regresi berganda dengan menggunakan metode kuadrat terkecil untuk menduga koefisien regresi adalah:

$$\hat{Y} = -68166 + 38x_1 - 13.5x_2 + 65.6x_3 + 28.8x_4 - 119x_5$$

Berdasarkan output minitab juga dapat disimpulkan bahwa semua koefisien regresi tersebut tidak nyata, dengan faktor inflasi ragam dari X_1, X_2, X_3, X_4 dan X_5 sebesar 15,4; 3,6; 1,1; 17,5; 4,5. Harga skor faktor inflasi ragam untuk X_1 dan X_4 nilainya lebih dari 10 sehingga menandakan adanya multikolinieritas. Selain itu juga untuk mendeteksi adanya multikolinieritas dapat dilihat dengan matriks korelasi dengan langkah sebagai berikut:

Akan dicari nilai rata-rata sebagai berikut:

Diketahui:

$$n = 12$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \dots + y_{11} + y_{12}}{12}$$

$$\bar{Y} = \frac{165.6 + 32.2 + 109.4 + \dots + 275.6}{12} = 327.642$$

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_{1i}}{n}$$

$$= \frac{x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + \dots + x_{111} + x_{112}}{12}$$

$$\bar{X}_1 = \frac{27.3 + 28 + 27.8 + \dots + 27 + 26.8}{12} = 26.9$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_{2i}}{n} = \frac{x_{21} + x_{22} + x_{23} + \dots + x_{211} + x_{212}}{12}$$

$$\bar{X}_2 = \frac{48.8 + 72.8 + 64.4 + \dots + 64.9 + 45}{12} = 55.625$$

$$\bar{X}_3 = \frac{\sum_{i=1}^n X_{3i}}{n} = \frac{x_{31} + x_{32} + x_{33} + \dots + x_{311} + x_{312}}{12}$$

$$\bar{X}_3 = \frac{1010 + 1011 + \dots + 1006.3}{12} = 1009.88$$

$$\bar{X}_4 = \frac{\sum_{i=1}^n X_{4i}}{n} = \frac{x_{41} + x_{42} + x_{43} + \dots + x_{411} + x_{412}}{12}$$

$$\bar{X}_4 = \frac{81 + 78 + 81 + 83 + \dots + 85 + 85}{12} = 85.4167$$

$$\bar{X}_5 = \frac{\sum_{i=1}^n X_{5i}}{n} = \frac{x_{51} + x_{52} + x_{53} + \dots + x_{512}}{12}$$

$$\bar{X}_5 = \frac{4.6 + 4.2 + 3.8 + \dots + 3.6 + 3.6}{12} = 3.692$$

Setelah mendapat nilai $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{X}_4$ maka akan dihitung V

$$V = (X - \bar{X})$$

$$= \begin{bmatrix} 27.3 - 26.9 & 48.8 - 55.625 & 1010.0 - 1009.8833 & 81 - 85.4167 & 4.6 - 3.6917 \\ 28.0 - 26.9 & 72.8 - 55.625 & 1011.0 - 1009.8833 & 78 - 85.4167 & 4.2 - 3.6917 \\ 27.8 - 26.9 & 64.4 - 55.625 & 1010.8 - 1009.8833 & 81 - 85.4167 & 3.8 - 3.6917 \\ 27.6 - 26.9 & 66.6 - 55.625 & 1010.4 - 1009.8833 & 83 - 85.4167 & 3.8 - 3.6917 \\ 27.3 - 26.9 & 64.2 - 55.625 & 1009.4 - 1009.8833 & 87 - 85.4167 & 3.5 - 3.6917 \\ 26.0 - 26.9 & 33.9 - 55.625 & 1011.5 - 1009.8833 & 90 - 85.4167 & 3.3 - 3.6917 \\ 25.9 - 26.9 & 40.6 - 55.625 & 1010.9 - 1009.8833 & 90 - 85.4167 & 3.3 - 3.6917 \\ 25.7 - 26.9 & 43.0 - 55.625 & 1011.5 - 1009.8833 & 91 - 85.4167 & 3.5 - 3.6917 \\ 26.4 - 26.9 & 60.9 - 55.625 & 1009.7 - 1009.8833 & 88 - 85.4167 & 3.5 - 3.6917 \\ 27.0 - 26.9 & 62.4 - 55.625 & 1008.7 - 1009.8833 & 86 - 85.4167 & 3.6 - 3.6917 \\ 27.0 - 26.9 & 64.9 - 55.62 & 1008.4 - 1009.8833 & 85 - 85.4167 & 3.6 - 3.6917 \\ 26.8 - 26.9 & 45.0 - 55.625 & 1006.3 - 1009.8833 & 85 - 85.4167 & 3.6 - 3.6917 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.4 & -6.825 & 0.1167 & -4.4167 & 0.9083 \\ 1.1 & 17.175 & 1.1167 & -7.4167 & 0.5083 \\ 0.9 & 8.775 & 0.9167 & -4.4167 & 0.1083 \\ 0.7 & 10.975 & 0.5167 & -2.4167 & 0.1083 \\ 0.4 & 8.575 & -0.4833 & 1.5833 & -0.1917 \\ -0.9 & -21.725 & 1.6167 & 4.5833 & -0.3917 \\ -1 & -15.025 & 1.0167 & 4.5833 & -0.3917 \\ -1.2 & -12.625 & 1.6167 & 5.5833 & -0.1917 \\ -0.5 & 5.275 & -0.1833 & 2.5833 & -0.1917 \\ 0.1 & 6.775 & -1.1833 & 0.5833 & -0.0917 \\ 0.1 & 9.275 & -1.4833 & -0.4167 & -0.0917 \\ -0.1 & -10.625 & -3.5833 & -0.4167 & -0.0917 \end{bmatrix}$$

Kemudian menghitung matriks Σ yang berisikan S dengan rumus:

$$S_{ik} = \frac{1}{n-1} \sum_{r=1}^n (x_{ir} - \bar{x}_i)(x_{kr} - \bar{x}_k)$$

Sehingga,

$$\Sigma = \frac{1}{12-1} \begin{bmatrix} 6.36 & 84.93 & -1.96 & -18.2 & 2.63 \\ 84.93 & 1742.3025 & -27.5202 & -369.4532 & 20.0336 \\ -1.96 & -27.5202 & 25.3367 & 7.1832 & 0.2718 \\ -18.2 & -369.4532 & 7.1832 & 182.9167 & -9.1622 \\ 2.163 & 20.0336 & 0.2718 & -9.1622 & 1.5492 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 6.36 & 84.93 & -1.96 & -18.2 & 2.63 \\ 84.93 & 1742.3025 & -27.5202 & -369.4532 & 20.0336 \\ -1.96 & -27.5202 & 25.3367 & 7.1832 & 0.2718 \\ -18.2 & -369.4532 & 7.1832 & 182.9167 & -9.1622 \\ 2.163 & 20.0336 & 0.2718 & -9.1622 & 1.5492 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.5782 & 7.7209 & -0.1782 & -1.6545 & 0.1966 \\ 7.7209 & 158.3925 & -2.5018 & -33.5867 & 1.8217 \\ -0.1782 & -27.5202 & 2.3033 & 0.6536 & 0.0247 \\ -1.6545 & -369.4532 & 7.1832 & 16.6288 & -0.8329 \\ 0.1966 & 20.0336 & 0.0247 & -0.8329 & 0.1408 \end{bmatrix}$$

Menghitung matriks baku, dengan asumsi $i \neq k$ dihasilkan $Cov(i, k) = 0$ sehingga dapat dalam matriks sebagai berikut:

$$(V^{\frac{1}{2}}) = \begin{bmatrix} \sqrt{0.5782} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{158.3925} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2.3033} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{16.6288} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{0.1408} \end{bmatrix}$$

$$(V^{\frac{1}{2}}) = \begin{bmatrix} 0.7604 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12.5854 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5177 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.0778 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3752 \end{bmatrix}$$

$$(V^{\frac{1}{2}})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0033 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3151 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0795 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2452 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.6652 \end{bmatrix}$$

Maka dapat dihasilkan matriks korelasi dengan rumus:

$$\rho = (V^{\frac{1}{2}})^{-1} \Sigma (V^{\frac{1}{2}})^{-1}$$

Sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0.8068 & -0.1544 & -0.5336 & 0.6891 \\ 0.8068 & 1 & -0.1309 & -0.6544 & 0.3856 \\ -0.1544 & -0.1309 & 1 & 0.0107 & 0.0481 \\ -0.5336 & -0.6544 & 0.0107 & 1 & -0.5443 \\ 0.6891 & 0.3856 & 0.0481 & -0.5443 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks korelasi terlihat bahwa ada hubungan kolinieritas antar variabel bebas yakni $r_{x_1x_2}$. Karena satuan pengukuran variabel

X_1, X_2, X_3, X_4 dan X_5 berbeda maka satuan itu perlu untuk dibakukan dengan jalan melakukan transformasi X ke dalam variable baku Z dengan rumus:

$$Z = \left(V^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} (X - \mu)$$

Diketahui:

$$\bar{X}_1 = 26.9, \quad \bar{X}_2 = 55.626, \quad \bar{X}_3 = 1009.8833, \\ \bar{X}_4 = 85.4167, \quad \bar{X}_5 = 3.6917$$

$$\sqrt{S_{11}} = 0.7604, \quad \sqrt{S_{22}} = 12.5854, \\ \sqrt{S_{33}} = 1.5177, \quad \sqrt{S_{44}} = 4.0778, \\ \sqrt{S_{55}} = 0.3752$$

