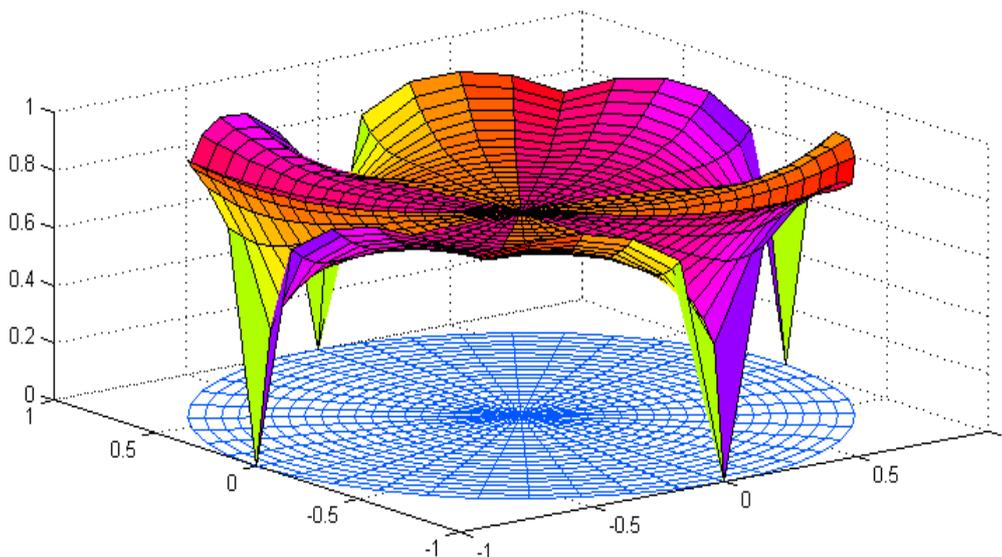


Barekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan

ISSN 1978-7227





jurnal ilmu matematika dan terapan

ISSN 1978-7227

Volume 6 Nomor 2 | Desember 2012

PENANGGUNG JAWAB

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA - Universitas Pattimura

KETUA DEWAN REDAKSI

H. J. Wattimanela, S.Si, M.Si

PENYUNTING AHLI

Prof. Drs. Subanar, Ph.D (UGM Yogyakarta)
Prof. Dr. Edi Baskoro (ITB Bandung)
Dr. Siswadi (IPB Bogor)
Dr. Basuki Widodo, M.Sc (ITS Surabaya)
Prof. Dr. Thomas Pentury, M.Si (Unpatti Ambon)
Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Unpatti Ambon)

PENYUNTING PELAKSANA

M. W. Talakua, S.Pd, M.Si
F. Y. Rumlawang, S.Si, M.Si
L. J. Sinay, S.Si, M.Sc
G. Haumahu, S.Si, M.Stat

SEKRETARIAT

Y. A. Lesnussa, S.Si, M.Si

PENERBIT (PUBLISHER)

Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Pattimura Ambon

ALAMAT EDITOR (EDITORIAL ADDRESS)

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pattimura
Alamat:
Kampus FMIPA UNPATTI
Jl. Ir. M. Putuhena, Poka 97233
Ambon - Maluku



PENELITIAN

PEMODELAN <i>HYBRID</i> SINTESIS PADA <i>AUTOMATED MANUFACTURING SYSTEM</i> (AMS) DENGAN MENGGUNAKAN PETRI NET	Dorteus Lodewyik Rahakbauw	1 – 6
SIFAT-SIFAT DASAR INTEGRAL HENSTOCK <i>(Basic Properties of Henstock Integral)</i>	Lexy Janzen Sinay Mozart Winston Talakua	7 – 15
KENDALI OPTIMAL PADA MODEL DINAMIK EPIDEMI DENGUE MENGGUNAKAN MISER3 <i>(Optimal Control of The Dengue Epidemic Model using MISER3)</i>	Zeth Arthur Leleury	17 – 21
PEMODELAN JUMLAH KEMATIAN BAYI DI PROVINSI MALUKU TAHUN 2010 DENGAN MENGGUNAKAN REGRESI POISSON	Salmon Notje Aulele	23 – 27
DESAIN ALAT UKUR SUHU DAN KELEMBABAN BERBASIS MIKROKONTROLER ATMEGA 16 <i>(The Design of Temperature and Humidity Measurement Device Based on ATmega16 Microcontroller)</i>	Ronaldo Talapessy	29 – 31
PENERAPAN PERSAMAAN GEOTERMOMETER (SiO₂)_p DI LAPANGAN PANAS BUMI SULI, AMBON <i>(Application of Geothermometry Equation (SiO₂)_p in The Geothermal Field Suli, Ambon)</i>	Helda Andayany	33 – 36
SIFAT-SIFAT DASAR PERLUASAN INTEGRAL LEBESGUE <i>(Basic Properties Of Extended Lebesgue Integral)</i>	Yopi Andry Lesnussa Henry Junus Wattimanela Mozart Winston Talakua	37 – 44
PEMODELAN STATISTICAL DOWNSCALLING DENGAN PENDEKATAN REGRESI BAYES ROBUST PCA (STUDI KASUS : DATA GCM STASIUN AMBON)	Ferry Kondo Lembang	45 – 50



merupakan Jurnal Ilmu Matematika dan Terapannya sebagai suatu wahana informasi ilmiah yang menyajikan artikel (naskah) hasil penelitian meliputi bidang-bidang sebagai berikut: matematika analisis, aljabar, matematika terapan, statistika, pendidikan matematika dan ilmu komputer. Jurnal ini diterbitkan dua kali dalam setahun yaitu pada bulan Maret dan bulan Desember. Artikel atau naskah-naskah di dalam jurnal ini merupakan hasil-hasil penelitian pribadi ataupun kelompok yang belum pernah diterbitkan di jurnal-jurnal atau majalah ilmiah lainnya.

Diterbitkan oleh:

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pattimura
Ambon
2012
Copyright © Jurusan Matematika FMIPA Unpatti 2012

PEMODELAN *HYBRID* SINTESIS PADA *AUTOMATED MANUFACTURING SYSTEM* (AMS) DENGAN MENGGUNAKAN PETRI NET

DORTEUS LODEWYIK RAHAKBAUW

Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

e-mail: lodewyik@gmail.com

ABSTRAK

Dalam Jurnal ini dibahas masalah sistem even diskrit yang ada pada *Automated Manufacturing System* (AMS), khususnya menyangkut model, kedinamikan, dan mendesain sistem AMS dengan menggunakan *tool* matematik Petri net. Selanjutnya dikonstruksikan suatu model AMS yang komponen utamanya terdiri dari dua *entry*, dua *exit*, lima mesin, dua *buffer*, empat robot, dan dua sistem *Automated Guided Vehicle* (AGV) yang ada dalam AMS, dimana masing-masing komponen tersebut memiliki deskripsi kerja berlainan sesuai tugas masing-masing. Dengan menggunakan metode *hybrid*, AMS akan ditransformasikan ke dalam *tool* matematik Petri net dengan menggunakan deskripsi sintesis yang didalamnya terdiri atas dua prosedur kerja yaitu *top-down design* dan *bottom-up design*. Dekomposisi (*decomposition*) dan penghalusan (*refinement*) yang meliputi penambahan *place shared* dan *non-shared resource* ke dalam Petri net dibutuhkan untuk mendapatkan desain Petri net AMS yang akan mengurangi atau menghilangkan *deadlock* pada sistem AMS. Dengan demikian, suatu definisi dari *hybrid* sintesis serta struktur Petri net dapat terjawab. Perilaku mendesain sistem ini akan dibahas untuk mendapatkan suatu desain yang efektif dalam fungsi dan penggunaan AMS tersebut.

Keywords: AMS, *Hybrid* sintesis, Petri net, *Coverability tree*.

PENDAHULUAN

Dalam perkembangan Petri net (Murata, 1989) adalah suatu pemodelan formal yang diperkenalkan oleh Carl Adam Petri pada tahun 1962 untuk memodelkan sistem terdistribusi. Petri net cepat berkembang sebagai suatu hal yang menjanjikan dalam pemodelan, sehubungan dengan fungsinya untuk mewakili sejumlah fitur dari perilaku sistem dinamik *event* diskrit. Sistem *event-driven* meliputi manufaktur otomatis, jaringan komunikasi, sistem operasi komputer, sistem informasi kantor, dan lainnya. Mungkin tidak bersamaan dan bertahap namun memperlihatkan beberapa karakteristik, diantaranya: *concurrency*, *conflict*, *mutual exclusion*, dan *non-determinism*. Karakteristik-karakteristik ini cukup sulit jika dideskripsikan menggunakan teori kontrol tradisional yang merujuk pada sistem kontinu atau model variabel-variabel diskrit bersamaan dengan persamaan beda atau diferensial. Sebagai tambahan, kontrol tidak sesuai dengan kejadian dari suatu peristiwa yang mungkin sebagai pemicu

menuju sistem *deadlock*, kapasitas berlebihan, atau menurunkan tingkatan kinerja sistem. Tipe dari sistem ini disebut *Discrete Event Systems* (DES) atau sering juga disebut *Discrete Event Dynamic Systems* (DEDS).

Dalam penelitian ini akan dikaji permasalahan sistem manufaktur yang dikonstruksi, dan dengan menggunakan *hybrid* sintesis Petri net untuk mendapatkan perilaku serta karakteristik sistem yang diharapkan mampu menghindari *deadlock* dalam sistem tersebut. Digunakan juga *tool* Petri net *Platform Independent Petri net Editor* (PIPE) karena menggunakan representasi grafik sehingga Pembuatan Petri net lebih mudah.

TINJAUAN PUSTAKA

PETRI NET DAN SISTEM MANUFAKTUR

Petri net diperkenalkan oleh Carl A. Petri pada tahun 1962. Sejak saat itu berkembang sebagai suatu *tool* untuk memodelkan, menganalisis dan sebagai kontrol suatu sistem *event* diskrit.

Definisi 1. (Zhou dan DiCesare, 1993) Petri net.

Petri net ditulis $Z = (P, T, I, O, m_0)$ dimana,

- P : himpunan *place-place*, secara grafik digambarkan sebagai bulatan;
- T : himpunan transisi-transisi, secara grafik digambarkan sebagai batangan, dengan $P \cup T \neq \emptyset$ dan $P \cap T = \emptyset$;
- $I: P \times T \rightarrow \{0,1\}$ adalah fungsi input secara spesifik *arc* yang diarahkan dari *place* ke transisi;
- $O: P \times T \rightarrow \{0,1\}$ adalah fungsi output secara spesifik *arc* yang diarahkan dari transisi ke *place*;
- $m: P \rightarrow T$ adalah penandaan sebanyak i komponen yaitu jumlah token, secara grafik digambarkan sebagai titik, dalam *place* ke- i . m_0 adalah inisialisasi penandaan dimana $N = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Petri net memiliki arah, bobot, dan merupakan *graph bipartite* dengan dua bentuk *node* yaitu *place* dan transisi. *arc* (Panah) terkoneksi antara *place* dan transisi atau transisi dan *place* dan tidak akan bisa terkoneksi antar *place* atau antar transisi.

Pada bagian *place* berisi sejumlah token yang merupakan bilangan integer positif. Distribusi token pada petri net disebut penandaan (*marking*). Ketika perilaku dari suatu sistem dimodelkan dalam bentuk Petri net, penandaan diindikasikan sebagai *state* dalam suatu sistem.

Manufaktur merupakan himpunan aktivitas yang berinteraksi dengan himpunan *resource* dan hasil dalam produksi. Aktivitas yang dimaksudkan adalah proses manufaktur yang melibatkan pengerjaan dengan mesin, penanganan bahan, dan informasi pemrosesan yang harus terjadi untuk memproduksi sesuatu. *Resourcenya* merupakan personalia, mesin, bahan baku dan seterusnya yang memerlukan pelaksanaan aktivitas ini. Perencanaan proses produksi memerlukan aktivitas dan *resource* yang sangat detail. Ini meliputi prioritas yang lebih tinggi antara aktivitas, dalam artian beberapa aktivitas harus terjadi sebelum yang lain. Proses perencanaan mungkin menetapkan beberapa *resource* untuk aktivitas dan memberikan beberapa prioritas ke mana *resource* akan memilikinya.

Petri net terdefinisi dalam bentuk grafik dan matematik serta tidak memiliki arti fisik. Dalam penerapannya dibutuhkan interpretasi dengan pelabelan terhadap *place* dan transisi. Secara umum dalam pemodelan Petri net, *place* (bulat) menyatakan kondisi dan *transisi* (bar) menyatakan *event*. Dalam penelitian ini untuk memodelkan sistem manufaktur dengan menggunakan Petri net, interpretasi untuk *place*, transisi, dan token adalah sebagai berikut:

- a. *Place* merepresentasikan status *resource* atau operasi, saat mewakili bentuk pertama, jumlah inisial token adalah konstan, misalnya jumlah mesin

mengasumsikan bahwa *plantnya* adalah tetap, atau variabel, misalnya jumlah *job* atau palet pada sistem.

- b. Jika *place* merepresentasikan status *resource*, satu atau lebih token pada *place* mengartikan bahwa *resource* tersedia, dan jika tidak ada token mengartikan tidak tersedia. Jika *place* merepresentasikan operasi, maka token didalamnya menunjukkan operasi dilakukan dan jika tidak ada token mengartikan operasi tidak sedang dilakukan.
- c. Transisi merepresentasikan mulai atau selesainya suatu *event* atau penyelesaian suatu proses operasi.

MODEL KONSTRUKSI

AUTOMATED MANUFACTURING SYSTEM

Terdapat *automated manufacturing system* (AGV) yang terdiri atas komponen utama sebagai berikut: dua entri, dua exit, lima mesin, dua buffer, empat robot, dan dua sistem AGV seperti dalam Gambar 1. Berikutnya dijelaskan deskripsi masing-masing komponen utama AGV sebagai berikut:

Entri : Terdapat dua entri untuk dua tipe bahan baku, F dan G , yang memproduksi dua bentuk produksi berbeda. Setiap potongan bahan baku sudah di patenkan sehingga dapat dikirim menggunakan robot dan dua sistem AGV.

Exit: Terdapat dua exit untuk pengiriman akhir bagian F dan bagian G berturut-turut. Proses output dapat diselesaikan via dua sistem AGV.

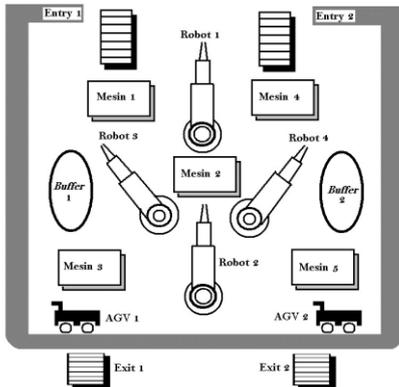
Mesin: Mesin M_1 dan M_2 memproses potongan bahan F dari entri 1. Kedua mesin memproduksi bagian F yang nantinya akan dikirim ke *buffer* 1. Bagian perantara ini selanjutnya diproses oleh M_3 untuk memproduksi bagian akhir dari bahan F . Mesin M_4 memproses potongan bahan dari entri 2 dan memproduksi bagian-bagian G yang akan dikirim ke *buffer* 2. Mesin M_5 merupakan perantara dari bahan G dari *buffer* 2.