Akan dicari nilai Z :

$$Z_1 = \frac{(X_{1i} - \bar{X})}{\sqrt{S_{11}}} = \frac{(X_{1i} - 26.9)}{0.7604} \\ \frac{(X_{11} - \bar{X})}{\sqrt{S_{11}}} = \frac{(27.3 - 26.9)}{0.7604} = \frac{0.4}{0.7604} = 0.5260 \\ \frac{(X_{12} - \bar{X})}{\sqrt{S_{11}}} = \frac{(28.0 - 26.9)}{0.7604} = \frac{1.1}{0.7604} = 1.4466 \\ \frac{(X_{13} - \bar{X})}{\sqrt{S_{11}}} = \frac{(27.8 - 26.9)}{0.7604} = \frac{0.9}{0.7604} = 1.1836 \\ \vdots \\ \frac{(X_{111} - \bar{X})}{\sqrt{S_{11}}} = \frac{(27.0 - 26.9)}{0.7604} = \frac{0.1}{0.7604} = 0.1315 \\ \frac{(X_{112} - \bar{X})}{\sqrt{S_{11}}} = \frac{(26.8 - 26.9)}{0.7604} = \frac{-0.1}{0.7604} = -0.1315$$

$$Z_2 = \frac{(X_{2i} - \bar{X})}{\sqrt{S_{22}}} = \frac{(X_{2i} - 55.625)}{12.5854} \\ \frac{(X_{21} - \bar{X})}{\sqrt{S_{22}}} = \frac{(48.8 - 55.625)}{12.5854} = \frac{-6.825}{12.5854} = -0.5423 \\ \frac{(X_{22} - \bar{X})}{\sqrt{S_{22}}} = \frac{(72.8 - 55.625)}{12.5854} = \frac{17.175}{12.5854} = 1.3647 \\ \frac{(X_{23} - \bar{X})}{\sqrt{S_{22}}} = \frac{(64.4 - 55.625)}{12.5854} = \frac{8.775}{12.5854} = -0.6972 \\ \vdots \\ \frac{(X_{211} - \bar{X})}{\sqrt{S_{22}}} = \frac{(64.9 - 55.625)}{12.5854} = \frac{9.275}{12.5854} = 0.7369 \\ \frac{(X_{212} - \bar{X})}{\sqrt{S_{22}}} = \frac{(45.0 - 55.625)}{12.5854} = \frac{-10.625}{12.5854} = -0.8442$$

$$Z_3 = \frac{(X_{3i} - \bar{X})}{\sqrt{S_{33}}} = \frac{(X_{3i} - 1009.8833)}{1.5177}$$

$$\frac{(X_{31} - \bar{X})}{\sqrt{S_{33}}} = \frac{(1010 - 1009.8833)}{1.5177} = \frac{0.1167}{1.5177} = 0.0769$$

$$\frac{(X_{32} - \bar{X})}{\sqrt{S_{33}}} = \frac{(1011 - 1009.8833)}{1.5177} = 0.7358$$

$$\frac{(X_{33} - \bar{X})}{\sqrt{S_{33}}} = \frac{(1010.8 - 1009.8833)}{1.5177} = 0.6040 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\frac{(X_{311} - \bar{X})}{\sqrt{S_{33}}} = \frac{(1008.4 - 1009.8833)}{1.5177} = -0.9773$$

$$\frac{(X_{312} - \bar{X})}{\sqrt{S_{33}}} = \frac{(1006.3 - 1009.8833)}{1.5177} = -2.3610$$

$$Z_4 = \frac{(X_{4i} - \bar{X})}{\sqrt{S_{44}}} = \frac{(X_{4i} - 85.4167)}{4.0778}$$

$$\frac{(X_{41} - \bar{X})}{\sqrt{S_{44}}} = \frac{(81 - 85.4167)}{4.0778} = \frac{-4.4167}{4.0778} = -1.0831$$

$$\frac{(X_{42} - \bar{X})}{\sqrt{S_{44}}} = \frac{(78 - 85.4167)}{4.0778} = \frac{-7.4167}{4.0778} = -1.8188$$

$$\frac{(X_{43} - \bar{X})}{\sqrt{S_{44}}} = \frac{(81 - 85.4167)}{4.0778} = \frac{-4.4167}{4.0778} = -1.0831 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\frac{(X_{411} - \bar{X})}{\sqrt{S_{44}}} = \frac{(85 - 85.4167)}{4.0778} = -0.1022$$

$$\frac{(X_{412} - \bar{X})}{\sqrt{S_{44}}} = \frac{(85 - 85.4167)}{4.0778} = -0.1022$$

$$Z_5 = \frac{(X_{5i} - \bar{X})}{\sqrt{S_{55}}} = \frac{(X_{5i} - 3.6917)}{0.3752}$$

$$\frac{(X_{51} - \bar{X})}{\sqrt{S_{55}}} = \frac{(4.6 - 3.6917)}{0.3752} = \frac{0.9083}{0.3752} = 2.4208$$

$$\frac{(X_{52} - \bar{X})}{\sqrt{S_{55}}} = \frac{(4.2 - 3.6917)}{0.3752} = \frac{0.5083}{0.3752} = 1.3547$$

$$\frac{(X_{53} - \bar{X})}{\sqrt{S_{55}}} = \frac{(3.8 - 3.6917)}{0.3752} = \frac{0.1083}{0.3752} = 0.2886 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\frac{(X_{511} - \bar{X})}{\sqrt{S_{55}}} = \frac{(3.6 - 3.6917)}{0.3752} = -0.2444$$

$$\frac{(X_{512} - \bar{X})}{\sqrt{S_{55}}} = \frac{(3.6 - 3.6917)}{0.3752} = -0.2444$$

Niai-nilai dari Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 dan Z_5 kemudian disajikan dalam Tabel 4 berikut:

Tabel 4: Hasil Transformasi ke Z dari Data Pada Tabel 4

No	Bulan	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
1	Januari	0.526	-0.542	0.077	-1.083	2.421
2	Februari	1.447	1.365	0.736	-1.819	1.355
3	Maret	1.184	0.697	0.604	-1.083	0.289
4	April	0.921	0.872	0.340	-0.593	0.289
5	Mei	0.526	0.681	-0.318	0.388	-0.511
6	Juni	-1.184	-1.726	1.065	1.124	-1.044
7	Juli	-1.315	-1.194	0.670	1.124	-1.044
8	Agustus	-1.578	-1.003	1.065	1.369	-0.511
9	September	-0.658	0.419	-0.120	0.634	-0.511
10	Oktober	0.132	0.538	-0.779	0.143	-2.244
11	November	0.132	0.737	-0.977	-0.102	-2.244

12	Desember	0.1315	0.8442	-2.361	-0.1022	2.2444
----	----------	--------	--------	--------	---------	--------

Akan dicari nilai rata-rata dari Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 , dan Z_4 sebagai berikut:

Diketahui:

$$n = 12$$

$$\bar{Z}_1 = \sum_{i=1}^n \frac{Z_{1i}}{n}$$

$$\bar{Z}_1 = \frac{z_{11} + z_{12} + z_{13} + z_{14} + \dots + z_{111} + z_{112}}{12}$$

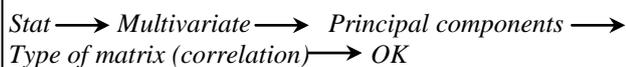
$$\bar{Z}_1 = \frac{0.5260 + 1.4466 + \dots + (-0.1315)}{12} = \frac{0}{12} = 0$$

$$\bar{Z}_2 = \sum_{i=1}^n \frac{Z_{2i}}{n}$$

$$\bar{Z}_2 = \frac{z_{21} + z_{22} + z_{23} + z_{24} + z_{25} + \dots + z_{211} + z_{212}}{12}$$

$$\bar{Z}_2 = \frac{(-0.5425) + \dots + (-0.8442)}{12} = -0.0833$$

Untuk analisis selanjutnya akan digunakan program minitab. Karena skala pengukurannya belum sama sehingga data pada table 5 harus ditransformasikan (persamaan 27) kemudian dianalisis dengan analisis komponen utama yang didasarkan pada matriks korelasi dengan langkah sebagai berikut:



dan diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 5: Tabel komponen utama yang diturunkan dari matriks korelasi

Variabel	Komponen Utama				
	I	II	III	IV	V
W_1	0.544	0.045	-0.157	0.507	0.649
W_2	0.447	0.154	-0.689	-0.533	-0.136
W_3	-0.086	-0.939	-0.324	0.076	0.000
W_4	-0.545	0.078	-0.173	-0.393	0.716
W_5	0.448	-0.294	0.604	-0.547	0.219
Nilai Eigen	3.160	1.029	0.648	0.131	0.032
Proporsi total variansi	0.632	0.206	0.13	0.026	0.006
Proporsi variansi kumulatif	0.632	0.838	0.967	0.994	1

Berdasarkan Tabel 7, komponen utama yang mewakili yaitu komponen utama W_1 dan W_2 utama sesuai dengan kriteria 80% dari proporsi total variansi yaitu 83.8%. Selanjutnya untuk meregresikan komponen W_1 dan W_2 maka perlu dihitung skor komponen utama W_1 dan W_2 dengan persamaan:

$$W_i = e_j'Z$$

$$W_1 = e_1'Z_{1i}$$

$$W_{11} = 0.544Z_{11} + 0.045Z_{12} - \dots - 0.649Z_{15}$$

$$= 0.544(0.5260) + \dots - 0.649(2.2408)$$

$$= -1.7538$$

$$W_{12} = 0.544Z_{21} + 0.045Z_{22} - \dots - 0.649Z_{25}$$

$$= 0.544(1.4466) + \dots - 0.649(1.3547)$$

$$= -1.0687$$

$$W_{13} = 0.544Z_{31} + 0.045Z_{32} - \dots - 0.649Z_{35}$$

$$= 0.544(1.1836) + \dots - 0.649(0.2886)$$

$$= -0.5498$$

$$W_{14} = 0.544Z_{41} + 0.045Z_{42} - \dots - 0.649Z_{45}$$

$$= 0.544(0.9206) + \dots - 0.649(0.2886)$$

$$= -0.0011$$

$$W_{15} = 0.544Z_{51} + 0.045Z_{52} - \dots - 0.649Z_{55}$$

$$= 0.544(0.5260) + \dots - 0.649(-0.5109)$$

$$= 0.8952$$

$$W_{16} = 0.544Z_{61} + 0.045Z_{62} - 0.157Z_{63} + 0.507Z_{64}$$

$$- 0.649Z_{65}$$

$$= 0.544(-1.1836) + \dots - 0.649(-1.0439)$$

$$= 0.3584$$

$$W_{17} = 0.544Z_{71} + 0.045Z_{72} - \dots - 0.649Z_{75}$$

$$= 0.544(-1.3151) + \dots - 0.649(-1.0439)$$

$$= 0.3729$$

$$W_{18} = 0.544Z_{81} + 0.045Z_{82} - \dots - 0.649Z_{85}$$

$$= 0.544(-1.5781) + \dots - 0.649(-0.5109)$$

$$= -0.0450$$

$$W_{19} = 0.544Z_{91} + 0.045Z_{92} - \dots - 0.649Z_{95}$$

$$= 0.544(-0.6575) + \dots - 0.649(-0.5109)$$

$$= 0.3329$$

$$W_{110} = 0.544Z_{81} + 0.045Z_{82} - \dots - 0.649Z_{85}$$

$$= 0.544(0.1315) + \dots - 0.649(-0.2444)$$

$$= 0.4492$$

$$W_{111} = 0.544Z_{111} + 0.045Z_{112} - \dots - 0.649Z_{115}$$

$$= 0.544(0.1315) + \dots - 0.649(-0.244)$$

$$= 0.3649$$

$$W_{112} = 0.544Z_{121} + 0.045Z_{122} - \dots - 0.649Z_{125}$$

$$= 0.544(-0.1315) + \dots - 0.649(-0.244)$$

$$= 0.3681$$

$$W_2 = e_2'Z_{2i}$$

$$W_{21} = 0.447Z_1 + 0.154Z_2 - \dots - 0.136Z_5$$

$$= 0.447Z_{11} + 0.154Z_{12} - \dots - 0.136Z_{15}$$

$$= 0.4223$$

$$W_{26} = 0.447Z_{61} + 0.154Z_{62} - \dots - 0.136Z_{65}$$

$$= 0.447(-1.184) + \dots - 0.136(-1.044)$$

$$= -2.0258$$

$$W_{27} = 0.447Z_{71} + 0.154Z_{72} - 0.689Z_{73} - 0.533Z_{74}$$

$$- 0.136Z_{75}$$

$$= 0.447(-1.315) + \dots - 0.136(-1.044)$$

$$= -1.6901$$

$$W_{28} = 0.447Z_{81} + 0.154Z_{82} - \dots - 0.136Z_{85}$$

$$= 0.447(-1.578) + \dots - 0.136(-0.5109)$$

$$= -2.2541$$

$$W_{29} = 0.447Z_{91} + \dots - 0.136Z_{95}$$

$$= 0.447(-0.6575) + \dots - 0.136(-0.511)$$

$$= -0.4144$$

$$\begin{aligned} W_{210} &= 0.447Z_{101} + 0.154Z_{102} - \dots - 0.136Z_{105} \\ &= 0.447(0.132) + \dots - 0.136(-0,244) \\ &= 0.6359 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{211} &= 0.447Z_{111} + \dots - 0.136Z_{115} \\ &= 0.447(0.1315) + \dots - 0.689(-0.9773) \\ &= 0.9334 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{212} &= 0.447Z_{121} + \dots - 0.136Z_{125} \\ &= 0.447(-0.132) + \dots - 0.136(-0,244) \\ &= 1.5256 \end{aligned}$$

Hasil di atas kemudian di sajikan dalam Tabel 6 sebagai berikut:

Tabel 6: Tabel harga skor komponen utama

No.	Y	W_1	W_2
1	165.6	-1.7538	0.3469
2	32.2	-1.0687	0.6873
3	109.4	-0.5498	1.1475
4	113	-0.0011	0.5878
5	353.1	0.8952	0.4223
6	833	0.3584	-2.0258
7	736.3	0.3729	-1.6902
8	848.9	-0.045	-2.2541
9	213.3	0.3329	-0.4144
10	105.8	0.4492	0.6359
11	145.5	0.3649	0.9334
12	275.6	0.3681	1.5256

Dari Tabel 6 akan dibentuk regresi komponen utama dengan menggunakan metode kuadrat terkecil biasa :

1. Dihitung secara manual

Dari perhitungan sebelumnya telah diketahui:

$n = 12$ dan

$$\sum_{i=1}^{12} y = 3931.7$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} W_{1i} &= w_{11} + w_{12} + \dots + w_{111} + w_{112} \\ &= (-1.7538) + (-1.0687) + \dots + 0.3681 = -0.2768 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} W_{2i} &= w_{21} + w_{22} + w_{23} + \dots + w_{211} + w_{212} \\ &= 0.3469 + 0.6873 + \dots + 1.5256 = -0.0978 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} (W_{1i})^2 &= (w_{11})^2 + (w_{12})^2 + (w_{13})^2 + \dots + (w_{112})^2 \\ &= (-1.7538)^2 + \dots + (0.3681)^2 = 6.1725 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} (W_{2i})^2 &= (w_{21})^2 + (w_{22})^2 + \dots + (w_{212})^2 \\ &= (0.3469)^2 + (0.6873)^2 + \dots + (1.5256)^2 = 18.2497 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} W_{1i}W_{2i} &= w_{11}w_{21} + w_{12}w_{22} + \dots + w_{112}w_{212} \\ &= (-1.7538)(0.3469) + \dots + (0.3681)(1.5256) \\ &= -1.8014 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} W_{1i}Y_i &= w_{11}Y_{11} + w_{12}Y_{12} + \dots + w_{112}Y_{112} \\ &= (-1.754)(165.6) + \dots + (0.368)(275.6) \\ &= 738.969 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} W_{2i}Y_i &= w_{21}Y_{11} + \dots + w_{212}Y_{112} \\ &= (0.347)(165.6) + \dots + (1.527)(275.6) \\ &= -3889.6899 \end{aligned}$$

Hasil diatas kemudian disajikan dalam Tabel 7.

Tabel 7. Tabel hasil penyelesaian untuk membentuk persamaan linier

No	Y	W_1^2	W_2^2	W_1W_2	W_1Y	W_2Y
1	165.6	3.076	0.120	-0.608	-290.429	57.447
2	32.2	1.142	0.472	-0.735	-34.412	22.131
3	109.4	0.302	1.317	-0.631	-60.148	125.537
4	113	0.001	0.346	-0.001	-0.124	66.421
5	353.1	0.801	0.178	0.378	361.095	149.114
6	833	0.129	4.104	-0.726	298.547	-1687.491
7	736.3	0.139	2.857	-0.630	274.566	-1244.494
8	848.9	0.002	5.081	0.101	-38.201	1913.506
9	213.3	0.111	0.172	-0.138	71.008	-88.392
10	105.8	0.202	0.404	0.286	47.525	67.278
11	145.5	0.133	0.871	0.341	53.093	135.81
12	275.6	0.136	2.328	0.562	101.448	420.455
Σ	3931.7	6.173	18.25	-1.801	738.969	-3889.69

$$12a - 0.2768b_1 - 0.0978b_2 = 3913.7$$

(38)

$$-0.2768a + 6.1725b_1 - 1.8014b_2 = 738.9686$$

(39)

$$-0.0978a - 1.8014b_1 + 18.2497b_2 = -3889.6899$$

Eliminasi persamaan (38) dan (40) diperoleh persamaan (41), sebagai berikut :

$$-21.6439b_1 + 218.9868b_2 = -46293.518$$

(41)

Eliminasi persamaan (39) dan (40) diperoleh persamaan (42), sebagai berikut :

$$1.1023b_1 + 5.2277b_2 = 1076.9397$$

(42)

Eliminasi persamaan (41) dan (42), diperoleh nilai $b_2 = -204$, kemudian substitusi nilai b_2 ke persamaan (41) atau persamaan (42) diperoleh nilai $b_1 = 74.9$.

Substitusikan nilai $b_1 = 74.9$ dan $b_2 = -204$ ke persamaan (38), (39) atau (40), diperoleh nilai $a = 328$. Sehingga diperoleh persamaan regresi yang dapat dianalisis dengan program minitab, yaitu:

$$\hat{Y} = 328 + 74.9 W_1 - 204 W_2$$

Langkah selanjutnya setelah model diperoleh maka akan dilakukan uji keberartian dari model tersebut, dengan menggunakan uji regresi secara parsial

$H_0 : \beta_j = 0$ artinya koefisien regresi ke- j tidak signifikan atau variabel bebas ke- j tidak berpengaruh nyata terhadap Y

$H_1 : \beta_j \neq 0$ artinya koefisien regresi ke- j signifikan atau variabel bebas ke- j berpengaruh nyata terhadap Y

Kriteria tolak H_0 bila $F_{hitung} > F_{tabel}$

Dari perhitungan sebelumnya diketahui bahwa:

$$a = 328, \quad b_1 = 74.9, \quad b_2 = -204,$$

$$\bar{W}_1 = -0.02, \quad \bar{W}_2 = -0.01$$

Akan dicari nilai \hat{Y} dengan menggunakan persamaan:

$$\hat{Y}_i = 328 + 74.9(W_{1i}) - 204(W_{2i})$$

$$\hat{Y}_1 = 328 + 74.9(W_{11}) - 204(W_{21}) \\ = 328 + 74.9(-1.17538) - 204(0.3469) = 125.53$$

$$\hat{Y}_2 = 328 + 74.9(W_{12}) - 204(W_{22}) \\ = 328 + 74.9(-1.0687) - 204(0.6873) = 107.7452$$

$$\hat{Y}_3 = 328 + 74.9(W_{13}) - 204(W_{23}) \\ = 328 + 74.9(-0.5498) - 204(1.1475) = 56.73$$

$$\hat{Y}_4 = 328 + 74.9(W_{14}) - 204(W_{24}) \\ = 328 + 74.9(-0.0011) - 204(0.5878) = 208.01$$

$$\hat{Y}_5 = 328 + 74.9(W_{15}) - 204(W_{25}) \\ = 328 + 74.9(0.8952) - 204(0.4223) = 308.9$$

$$\hat{Y}_6 = 328 + 74.9(W_{16}) - 204(W_{26}) \\ = 328 + 74.9(0.3584) - 204(-2.0258) = 768.1$$

$$\hat{Y}_7 = 328 + 74.9(W_{17}) - 204(W_{27}) \\ = 328 + 74.9(0.3729) - 204(-1.6902) = 700.7$$

$$\hat{Y}_8 = 328 + 74.9(W_{18}) - 204(W_{28}) \\ = 328 + 74.9(-0.045) - 204(-2.2541) = 784.47$$

$$\hat{Y}_9 = 328 + 74.9(W_{19}) - 204(W_{29}) \\ = 328 + 74.9(0.3329) - 204(-0.4144) = 437.46$$

$$\hat{Y}_{10} = 328 + 74.9(W_{110}) - 204(W_{210}) \\ = 328 + 74.9(0.4492) - 204(0.6359) = 231.93$$

$$\hat{Y}_{11} = 328 + 74.9(W_{111}) - 204(W_{211}) \\ = 328 + 74.9(0.3649) - 204(0.9334) = 164.92$$

$$\hat{Y}_{12} = 328 + 74.9(W_{112}) - 204(W_{212}) \\ = 328 + 74.9(0.3681) - 204(1.5256) = 44.35$$