Buffer: *buffer* 1 pada ukuran b_1 mendapatkan bagian F dari M_1 atau M_2 . Output ini adalah perantara bagian-bagian F satu per satu ke M_3 . *buffer* 2 pada ukuran b_2 mendapatkan proses bagian G dari M_4 . Output ini merupakan bagian-bagian G satu per satu ke M_5 .

Robot: Robot R_1 mengisi M_1 , M_2 dan M_3 , dan tidak dari ketiga mesin merupakan prioritas untuk dilayani robot tersebut. Dalam aturan *non-deterministik*, R_1 memilih mesin jika bahan baku sudah tersedia dan mesin sudah siap. Robot R_2 membongkar M_3 dan M_5 , serta mengirim bagian-bagian yang sudah selesai/lengkap ke palet yang ada pada sistem AGV. Robot R_3 berbagi dengan M_1 , M_2 dan M_3 . Berikut fungsi yang dilaksanakan : membongkar M_1 , dan M_2 sampai bagian perantara tipe F ke dan dari *buffer* 1, dan mengisi M_3 . Setiap pemrosesan bagian F

dengan M_1 atau M_2 harus disimpan dalam *buffer* 1 sebelum proses selanjutnya.

Desain seperti ini mencegah pemrosesan yang baru berjalan oleh M_1 atau M_2 dari proses perantara oleh M_3 . Sama halnya, robot R_4 digunakan untuk melayani M_4 dan M_5 . Ini bisa digunakan untuk membongkar M_4 untuk mengirim bagian perantara tipe F ke dan dari *buffer* 2, dan mengisi M_5 . *Buffer* 2 menjalankan fungsi yang sama seperti yang dilakukan *buffer* 1. **Sistem AGV:** Dua AGV didesain untuk pengiriman bahan final dan menjalankan palet dalam sistem.



Gambar 1. Stasiun Transfer Bahan baku

Dari M_3 , AGV 1 mengirim bagian final F ke output dan palet kembali ke entri 1 dari M_5 , AGV 2 mengirim bahan final G ke output dan palet kembali ke entri 2. Saat bagian berbeda diambil *deadlock* dapat dihindari. Baik keduanya, AGV dapat bekerja bersamaan setelah robot 2 meletakkan bagian pada palet satu per satu.

METODE SINTESIS

Metode sintesis terdiri dari dua bagian utama, yang masing-masing memiliki bagian penting dalam mendesain sistem. Metode sintesis terbagi menjadi desain *top-down* dan desain *bottom-up*. Berikut deskripsi dari metode sintesis.

Desain Top-down: Langkah 1: memilih Petri net yang *reversible*, *live*, dan *bounded* sebagai model *first-level* dari suatu sistem yang bekerja saat semua *resource* utama tersedia. dan menentukan P_A , P_B , dan P_C dimana P_A dan P_B merupakan subjek untuk meningkatkan, sementara P_C selalu tetap dan anggotanya memiliki jumlah variabel pada inisial token. Langkah 2: menguraikan sistem dalam beberapa subsistem di perlihatkan sebagai operasi *place* menggunakan modul desain dasar terdefinisi. Gantikan operasi *place* ini dengan modul desain dasar yang semakin detail sampai tidak ada operasi-operasi yang dapat dibagi selanjutnya atau sampai pada titik jangkauan yang tidak diperlukan. P_A semakin meningkat di setiap langkah. Langkah 3: secara wajar menambah *place non-shared resource* pada setiap langkah, saat satu dari

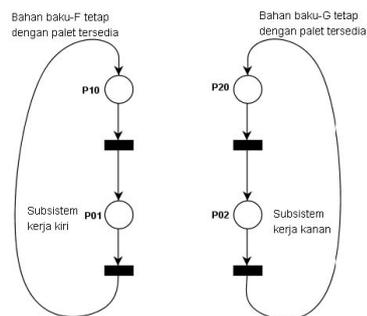
beberapa operasi memerlukan *resource*. *Arc* terhubung ke *place resource* sehingga Akibat 1 terpenuhi. Pada setiap penambahan hanya P_B yang ditingkatkan.

Desain Bottom-up: Langkah 4: menambahkan setiap *place buffer*, yang dipasangkan dengan *place-A* yang sudah ada untuk merepresentasikan *buffer*, bentuk modul *buffer* Petri net jika setiap *buffer* ada. Setiap penambahan *place buffer* dengan inialisasi token yang mana jumlahnya mengartikan kapasitas pada *buffer* yang menjadi *place-B*. Langkah 5: menambahkan *place shared resource* yang merupakan bentuk *Paralel Mutual Exclusion* (PME) atau *Generalized Paralel Mutual Exclusion* (GPME). *Place-place resource* akan menjadi *place-B*. Langkah 6: menambahkan *place shared resource* yang merupakan bentuk *Sequential Mutual Exclusion* (SME) atau *Generalized Sequential Mutual Exclusion* (GSME) dan menghitung kapasitas token yang terjangkau antara PME atau GPME, α , β , dan γ , serta menentukan jumlah inisial token dalam $p, \forall p \in P_B$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan di bahas proses modeling Petri net dengan menggunakan deskripsi sintesis.

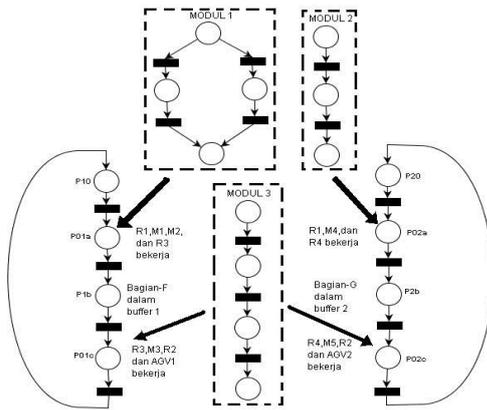
Desain Petri net level pertama: tanpa mempertimbangkan *shared resource*, robot, sistem ini dapat ditunjukkan dalam dua subsistem yang saling bergantung subsistem kiri dan subsistem kanan. Subsistem kiri memuat tiga mesin, *buffer*, dan AGV. Subsistem kanan memuat dua mesin yang terhubung, *buffer* dan AGV. Saat struktur *choice-synchronization* tidak dilibatkan dalam dua subsistem ini, Petri net level pertama didesain dengan model yang memiliki dua bagian Petri net seperti pada Gambar 2. Kedua net merupakan *choice-free net*. Secara inisial ditulis: $P_A = \{p_{01}, p_{02}\}$; $P_B = \emptyset$; $P_C = \{p_{10}, p_{20}\}$.



Gambar 2. Model Petri net level pertama memuat dua bagian net

Dekomposisi dan penghalusan operasi: untuk menjabarkan sistem ini secara lengkap, dekomposisi dan penghalusan sangat diperlukan. Kedua subsistem diuraikan menjadi tiga langkah untuk *generate* produk akhir, baik p_{01} dan p_{02} pada model Petri net level pertama dalam Gambar 3 digantikan dengan tiga modul barisan *place*. Proses penghalusan net diperoleh sesuai Gambar 3 dimana,

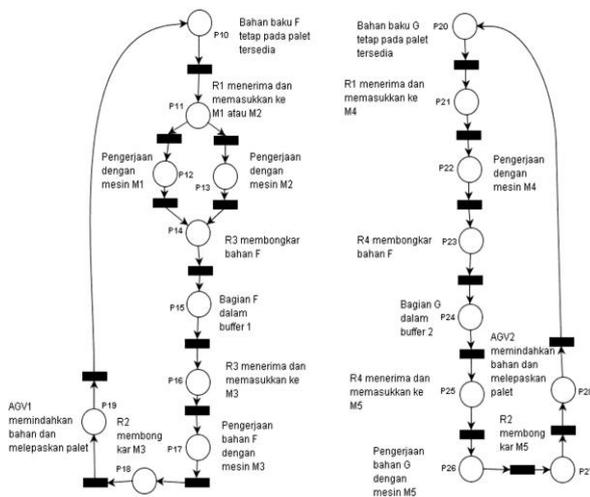
$$P_A = \{p_{01a}, p_{1b}, p_{01c}, p_{02a}, p_{2b}, p_{02c}\}.$$



Gambar 3. Petri net setelah penghalusan pada p_{01} dan p_{02}

Arti masing-masing *place* dijelaskan pada Gambar. 4 dan Tabel. 1. Selanjutnya dekomposisi dan penghalusan dilakukan yaitu:

1. *Place* p_{01a} diganti dengan modul PN pilihan (modul 1 pada Gambar 3)
2. *Place* p_{02a} diganti dengan tiga barisan *place* modul PN (modul 2 pada Gambar 3)
3. Baik p_{01c} dan p_{02c} diganti dengan empat barisan *place* modul PN (modul 3 pada Gambar 3)
4. *Place* p_{01b} dan p_{02b} model perantara bagian *F* dan *G*, masing-masing secara berurutan disimpan pada *buffer* 1 dan *buffer* 2. Setelah itu penghalusan untuk kedua *place* ini tidak dibutuhkan.



Gambar 4. Petri net setelah penghalusan pada p_{01a} , p_{02a} , p_{01c} dan p_{02c}

Tabel 1. Label *Place* untuk Petri net pada Gambar 3.

Place	Interpretasi
p_{10}	Bahan baku tipe <i>F</i> tersedia, Masing-masing palet siap
p_{01a}	R_1, M_1, M_2 , dan R_3 bekerja
p_{1b}	Bagian <i>F</i> dalam <i>buffer</i> 1
p_{01c}	R_3, M_3, R_2 , dan AGV1 bekerja
p_{20}	Bahan baku tipe <i>G</i> , Masing-masing tetap dengan palet tersedia
p_{02a}	R_1, M_4 , dan R_4 bekerja
p_{2b}	Bagian <i>G</i> dalam <i>buffer</i> 2
p_{02c}	R_4, M_5, R_2 , dan AGV2 bekerja

Selanjutnya akan ditunjukkan penghalusan tersebut dengan melibatkan operasi *place* pada Gambar 5. Himpunan *place* operasi adalah, $P_A = p_{ij}, p_{19}, i = 1,2$, dan $1 \leq j \leq 8$. Interpretasi *place* ini ditunjukkan pada Tabel 2.

Tabel 2. Label *Place* untuk Petri net pada Gambar 4.

Place	Interpretasi
p_{10}	Bahan baku tipe <i>F</i> tersedia, Masing-masing palet siap
p_{11}	R_1 memperoleh palet dari entri 1 dan mengisi M_1 atau M_2
p_{12}	Pengerjaan dengan mesin M_1 bagian bahan <i>F</i>
p_{13}	Pengerjaan dengan mesin M_2 bagian bahan <i>F</i>
p_{14}	R_3 membongkar M_1 atau M_2 dan menempatkan bagian <i>F</i> pada <i>buffer</i> 1
p_{15}	<i>Buffer</i> 1 menyimpan bagian <i>F</i>
p_{16}	R_3 memperoleh palet dari <i>buffer</i> 1 dan mengisi M_3
p_{17}	Pengerjaan dengan mesin M_3 bagian bahan <i>F</i>
p_{18}	R_2 membongkar M_3 dan meletakkan palet pada AGV 1
p_{19}	AGV 1 menyelesaikan bagian <i>F</i> ke exit 1 dan melepaskan palet ke entri 1
p_{20}	Bahan baku tipe <i>G</i> tersedia, Masing-masing palet siap
p_{21}	R_1 memperoleh palet dari entri 2 dan mengisi M_4
p_{22}	Pengerjaan dengan mesin M_4 bagian bahan <i>G</i>
p_{23}	R_4 membongkar M_4 dan menempatkan bagian <i>G</i> pada <i>buffer</i> 1
p_{24}	<i>Buffer</i> 2 menyimpan bagian <i>G</i>
p_{25}	R_4 memperoleh palet dari <i>buffer</i> 2 dan mengisi M_5
p_{26}	Pengerjaan dengan mesin M_5 bagian bahan <i>G</i>
p_{27}	R_2 membongkar M_5 dan meletakkan palet pada AGV 2
p_{28}	AGV 2 menyelesaikan bagian <i>G</i> ke exit 2 dan melepaskan palet ke entri 2

Penambahan *Non-Shared Resource*: Lima mesin dan dua AGV digunakan dengan proses operasi tunggal, sehingga merupakan *resource non-shared* dalam sistem. akan ditambahkan *place resource* pada Petri net. Semua penambahan *place resource* ditunjukkan pada Gambar 5. Penambahan *place* baru merupakan milik himpunan *place resource* tetap.

$$P_B = \{p'_{12}, p'_{13}, p'_{17}, p'_{19}, p'_{22}, p'_{26}, p'_{28}\}$$

Penjelasan atas *place-B* dijelaskan pada Tabel 3.

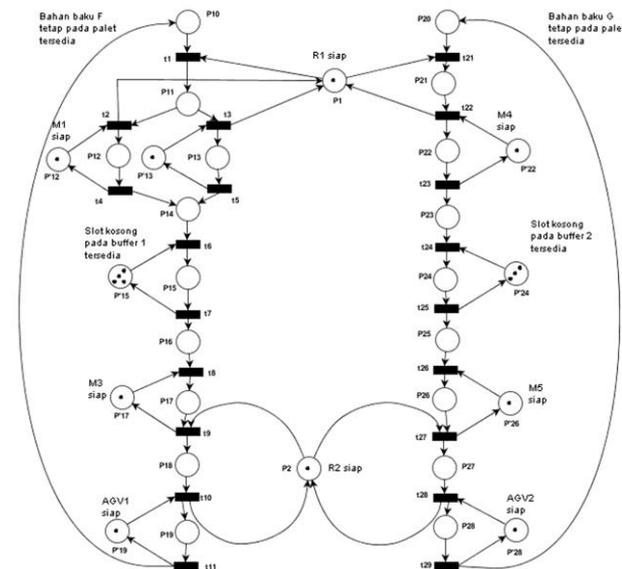
Penambahan *place buffer*: Sistem ini terdiri dari dua *buffer* sederhana. Dua *place-B* dapat diartikan sebagai, p'_{15} merupakan slot kosong dalam *buffer* 1 tersedia jika terdapat token di dalamnya dan p'_{24} merupakan slot kosong dalam *buffer* 2 yang juga tersedia jika terdapat token di dalamnya. Khususnya, p'_{15}, p_{15} dan dua transisinya memenuhi kondisi pertama pada teorema yaitu

Z' bounded (safe) jika Z bounded (safe), konstruksi ini menghasilkan modul buffer yang menjaga sifat net sehingga boundedness, liveness, dan reversibility. Argumen yang sama dapat diterapkan untuk p'_{24} dan kedua transisinya. Ini jelas bahwa $m_0(p'_{15}) = b_1$ dan $m_0(p'_{16}) = b_2$.