Setelah memperoleh nilai \hat{Y}_i kemudian dicari nilai

$$(Y_i - \hat{Y}_i)^2, (W_{1i} - \bar{W}_1)^2 \text{ dan } (W_{2i} - \bar{W}_2)^2 :$$

$$\sum_{i=1}^{12} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = (y_1 - \hat{y}_1)^2 + (y_2 - \hat{y}_2)^2 + \dots + (y_{12} - \hat{y}_{12})^2$$

$$\sum_{i=1}^{12} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = (165.6 - 54)^2 + \dots + (275.6 - 44.35)^2$$

$$= (40.06)^2 + (-75.55)^2 + \dots + (-19.42)^2 + (231.25)^2$$

$$= 1605.15 + 5707.08 + \dots + 53476.97 =$$

$$150682.8$$

$$\sum_{i=1}^{12} (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = (-202.11)^2 + \dots + (-283.29)^2$$

$$= 40846.96 + 48354.6 + \dots + 80256.23 = 877099.31$$

$$= (-1.7538 - (-0.02))^2 + (-1.0687 - (-0.02))^2$$

$$+ (1.5256 - (-0.01))^2$$

$$= (0.3569)^2 + (0.6973)^2 + \dots + (1.5356)^2$$

$$\sum_{i=1}^{12} (W_{1i} - \bar{W}_1)^2 = (w_{11} - \bar{w}_{11})^2 + \dots + (w_{112} - \bar{w}_{112})^2$$

$$\sum_{i=1}^{12} (W_{2i} - \bar{W}_2)^2 = 0.13 + 0.49 + \dots + 2.36 = 18.26$$

Maka nilai :

$$(W_{1i} - \bar{W}_1)^2 = 8.21$$

$$(W_{2i} - \bar{W}_2)^2 = 18.26$$

$$n = 12$$

$$p = 6$$

Statistik uji:

$$Sb_1 = \frac{\sqrt{\frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-p}}}{\sqrt{\sum(W_{1i} - \bar{W}_1)^2}} = \frac{\sqrt{\frac{150682.8}{12-6}}}{8.21} = \frac{158.47}{2.87} = 55.22$$

$$t_1 = \frac{b_1}{Sb_1} = \frac{74.9}{55.22} = 1.4$$

Setelah diperoleh komponen utama maka untuk keperluan analisis selanjutnya hanya diperlukan komponen W_1 dan W_2 karena mampu menjelaskan 83.8% proporsi total variansi, dan persamaan regresi komponen utama yaitu:

$$Sb_2 = \frac{\sqrt{\frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-p}}}{\sqrt{\sum(W_{2i} - \bar{W}_2)^2}} = \frac{\sqrt{\frac{150682.8}{12-6}}}{\sqrt{18.26}} = \frac{158.47}{4.27} = 37.1$$

$$t_2 = \frac{b_2}{Sb_2} = \frac{-204}{37.1} = -5.5$$

Kemudian nilai \hat{Y} ditransformasikan ke nilai Z sebagai berikut:

$$\hat{Y} = 328 + 74.9(0.544Z_1 + 0.045Z_2 - 0.157Z_3 + 0.507Z_4 + 0.649Z_5) - 204(0.447Z_1 + 0.154Z_2 - 0.689Z_3 - 0.533Z_4 - 0.136Z_5)$$

$$\hat{Y} = 328 + 40.746Z_1 - 91.188Z_1 + \dots + 48.648Z_5 + 27.744Z_5$$

$$\hat{Y} = 328 - 50.442Z_1 - 28.045Z_2 + 128.797Z_3 + 146.705Z_4 + 76.392Z_5$$

Sehingga diperoleh nilai regresi komponen utama adalah:

$$\hat{Y} = 328 - 50.442Z_1 - 28.045Z_2 + 128.797Z_3 + 146.705Z_4 + 76.392Z_5$$

KESIMPULAN

Dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat ditarik kesimpulan bahwa:

1. Estimasi yang diperoleh dengan menggunakan metode kuadrat terkecil adalah:

$$\hat{Y} = -68166 + 38X_1 - 13.5X_2 + 65.6X_3 + 28.8X_4 - 119X_5$$

2. Adanya multikolinieritas dalam persamaan regresi tersebut, ini terlihat dari besarnya nilai korelasi antar variabel bebas $r_{x_1x_2} = 0.8068$ dan nilai VIF untuk X_1 dan X_4 lebih dari 10.

$$\hat{Y} = 328 + 74.9 W_1 - 204 W_2$$

3. Hasil transformasi persamaan regresi komponen utama dari $W \rightarrow Z$ sehingga diperoleh persamaan regresi komponen utama adalah:

$$\hat{Y}=328-50.442Z_1 - 28.045Z_2 + 128.797Z_3 + 146.705Z_4 + 76.392Z_5$$

DAFTAR PUSTAKA

- Djalal, N, *et al.* 2002. *Penggunaan Teknik Ekonometrika*. Edisi Revisi. Jakarta: PT. Raja Grafindo Persada.
- Harvey Mudd College.2009 *Karhunen-Loeve Transform (KLT)*. [www:/http://E:/Analisis_komponen_utama.htm](http://E:/Analisis_komponen_utama.htm). Diakses pada 22 Mei 2011 jam 16.20
- Johnson, R, A. & Wichern, D, W. 2002. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. 5th edition. Pearson education International.
- Myers, R.H. & Milton, J.S. 1991. *A First Course In The Theory Of Linier Statistical Models*. PWS-KENT Publishing Company, Boston.
- Pradipta, N. 2009. *Metodel Regresi Ridge untuk Mengatasi Model Regresi Linier Berganda yang Mengandung Multikolonieritas*. Skripsi Statistika. Fakultas Matematika dan ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sumatra utara: Medan.
- Rencher, A. C. 1998. *Multivariate Statistical Inference and Application*. Wiley-Interscience Publication, Brigham.
- Supranto, J. 1984. *Ekonometrik*. Jilid 2. Jakarta: LPEF Universitas Indonesia.

OPTIMASI PLAZA TOL DENGAN MENGGUNAKAN MIXED INTEGER NON-LINEAR PROGRAMMING

BERNY P. TOMASOUW¹, FRANCIS Y. RUMLAUWANG²

^{1,2} Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

e-mail: bernypebo@yahoo.co.id

ABSTRAK

Bagian yang cukup penting dalam sistem jalan tol adalah plaza tol yang merupakan tempat pelayanan dan pembayaran sebelum masuk tol. Plaza tol biasanya terdiri dari beberapa jalur sehingga memudahkan proses pembayaran dan pelayanan. Pengelola plaza tol harus memberikan pelayanan yang terbaik kepada pengguna jalan tol, sehingga salah satu masalah yang dihadapi adalah bagaimana meminimumkan waktu tunggu dan biaya operasional. Penelitian ini bertujuan untuk mendesain model optimasi plaza tol dengan menggunakan *Mixed Integer Non Linier Programming* (MINLP). Dari hasil yang diperoleh dapat ditentukan kombinasi yang tepat dari berbagai tipe jalur agar penggunaan masing-masing jalur optimal sehingga bisa meminimalkan waktu tunggu dan biaya operasional tiap jalur.

Kata kunci: Jalan tol, *Mixed Integer Non Linier Programming*, optimasi, plaza tol.

PENDAHULUAN

Jalan tol (di Indonesia disebut juga sebagai jalan bebas hambatan) adalah suatu jalan alternatif untuk mengatasi kemacetan lalu lintas ataupun untuk mempersingkat jarak dari satu tempat ke tempat lain. Untuk menikmatinya, para pengguna jalan tol harus membayar sesuai tarif yang berlaku. Penetapan tarif biasanya didasarkan pada golongan kendaraan dan panjangnya rute yang dilalui. Bagian yang cukup penting dalam sistem jalan tol adalah plaza tol yang merupakan tempat pelayanan dan pembayaran sebelum masuk tol.

Plaza tol terdiri dari beberapa jalur sehingga memudahkan proses pembayaran dan pelayanan. Secara umum terdapat 3 tipe jalur pada plaza tol yang dibagi menurut sistem pembayarannya, yakni :

1). Tipe manual

Sistem pembayaran pada jalur tipe ini dilayani oleh petugas dan dilakukan secara manual.

2). Tipe ACM

Sistem pembayarannya pada jalur tipe ini dilakukan dengan bantuan mesin pembayaran seperti dengan kartu kredit, namun masih tetap diawasi oleh petugas.

3). Tipe ETC (Electronic Toll system)

Sistem pembayaran pada jalur tipe ini murni sepenuhnya secara elektronik tanpa ada petugas. Tipe jalur

ini biasa ditemukan pada negara-negara yang sudah maju dan biasa dipakai oleh pengguna yang sering melewati tol. Setiap pengguna jalur ini harus membuat kartu keanggotaan dan akan diberikan alat pengenalan pada kendaraannya.