Tabel 3. Label place untuk Petri net setelah penambahan non-shared resource

Place	Interpretasi
p'_{12}	M_1 siap
p'_{13}	M_2 siap
p'_{17}	M_3 siap
p'_{19}	AGV 1 siap
p'_{22}	M_4 siap
p'_{26}	M_5 siap
p'_{28}	AGV 2 siap

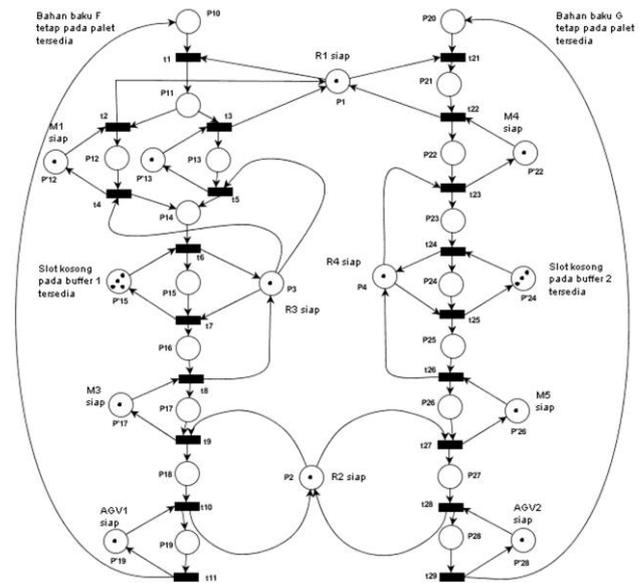
Penambahan shared resource untuk membentuk GPME: dengan mempertimbangkan robot R_2 yang berbagi dengan dua mesin M_3 dan M_5 . Setelah p_2 dan arcnya ditambahkan ditambahkan seperti terlihat pada Gambar 5, nyata bahwa $(p_2, (t_9, t_{10}), (t_{27}, t_{28}))$ adalah PME-2. Oleh sebab itu, net bounded, live, dan reversible. Selanjutnya dengan mempertimbangkan robot R_1 berbagi dengan M_1 , M_2 dan M_4 . Saat M_1 dan M_2 berbagi dengan entri, setelah R_1



Gambar 5. Petri net setelah penambahan Robot R_1 dan R_2 memperoleh bahan baku F

Selanjutnya dapat mengisi M_1 atau M_2 saat keduanya idle. Share resource ini dimodelkan dalam Gambar 5. menggunakan place- B p_1 . Hal ini juga memudahkan untuk memverifikasi bahwa $(p_1, \{(t_1, \{t_2, t_3\}), (t_{21}, t_{22})\})$ membentuk GPME. Oleh sebab itu teori menjamin boundedness, liveness, dan reversibility pada net dalam Gambar 5. selama token berada pada place- C . Dua place- B , p_1 dan p_2 , masing-masingnya berisi satu token, dengan keterangan p_1 : R_1 siap dan p_2 : R_2 siap.

Penambahan shared resource untuk membentuk GSME: bagian yang paling sulit adalah melakukan pencocokan dengan barisan shared resource. Sistem ini menyediakan dua macam resource, robot R_3 dan R_4 . Sebagai contoh, R_4 pertama dibutuhkan untuk membongkar M_4 , dan kemudian mungkin membongkar M_4 lagi atau M_5 . membongkar M_4 dan M_5 merupakan dua barisan proses yang saling terkait. Selanjutnya hasil akhir desain Petri net digambarkan pada Gambar 6. Proses pemodelan dapat dibagi atas beberapa tahapan. Pertama, analisa robot R_3 . Saat hanya arc $(p_3, t_4), (p_3, t_5)$ dan (t_6, p_3) ditambahkan pada net, maka GPME-1 terbentuk yaitu, $(p_3, \{(t_4, t_5), t_6\})$. Saat arc (p_3, t_7) dan (t_8, p_3) ditambahkan, maka struktur $(p_3, \{(t_4, t_5), t_6\}) \cup \{(t_7, t_8)\}$ dapat diverifikasi sebagai GSME untuk sistem.



Gambar 6. Model akhir Petri net untuk AMS

Selanjutnya analisis kapasitas token, α , β , dan γ adalah sebagai berikut:

$$C^1 = C(t_6, t_7) = b_1.$$

$$\alpha(p_{10}, t_4) = \alpha(p_{10}, t_5) = 1, \alpha(p_{20}, t_4) = \alpha(p_{20}, t_5) = 0;$$

$$\alpha(p_{10}) = 1, \alpha(p_{20}) = 0.$$

$$\beta(p_{10}, t_4) = \beta(p_{10}, t_5) = 1, \beta(p_{20}, t_4) = \beta(p_{20}, t_5) = 0;$$

$$\beta(p_{10}) = 1, \beta(p_{20}) = 0;$$

$$\gamma(p_{10}, t_4) = \gamma(p_{10}, t_5) = m_0(p_{10}).$$

Sedemikian sehingga, dengan menggunakan teorema untuk GSME, inisial penandaan yang mungkin adalah:

$$1 \leq m_0(p_{10}) \leq b_1,$$

dan

$$1 \leq m_0(p_{20})$$

yang diperlukan untuk liveness dan reversibility. Kedua, analisa robot R_4 . Struktur $(p_4, \{t_{23}, t_{24}\}) \cup \{(t_{25}, t_{26})\}$ dapat diverifikasi sebagai SME. Kapasitas token, α , β , dan γ dapat dihitung sebagai berikut:

$$C^1 = C(t_{24}, t_{25}) = b_2.$$

$$\alpha(p_{10}) = 0, \alpha(p_{20}) = 1$$

$$\beta(p_{10}) = 0, \beta(p_{20}) = 1$$

dan

$$\gamma(p_{20}, t_{23}) = m_0(p_{20})$$

demikian sehingga,

$$\gamma(t_{23}) = \infty$$

Dengan menggunakan teorema untuk SME, diperoleh:

$$1 \leq m_0(p_{10})$$

Sedemikian sehingga, dengan tujuan untuk menjamin sifat kualitatif yang diharapkan pada net seperti Gambar 6, inisial penandaan harus memenuhi:

$$1 \leq m_0(p_{10}) \leq b_1,$$

dan

$$1 \leq m_0(p_{20}) \leq b_2.$$

Dengan inisial penandaan yang telah diperoleh dan struktur Petri net seperti yang ditunjukkan pada Gambar 6, maka Petri net *bounded*, *live*, dan *reversible*. Himpunan *place* operasi, himpunan *place fixed resource*, dan himpunan variabel *resource* dapat ditulis sebagai berikut:

$$P_A = \{p_{1i}, 1 \leq i \leq 9\} \cup \{p_{2i}, 1 \leq i \leq 8\}$$

$$P_B = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p'_{12}, p'_{13}, p'_{15}, p'_{17}, p'_{19}, p'_{22}, p'_{24}, p'_{26}, p'_{28}\}$$

dan

$$P_C = \{p_{10}, p_{20}\}$$

Sedangkan dengan tujuan untuk mengurangi kemungkinan terjadinya pada lingkungan operasional, dipilih:

$$m_0(p_{10}) = b_1$$

dan

$$m_0(p_{20}) = b_2$$

KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diambil adalah dengan menggunakan metode *hybrid*, Petri net untuk sistem manufaktur dapat disintesis satu per satu, sehingga menghasilkan Petri net *bounded*, *live* dan *reversible* dengan 32 *place* dan 20 transisi.

DAFTAR PUSTAKA

- Adzkiya, D. 2008, *Membangun Petri Net Lampu Lalu Lintas dan Simulasinya*, Tesis Magister, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- David, R. dan Alla, H. 2005, *Discrete, Continuous, and Hybrid Petri Nets*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.
- Murata, T. 1989, *Petri Net: Properties, Analysis, and Applications*, Proceedings of The IEEE, Eds: Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of Illinois, Chicago, Vol. 77, No. 4, hal. 541-580.
- Zhou, M. dan DiCesare, F. 1993. *Petri Net Synthesis for Discrete Event Control of Manufacturing Systems*, Kluwer Academic Publishers, Massachusetts.

SIFAT-SIFAT DASAR INTEGRAL HENSTOCK
(Basic Properties of Henstock Integral)

LEXY JANZEN SINAY, MOZART WINSTON TALAKUA

Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
e-mail: lexyz@gmail.com

ABSTRACT

This paper was a review about theory of Henstock integral. Riemann gave a definition of integral based on the sum of the partitions in Integration area (interval $[a, b]$). Those partitions is a δ -positive constant. Independently, Henstock and Kurzweil replaces δ -positive constant on construction Riemann integral into a positive function, ie $\alpha(x) > 0$ for every $x \in [a, b]$. This function is a partition in interval $[a, b]$. From this partitions, we can defined a new integral called Henstock integral. Henstock integral is referred to as a complete Riemann integral, because the basic properties of the Henstock integral is more constructive than Riemann Integral.

Keywords: Henstock Integral, Partitions, Riemann Integral, δ -Positive Constant

PENDAHULUAN

Sekitar tahun 1670, Kalkulus berhasil ditemukan, dan tokoh-tokoh matematika yang berperan dalam penemuan Kalkulus adalah Newton dan Leibniz. Kedua tokoh ini berhasil mengembangkan Teorema Fundamental, yaitu mengenai antiderivatif. Kemudian A. Cauchy (1789-1857) mulai mengembangkan teori tersebut, dan berhasil meneliti tentang integral dari fungsi kontinu.

Pada tahun 1854, Bernhard Riemann mulai memperhalus definisi yang digunakan oleh Cauchy, dan Riemann pun mengadakan penelitian tentang integral fungsi diskontinu. Riemann berhasil menemukan suatu metode khusus dari integral yang sangat simpel untuk didefinisikan, sehingga metode integral itu disebut integral Riemann.

Kemudian pada tahun 1875 Darboux berhasil memodifikasi integral Riemann dengan mendefinisikan integral atas dan integral bawah sehingga terdefinisi suatu integral baru yang ekuivalen dengan integral Riemann. Teori integral yang dikemukakan oleh Darboux masih memiliki kekurangan.

Pada tahun 1902 Henry Lebesgue (1875-1974) menemukan suatu pendekatan baru untuk integrasi, yang mana metode tersebut mengatasi kekurangan-kekurangan yang dimiliki oleh integral-integral sebelumnya, terutama

mengatasi kekurangan pada integral Riemann. Metode integral tersebut sering disebut integral Lebesgue.

Kemudian, secara terpisah ada beberapa tokoh yang melakukan penelitian tentang teori integral (terutama integral Riemann) dan berhasil mendefinisikan teori-teori integral yang lebih konstruktif. Tokoh-tokoh tersebut adalah Arnaud Denjoy (1912), Oscar Perron (1914), Ralph Henstock dan Jaroslav Kurzweil pada dekade 1950-1960. Secara mendasar, metode integral yang ditemukan oleh para tokoh-tokoh tersebut ekuivalen, namun integral Henstock (Henstock-Kurzweil) lebih unggul dibandingkan integral Denjoy-Perron.

Berdasarkan hal ini maka penulis sangat tertarik dan menganggap perlu untuk mengulas kembali tentang definisi dari integral Henstock dan sifat-sifat dasar integral yang berlaku pada integral Henstock.

TINJAUAN PUSTAKA

Dekade 1950-1960, masing-masing secara terpisah (independen) yaitu Henstock dan Kurzweil mendefinisikan integral baru. Teori integral tersebut merupakan generalisasi dari integral Riemann dengan mengubah konstruksi δ pada integral Riemann, sehingga dibentuk suatu partisi yang baru pada daerah pengintegralannya. Dengan demikian formula tersebut lebih konstruktif (Thobirin, 1997). Teori integral tersebut

juga lebih mudah dari integral Denjoy maupun integral Peron. Pada umumnya, teori tersebut disebut integral Henstock-Kurzweil yang sering juga disebut integral Henstock sangat mudah dibandingkan integral Lebesgue dan definisinya agak berbeda dari integral Riemann. (Schechter, 2001).

Berikut ini akan diberikan beberapa pengertian dan sifat yang akan digunakan dalam pembahasan.

Teorema 1 (Teorema Heine-Borel) [Royden (1987)]

Jika ϕ liput terbuka suatu himpunan tertutup dan terbatas F dalam $\bar{\mathbb{R}}$, sedemikian sehingga $F \subset \bigcup \{O: O \in \phi\}$ maka terdapat liput terbuka bagian berhingga untuk F .

Integral Riemann

Jika a dan b adalah bilangan riil dengan $a < b$ maka terdapat bilangan riil x_1 sehingga $a < x_1 < b$. Karena $x_1 < b$ tentu terdapat bilangan riil x_2 sehingga memenuhi $x_1 < x_2 < b$. Karena $x_2 < b$ maka terdapat bilangan riil x_3 sehingga memenuhi $x_2 < x_3 < b$. Proses ini jika diteruskan akan diperoleh bilangan-bilangan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sehingga

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Jadi untuk setiap interval tertutup $[a, b]$ dapat dibentuk himpunan

$$D = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$$

dengan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

Sehingga dapat dibentuk definisi partisi Riemann seperti di bawah ini.

Definisi 2

a). Untuk setiap bilangan riil a dan b dengan $a < b$ himpunan terurut

$$D = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

dengan

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \text{ dan } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

disebut partisi Riemann pada $[a, b]$

Titik x_i dengan $i = 0, 1, 2, \dots, n$ pada D disebut titik partisi (*partition point*) dan $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ disebut titik tag (*tag point*).

b). Norma D , dinotasikan dengan $\|D\|$ adalah bilangan maks $\{x_i - x_{i-1}; i = 1, 2, \dots, n\}$

c). Suatu partisi Riemann D_1 pada $[a, b]$ disebut penghalus partisi Riemann D_2 pada $[a, b]$ jika $D_2 \subset D_1$, artinya setiap titik partisi dalam D_2 termuat juga di dalam D_1 (D_2 lebih halus dari D_1).

Dengan adanya partisi pada $[a, b]$ (partisi Riemann) maka didefinisikan integral Riemann seperti berikut ini.

Definisi 3 (Integral Riemann)

Suatu fungsi $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Riemann jika ada bilangan A sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga jika

$$D = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

Partisi Riemann pada $[a, b]$ dengan $\|D\| < \delta$ berlaku

$$\left| (D) \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A \right| < \varepsilon.$$

Selanjutnya bilangan A disebut nilai integral Riemann fungsi f pada $[a, b]$ dan dinotasikan dengan

$$A = (R) \int_a^b f(x) dx$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini akan dibahas mengenai integral Henstock yang sering pula disebut integral Riemann Lengkap (*Complete Riemann Integral*) beserta sifat-sifatnya.

Integral Henstock

Sebelum diuraikan mengenai integral Henstock terlebih dahulu dibahas tentang partisi. Karena integral Henstock didasarkan atas adanya partisi pada daerah pengintegralannya. Partisi tersebut adalah partisi- δ yang dapat dilihat pada definisi berikut ini.

Definisi 4

Diketahui fungsi positif $\delta: [a, b] \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Diberikan sebuah partisi $D = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ pada $[a, b]$ yang memenuhi

$$\xi_i - \delta(\xi_i) < x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i < \xi_i + \delta(\xi_i),$$

untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ dinamakan partisi- δ (δ -*partition* atau δ -*fine partition*) pada $[a, b]$.

Lebih singkat, partisi D dapat ditulis $\{[u, v]; \xi\}$.

Karena integral yang akan didefinisikan berkaitan dengan pengertian partisi- δ , maka akan diperlihatkan tentang eksistensi dari partisi- δ tersebut pada sebuah selang tertutup $[a, b]$.

Teorema 5

Untuk setiap fungsi positif $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terdapat suatu partisi- δ pada $[a, b]$.

Bukti

Misalkan $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi positif.

Untuk setiap $\xi \in [a, b]$, $\delta(\xi) > 0$ sehingga dapat dibentuk liput (u, v) yang memenuhi

$$\xi - \delta(\xi) < u < \xi < v < \xi + \delta(\xi)$$

yaitu I_ξ , sehingga dapat dibuat keluarga $\mathfrak{I}_\xi = \{I_\xi\}$.

$$\sigma = \{I_\xi | I_\xi \in \mathfrak{I}_\xi, \xi \in [a, b]\}$$

merupakan liput terbuka dari $[a, b]$, yaitu

$$[a, b] \subset \bigcup_{I_\xi \in \sigma} I_\xi.$$

Menurut Teorema 1 (Teorema Heine-Borel) terdapat liput terbuka bagian berhingga yaitu

$$\{I_{\xi_1}, I_{\xi_2}, \dots, I_{\xi_n}\} \subset \sigma \text{ sehingga } [a, b] \subset \bigcup_{j=1}^n I_{\xi_j}.$$

Ambil $a \leq \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n = b$

Oleh karena $I_{\xi_{j-1}} \cap I_{\xi_j} \neq \emptyset$, sehingga dapat diambil

$$x_{j-1} \in I_{\xi_{j-1}} \cap I_{\xi_j} \text{ dengan } x_{j-1} = \frac{1}{2}(u_j + v_{j-1}), \quad j = 2, \dots, n$$

dan ambil $x_0 = a$ dan $x_n = b$.

dengan x_{j-1} untuk setiap $j = 2, \dots, n$,

$$u_{j-1} < \xi_{j-1} < x_{j-1} < \xi_j < v_j$$

Jika diambil $x_0 = a$ dan $x_n = b$ maka diperoleh:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

dengan sifat

$$\xi_j - \delta(\xi_j) < x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j < \xi_j + \delta(\xi_j)$$

Untuk setiap $j = 1, 2, \dots, n$.

Jadi diperoleh

$$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$$

dengan sifat

$$\xi_j - \delta(\xi_j) < x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j < \xi_j + \delta(\xi_j) \quad \square$$

Berikut ini akan diperlihatkan sifat dari partisi- δ yang akan dipergunakan dalam pembahasan selanjutnya.

Teorema 6

Misalkan $\delta_1, \delta_2, \delta$ masing-masing merupakan fungsi bernilai riil positif pada $[a, b]$ dengan

$$\delta(\xi) = \min \{ \delta_1(\xi), \delta_2(\xi) \}, \quad \xi \in [a, b]$$

Jika D partisi- δ pada $[a, b]$, maka D juga merupakan partisi- δ_1 dan partisi- δ_2 pada $[a, b]$.

Bukti

Misalkan D partisi- δ pada $[a, b]$ yang diberikan oleh

$$D = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

dengan $\xi_i - \delta(\xi_i) < x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i < \xi_i + \delta(\xi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$.

Karena $\delta(\xi) = \min \{ \delta_1(\xi), \delta_2(\xi) \}$

maka

$$\delta(\xi) \leq \delta_1(\xi) \text{ atau } \delta(\xi) \leq \delta_2(\xi).$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} \xi_i - \delta_1(\xi_i) &\leq \xi_i - \delta(\xi_i) < x_{i-1} \leq \xi_i \\ &\leq x_i < \xi_i + \delta(\xi_i) \leq \xi_i + \delta_1(\xi_i) \end{aligned}$$

dan juga

$$\begin{aligned} \xi_i - \delta_2(\xi_i) &\leq \xi_i - \delta(\xi_i) < x_{i-1} \leq \xi_i \\ &\leq x_i < \xi_i + \delta(\xi_i) \leq \xi_i + \delta_2(\xi_i) \end{aligned}$$

untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Jadi D merupakan partisi- δ_1 dan partisi- δ_2 pada $[a, b]$ dan terbukti pula bahwa D partisi- δ lebih halus dari partisi- δ_1 dan partisi- δ_2 . \square

Dengan menggunakan partisi- δ seperti didefinisikan pada Definisi 4, Henstock membangun integral Riemann Lengkap yang selanjutnya disebut integral Henstock, yang didefinisikan seperti berikut ini.

Definisi 7

Suatu fungsi $f: [a, b] \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ dikatakan terintegral Henstock jika ada bilangan A sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta(\xi) > 0$ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap partisi- δ

$$D = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

Pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D) \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A \right| < \varepsilon$$

A disebut nilai integral Henstock fungsi f pada selang $[a, b]$ dan dinotasikan dengan

$$A = (H) \int_a^b f(x) dx.$$

dan $(D) \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ dinamakan jumlah Riemann yang bersesuaian dengan partisi- δD pada selang $[a, b]$.

Sifat-Sifat Integral Henstock

Pada bagian ini akan dibahas beberapa sifat sederhana dari integral Henstock yang mana sifat-sifat tersebut merupakan sifat-sifat integral yang berlaku untuk integral Henstock.

Teorema 8 (Sifat ketunggalan integral Henstock)

Jika fungsi $f: [a, b] \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ terintegral Henstock pada $[a, b]$, maka nilai integral itu tunggal.

Bukti

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena f terintegral Henstock pada $[a, b]$ maka terdapat bilangan riil A_1 dan fungsi positif $\delta_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap partisi- δ_1 $D_1 = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D_1) \sum f(\xi)(v - u) - A_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Misalkan f juga terintegral Henstock pada $[a, b]$ dengan nilai integral A_2 , terdapat fungsi positif $\delta_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap partisi- δ_2 $D_2 = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D_2) \sum f(\xi)(v - u) - A_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Didefinisikan fungsi positif $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$\delta(\xi) = \min \{ \delta_1(\xi), \delta_2(\xi) \}, \xi \in [a, b]$$

Menurut Teorema 6, jika $D = \{ [u, v]; \xi \}$ partisi- δ pada $[a, b]$, maka D juga merupakan partisi- δ_1 dan partisi- δ_2 pada $[a, b]$.

Sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} |A_1 - A_2| &= \left| A_1 - (D) \sum f(\xi)(v-u) \right. \\ &\quad \left. + (D) \sum f(\xi)(v-u) - A_2 \right| \\ &\leq \left| A_1 - (D) \sum f(\xi)(v-u) \right| \\ &\quad + \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A_2 \right| \\ &= \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A_1 \right| \\ &\quad + \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A_2 \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang, maka terbukti $A_1 = A_2$.
Jadi nilai A_1 tunggal. \square

Seperti halnya integral Riemann, sifat kelinieran juga berlaku pada integral Henstock, dan sifat ini diungkapkan dengan teorema di bawah ini.

Teorema 9

Jika fungsi-fungsi f dan g masing-masing terintegral Henstock pada $[a, b]$ dengan demikian maka $f + g$ dan αf untuk α bilangan riil juga terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan berlaku

$$(i). \quad (H) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = (H) \int_a^b f(x) dx + (H) \int_a^b g(x) dx$$

$$(ii). \quad (H) \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha (H) \int_a^b f(x) dx$$

Bukti

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang.

(i). Misalkan

$$(H) \int_a^b f(x) dx = A \text{ dan } (H) \int_a^b g(x) dx = B.$$

Terdapat fungsi $\delta_1(\xi) > 0$ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap partisi- δ_1 $D_1 = \{ [u, v]; \xi \}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D_1) \sum f(\xi)(v-u) - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan juga terdapat fungsi $\delta_2(\xi) > 0$ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap partisi- δ_2 $D_2 = \{ [u, v]; \xi \}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D_2) \sum g(\xi)(v-u) - B \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Didefinisikan fungsi $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$\delta(\xi) = \min \{ \delta_1(\xi), \delta_2(\xi) \}, \xi \in [a, b].$$

Berdasarkan Teorema 6, jika $D = \{ [u, v]; \xi \}$ partisi- δ pada $[a, b]$, maka D juga merupakan partisi- δ_1 dan partisi- δ_2 pada $[a, b]$. Karena itu untuk sebarang partisi- δ pada selang $[a, b]$ berlaku

$$\begin{aligned} &\left| (D) \sum (f + g)(\xi)(v-u) - (A + B) \right| \\ &= \left| (D) \sum (f(\xi) + g(\xi))(v-u) - (A + B) \right| \\ &= \left| (D) \sum (f(\xi)(v-u) + g(\xi)(v-u)) - A - B \right| \\ &= \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) \right. \\ &\quad \left. + (D) \sum g(\xi)(v-u) - A - B \right| \\ &= \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A \right. \\ &\quad \left. + (D) \sum g(\xi)(v-u) - B \right| \\ &\leq \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A \right| \\ &\quad + \left| (D) \sum g(\xi)(v-u) - B \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Sehingga $f + g$ terintegral Henstock pada $[a, b]$, ini berarti $f + g$ terintegral Henstock ke $A + B$ dengan

$$\begin{aligned} (H) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= A + B \\ &= (H) \int_a^b f(x) dx + (H) \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

(ii). Jika $\alpha = 0$ maka jelas αf terintegral Henstock ke 0. Untuk $\alpha \neq 0$.

Pilih fungsi $\delta_3(\xi) > 0$ pada $[a, b]$,

sehingga untuk setiap partisi- δ_3 $D_3 = \{ [u, v]; \xi \}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D_3) \sum f(\xi)(v-u) - A \right| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

Misalkan $D = \{ [u, v]; \xi \}$ sebarang partisi- δ_3 pada $[a, b]$,

maka

$$\left| (D) \sum \alpha f(\xi)(v-u) - \alpha A \right|$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \alpha \left((D) \sum f(\xi)(v-u) \right) - \alpha A \right| \\
 &= \left| \alpha \left((D) \sum f(\xi)(v-u) - A \right) \right| \\
 &= \left| \alpha \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A \right| \right| \\
 &< |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon
 \end{aligned}$$

Sehingga

αf terintegral Henstock ke αA dengan

$$(H) \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha A = \alpha (H) \int_a^b f(x) dx \quad \square$$

Lemma berikut ini adalah suatu kriteria untuk menyelidiki suatu fungsi terintegral Henstock tanpa mengetahui nilai integralnya. Kriteria ini sering disebut juga Kriteria Cauchy.

Lemma 10

Fungsi $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral Henstock pada $[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta(\xi) > 0$ pada $[a, b]$ sehingga untuk sebarang partisi- δ

$$D = \{ [u, v]; \xi \} \text{ dan } D' = \{ [u', v']; \xi' \} \text{ pada } [a, b]$$

berlaku

$$\left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - (D') \sum f(\xi')(v'-u') \right| < \varepsilon$$

Bukti

(i) Syarat cukup.

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ terintegral Henstock pada } [a, b].$$

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Terdapat $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk sebarang partisi- δ $D = \{ [u, v]; \xi \}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{dengan } A = (H) \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{Jika } D = \{ [u, v]; \xi \} \text{ dan } D' = \{ [u', v']; \xi' \}$$

partisi- δ pada $[a, b]$ berlaku juga

$$\left| (D') \sum f(\xi')(v'-u') - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

maka

$$\left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - (D') \sum f(\xi')(v'-u') \right|$$

$$= \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A \right.$$

$$\left. - A - (D') \sum f(\xi')(v'-u') \right|$$

$$\leq \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A \right|$$

$$+ \left| A - (D') \sum f(\xi')(v'-u') \right|$$

$$= \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A \right|$$

$$+ \left| (D') \sum f(\xi')(v'-u') - A \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(ii) Syarat perlu.

Misalkan $\{ \varepsilon_n \}$, $\varepsilon_n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ adalah barisan monoton turun yang konvergen ke 0 ($\varepsilon_n \rightarrow 0$).

Diketahui bahwa untuk setiap ε_n terdapat δ_n , $\delta_n(\xi) > 0$, $\xi \in [a, b]$,

sehingga untuk setiap partisi- δ_n

$$D_n = \{ [u, v]; \xi \} \text{ dan } D'_n = \{ [u', v']; \xi' \} \text{ pada } [a, b]$$

berlaku

$$\left| (D_n) \sum f(\xi)(v-u) - (D'_n) \sum f(\xi')(v'-u') \right| < \varepsilon_n$$

Definisikan $S_n = (D_n) \sum f(\xi)(v-u)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dibentuk barisan fungsi positif $\{ \delta_n \}$

dengan $\delta_1(\xi) = \delta'_1(\xi)$ dan

$$\delta_n(\xi) = \min \{ \delta_{n-1}(\xi), \delta'_n(\xi) \}, n = 2, 3, 4, \dots \text{ (a)}$$

Ambil sebarang bilangan asli m dan n dengan $m > n$, terdapat

$$\text{partisi-}\delta_n \text{ } D_n = \{ [u, v]; \xi \} \text{ dan}$$

$$\text{partisi-}\delta_m \text{ } D_m = \{ [u, v]; \xi \},$$

berdasarkan (a) maka $\delta_m < \delta_n$, yang berarti partisi- δ_m lebih halus dari partisi- δ_n .

Sehingga dipenuhi

$$\begin{aligned}
 |S_n - S_m| &= \left| (D_n) \sum f(\xi)(v-u) \right. \\
 &\quad \left. - (D_m) \sum f(\xi)(v-u) \right| < \varepsilon_n
 \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon_n \rightarrow 0$, berarti $\{ S_n \}$ merupakan barisan Cauchy. Karena S_n merupakan bilangan riil, berarti barisan $\{ S_n \}$ konvergen. Misalkan $S_n \rightarrow S$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N_1 sehingga untuk setiap $n \geq N_1$ berlaku

$$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ di atas terdapat bilangan asli N_2 sehingga untuk setiap $n \geq N_2$ dipenuhi

$$\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ambil $N = \max \{ N_1, N_2 \}$.

Ambil $\delta < \delta_N$, dan partisi- $\delta D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ yang lebih halus dari partisi- δ_{N_1} ataupun partisi- δ_{N_2} .