Tipe-tipe jalur di atas memiliki biaya dan selang waktu tunggu masuk tol yang berbeda-beda. Jelas bahwa tipe ETC memiliki biaya yang tertinggi namun selang waktu tunggu sangat singkat, kemudian diikuti oleh tipe Gabungan, tipe ACM dan tipe manual. Dengan alasan biaya masuk maka para pengguna jalan tol umumnya memilih masuk jalur tipe manual, walaupun mereka harus lama mengantri.

Pengelola plaza tol harus memberikan pelayanan yang terbaik kepada pengguna jalan tol, sehingga salah satu masalah yang dihadapi adalah bagaimana meminimumkan waktu tunggu dan meminimumkan biaya operasional. Sebagai contoh jika pada jalur tipe manual terjadi antrian yang sangat panjang sedangkan pada jalur tipe ACM terjadi kekosongan maka pengelola plaza tol mengambil keputusan untuk menukar jalur tipe ACM menjadi tipe manual sehingga dapat mengatasi masalah antrian yang panjang.

Dalam penelitian ini akan ditentukan kombinasi yang tepat dari berbagai tipe jalur agar penggunaan masing-

masing jalur optimal sehingga bisa meminimalkan waktu tunggu dan biaya operasional tiap jalur.

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bukunya yang berjudul “*Introduction to Queueing Theory*”, Cooper, R. B. (1981) membahas teori sistem antrian M/G/1. Teori ini dapat digunakan dalam menentukan sistem antrian pada plaza tol khususnya panjang antrian kendaraan.

Selanjutnya, dalam penelitiannya yang berjudul “*The Toll Plaza Optimization Problem: Design, Operations, and Strategies*”, Kim, S. (2009) membuat model optimasi plaza tol dengan menggunakan teori sistem antrian M/G/1. Salah satu bagian yang dioptimalkan dari model ini adalah jumlah jalur yang dalam hal ini harus berupa bilangan bulat. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan digunakan Mixed Integer Non-Linear Programming untuk memperoleh jumlah jalur yang optimal dari model optimasi plaza tol tersebut

Mixed Integer Non-Linear Programming (MINLP)

Mixed integer non-linier programming merupakan gabungan antara mixed integer linier programming (MILP) dengan non-linier programming (NLP). Bentuk umum model MINLP adalah sebagai berikut

$$\text{Min } f(x, y)$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} g(x, y) &\leq 0 \\ x &\in X \\ y &\in Y \text{ integer.} \end{aligned}$$

Pada MINLP, fungsi objektif atau fungsi kendalanya dapat berupa fungsi non-linier.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Optimasi Plaza Tol dengan MINLP

Untuk mempermudah penurunan model optimasi plaza tol dengan MINLP maka di berikan beberapa notasi penunjang sebagai berikut :

Notasi	Arti
N	Jumlah keseluruhan jalur (kapasitas plaza tol).
K	Jumlah tipe jalur.
n_i	Jumlah jalur tipe i yang dibuka.
b_i	Jumlah minimum jalur tipe i yang dibuka.
l_i	Batas bawah jumlah jalur tipe i yang dibuka.
u_i	Batas atas jumlah jalur tipe i yang dibuka.
λ	Total rata-rata kedatangan kendaraan pada plaza tol (per satuan waktu).
λ_i	Rata-rata jumlah kendaraan yang masuk jalur tipe i .
μ_i	Rata-rata durasi pelayanan pada jalur tipe i (per satuan waktu).

σ_i	Standar deviasi durasi pelayanan pada jalur tipe i .
L_i	Rata-rata jumlah kendaraan yang antri pada jalur tipe i .
w_i	Rata-rata waktu tunggu kendaraan pada jalur tipe i .
s_i	Waktu standar pelayanan pada jalur tipe i .
c_i	Rata-rata biaya operasional pada jalur tipe i .
d	Rata-rata nilai waktu dari pengguna yang berada dalam antrian.
C_o	Total biaya operasional plaza tol (per satuan waktu).
C_w	Total biaya tunggu-pengguna pada plaza tol (per satuan waktu).
Z	Jumlah total biaya operasi dan biaya tunggu-pengguna.

Penurunan Fungsi Kendala

a. Kapasitas Plaza Tol

Agar plaza tol tetap dapat melakukan pelayan dengan baik walaupun jumlah kendaraan yang akan masuk jalan tol meningkat maka rata-rata kedatangan kendaraan harus tetap kurang dari rata-rata waktu pelayanan pada setiap jalur. Sehingga diperoleh kendala

$$\frac{\lambda_i}{n_i} \leq \mu_i, \forall i \in K. \tag{1}$$

b. Batas Minimum Dan Maksimum Jalur Yang Dibuka

Agar jumlah jalur yang dibuka tidak kurang dari kebutuhan (bisa menyebabkan bertumpuknya kendaraan) dan juga tidak melebihi kebutuhan (bisa menyebabkan naiknya biaya operasional) maka diperoleh kendala

$$n_i \geq l_i, \forall i \in K \text{ dan } n_i \leq u_i, \forall i \in K. \tag{2}$$

c. Total keseluruhan jalur yang dibuka

Karena plaza tol hanya memuat N jalur maka diperoleh

$$1). \sum_{k=1}^K n_i \leq N \text{ untuk off-peak hours.} \tag{3}$$

$$2). \sum_{k=1}^K n_i = N \text{ untuk peak hours.} \tag{4}$$

d. Lamanya waktu antrian

Dalam teori antrian, panjang antrian dirumuskan oleh Pollaczek-Khintchine sebagai

$$L_i = \frac{\lambda_i^2 (\mu_i^2 \sigma_i^2 + 1)}{2n_i^2 \mu_i \left(\mu_i - \frac{\lambda_i}{n_i} \right)}. \tag{5}$$

Sehingga diperoleh kendala untuk rata-rata waktu tunggu kendaraan dalam antrian pada jalur tipe i yakni

$$w_i = \frac{L_i}{\left(\frac{\lambda_i}{n_i} \right)} = \frac{\lambda_i (\mu_i^2 \sigma_i^2 + 1)}{2n_i \mu_i \left(\mu_i - \frac{\lambda_i}{n_i} \right)}, \forall i \in K. \tag{6}$$

Selain itu rata-rata waktu tunggu kendaraan harus kurang dari waktu standar pelayanan setiap jalur tipe i sehingga diperoleh kendala

$$w_i \leq s_i, \forall i \in K. \tag{7}$$

e. Fungsi Tujuan

Karena pengelola ingin meminimalkan biaya operasional sekaligus waktu tunggu pengguna maka fungsi tujuannya berupa

$$\text{Min } Z = \sum_{k=1}^K (c_i n_i + d \lambda_i w_i). \tag{8}$$

Secara lengkap, persamaan (1)-(8) merupakan model MINLP untuk optimasi plaza tol dapat disajikan sebagai berikut:

❖ Pada saat *off-peak hours*

$$\text{Min } Z = \sum_{k=1}^K (c_i n_i + d \lambda_i w_i). \tag{9}$$

dengan kendala

$$\frac{\lambda_i}{n_i} \leq \mu_i, \quad \forall i \in K.$$

$$n_i \geq l_i, \quad \forall i \in K.$$

$$n_i \leq u_i, \quad \forall i \in K.$$

$$\sum_{k=1}^K n_i \leq N.$$

$$w_i = \frac{\lambda_i (\mu_i^2 \sigma_i^2 + 1)}{2n_i \mu_i \left(\mu_i - \frac{\lambda_i}{n_i} \right)}, \quad \forall i \in K.$$

$$w_i \leq s_i, \quad \forall i \in K.$$

$$n_i \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in K$$

$$w_i \geq 0, \quad \forall i \in K$$

❖ Pada saat *peak hours*

$$\text{Min } Z = \sum_{k=1}^K (c_i n_i + d \lambda_i w_i). \tag{10}$$

$$\frac{\lambda_i}{n_i} \leq \mu_i, \quad \forall i \in K.$$

$$n_i \geq l_i, \quad \forall i \in K.$$

$$n_i \leq u_i, \quad \forall i \in K.$$

$$\sum_{k=1}^K n_i = N.$$

$$w_i = \frac{\lambda_i (\mu_i^2 \sigma_i^2 + 1)}{2n_i \mu_i \left(\mu_i - \frac{\lambda_i}{n_i} \right)}, \quad \forall i \in K.$$

$$w_i \leq s_i, \quad \forall i \in K.$$

$$n_i \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in K$$

$$w_i \geq 0, \quad \forall i \in K$$

Studi Kasus

Dalam studi kasus, data yang dipakai merupakan data aktual lalu lintas yang diambil dari plaza tol yang potensial pada daerah highway. Tipe jalur yang akan didesain berjumlah 3 yakni, tipe ETC, ACM dan Manual.

Pengelola juga menginginkan jumlah jalur pada plaza tol sebanyak 16 jalur. Pengelola juga memberikan proiritas yang berbeda untuk off-peak hours dan peak hours.

Tabel 1. Rata-rata tingkat kedatangan jumlah kendaraan (per menit)

Pukul	λ	λ_E	λ_A	λ_M
24.00 - 01.00	16.4	3.1	4.2	9.1
01.00 - 02.00	17.1	3.5	4.3	9.3
02.00 - 03.00	16.7	3.3	4.5	8.9
03.00 - 04.00	21.6	4.1	5.2	12.3
04.00 - 05.00	26.3	5.7	4.9	15.7
05.00 - 06.00	35.6	7.9	7.3	20.4
06.00 - 07.00	71.5	21.6	17.5	32.4
07.00 - 08.00	100.7	30.4	25.1	45.2
08.00 - 09.00	81.7	24.2	20.8	36.7
09.00 - 10.00	63.4	18.2	18.2	27
10.00 - 11.00	54.4	14.8	15.3	24.3
11.00 - 12.00	49.1	12.4	13.5	23.2
12.00 - 13.00	46.8	11.5	12.6	22.7
13.00 - 14.00	48.6	12	13.1	23.5
14.00 - 15.00	51.8	13.2	14.4	24.2
15.00 - 16.00	58	15.4	16.3	26.3
16.00 - 17.00	62.9	17.2	17.7	28
17.00 - 18.00	69.9	19.7	18.5	31.7
18.00 - 19.00	81.5	24.1	20.6	36.8
19.00 - 20.00	77.1	23.3	18.9	34.9
20.00 - 21.00	65.5	20.3	14.8	30.4
21.00 - 22.00	40.2	10.9	9.2	20.1
22.00 - 23.00	28.5	6.6	6.3	15.6
23.00 - 24.00	19.3	3.9	5	10.4

Tabel 1. memperlihatkan data rata-rata tingkat kedatangan untuk ketiga tipe jalur. Sebagai contoh pada pukul 24.00 – 01.00 rata-rata kedatangan kendaraan pada jalur tipe manual sebanyak 9.1 kendaraan.