Sehingga untuk sebarang partisi- $\delta D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\begin{aligned} & \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - S \right| \\ &= \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - (D_N) \sum f(\xi)(v-u) \right. \\ & \quad \left. + (D_N) \sum f(\xi)(v-u) - S \right| \\ &\leq \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - (D_N) \sum f(\xi)(v-u) \right| \\ & \quad + \left| (D_N) \sum f(\xi)(v-u) - S \right| \\ &< \varepsilon_n + |S_n - S| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi terbukti f terintegral Henstock ke S pada $[a, b]$. \square

Selanjutnya teorema-teorema di bawah ini menunjukkan berlakunya sifat-sifat umum integral pada integral Henstock. Seperti halnya berlaku pada integral Riemann, teorema berikut ini berlaku juga pada integral Henstock.

Teorema 11

Jika fungsi f terintegral Henstock pada $[a, c]$ dan pada $[c, b]$, dengan $a < c < b$, maka f juga terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan berlaku

$$(H) \int_a^b f(x) dx = (H) \int_a^c f(x) dx + (H) \int_c^b f(x) dx$$

Bukti.

Misalkan $(H) \int_a^c f(x) dx = A$ dan $(H) \int_c^b f(x) dx = B$.

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$.

Terdapat fungsi positif $\delta_1: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap partisi- $\delta_1 D_1 = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, c]$ berlaku

$$\left| (D_1) \sum f(\xi)(v-u) - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Terdapat fungsi positif $\delta_2: [c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap partisi- $\delta_2 D_2 = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[c, b]$ berlaku

$$\left| (D_2) \sum f(\xi)(v-u) - B \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Didefinisikan fungsi positif $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$\delta(\xi) = \begin{cases} \min \{ \delta_1(\xi), c - \xi \}, & \text{jika } \xi \in [a, c] \\ \min \{ \delta_1(c), \delta_2(c) \}, & \text{jika } \xi \in c \\ \min \{ \delta_2(\xi), \xi - c \}, & \text{jika } \xi \in (c, b] \end{cases}$$

Ambil sebarang partisi- $\delta D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$.

Kemungkinan yang terjadi:

- (i). c merupakan salah satu titik partisi.
- (ii). c bukan merupakan salah satu titik partisi.

Maka

- (i). Jika c merupakan salah satu titik partisi.

Ambil partisi- $\delta D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ sehingga c merupakan salah satu titik partisi.

Jika $D' = \{[u, v]; \xi\}$ merupakan subpartisi- δ dari

$D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, c]$ dan $D'' = \{[u, v]; \xi\}$

merupakan subpartisi- δ dari $D = \{[u, v]; \xi\}$ pada

$[c, b]$ maka D' merupakan partisi- δ_1 dan D'' merupakan subpartisi- δ_2 .

- (ii). Jika c bukan merupakan salah satu titik partisi, maka terdapat $\{[u, v]; \xi\}$ sehingga $c \in [u, v]$.

Kemudian kita buat partisi- δD^* yang memuat

$$([u, c], \xi) \text{ dan } ([c, v], c) \text{ jika } u \leq \xi < c < v$$

atau

$$([u, c], c) \text{ dan } ([c, v], \xi) \text{ jika } u < c < \xi \leq v$$

Dengan demikian partisi- $\delta D^* = \{[u, v]; \xi\}$ pada

$[a, b]$ merupakan penghalusan partisi- δ

$D = \{[u, v]; \xi\}$.

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - (A+B) \right| \\ &\leq \left| (D_1) \sum f(\xi)(v-u) \right. \\ & \quad \left. + (D_2) \sum f(\xi)(v-u) - A - B \right| \\ &\leq \left| (D_1) \sum f(\xi)(v-u) - A \right| \\ & \quad + \left| (D_2) \sum f(\xi)(v-u) - B \right| \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Jadi fungsi f terintegral Henstock ke $A + B$ pada $[a, b]$, dan berlaku

$$(H) \int_a^b f(x) dx = (H) \int_a^c f(x) dx + (H) \int_c^b f(x) dx$$

Terbukti \square

Dengan adanya Teorema 11 di atas maka untuk menentukan bahwa suatu fungsi terintegral Henstock atau tidak pada $[a, b]$ dapat diperlihatkan melalui keterintegralan fungsi tersebut pada interval-interval

bagian yang banyaknya berhingga dalam $[a, b]$ yang tidak saling tumpang tindih sehingga gabungannya sama dengan $[a, b]$.

Teorema 12

Jika $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral Henstock pada $[a, b]$ maka f juga terintegral Henstock pada setiap selang bagian $[c, d] \subset [a, b]$.

Bukti

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$. Menurut Lemma 10, dapat dipilih fungsi positif $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, sehingga untuk setiap partisi- δ $D = \{[u, v]; \xi\}$ dan $D' = \{[u', v']; \xi'\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - (D') \sum f(\xi')(v'-u') \right| < \varepsilon$$

Ambil sebarang partisi- δ D_1 dan D_2 pada $[c, d]$ masing-masing dengan jumlah Riemann S_1 dan S_2 .

Ambil juga partisi- δ D_3 pada $[a, c] \cup [d, b]$ dengan jumlah Riemann S_3 .

Diperoleh $P = D_1 \cup D_3$ dan $P' = D_2 \cup D_3$ merupakan partisi- δ pada $[a, b]$, masing-masing dengan jumlah Riemann $S_1 + S_3$ dan $S_2 + S_3$.

Diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| (D_1) \sum f(\xi)(v-u) - (D_2) \sum f(\xi)(v-u) \right| \\ &= |S_1 - S_2| \\ &= |S_1 + S_3 - S_3 - S_2| \\ &= |(S_1 + S_3) - (S_2 + S_3)| \\ &= \left| (P) \sum f(\xi)(v-u) - (P') \sum f(\xi)(v-u) \right| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Menurut Lemma 10, f terintegral Henstock pada $[c, d]$ \square

Teorema 13

Jika $f(x) = 0$ hampir dimana-mana pada $[a, b]$, maka f

terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan $(H) \int_a^b f(x) dx = 0$.

Bukti

Diketahui $f(x) = 0$ hampir dimana-mana pada $[a, b]$, berarti terdapat $X \subset [a, b]$ dengan $\mu(X) = 0$ sehingga

$$f(x) \begin{cases} = 0, & \text{Jika } x \notin X \\ \neq 0, & \text{Jika } x \in X \end{cases}$$

Selanjutnya didefinisikan

$$X_i = \left\{ x \in [a, b] \mid i-1 < |f(x)| \leq i \right\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

sehingga $\mu(X_i) = 0$, sehingga berlaku $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$.

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan setiap i , terdapat barisan selang terbuka $\{I_{ij}\}$ sehingga $X_i \subset \bigcup_j I_{ij}$ dengan

$$\mu(I_{ij}) < \varepsilon 2^{-(i+j)} i^{-1}$$

Didefinisikan $\delta(\xi) > 0$ pada $[a, b]$ sehingga:

- (i). $(\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi)) \subset I_{ij}$, jika $\xi \in X_i, i = 1, 2, \dots$
- (ii). $\delta(\xi)$ diambil sebarang, jika $\xi \notin X_i, i = 1, 2, \dots$

Jika $D = \{[u, v]; \xi\}$ sebarang partisi- δ pada $[a, b]$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) \right| &\leq \left| \sum_{\xi \in X} f(\xi)(v-u) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} i \varepsilon 2^{-(i+i)} i^{-1} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti f terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan

$$(H) \int_a^b f(x) dx = 0 \quad \square$$

Teorema 13 tersebut merupakan kejadian khusus pada integral Henstock yang tidak berlaku pada integral Riemann. Selanjutnya berdasarkan Teorema 13 diperoleh akibat berikut.

Akibat 14

Jika f terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan $g(x) = f(x)$ hampir dimana-mana pada $[a, b]$ maka g terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan

$$(H) \int_a^b g(x) dx = (H) \int_a^b f(x) dx$$

Bukti

Misal fungsi $h = g - f$, diperoleh $h(x) = 0$ hampir dimana-mana pada $[a, b]$, menurut Teorema 13 di atas maka h terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan $(H) \int_a^b h(x) dx = 0$.

Karena h dan f terintegral Henstock pada $[a, b]$, dan $g = h + f$, berdasarkan Teorema 9, diperoleh g terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan

$$\begin{aligned} (H) \int_a^b g(x) dx &= (H) \int_a^b h(x) dx + (H) \int_a^b f(x) dx \\ &= 0 + (H) \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

$$= (H) \int_a^b f(x) dx \quad \square$$

Berikut ini merupakan teorema yang digeneralisasi dari sifat yang berlaku pada integral Riemann.

Teorema 15

Jika f dan g masing-masing terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan jika $f(x) \leq g(x)$ hampir untuk semua $x \in [a, b]$ maka

$$(H) \int_a^b f(x) dx \leq (H) \int_a^b g(x) dx$$

Bukti

Dengan tidak mengurangi keumuman dapat dianggap $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Terdapat fungsi $\delta_1(\xi) > 0$ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap partisi- δ_1 $D_1 = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D_1) \sum f(\xi)(v-u) - (H) \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

dan terdapat fungsi $\delta_2(\xi) > 0$ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap partisi- δ_2 $D_2 = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D_2) \sum g(\xi)(v-u) - (H) \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Definisikan fungsi $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$\delta(\xi) = \min \{ \delta_1(\xi), \delta_2(\xi) \}.$$

Menurut Teorema 6, jika $D = \{[u, v]; \xi\}$ partisi- δ pada $[a, b]$, maka D juga merupakan partisi- δ_1 dan partisi- δ_2 pada $[a, b]$.

Jadi untuk sebarang partisi- δ $D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - (H) \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$\left| (D) \sum g(\xi)(v-u) - (H) \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

sehingga

$$\begin{aligned} (H) \int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} &\leq (D) \sum f(\xi)(v-u) \\ &\leq (D) \sum g(\xi)(v-u) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + (H) \int_a^b g(x) dx$$

diperoleh

$$(H) \int_a^b f(x) dx \leq (H) \int_a^b g(x) dx + \varepsilon$$

Karena sebarang $\varepsilon > 0$, maka

$$(H) \int_a^b f(x) dx \leq (H) \int_a^b g(x) dx \quad \square$$

Misalkan fungsi $f: [a, b] \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ terintegral Henstock pada $[a, b]$. Berdasarkan Teorema 12, untuk setiap $x \in [a, b]$ fungsi f juga terintegral Henstock pada $[a, x] \subset [a, b]$. Sehingga dapat didefinisikan fungsi $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$F(x) = (H) \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b,$$

dan selanjutnya F disebut fungsi primitif Henstock fungsi f pada $[a, b]$. Dengan demikian definisi integral Henstock dapat pula ditulis sebagai berikut.

Definisi 16

Fungsi terukur f dikatakan terintegral Henstock pada $[a, b]$ jika ada fungsi $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap partisi- δ $D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\begin{aligned} &\left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - F(a, b) \right| \\ &= \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - F(u, v) \right| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

dengan $F(u, v) = F(v) - F(u)$.

Teorema berikut ini merupakan sebuah sifat dari integral Henstock yang sering disebut sebagai Lemma Henstock.

Teorema 17 (Lemma Henstock)

Jika fungsi f terintegral Henstock pada $[a, b]$, yaitu terdapat fungsi $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap partisi- δ $D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - F(u, v) \right| < \varepsilon$$

maka untuk setiap partisi bagian D_1 dari D berlaku

$$\left| (D_1) \sum f(\xi)(v-u) - F(u, v) \right| < 2\varepsilon$$

Bukti

Ambil sebarang partisi- $\delta D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$.

Ambil D_1 sebarang subpartisi- δ dari D , sebut :

$$J_i = [u_i, v_i] \text{ jika } ([u_i, v_i]; \xi_i) \in D_1$$

$$I_k = [u_k, v_k] \text{ jika } ([u_k, v_k]; \xi_k) \in D - D_1$$

Karena f terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan $I_k \subset [a, b]$ untuk setiap k , menurut Teorema 11, f terintegral Henstock pada I_k untuk setiap k .

Sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ_k , $\delta_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap partisi- δ_k

$D_k = \{[u, v]; \xi\}$ pada I_k berlaku

$$\left| (D_k) \sum f(\xi)(v-u) - F(u, v) \right| < 2^{-k} \varepsilon$$

Jadi $D = D_1 \cup \left(\bigcup_k D_k \right)$.

Diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| (D_1) \sum f(\xi)(v-u) - F(u, v) \right| \\ &= \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - F(u, v) \right. \\ & \quad \left. - \sum_k (D_k) \sum f(\xi)(v-u) - F(u, v) \right| \\ &\leq \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - F(u, v) \right. \\ & \quad \left. + \sum_k (D_k) \sum f(\xi)(v-u) - F(u, v) \right| \\ &< \varepsilon + \sum_k \varepsilon 2^{-k} \\ &\leq 2\varepsilon \quad \square \end{aligned}$$

KESIMPULAN

Dari uraian ini dapat disimpulkan bahwa:

Pendefinisian integral Henstock didasarkan atas partisi- δ , dimana partisi tersebut merupakan sebuah fungsi positif $\delta(x) > 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Partisipasi diperoleh dengan menggantikan konstanta positif δ pada konstruksi integral Riemann.

Sifat-sifat dasar yang berlaku pada integral Riemann berlaku pada integral Henstock, yang mana sifat-sifat dasar integral Henstock lebih konstruktif.

DAFTAR PUSTAKA

- Bartle, R. G. & Sherbert, D. R., (1994), *Introduction to Real Analysis*, Second Edition, John Wiley & Sons. Inc, New York.
- Gordon, R. A., (1994), *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Graduate Studies

in Mathematics 4, American Mathematical Society, Providence.

- Guoju, Y. & Tianqing, A., (1998), *On Henstock-Dunford and Henstock Pettis Integral*, 12 hlm, Hindawi Publishing Corp, <http://ijmms.hindawi.com>. 08 Januari 2005, Pk. 17.00 WIT
- Lee, P. Y., (1989), *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, Series in Real Analysis vol. 2, World Scientific, Singapore.
- Royden, H. L., (1987), *Real Analysis*, Third Edition, Macmillan Publishing Company, New York.
- Rudin, W., (1976), *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, Mc Graw-Hill Kogakusha. Ltd, Tokyo.
- Schecter, E. (2001). *An Introduction to The Gauge Integral*. 10 hlm. <http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/ccc/>. 08 Januari 2005, pk. 18.47 WIT.
- Sinay, L. J. (2005) , *Integral Henstock dan Sifat-Sifatnya*, Skripsi S1 pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura, Ambon.
- Soemantri, R., (1988), *Analisis Real I*, Penerbit Karunika, Universitas Terbuka, Jakarta.
- Thobirin, A. (1997). *Beberapa Integral Jenis Riemann*. Tesis Magister pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.