Tabel 2. memperlihatkan data jumlah minimum jalur yang harus dibuka untuk ketiga tipe jalur. Sebagai contoh pada pukul 24.00 – 01.00 rata-rata kedatangan kendaraan pada tipe ACM sebanyak 1 jalur. Walaupun jumlah minimum jalur tipe ETC yang harus dibuka adalah 1 namun pada batas bawah jumlah jalur tipe ini harus diberi nilai 2. Hal ini juga berlaku untuk jalur tipe ACM.

Tabel 3. memperlihatkan data tingkat biaya operasional harian dan biaya tunggu-pengguna untuk ketiga tipe jalur. Sebagai contoh pada pukul 24.00 sampai pukul 06.00 biaya harian pada jalur tipe ETC sebesar \$1.5.

Selanjutnya, diasumsikan bahwa rata-rata jumlah pelayanan (jumlah pelayanan yang tuntas per menit) tidak berubah sepanjang waktu. Rata-rata jumlah pelayanan untuk jalur tipe ETC, ACM dan manual berturut-turut adalah $\mu_E = 49.8$, $\mu_A = 10.2$ dan $\mu_M = 6.1$ per menit. Sedangkan standar deviasi masing-masing tipe adalah $\sigma_E = 0.01$, $\sigma_A = 0.06$ dan $\sigma_M = 0.12$. Untuk waktu standar pelayanan (s_i) ditentukan berdasarkan survey yang dilakukan pengelola pada pengguna jalan tol. Dari hasil

tersebut ditetapkan bahwa untuk jalur tipe ACM dan manual waktu standar pelayanannya sebesar $s_A = s_M = 0.5$ menit sedangkan untuk jalur tipe ETC sebesar $s_E = 0.033$ menit.

Tabel 2. Jumlah minimum jalur yang harus dibuka

Pukul	b_E	b_A	b_M
24.00 - 01.00	1	1	2
01.00 - 02.00	1	1	2
02.00 - 03.00	1	1	2
03.00 - 04.00	1	1	3
04.00 - 05.00	1	1	3
05.00 - 06.00	1	1	4
06.00 - 07.00	1	2	6
07.00 - 08.00	1	3	8
08.00 - 09.00	1	3	7
09.00 - 10.00	1	2	5
10.00 - 11.00	1	2	4
11.00 - 12.00	1	2	4
12.00 - 13.00	1	2	4
13.00 - 14.00	1	2	4
14.00 - 15.00	1	2	4
15.00 - 16.00	1	2	5
16.00 - 17.00	1	2	5
17.00 - 18.00	1	2	6
18.00 - 19.00	1	3	7
19.00 - 20.00	1	2	6
20.00 - 21.00	1	2	5
21.00 - 22.00	1	1	4
22.00 - 23.00	1	1	3
23.00 - 24.00	1	1	2

Tabel 3. Tingkat biaya operasional harian dan biaya tunggu-pengguna (\$/jam)

Pukul	d	c_E	c_A	c_M
24.00 - 06.00	10	1.5	0.7	18.75
06.00 - 09.00	15	1.5	0.7	12.5
09.00 - 17.00	10	1.5	0.7	12.5
17.00 - 21.00	15	1.5	0.7	12.5
21.00 - 24.00	10	1.5	0.7	16.25

Hasil

Seluruh data di atas akan dimasukkan ke model MINLP untuk dicari solusinya. Solusi yang diinginkan merupakan solusi per jam. Selain itu dari data dapat ditentukan bahwa pada pukul 06.00-09.00 dan pukul 17.00-21.00 merupakan sesi *peak hours*, sedangkan sisanya adalah sesi *off-peak hours*.

Berikut ini contoh hasil perhitungan dengan menggunakan model (9) untuk pukul 24.00-01.00. Indeks $i = 1$ menunjukkan tipe ETC, $i = 2$ mewakili tipe ACM dan $i = 3$ untuk tipe Manual.

Min

$$Z = (1.5n_1 + 10(3.1)w_1) + (0.7n_2 + 10(4.2)w_2) + (18.75n_3 + 10(9.1)w_3)$$

dengan kendala

$$\frac{3.1}{n_1} \leq 49.8 ; \frac{4.2}{n_2} \leq 10.2 ; \frac{9.1}{n_3} \leq 6.1 ; .$$

$$n_1 \geq 2 ; n_2 \geq 2 ; n_3 \geq 3 ; .$$

$$n_1 \leq 16 ; n_2 \leq 16 ; n_3 \leq 16 ; .$$

$$\sum_{k=1}^3 n_i \leq 16 .$$

$$w_1 = \frac{3.1 \left((49.8)^2 (0.01)^2 + 1 \right)}{2n_1 (49.8) \left(49.8 - \frac{3.1}{n_1} \right)} ;$$

$$w_2 = \frac{4.2 \left((10.2)^2 (0.06)^2 + 1 \right)}{2n_2 (10.2) \left(10.2 - \frac{4.2}{n_2} \right)} ; .$$

$$w_3 = \frac{9.1 \left((6.1)^2 (0.12)^2 + 1 \right)}{2n_3 (6.1) \left(6.1 - \frac{9.1}{n_3} \right)} ;$$

$$w_1 \leq 0.033 ; w_2 \leq 0.5 ; w_3 \leq 0.5 ; .$$

$$n_i \in \mathbb{N} , i \in \{1, 2, 3\}$$

$$w_i \geq 0 , i \in \{1, 2, 3\}$$

Dengan menggunakan toolbox Matlab yakni fungsi **fmincon** diperoleh hasil

```
Local minimum found that satisfies the constraints.
Optimization completed because the objective function is non-decreasing in
feasible directions, to within the default value of the function tolerance,
and constraints were satisfied to within the default value of the constrain
<stopping criteria details>
Active inequalities (to within options.TolCon = 1e-006):
    lower    upper    ineqlin    ineqnonlin
         4
         5
         6
-----
n*(1)  n*(2)  n*(3)  w*(1)  w*(2)  w*(3)  Z
-----
    2     2     3    0.00    0.02    0.12  72.73
-----
```

Dari hasil di atas terlihat bahwa jumlah jalur tipe ETC yang harus dibuka adalah 2 jalur, tipe ACM sebanyak 2 jalur dan tipe Manual sebanyak 3 jalur.

Hasil penghitungan secara lengkap solusi optimum untuk 24 jam dapat dilihat pada tabel 4

Tabel 4. Solusi Optimal (\$/jam)

Pukul	n_E	n_A	n_M	w_E	w_A	w_M	w	C_o	C_w	Z
24.00 - 01.00	2	2	3	0	0.02	0.12	72	60.65	12.08	72.73
01.00 - 02.00	2	2	3	0	0.02	0.13	77	60.65	12.89	73.54
02.00 - 03.00	2	2	3	0	0.02	0.12	69	60.65	11.48	72.13
03.00 - 04.00	2	2	3	0.001	0.02	0.26	198	32.96	93.61	93.61
04.00 - 05.00	2	2	4	0.001	0.02	0.23	221	79.40	36.75	116.15
05.00 - 06.00	2	3	6	0.001	0.02	0.16	204	117.60	33.97	151.57
06.00 - 07.00	2	4	10	0.004	0.05	0.14	335	130.80	83.72	214.52
07.00 - 08.00	2	4	10	0.006	0.11	0.36	1149	130.80	287.24	418.04
08.00 - 09.00	2	4	10	0.004	0.07	0.19	512	130.80	127.99	258.79
09.00 - 10.00	2	6	8	0.003	0.03	0.16	287	107.20	47.80	155.00
10.00 - 11.00	2	6	7	0.002	0.02	0.17	265	94.70	44.16	138.86
11.00 - 12.00	2	6	7	0.002	0.02	0.15	225	94.70	37.54	132.24
12.00 - 13.00	2	5	7	0.002	0.02	0.14	212	94.00	35.41	129.41
13.00 - 14.00	2	5	7	0.002	0.02	0.15	237	94.00	39.47	133.47
14.00 - 15.00	2	6	7	0.002	0.02	0.16	259	94.70	43.09	137.79
15.00 - 16.00	2	6	8	0.002	0.02	0.15	258	107.20	43.04	150.24
16.00 - 17.00	2	6	8	0.003	0.03	0.17	317	107.20	52.75	159.95
17.00 - 18.00	2	4	10	0.003	0.06	0.14	325	130.80	81.19	211.99
18.00 - 19.00	2	4	10	0.004	0.07	0.19	513	130.80	128.35	259.15
19.00 - 20.00	2	4	10	0.004	0.06	0.17	424	130.80	105.95	236.75
20.00 - 21.00	2	5	9	0.003	0.03	0.16	313	119.00	78.32	197.32
21.00 - 22.00	2	4	6	0.002	0.02	0.15	197	103.30	32.80	136.10
22.00 - 23.00	2	3	4	0.001	0.02	0.22	216	70.10	35.97	106.07
23.00 - 24.00	2	2	3	0.001	0.02	0.17	110	53.15	18.35	71.50

KESIMPULAN

Kombinasi yang tepat dari berbagai tipe jalur agar penggunaan masing-masing jalur optimal bisa meminimumkan waktu tunggu dan biaya operasional tiap jalur. Dalam menyusun kombinasi yang tepat perlu diperhatikan rata-rata waktu tunggu, rata-rata kendaraan yang masuk pada suatu jalur dan *off-peak/peak hours*. Selain itu, perlu juga diperhatikan sistem antrian dari kendaraan pada jalur tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Cooper, R. B. (1981). *Introduction to Queueing Theory*. North-Holland, New York.
- Hillier, F. S., dan Lieberman, G. J. (2001). *Introduction To Operation Research*. McGraw-Hill, New York.
- Kim, S. (2009). *The Toll Plaza Optimization Problem: Design, Operations, and Strategies*. Transportation Research Part E. Vol. 45, hal 125-137.
- Osaki, S. (1992). *Applied Stochastic System Modelling*. Springer-Verlag, Germany.
- Wilson, H. B., dkk . (2003). *Advanced Mathematics and Mechanics Applications Using Matlab*. Chapman & Hall/CRC, London.
- Steele, JH; Fernandez, J. 1991. "History of Rabies and Global Aspects", di dalam Baer, GM, *The Natural History of Rabies* (edisi ke-2), Boca Raton, Florida: CRC Press, Inc., hlm. 1, [ISBN 0849367603](#)
- Twisleton-Wykeham-Fiennes, N. 1978. *Zoonoses and the Origins and Ecology of Human Disease*. Academic Press, London.



ANALISIS WARNA CAHAYA LAMPU TERHADAP HASIL TANGKAPAN IKAN

GRACE LOUPATTY

Staf Jurusan Fisika FMIPA UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

e-mail: grace_loupatty@yahoo.com

ABSTRACT

By learning and researching the wave-length of light and its propagation we can make an observation of the function and effectiveness light as a stimulation in fishing.

The purposes of the observation are: to know how the color of light lamp influences to the result of fishing; to observe how the depth of location for fishing influences the reduction of light intensity; to know what is the relation between parameter condition/ atmosphere (salinity, temperature and transparency of the water) with the result of fishing.

The observation is applied with a direct observation method in water of Batu Dua- Ambon Island.

The total result of fishing is 57.2 kilograms with applied for us different light lamp (red, yellow, green and blue). Each color applied has the result: the red light lamps got amount of 4.5 kg; the yellow light lamps got amount of 15,1 kg ; the green light lamps got amount 17.4 kg; and the blue light lamps got amount of 20.2 kg.

Data analysis statistically using an analysis of variance system which indicates that the stimulation light lamp influences to the result of fishing.

Result of the statistical observation shows that parameter conditions/ atmosphere in the water, such as salinity. temperature, transparency of the water, such as: salinity, temperature, transparency of the water do not influence to the result of fishing.

Keywords: *Light lamp, fishing, analysis of variance*

PENDAHULUAN

1. Latar Belakang

Laut merupakan bagian terbesar dari luas kepulauan Indonesia sebesar 90%. Selain sebagai alat pemersatu yang menghubungkan berbagaipulau di Indonesia, laut juga merupakan sumber perikanan yang berpotensi tinggi. Dalam penangkapan ikan terdapat penggunaan berbagai pengetahuan dasar (*basic sciences*) serta pengetahuan terapan (*applied sciences*) seperti: fisika, biologi, ekologi, oceanografi, meteorologi dan klimatologi, elektronika, mesin dan lain-lain (Ayodhya, 1981).

Cahaya merupakan topik penting yang dipelajari dalam fisika dan juga merupakan faktor penting dalam operasi penangkapan ikan. fungsi daripada cahaya yaitu untuk menarik ikan-ikan berkumpul ke suatu tempat dimana sumber cahaya itu berasal supaya memudahkan penangkapan. Pemanfaatan warna dari lampu pematik serta pengaturannya sangat penting untuk keberhasilan penangkapan.

2. Tujuan

Penelitian ini bertujuan untuk :

1. Mengetahui pengaruh penggunaan warna cahaya lampu pematik terhadap hasil tangkapan
2. Mengetahui pengaruh kedalaman terhadap pengaruh kedalaman terhadap pengurangan intensitas cahaya
3. Mengetahui hubungan antara parameter lingkungan seperti salinitas, suhu dan kecerahan dengan hasil tangkapan.

TINJAUAN PUSTAKA

1. Cahaya

Teori Maxwell menyatakan bahwa cahaya menyebar dalam bentuk gelombang elektromagnetik. Kecepatan cahaya sekitar 3×10^8 m/s. Panjang gelombang cahaya tampak berkisar antara 390 nm sampai 780 nm dan frekuensinya sekitar 3.84×10^{14} Hz sampai 7.69×10^{14} Hz (Hecht and Zajac, 1976).

Jika dA adalah luas dari sudut permukaan yang normalnya membentuk suatu Θ dengan jarak r ke suatu sumber S , dan I adalah intensitas cahaya dari sumber S pada arah yang menuju dA , maka :

$$dF = I d\omega = \frac{I dA \cos \theta}{r^2}$$

$$E = \frac{dF}{dA} = \frac{I \cos \theta}{r^2}$$

dimana

E adalah iluminasi cahaya pada unsur luas dA

dF adalah fluks cahaya yang mengenai dA

Satuan dari iluminasi cahaya adalah lumen/m² atau disebut juga lux (Sears, 1956).

2. Cahaya Dalam Air

Cahaya dari sebuah sumber di udara mengenai permukaan air, ada yang diteruskan, ada yang dipantulkan, ada yang dihamburkan, dan ada yang diserap. Pemantulan ini tergantung pada sudut datang sinar dan keadaan perairan (Yami, 1987).

Jumlah cahaya yang hilang karena serapan, hamburan dan pemantulan dikenal sebagai “total extinction”, yang dinyatakan dengan koefisien “extinction” (k). Menurut Tait (1981), dengan menggunakan cakram Secchi, koefisien extinction (k) dirumuskan dengan persamaan:

$$K = \frac{1.45}{d}$$

dimana d adalah kedalaman maksimum cakram secchi kelihatan

3. Penggunaan Lebagai Sumber Cahaya dalam Penangkapan Ikan

Dalam *light fishing*, penangkapan ikan dilakukan dengan memanfaatkan salah satu kelakuan ikan (*phototaxis*) untuk menangkap ikan itu sendiri (Ayodhya, 1981).

Sumber cahaya yang umum dipergunakan untuk memikat ikan pada saat ini adalah lampu tekan minyak tanah dan lampu listrik. Faktor-faktor yang mempengaruhi penyebaran cahaya yang menembus ke dalam air yaitu: (1) sifat alamiah cahaya matahari atau bulan; (2) kapasitas partikel yang terkandung di dalam air; (3) kapasitas cahaya yang dipantulkan oleh permukaan lain, maupun partikel-partikel air (Verheyen dalam Kristjonson, 1959).

ALAT DAN METODE PENELITIAN

1. Alat

Alat yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

- Lampu empat warna (merah, kuning, hijau, biru), masing-masing warna terdiri dari empat tipe bereflektor dengan kekuatan masing-masing 60 watt, dan empat tipe fluorescent dengan kekuatan masing-masing 10 watt.
- AC Generator model FA-2; 1 phase dengan output 2 kVa
- Refractometer (*salinity type*);
- Thermometer
- Cakram Secchi
- Bagan (17m x 17m); jarring (19m x 17m x 15m)
- Scoop net*

h. Timbangan

2. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan cara percobaan langsung dilapangan, dengan empat warna lampu (merah, kuning, hijau, biru) sebagai perlakuan yang masing-masing diulang sebanyak tiga kali. Tiap perlakuan berlangsung selama empat jam.

Data yang diambil pada tiap perlakuan meliputi pengukuran parameter lingkungan (salinitas, suhu, kecerahan dan pengukuran hasil tangkapan ikan).

Penelitian dilaksanakan dilokasi perairan Batu Dua Pulau Ambon.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil tangkapan yang diperoleh dari perlakuan yang diberikan selama penelitian diuji secara statistik (analisis ragam). Pada tabel 1 ditunjukkan bahwa analisis ragam hasil tangkapan dengan perlakuan warna cahaya berbeda nyata.

Tabel 1. Analisis ragam hasil tangkapan ikan dengan perlakuan warna cahaya.

Sumber ragam	db	Jk	KT	F _{hit}	F _{Tab} 5%
Blok	2	207768.1	103884.0	0.208272	5.14
Perlakuan	3	47181985	15727328	31.53094	4.76
Error	3	2992741	498790.1		
Total	11	50382741			

CV = 14.83278%

Perbedaan nyata ini ditunjukkan oleh perlakuan yang lebih besar dari F_{Tabel} 5%.

Hasil tangkapan yang diperoleh dalam penelitian ini sebesar 57.2 kg, yang diperoleh dari total perlakuan warna cahaya lampu (merah, kuning, hijau, biru), dengan perincian untuk masing- masing warna adalah sebagai berikut: (a) untuk perlakuan warna merah dengan hasil tangkapan sebesar 4.5 kg; (b) warna kuning dengan hasil tangkapan sebesar 15.1 kg; (c) warna hijau dengan hasil tangkapan sebesar 17.4 kg; dan (d) warna biru dengan hasil tangkapan sebesar 20.2 kg.

Tabel 2. Rerata Hasil Tangkapan Ikan (g) dengan warna lampu merah, kuning, hijau, biru.

Perlakuan (warna lampu)	Hasil Tangkapan (g)
Merah	1493.33 c
Kuning	5023.33 b
Hijau	5785.00 ab
Biru	6744.00 a

Keterangan : Angka-angka yang diikuti dengan huruf yang sama, tidak berbeda nyata menurut uji jarak berganda Duncan pada taraf 5%.

Hasil analisis pada tabel 2. Menunjukkan bahwa pengaruh perlakuan lampu warna biru memberikan tangkapan tertinggi dan diikuti berturut-turut oleh warna hijau, warna kuning dan warna merah.