KENDALI OPTIMAL PADA MODEL DINAMIK EPIDEMI DENGUE MENGGUNAKAN MISER3
(*Optimal Control Of The Dengue Epidemic Model Using MISER3*)

ZETH ARTHUR LELEURY

Staf Jurusan Matematika, FMIPA, Unpatti

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

e-mail: zaleleury@yahoo.co.id / zetharthur82@gmail.com

ABSTRACT

Dengue fever is an infectious tropical disease caused by the Dengue virus. Dengue haemorrhagic fever constitute a substantial health burden on world's population. In this research, an application of optimal control theory to Dengue epidemics using MISER3 was presented. The dynamic model is described by a set of nonlinear ordinary differential equations, that depend on the dynamics of the Dengue mosquito, the number of infected individuals, and people's motivation to combat the mosquito. The cost functional depends not only on the costs of medical treatment of the infected people but also on the costs related to educational and sanitation campaigns. We observe that with current computational tools it is easy to obtain, in an efficient way, better solutions to Dengue problems, leading to a decrease in the number of infected mosquitoes and individuals in less time and with lower costs.

Keywords: Dengue, Miser3, Nonlinear programming, Optimal control

PENDAHULUAN

Demam Berdarah Dengue (DBD) atau *dengue haemorrhagic fever* adalah penyakit virus yang ditularkan oleh nyamuk yang saat ini menjadi perhatian utama masyarakat internasional. DBD ditemukan di bagian bumi yang beriklim tropis dan sub tropis, kebanyakan di daerah kota dan daerah semi-kota. DBD pertama kali diketahui di Asia Tenggara tahun 1950an tetapi mulai tahun 1975 hingga sekarang merupakan penyebab kematian utama pada anak-anak di negara-negara Asia. Bahkan sejak tahun 1997 DBD dinyatakan sebagai penyakit asal viral terpenting yang berbahaya dan berakibat fatal bagi manusia.

DBD ditularkan pada manusia melalui gigitan nyamuk betina *Aedes* yang terinfeksi virus dengue. Penyakit ini tidak dapat ditularkan langsung dari orang ke orang. Penyebar utama virus dengue yaitu nyamuk *Aedes aegypti*, tidak ditemukan di Hong Kong, namun virus dengue juga dapat disebarkan oleh spesies lain yaitu *Aedes albopictus*. Menurut WHO masalah DBD tumbuh secara dramatis pada dekade terakhir ini, sekitar 40% masyarakat dunia beresiko terhadap DBD.

Berdasarkan informasi dari situs web Pusat Perlindungan Kesehatan di Indonesia, penyakit ini dilaporkan pertama kali pada tahun 1968, di kota Jakarta

dan Surabaya. Epidemio penyakit DBD di luar Jawa pertama kali dilaporkan di Sumatera Barat dan Lampung tahun 1972. Sejak itu, penyakit ini semakin menyebar luas ke berbagai wilayah di Indonesia. Penularan DBD hanya dapat terjadi melalui gigitan nyamuk yang di dalam tubuhnya mengandung virus Dengue.

Hingga saat ini belum ditemukan obat khusus yang dapat membunuh virus demam berdarah. Oleh karena itu upaya pencegahan yang utama adalah menghindari gigitan nyamuk. Mengingat penyebar penyakit ini adalah nyamuk *Aedes aegypti* maka cara terbaik untuk memutus rantai penularan adalah dengan memberantas nyamuk tersebut, sebagaimana sering disarankan dalam sosialisasi pemberantasan penyakit DBD. Pencegahan yang murah dan efektif untuk memberantas nyamuk ini adalah dengan cara menguras tempat penampungan air bersih, bak mandi, vas bunga dan sebagainya, paling tidak seminggu sekali, mengingat nyamuk tersebut berkembang biak dari telur sampai menjadi dewasa dalam kurun waktu 7-10 hari.

Dalam penelitian ini diterapkan kendali epidemio Dengue melalui penggunaan insektisida dan sosialisasi edukasi untuk pemberantasan nyamuk yang terinfeksi Dengue. Adapun tujuan penulisan ini adalah mempresentasikan model matematika untuk mempelajari dinamika dari epidemio Dengue dengan tujuan

meminimalkan investasi pada kendali penyakit sehingga diharapkan dapat memberikan informasi bahwa penyelesaian kendali optimal yang diperoleh dapat menjadi suatu solusi optimal dalam menentukan kebijakan untuk mencegah penyakit DBD.

Model yang digunakan didasarkan pada dinamika pertumbuhan populasi nyamuk, dan juga pada usaha manajemen masyarakat untuk memotivasi memutus siklus reproduksi nyamuk melalui pencegahan akumulasi tempat penampungan air yang terbuka dan pencegahan penyebaran daerah yang potensial untuk reproduksi nyamuk.

METODE YANG DIGUNAKAN

Penyelesaian numerik dari masalah kendali optimal secara umum dapat dikategorikan dalam dua pendekatan utama. Pendekatan pertama berhubungan dengan metode langsung yang merupakan dasar dari pendiskritan keadaan dan variabel kendali sepanjang waktu sehingga dapat digunakan software yang sesuai dengan penyelesaian permasalahan *non linear programming*. Pendekatan kedua berhubungan dengan pendekatan untuk metode tidak langsung dengan menggunakan persamaan keadaan, persamaan ko-keadaan, kondisi stasioner, dan kondisi batas (Subchan, 2009).

Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode langsung (*direct method*). Metode langsung merupakan dasar dari transformasi masalah kendali optimal, dimana dasar diskritisasi variabel keadaan dan kendali dengan metode langsung dapat dikategorikan dalam 3 pendekatan berbeda (Subchan, 2009).

- Pendekatan pertama berdasarkan pada parameter keadaan dan variabel kendali. Variabel kendali dan keadaan didiskretkan dan kemudian menghasilkan diskretisasi yang diselesaikan menggunakan suatu penyelesaian pemrograman nonlinier.
- Pendekatan kedua adalah parameter kendali, sehingga variabel keadaan dan fungsi tujuan dapat diselesaikan oleh integrasi numerik.

Pendekatan ketiga hanya berdasarkan pada parameter keadaan.

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini dikaji konsep teori kendali optimal dan model matematika dari epidemi Dengue. Pemodelan matematika adalah proses merumuskan abstraksi suatu sistem dalam bahasa matematika untuk mendeskripsikan dinamika yang kompleks dari suatu sistem nyata (Yang, 2008). Sedangkan model matematika adalah suatu model yang dibuat menggunakan konsep matematika seperti fungsi dan persamaan (Edwards, 1989).

Teori Kendali

Persamaan dinamik dari suatu sistem kendali adalah sebagai berikut:

$$\dot{x} = F(x, u)$$

dengan $x \in \mathbb{R}^n$ adalah variabel keadaan dan $u \in U$ adalah variabel kendali. Fungsi vektor keadaan dinyatakan sebagai berikut:

$$\chi = \{x: [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n | x_i; i = 1, 2, \dots, n\}$$

dan fungsi vektor kendali

$$U = \{u: [0, t_f] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m | u_i; i = 1, 2, \dots, m\}$$

dengan kendala-kendala:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x(t), u(t)) & f: \mathbb{R}^{n+m} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n & x_0 &\text{diketahui} \\ \psi(x(t_f), t_f) &= 0 \in \mathbb{R}^p & \psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}^p, p \leq n \\ C(x(t), u(t)) &\leq 0 \in \mathbb{R}^q & C: \mathbb{R}^{n+m} &\rightarrow \mathbb{R}^q \\ S(x(t)) &\leq 0 \in \mathbb{R}^s & S: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^s \end{aligned}$$

Secara umum, ada tiga bentuk fungsi tujuan (*performance index*) dari masalah kendali optimal, yaitu:

a. bentuk Bolza

$$\min_{u \in U} J = \varphi[x(t_f), p, t_f] + \int_0^{t_f} V(x(t), u(t), p, t) dt$$

b. bentuk Lagrange

$$\min_{u \in U} J = \int_0^{t_f} V(x(t), u(t), p, t) dt$$

c. bentuk Mayer

$$\min_{u \in U} J = \varphi[x(t_f), p, t_f]$$

Indeks performa menggambarkan suatu ukuran kualitatif dari performa sistem (Subchan, 2009). Dalam penelitian ini fungsi tujuannya dinyatakan dalam bentuk Lagrange.

Model Dinamik Epidemi Dengue

Model epidemi Dengue yang dideskripsikan pada penulisan ini didasarkan pada (Caetano dkk, 2001) untuk meminimalkan Persamaan Lagrange :

$$\begin{aligned} J(u_1(\cdot), u_2(\cdot)) \\ = \int_0^{t_f} \{\gamma_D x_3^2(t) + \gamma_F u_1^2(t) + \gamma_E u_2^2(t)\} dt \end{aligned} \quad (1)$$

Dengan persamaan keadaan (*state-variable*) non-linier sebagai berikut:

$$f = [\dot{x}_i] = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]$$

$$\dot{x}_1(t) = [\alpha_R(1 - \mu \sin(\omega t + \varphi)) - \alpha_M - x_4(t)]x_1(t) - u_1(t) \quad (2)$$

$$\dot{x}_2(t) = [\alpha_R(1 - \mu \sin(\omega t + \varphi)) - \alpha_M - x_4(t)]x_2(t) + \beta[x_1(t) - x_2(t)]x_3(t) - u_1(t) \quad (3)$$

$$\dot{x}_3(t) = -\eta x_3(t) + \rho x_2(t)[P - x_3(t)] \quad (4)$$

$$\dot{x}_4(t) = -\tau x_4(t) + \theta x_3(t) + u_2(t) \quad (5)$$

dengan $\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt}$, $i = 1, \dots, 4$

Variabel state:

$x_1(t)$ adalah kepadatan nyamuk

$x_2(t)$ adalah populasi nyamuk pembawa virus

$x_3(t)$ adalah jumlah individu terinfeksi

$x_4(t)$ adalah tingkat motivasi untuk memberantas nyamuk (*goodwill*)

Variabel kendali:

$u_1(t)$ adalah investasi pada penggunaan insektisida

$u_2(t)$ adalah investasi pada sosialisasi edukasi

Parameter:

α_R : rata-rata laju reproduksi nyamuk

α_M : laju kematian nyamuk

β : probabilitas kontak antara nyamuk pembawa virus dan individu terinfeksi

η : laju treatment dari individu terinfeksi

μ : amplitudo osilasi musiman laju reproduksi nyamuk

ρ : probabilitas individu yang menjadi terinfeksi

θ : faktor kekhawatiran yang merefleksikan peningkatan keinginan populasi untuk memberantas nyamuk sebagai konsekuensi prevalensi yang tinggi dari penyakit di lingkungan sosial tertentu

τ : laju *forgetting* untuk goodwill dari populasi target

φ : sudut fase untuk menyesuaikan musim puncak nyamuk

ω : frekuensi angular dari siklus proliferasi nyamuk, selama periode 52 minggu

P : adalah populasi di daerah beresiko (biasanya normal untuk $P = 1$)

γ_D : adalah biaya untuk keberadaan individu terinfeksi

γ_F : adalah biaya setiap operasi penyemprotan insektisida

γ_E : adalah biaya terkait dengan sosialisasi instruktif

Persamaan (2) merepresentasikan variasi dari kepadatan nyamuk per satuan waktu dengan siklus alami reproduksi dan kematian (α_R dan α_M) yang berhubungan dengan efek musim $\mu \sin(\omega t + \varphi)$ dan interferensi manusia $-x_4(t)$ dan $u_1(t)$.

Persamaan (3) mengekspresikan variasi kepadatan nyamuk yang membawa virus. Suku $[\alpha_R(1 - \mu \sin(\omega t + \varphi)) - \alpha_M - x_4(t)]x_2(t)$ merepresentasikan laju infeksi nyamuk dan $\beta[x_1(t) - x_2(t)]x_3(t)$ merepresentasikan laju peningkatan populasi nyamuk yang terinfeksi yang nantinya memungkinkan kontak antara nyamuk yang tidak terinfeksi $x_1(t) - x_2(t)$ dan individu terinfeksi yaitu $x_3(t)$.

Persamaan (4) merupakan dinamika transmisi penyebaran. Suku $-\eta x_3(t)$ merepresentasikan laju sembuh dan $\rho x_2(t)[P - x_3(t)]$ merepresentasikan laju penyebaran kasus baru. Faktor $[P - x_3(t)]$ adalah jumlah individu pada area tersebut yang tidak terinfeksi.

Persamaan (5) adalah model untuk tingkat motivasi populer (*goodwill*) untuk memberantas siklus reproduksi nyamuk. Sebagai konsekuensinya, dibutuhkan biaya sosialisasi edukasi yang didesain untuk meningkatkan kesadaran populasi. Suku $-\tau x_4(t)$ menunjukkan turunnya motivasi masyarakat terhadap waktu sehingga lupa. Suku $\theta x_3(t)$ merepresentasikan kesadaran alami masyarakat untuk meningkatkan prevalensi (kelaziman) penyakit.

Tujuan dari model dinamik ini adalah meminimalkan fungsional biaya persamaan (1). Fungsional ini termasuk biaya sosial yang berhubungan dengan keberadaan individu yang sakit, $\gamma_D x_3^2(t)$ dan kebutuhan sumber daya untuk menyebarkan insektisida, $\gamma_F u_1^2(t)$ dan sosialisasi edukasi, $\gamma_E u_2^2(t)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembahasan hasil penelitian berupa simulasi numerik dan analisis hasil simulasi. Simulasi dari model matematika epidemi Dengue diselesaikan dengan menggunakan program MISER3 yaitu suatu toolbox matlab untuk optimisasi dinamik (Jennings dkk, 2002). Sebelum melakukan simulasi terlebih dahulu ditentukan turunan dari persamaan keadaan dan persamaan Lagrange, baik terhadap semua variabel x maupun terhadap variabel kendali.

Turunan dari persamaan keadaan terhadap semua variabel x :

$$\frac{df_1}{dx_1} = \alpha_R(1 - \mu \sin(\omega t + \varphi)) - \alpha_M - x_4(t)$$

$$\frac{df_1}{dx_2} = \frac{df_1}{dx_3} = 0$$

$$\frac{df_1}{dx_4} = -x_1(t)$$

$$\frac{df_2}{dx_1} = \beta x_3(t)$$

$$\frac{df_2}{dx_2} = \alpha_R(1 - \mu \sin(\omega t + \varphi)) - \alpha_M - x_4(t) - \beta x_3(t)$$

$$\frac{df_2}{dx_3} = -\beta x_2(t), \quad \frac{df_2}{dx_4} = -x_2(t)$$

$$\frac{df_3}{dx_1} = \frac{df_3}{dx_4} = 0$$

$$\frac{df_3}{dx_2} = \rho(P - x_3(t)), \quad \frac{df_3}{dx_3} = -(\eta + \rho x_2(t))$$

$$\frac{df_4}{dx_1} = \frac{df_4}{dx_2} = 0$$

$$\frac{df_4}{dx_3} = \theta, \quad \frac{df_4}{dx_4} = -\tau$$

Turunan dari persamaan keadaan terhadap variabel kendali u_1 dan u_2 :

$$\frac{df_1}{du_1} = -1, \quad \frac{df_1}{du_2} = 0$$

$$\frac{df_2}{du_1} = -1, \quad \frac{df_2}{du_2} = 0$$

$$\frac{df_3}{du_1} = 0, \quad \frac{df_3}{du_2} = 0$$

$$\frac{df_4}{du_1} = 0, \quad \frac{df_4}{du_2} = 1$$

Turunan dari persamaan Lagrange terhadap semua variabel x :

$$\frac{dJ}{dx_1} = 0, \quad \frac{dJ}{dx_2} = 0,$$

$$\frac{dJ}{dx_3} = 2\gamma_D x_3, \quad \frac{dJ}{dx_4} = 0$$

Turunan dari persamaan Lagrange terhadap kendali u_1 dan u_2 :

$$\frac{dJ}{du_1} = 2\gamma_F u_1, \quad \frac{dJ}{du_2} = 2\gamma_E u_2$$

Hasil simulasi ini bertujuan untuk mendapatkan nilai optimasi secara numerik dari fungsi kendali yang mengindikasikan investasi pada penggunaan insektisida dan sosialisasi edukasi, dengan menggunakan estimasi nilai parameter yang ternormalisasi pada tabel di bawah ini (Helena dkk, 2010).