Dari rerata hasil yang didapatkan menunjukkan bahwa warna cahaya lampu yang terbaik dalam mengkonsentrasikan ikan adalah warna biru dan warna

hijau. Cahaya warna biru paling sedikit terabsorpsi air laut dan lebih dominan dibiaskan oleh partikel dalam air. Nilai koefisien k tergantung pada suhu dan salinitas. Oleh karena itu intensitas sinar yang terdapat di air laut pada kedalaman tertentu akan berbeda. Ini disebabkan oleh adanya suspensi dalam air laut yang mempunyai sifat selektif. Ditambahkan pula bahwa semakin kecil atau semakin pendek panjang gelombang suatu warnacahaya berarti semakin besar pengaruh rangsangan terhadap ikan. Cahaya hijau dengan panjang gelombang 500nm mempunyai transmisi sebesar 90% per meter, cahaya kuning dengan panjang gelombang 600nm transmisinya sebesar 80% per meter, cahaya warna merah mempunyai panjang gelombang sebesar 650nm dengan transmisi sebesar 60% per meter. Lampu warna biru memperlihatkan hasil tangkapan yang lebih baik. Hal ini didukung oleh pendapat Nomura dan Yamazaki (1975) yang mengemukakan bahwa secara alamiah ikan-ikan lebih tertarik pada berkas cahaya warna biru dan hijau daripada warna lainnya. Ditambahkan pula oleh Yami (1987) bahwa warna biru dan warna hijau mempunyai kemampuan penetrasi yang lebih jauh ke dalam air jika dibandingkan dengan warna-warna yang lain, karena kurang diserap oleh partikel-partikel di dalam air. Kemampuan penetrasi yang dimiliki oleh warna biru dan hijau memungkinkan ikan-ikan yang berada pada jarak yang jauh, baik secara vertikal maupun horizontal terpikat dan datang mendekati atau menuju arah datangnya cahaya tersebut.

Untuk pengurangan intensitas cahaya terhadap kedalaman menurut hasil analisis ragam tidak dipengaruhi oleh warna cahaya lampu yang digunakan.

Parameter lingkungan yang diamati : salinitas pada lokasi lokasi penelitian berkisar $27.5\text{‰} - 35\text{‰}$; suhu berkisar $27^{\circ}\text{C} - 29^{\circ}\text{C}$; kecerahan perairan berkisar dari 10-20m. Hasil uji statistik dengan analisis regresi linier majemuk menunjukkan bahwa parameter lingkungan selama penelitian tidak berpengaruh terhadap hasil tangkapan. Ini menunjukkan bahwa parameter lingkungan selama penelitian tidak berpengaruh terhadap hasil tangkapan. Ini menunjukkan bahwa besarnya kisaran dari parameter lingkungan tersebut masih dalam toleransi aktifitas hidup ikan-ikan hasil tangkapan. Dengan analisis regresi linier majemuk untuk perlakuan warna cahaya lampu menunjukkan bahwa lampu warna kuning mampu menangkap ikan 3614 kali disbanding merah; lampu warna hijau mampu menangkap ikan 3711 kali disbanding warna merah; dan warna biru mampu menangkap 5112 kali dibandingkan lampu warna merah. Cahaya lampu, intensitas, warna lampu, cuaca, penyebaran cahaya, lama waktu penyinaran, cahaya bulan, merupakan faktor-faktor yang mempengaruhi terhadap hasil tangkapan (Najamuddin dkk, 1994 dalam Sudirman dan Mallawa, 2004). Secara alamiah ikan-ikan lebih tertarik pada berkas cahaya biru dan hijau daripada warna lainnya (Nomura dan Yamazaki, 1975). Warna biru dan hijau mempunyai kemampuan penetrasi yang lebih jauh ke dalam air jika dibandingkan dengan warna- warna lain (Yami, 1987).

KESIMPULAN

Warna cahaya lampu memberikan pengaruh yang berbeda terhadap hasil tangkapan. Cahaya lampu warna biru menghasilkan tangkapan terbesar dan diikuti berturut-turut oleh warna hijau, kuning dan merah.

SARAN

Perlu penelitian lebih lanjut untuk mengetahui kapasitas atau besar daya lampu yang paling efektif terhadap hasil tangkapan, khususnya untuk berkas cahaya lampu warna biru dan hijau sebagai berkas lampu yang memberikan hasil tangkapan terbesar.

DAFTAR PUSTAKA

- Ayodhya, 1981, *Metoda Penangkapan Ikan*, Yayasan Dewi Sri. Bogor.
- Hecht, E. dan Zajac, A., 1976, *Optics*, Third ed. Addison Wesley Publishing Company, Inc, Philippines.
- Kristjonson, H., 1959, *Modern Fishing Gear of The World*, Volume I. Fishing News Books (Ltd). London.
- Nomura dan Yamazaki, 1975, *Fishing Techniques*, Japan International Corporation Agency – JICA.
- Sudirman dan Mallawa, 2004, *Teknik Penangkapan Ikan*. Rineka Cipta, Jakarta
- Tait, R.V., 1981, *Elements of Marine Ecology-An Introductory Course*, Butterworths. London.
- Yami, B., 1987, *Fishing With Light*, Fishing News Books (Ltd), London

Barekeng terbit dua kali dalam setahun yaitu Bulan Maret dan Desember. *Barekeng* menerima naskah dalam bentuk hasil penelitian, catatan penelitian (*note*) atau artikel ulas balik (*review/ minireview*) dan ulasan (*feature*) baik dalam bahasa Indonesia maupun dalam bahasa Inggris yang berkaitan dengan bidang Matematika dan Terapannya. Naskah yang dikirimkan merupakan naskah asli yang belum pernah diterbitkan di media manapun.

PENGIRIMAN NASKAH

Naskah dikirimkan kepada:

Redaksi *Barekeng*

Jurusan Matematika

Fakultas MIPA

Universitas Pattimura

Jl. Ir. M. Putuhena, Poka-Ambon

Email: jurnalbarekeng@gmail.com

Naskah yang dikirimkan harus dalam bentuk naskah cetak (*hard copy*) dan naskah lunak (*soft copy*), disertai dengan alamat korespondensi lengkap dan alamat *email* yang dapat dihubungi.

Naskah cetak (*hard copy*):

Naskah cetak dikirim sebanyak satu eksemplar dengan format pengetikan menggunakan *Microsoft Word* seperti berikut:

- Naskah diketik 1 spasi pada kertas HVS Ukuran A4 dengan batas tepi 2 cm dan berbentuk 2 kolom dengan jarak antar kolom 0.5 cm. Tipe huruf *Times New Roman* berukuran 10 point.
- Jumlah halaman maksimum 12 halaman termasuk Lampiran (Gambar dan Tabel). Setiap halaman diberi nomor secara berurutan pada tepi kanan atas. Untuk keterangan Lampiran: Tipe huruf *Times New Roman* berukuran 9 point.
- Persamaan matematika (*equations*) dapat diketik dengan menggunakan *MS Equations* atau *MathType* dengan tipe huruf *Cambria* atau *Times New Roman* berukuran 10 point.

Naskah lunak (*soft copy*):

Naskah lunak harus dalam format *Microsoft Word* dan dikirimkan dalam bentuk disk (CD, DVD), *flashdisk*, atau *attachment email*.

SUSUNAN NASKAH

- a. Judul dalam Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris untuk artikel berbahasa Indonesia dan Judul dalam Bahasa Inggris untuk artikel berbahasa Inggris.
- b. Nama Lengkap Penulis (tanpa gelar).
- c. Nama Lembaga atau Institusi, disertai Alamat Lengkap dengan nomor kode pos. Untuk korespondensi dilengkapi No. Telp., fax dan *email*.
- d. Judul Ringkas (*Running Title*) (jika diperlukan).

- e. Abstrak (*Abstract*) dalam Bahasa Inggris atau Bahasa Indonesia.
- f. Kata Kunci (*Keywords*) dalam Bahasa Inggris atau Bahasa Indonesia.
- g. Pendahuluan (*Introduction*) meliputi latar belakang, masalah dan tujuan penelitian.
- h. Tinjauan Pustaka meliputi ulasan (*review*) penelitian dari beberapa literatur serta teori-teori dasar yang mendukung penelitian.
- i. Metode Penelitian (*Methods and Materials*) meliputi bahan, cara, dan analisis dalam penelitian (jika ada).
- j. Hasil dan Pembahasan (*Results and Discussion*) ditulis secara berkesinambungan dalam satu rangkaian naskah penulisan.
- k. Kesimpulan (*Conclusion*)
- l. Ucapan Terima Kasih (*Acknowledgements*) (Jika diperlukan)
- m. Daftar Pustaka ditulis memakai sistem nama dan disusun menurut abjad. Di bawah ini beberapa contoh penulisan sumber acuan:

Jurnal :

Efron, B. 1983. *Estimating the Error Rate of Prediction Rule: Improvement on Cross-Validation*. J. Amer. Statist. Assoc., 78:316-331.

Buku :

Dennis, G. Z., 1986, *Differential Equations with Boundary Value Problems*. Ed ke-2. Boston: Massachusetts. PWS Publishers.

Skripsi/Tesis/Disertasi :

Mochamad Apri., *Model Biaya Total Jaringan Pipa Transmisi Gas dan Optimasinya*, Departemen Matematika ITB Bandung, Tugas Akhir, 2002.

Informasi dari Internet :

Mallat, Stephane, 1999, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Second Edition, Academic Press 24-28 Oval Road, London NW1 7DX UK, <http://www.hbuk.co.uk/ap/>

- n. Lampiran meliputi Gambar dan Tabel beserta keterangannya (jika diperlukan).

CATATAN (NOTE)

- Naskah harus dikirimkan ke redaksi selambat-lambatnya 2 (dua) bulan sebelum bulan penerbitan jurnal (Maret dan Desember).
- Naskah akan dinilai oleh tim penilai yang relevan sebelum diterbitkan dan tim redaksi berhak merubah struktur naskah tanpa merubah isi naskah.
- Naskah dapat diterima atau ditolak. Naskah ditolak, jika tidak memenuhi kriteria penulisan, pelanggaran hak cipta, kualitas rendah, dan tidak menanggapi korespondensi redaksi. Pengumuman naskah ditolak atau diterima paling lambat 1 (satu) bulan setelah naskah terkirim.
- Penulis atau penulis pertama yang akan mendapat 1 (satu) eksemplar jurnal yang sudah diterbitkan.

Barekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan



© Jurusan Matematika FMIPA Unpatti 2012