$\alpha_R = 0.20$	$\tau = 0.1$	$x_1(0) = 1.0$
$\alpha_M = 0.18$	$\varphi = 0$	$x_2(0) = 0.12$
$\beta = 0.3$	$\omega = \frac{2\pi}{52}$	$x_3(0) = 0.004$
$\eta = 0.15$	$P = 1.0P$	$x_4(0) = 0.05$
$\mu = 0.1$	$\gamma_D = 1.0$	
$\rho = 0.1$	$\gamma_F = 0.8$	
$\theta = 0.05$	$\gamma_E = 0.8$	

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai numerik yang diberikan di atas maka model dinamik epidemi Dengue persamaan (1)-(5) menjadi:

$$J(u_1(\cdot), u_2(\cdot)) = \int_0^{t_f} \{x_3^2(t) + 0.4u_1^2(t) + 0.8u_2^2(t)\} dt$$

Dengan variabel state sebagai berikut:

$$\dot{x}_1(t) = \left[0.2 - 0.02 \sin\left(\frac{2\pi}{52}t\right) - 0.18 - x_4(t) \right] x_1(t) - u_1(t)$$

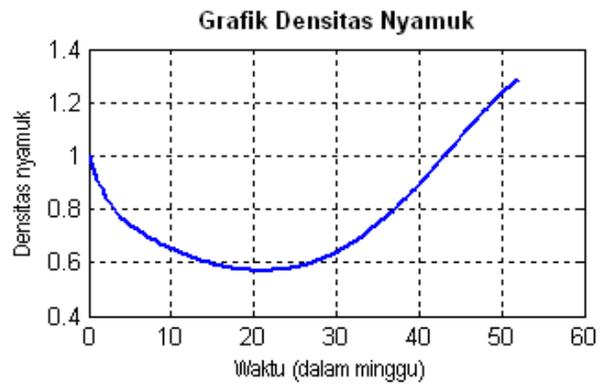
$$\dot{x}_2(t) = \left[0.2 - 0.02 \sin\left(\frac{2\pi}{52}t\right) - 0.18 - x_4(t) \right] x_2(t) + [0.3 x_1(t) + 0.3 x_2(t)] x_3(t) - u_1(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -0.15x_3(t) + 0.1x_2(t) - 0.1x_2(t)x_3(t)$$

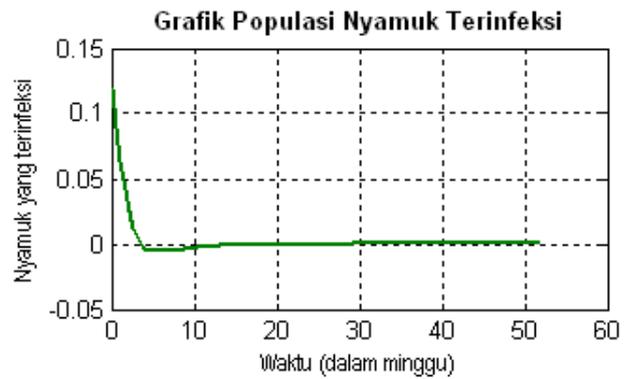
$$\dot{x}_4(t) = -0.1x_4(t) + 0.05x_3(t) + u_2(t)$$

Proses simulasi dilakukan dengan waktu awal $t_0 = 0$ dan waktu akhir tetap $t_f = 52$ minggu.

Pada gambar (1)-(6) berikut menunjukkan trayektori variabel state dan variabel kendali dari hasil simulasi model dinamik epidemi Dengue dengan kendali yang dikenakan pada suatu fungsi objektif untuk meminimalkan fungsional biaya terkait dengan biaya sosial yang berhubungan dengan keberadaan individu yang sakit, kebutuhan sumber daya untuk menyebarkan insektisida, serta sosialisasi edukasi,

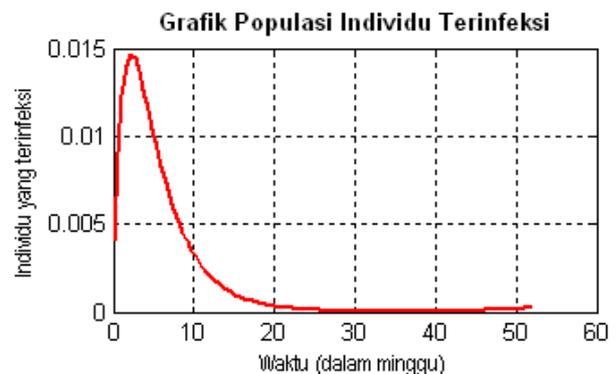


Gambar 1. Grafik Populasi Kepadatan Nyamuk



Gambar 2. Grafik Populasi Nyamuk Terinfeksi

Dari Gambar 1 di atas dapat disimpulkan bahwa trayektori kepadatan nyamuk mengalami osilasi dan akan naik lagi pada minggu ke-23. Namun trayektori populasi nyamuk yang terinfeksi akan menurun atau berkurang drastis bahkan setelah 4 minggu pertama populasi nyamuk yang terinfeksi berada pada nilai nol seperti terlihat pada Gambar 2.



Gambar 3. Grafik Populasi Individu yang Terinfeksi

Selanjutnya dari Gambar 3 menunjukkan bahwa trayektori jumlah individu yang terinfeksi akan menurun drastis pada saat minggu ke-3 hingga minggu ke-25 dan setelah $t > 25$ minggu trayektori sudah berada pada titik nol. Hal ini seiring dengan berkurangnya populasi nyamuk yang terinfeksi.

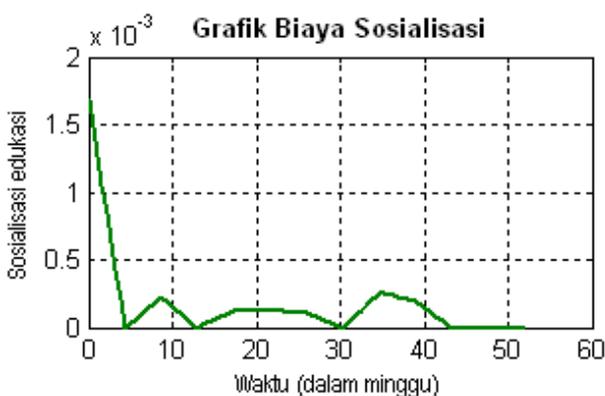
Dengan demikian, maka tingkat motivasi yang popular (seperti pencegahan tempat penampungan air yang terbuka) terus menurun dari minggu ke minggu seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.



Gambar 4. Grafik Tingkat Motivasi untuk Memberantas Nyamuk



Gambar 5. Grafik Investasi Pada Penggunaan Insektisida



Gambar 6. Grafik Investasi Pada Sosialisasi Edukasi

Dari Gambar 5 menunjukkan bahwa penggunaan insektisida berpengaruh tinggi pada minggu pertama dan akan berkurang pengaruhnya hingga pada minggu ke-9. Sedangkan berdasarkan pada Gambar 6 disimpulkan bahwa pengaruh sosialisasi edukasi belum dapat

memberikan kendali yang terbaik karena terlihat adanya dinamika yang tidak menentu dan tidak teratur dari minggu ke minggu sejak minggu keempat.

KESIMPULAN

Dari pembahasan pada bagian sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa penggunaan insektisida lebih banyak berpengaruh terhadap penurunan populasi nyamuk maupun individu yang terinfeksi virus Dengue dibandingkan dengan sosialisasi edukasi. Akan tetapi untuk memperoleh hasil yang optimal maka upaya yang dapat dilakukan adalah dengan melakukan penyebaran insektisida dan sosialisasi edukasi secara bersama-sama.

Hasil yang diperoleh akan dapat digunakan untuk menentukan kebijakan terbaik sebelum melakukan operasi di lapangan. Otoritas kesehatan seharusnya diberi perhatian yang lebih awal untuk masalah epidemiologi contohnya pada keputusan kendali yang efektif pada empat minggu pertama mempunyai aturan yang pasti untuk melawan DBD, masyarakat dan pemerintah akan mendapatkan keuntungan dari pengambilan keputusan tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Caetano, M.A.L., Yoneyama, T, Optimal and sub-optimal control in Dengue epidemics, *Optimal Control Applications and Methods* 22 (2001) 63_73.
- Edwards, D., Hamson, M. *Guide to mathematical Modelling*, The Macmillan Press, Ltd. (1989)
- Hadi, U.K, *Penyakit Tular Vektor Demam Berdarah Dengue*. IPB, Bogor.
- Helena, S.R., Teresa, M.M., Delfim, F.M.T, Dynamics of dengue epidemis when using optimal control, *Mathematical and Computer Modelling* 52 (2010) 1667-1673
- Jennings, L.S., Fisher, M.E., Teo, K.L, Goh., C.G, *MISER3, Optimal Control Software : Theory and User Manual Version 2.0* (2002).
- Subchan, S., Zbikowski, R., *Computational Optimal Control Tools and Practise*, John Willey and Sons, Ltd, publication, United Kingdom. (2009).
- Yang, S.X, *Mathematical Modelling for Earth Sciences*, Dunedin Academic Press, Ltd, Scotland. (2008), www.chp.gov.hk Situs web Pusat Perlindungan Kesehatan:



PEMODELAN JUMLAH KEMATIAN BAYI DI PROVINSI MALUKU TAHUN 2010 DENGAN MENGGUNAKAN REGRESI POISSON

SALMON N. AULELE

Staf Jurusan Matematika, FMIPA, Unpatti
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
e-mail: salmon.aulele@yahoo.com

ABSTRACT

Infant mortality is an experienced child death before the age of one year. Regression analysis is a statistical analysis that aims to model the relationship between response variables (Y) with predictor variables (X). If the Poisson distributed response variables (Y), the regression model used was Poisson regression. The purpose of this research is to get a Poisson regression model according to the significant factors that influence the infant mortality. The results shows that the significant factors are influence the infant mortality as the presentation of non medical childbirth (X_1) and quantity of medical facility (X_7). The case studies are infant mortality in Provinsi Maluku in 2010

Keywords: *Infant Mortality, Poisson Distributed, Poisson Regression Model, Regression Analysis.*

PENDAHULUAN

Angka kematian bayi adalah salah satu indikator penting dalam menentukan tingkat kesehatan masyarakat. Keberhasilan pembangunan di suatu wilayah juga dapat dilihat dari angka kematian bayi dan angka harapan hidup.

Negara Indonesia masih harus berjuang keras untuk memperbaiki indikator pembangunan kesehatan, khususnya angka kematian bayi, karena tren angka kematian bayi selama beberapa tahun terakhir belum menurun. Untuk itu pemerintah harus berupaya keras melalui berbagai program untuk menekan angka kematian bayi. Penelitian tentang angka kematian bayi pernah dilakukan oleh beberapa pihak sebelumnya. Winarno (2009) menyimpulkan bahwa persentase penolong persalinan oleh tenaga non medis dan rata-rata lama pemberian ASI eksklusif mempengaruhi angka kematian bayi. Aulele (2010) menyatakan bahwa persentase persalinan yang dilakukan dengan bantuan tenaga non medis, rata-rata usia perkawinan pertama wanita, rata-rata pemberian ASI eksklusif, rata-rata jumlah pengeluaran rumah tangga perkapita sebulan, persentase penduduk miskin, jumlah tenaga kesehatan dan jumlah sarana kesehatan mempengaruhi angka kematian bayi.

Analisis regresi merupakan analisis statistika yang bertujuan untuk memodelkan hubungan antara variabel respon (Y) dengan variabel prediktor (X). Bila dalam analisisnya hanya melibatkan sebuah variabel prediktor, maka regresi yang digunakan adalah Regresi Linier Sederhana. Sedangkan bila dalam analisisnya melibatkan dua atau lebih variabel prediktor, maka regresi yang digunakan adalah Regresi Linier Berganda. Apabila variabel respon (Y) berdistribusi Poisson, maka model regresi yang digunakan adalah regresi Poisson. Regresi Poisson didapatkan dari distribusi Poisson, yaitu suatu distribusi untuk peristiwa yang probabilitas kejadiannya kecil, dimana kejadiannya tergantung pada interval waktu tertentu atau di suatu daerah tertentu dengan hasil pengamatan berupa variabel diskrit dan antar variabel saling independen.

Kematian bayi di Provinsi Maluku masih tergolong tinggi, untuk itu dalam penelitian ini, peneliti ingin melihat faktor-faktor apa yang mempengaruhi kematian bayi di Provinsi Maluku sehingga menjadi acuan bagi pemerintah Provinsi Maluku dalam menurunkan jumlah kematian bayi.

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah Memodelkan jumlah kematian bayi di Provinsi Maluku tahun 2010 berdasarkan faktor-faktor yang

mempengaruhinya dengan menggunakan model regresi Poisson.

TINJAUAN PUSTAKA

Kematian bayi adalah kematian yang terjadi antara saat setelah bayi lahir sampai bayi belum berusia tepat satu tahun. Banyak faktor yang dikaitkan dengan kematian bayi. Secara garis besar, dari sisi penyebabnya, kematian bayi ada dua macam yaitu endogen dan eksogen. Kematian bayi endogen atau yang umum disebut dengan kematian neonatal adalah kematian bayi yang terjadi pada bulan pertama setelah dilahirkan, dan umumnya disebabkan oleh faktor-faktor yang dibawa anak sejak lahir, yang diperoleh dari orang tuanya pada saat konsepsi atau didapat selama kehamilan. Kematian bayi eksogen atau kematian post neonatal, adalah kematian bayi yang terjadi setelah usia satu bulan sampai menjelang usia satu tahun yang disebabkan oleh faktor-faktor yang bertalian dengan pengaruh lingkungan luar. Kematian bayi disebabkan oleh beberapa faktor yaitu : usia ibu pada saat melahirkan, jumlah pemeriksaan yang dilakukan oleh ibu pada saat hamil, tingkat pendidikan ibu, jumlah sarana kesehatan, persentase daerah yang berstatus desa, dan lain-lain.

Model regresi Poisson merupakan model standar untuk data diskrit dan termasuk dalam model regresi nonlinier. Regresi Poisson berdasarkan pada penggunaan distribusi Poisson.

Misalkan terdapat sekumpulan data dengan struktur sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} Y_1 & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ Y_2 & X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_n & X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix}$$

dengan y_i adalah observasi ke- i dari variabel respon Y , dan x_{ji} adalah nilai variabel predictor X_j ($j=1,2,\dots,k$), maka model regresi Poisson dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mu_i = \mu(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}) = \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Variabel μ_i adalah rata-rata jumlah kejadian yang terjadi dalam interval waktu tertentu. Bila μ_i diasumsikan tidak berubah secara independen dari data ke data, maka μ_i dapat dimodelkan sebagai fungsi k variabel prediktor.

Dengan

$$\mathbf{x}_i^T = [x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}] \text{ dan } \boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k]^T$$

Penaksiran parameter regresi Poisson dilakukan dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood*

Estimation (MLE). Taksiran maksimum likelihood untuk parameter $\boldsymbol{\beta}$ dinyatakan dengan $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ yang merupakan penyelesaian dari turunan pertama dari fungsi likelihoodnya, yaitu :

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}) &= \prod_{i=1}^n P(y_i, \boldsymbol{\beta}) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{[\mu(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})]^{y_i} \exp(-\mu(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}))}{y_i!} \\ &= \frac{\left\{ \prod_{i=1}^n [\mu(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})]^{y_i} \right\} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \mu(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})\right)}{\prod_{i=1}^n y_i!} \end{aligned}$$

Fungsi log natural-likelihoodnya adalah :

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n y_i \ln[\mu(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})] - \sum_{i=1}^n \mu(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}) - \sum_{i=1}^n \ln(y_i!) \quad (2)$$

Kemudian persamaan (2) diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}$ disamakan dengan nol sebagai syarat perlu $\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0$

Pada beberapa kasus tertentu, cara derivatif ini kadang tidak menghasilkan suatu solusi yang eksplisit karena persamaanya masih berbentuk implisit. Untuk mendapatkan taksiran maksimum likelihood untuk parameter $\boldsymbol{\beta}$ maka digunakan metode iterasi numerik yaitu Newton-Raphson. Ide dasar dari model ini adalah memaksimalkan fungsi likelihood (Myers, 1990). Algoritma untuk optimisasi dengan metode Newton-Raphson dapat dituliskan sebagai berikut :

1. Menentukan nilai taksiran awal parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)}$.

Penentuan nilai awal ini biasanya diperoleh dengan metode *Ordinary Least Square (OLS)*, yaitu :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y} \quad (3)$$

dimana

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,1} & \cdots & x_{k,1} \\ 1 & x_{1,2} & \cdots & x_{k,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{1,n} & \cdots & x_{k,n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n]^T$$

2. Membentuk vektor gradien g .

$$g^T(\boldsymbol{\beta}_{(m)})_{(k+1) \times 1} = \left(\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0}, \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1}, \dots, \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} \right)_{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_{(m)}}$$

dengan k adalah banyaknya parameter yang ditaksir.

3. Membentuk matriks Hessian \mathbf{H} .

Matriks Hessian ini disebut juga matriks informasi.

$$H(\beta_{(m)})_{(k+1) \times (k+1)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial \beta_0^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial \beta_0 \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial \beta_0 \beta_k} \\ & \frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial \beta_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial \beta_1 \beta_k} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial \beta_k^2} \end{pmatrix}_{\beta = \beta_{(m)}}$$

4. Memasukkan nilai $\hat{\beta}_{(0)}$ ke dalam elemen-elemen vektor g dan matriks H , sehingga diperoleh vektor $g(\hat{\beta}_{(0)})$ dan matriks $H(\hat{\beta}_{(0)})$.

5. Mulai dari $m = 0$ dilakukan iterasi pada persamaan :

$$\hat{\beta}_{(m+1)} = \hat{\beta}_{(m)} - H^{-1}(m)g(m)$$

Nilai $\hat{\beta}_{(m)}$ merupakan sekumpulan penaksir parameter yang konvergen pada iterasi ke- m . Jika belum didapatkan penaksir parameter yang konvergen, maka dilanjutkan kembali langkah 5 hingga iterasi ke $m = m + 1$. Iterasi berhenti pada keadaan konvergen yaitu pada saat $\|\hat{\beta}_{(m+1)} - \hat{\beta}_{(m)}\| \leq \varepsilon$, dimana ε merupakan bilangan yang sangat kecil sekali.

Untuk menguji kelayakan model regresi poisson, terlebih dahulu ditentukan dua buah fungsi likelihood yang berhubungan dengan model regresi yang diperoleh. Fungsi-fungsi likelihood yang dimaksud adalah $L(\hat{\Omega})$ yaitu nilai maksimum likelihood untuk model yang lebih lengkap dengan melibatkan variabel bebas dan $L(\hat{\omega})$, yaitu nilai maksimum likelihood untuk model sederhana tanpa melibatkan variabel bebas. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menentukan statistik uji dalam pengujian parameter model regresi Poisson adalah dengan menggunakan metode Maximum Likelihood Ratio Test (MLRT). Likelihood ratio dinotasikan dengan :

$$\Lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \tag{5}$$

Regresi Poisson termasuk dalam keluarga eksponensial sehingga likelihood ratio pada persamaan (5) dapat juga ditulis dalam bentuk (Hardin dan Hilbe, 2007) :

$$-2 \ln \Lambda \tag{6}$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut :

$$D(\hat{\beta}) = -2 \ln \Lambda = -2 \ln \left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \right) = 2(\ln(\hat{\Omega}) - \ln(\hat{\omega})) \tag{7}$$

$D(\hat{\beta})$ merupakan devians model regresi Poisson atau devians yang dihitung pada seluruh parameter dalam model. Nilai $D(\hat{\beta})$ yang semakin kecil menyebabkan semakin kecil pula tingkat kesalahan yang dihasilkan oleh model, sehingga model menjadi semakin tepat. $D(\hat{\beta})$ disebut juga sebagai statistik rasio likelihood, dimana untuk ukuran sampel besar distribusi dari statistik uji pada persamaan (7) akan mengikuti distribusi khi-kuadrat dengan derajat bebasnya adalah banyaknya parameter

model dibawah populasi dikurangi dengan banyaknya parameter dibawah H_0 .

Pengujian kelayakan model yang diperoleh dari estimasi parameter dilakukan dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) dengan melakukan pengujian hipotesis-hipotesis berikut:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0.$$

$$H_1 : \text{Paling sedikit ada satu } \beta_j \neq 0.$$

Kriteria pengujianya adalah tolak H_0 jika

$D(\hat{\beta}) > \chi^2_{(\alpha; n-k-1)}$. Menurut McCullagh dan Nelder (1989) harga devians ini akan berkurang seiring dengan bertambahnya parameter ke dalam model.

Selanjutnya dilakukan pengujian parameter model secara parsial yaitu untuk mengetahui parameter mana yang memberikan pengaruh signifikan terhadap model. Misalkan, ingin menguji apakah parameter β_j berpengaruh terhadap model, dan dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0 \quad ; j = 1, 2, \dots, k$$

Dalam pengujian hipotesis di atas dapat digunakan statistik uji sebagai berikut :

$$t = \frac{\hat{\beta}_j}{SE(\hat{\beta}_j)} \tag{8}$$

Kriteria pengujianya adalah tolak H_0 jika $|t_{hit}| > t_{(\alpha/2; n-(k+1))}$

Multikolinieritas adalah adanya hubungan antara variabel bebas yang satu dengan variabel bebas yang lain. Untuk mendeteksi adanya multikolinieritas juga dapat menggunakan *Variance Inflation Factors* (VIF) yang dinyatakan sebagai berikut :

$$VIF_j = \frac{1}{1-R_j^2} \tag{9}$$

Dengan R_j^2 adalah koefisien determinasi antara X_j dengan variabel prediktor lainnya. VIF_j yang lebih besar dari 10 menunjukkan adanya kolinieritas antar variabel prediktor. Solusi untuk mengatasi adanya kasus tersebut adalah dengan mengeluarkan variabel prediktor yang tidak signifikan dan meregresikan kembali variabel-variabel prediktor yang signifikan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian ini aplikasi model Regresi Poisson diterapkan pada kasus kematian bayi di Provinsi Maluku pada tahun 2010. Variabel yang diteliti yaitu jumlah kematian bayi yang berusia di bawah satu tahun per seribu kelahiran hidup pada tahun 2010 sebagai variabel respon dan persentase persalinan yang dilakukan dengan bantuan non medis, persentase kunjungan ibu hamil ke puskesmas untuk imunisasi, rata-rata jumlah pengeluaran rumah tangga perkapita sebulan, rata-rata pemberian ASI eksklusif, persentase penduduk miskin, jumlah tenaga

kesehatan (Dokter dan Bidan), jumlah sarana kesehatan (RS dan Puskesmas) sebagai variabel prediktornya. Berikut deskriptif dari masing-masing variabel untuk Provinsi Maluku.

Tabel 1 Deskriptif Data Kematian Bayi di Maluku

Variabel	N	Mean	Minimum	Maximum	Standar Deviasi
Y	11	6.3636	1.00	11.00	2.94186
X_1	11	59.6255	26.94	85.54	19.26293
X_2	11	59.0127	34.79	76.18	15.86346
X_3	11	401.5675	325.28	692.18	103.09420
X_4	11	8.6136	5.16	11.59	1.73646
X_5	11	28.6609	7.67	39.28	8.41580
X_6	11	245.1818	101.00	610.00	170.61994
X_7	11	63.4545	26.00	125.00	27.11591

Tabel 1 menunjukkan bahwa rata-rata jumlah kematian bayi di Provinsi Maluku pada tahun 2010 adalah 6 orang per seribu kelahiran hidup dimana jumlah kematian bayi terendah berada pada Kabupaten Maluku Barat Daya sedangkan jumlah kematian bayi tertinggi berada pada Kabupaten Maluku Tengah dengan 11 orang per seribu kelahiran. Rata-rata persentase persalinan yang dilakukan dengan bantuan non medis di Provinsi Maluku pada tahun 2010 adalah 59,6255%, dimana Kota Ambon memiliki persentase persalinan yang dilakukan dengan bantuan non medis terendah dan Kabupaten Seram Bagian Timur tertinggi. Rata-rata pemberian ASI eksklusif di Provinsi Maluku pada tahun 2010 berkisar antara 5,16 sampai dengan 11,59 dimana pemberian ASI eksklusif tertinggi berada pada Kota Tual dan pemberian ASI eksklusif terendah berada pada Kota Ambon.

Sebelum menganalisis Regresi Poisson, perlu dilakukan uji kolineritas. Uji ini bertujuan untuk mengetahui apakah variabel-variabel predictor telah memenuhi kondisi saling tidak berkorelasi. Kriteria yang digunakan untuk memeriksa kolineritas antar variabel-variabel predictor adalah dengan menggunakan nilai *Variance Inflation Factors* (VIF) pada variabel-variabel predictor. Berikut ini adalah nilai VIF untuk masing-masing variabel predictor di Provinsi Maluku tahun 2010

Tabel 2 Nilai VIF Variabel Predictor di Provinsi Maluku

Nilai VIF						
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
3,557	2,251	7,363	2,737	4,829	9,958	4,162

Nilai VIF masing-masing variabel predictor pada Tabel 2 menunjukkan nilai kurang dari 10, maka antar variabel predictor di Provinsi Maluku dapat dikatakan tidak saling berkorelasi. Sehingga variabel-variabel predictor di Provinsi Maluku tahun 2010 dapat digunakan dalam pembentukan model Regresi Poisson. Selanjutnya dilakukan estimasi parameter model Regresi Poisson. Berdasarkan *software* SAS 9.0 diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 3 Estimasi Parameter Model Regresi Poisson di Provinsi Maluku

Parameter	Estimasi	SE	DF	t	P-Value	Lower	Uper
β_0	1,6940	0,9441	11	1,79	0,1003	-0,3840	3,7719
β_1	0,08017	0,02434	11	3,29	0,0072	0,02660	0,1337
β_2	0,007328	0,003396	11	2,16	0,0539	-0,00015	0,01480
β_3	0,005287	0,003957	11	1,34	0,2085	-0,00342	0,01400
β_4	0,000957	0,001157	11	0,83	0,4206	-0,00159	0,00350
β_5	0,003444	0,03503	11	0,10	0,9234	-0,07365	0,08054
β_6	0,01350	0,01245	11	1,08	0,3014	-0,01391	0,04091
β_7	0,001364	0,000467	11	2,92	0,0139	0,000336	0,002393

Berdasarkan Tabel 3 didapatkan nilai t_{hit} dan *P-Value* untuk semua parameter. Dengan menggunakan tingkat signifikansi (α) sebesar 5% maka nilai $t_{(0,025;3)} = 2,18$. Maka diperoleh 2 parameter yang signifikan yaitu β_1 dan β_7 karena $|t_{hit}| > |t_{tabel}|$ atau *P-Value* $< \alpha$, sehingga model regresi Poisson yang dibentuk untuk kematian bayi di Provinsi Maluku adalah :

$$\mu = \exp(0,08017X_1 + 0,001364X_7)$$

Model di atas menjelaskan bahwa jumlah kematian bayi di Provinsi Maluku tahun 2010 akan bertambah sebesar $\exp(0,081017)$ jika variabel X_1 bertambah sebesar satu satuan dengan syarat variabel predictor yang lain adalah konstan. Kemudian jumlah kematian bayi di Provinsi Maluku tahun 2010 akan bertambah sebesar $\exp(0,001364)$ jika variabel X_7 bertambah sebesar satu satuan dengan syarat variabel predictor yang lain adalah konstan.

Untuk menguji kelayakan model regresi Poisson, digunakan nilai devians $D(\hat{\beta})$ atau disebut juga sebagai statistik *likelihood ratio*, dimana statistik ini merupakan pendekatan dari distribusi χ^2 dengan derajat bebas $n - k - 1$ di bawah model yang sedang diamati adalah benar. Kriteria pengujianya adalah tolak H_0 apabila $D(\hat{\beta}) > \chi^2_{(\alpha;n-k-1)}$. Hipotesis yang digunakan yaitu:

- $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$ (model tidak sesuai)
- H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_k \neq 0$ (model sesuai)

Dengan menggunakan *software* SAS 9.0 diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 4 Analisis Kesesuaian Model Regresi Poisson

Devians	db	$\chi^2_{(0,05;3)}$
88,5	3	7,81472

Berdasarkan Tabel 4 diperoleh nilai devians sebesar 88,5. Dengan menggunakan tingkat signifikansi (α) sebesar 5% yang menghasilkan $\chi^2_{(0,05;3)}$ sebesar 7,81472 maka keputusan yang dihasilkan adalah terima H_0 karena nilai $D(\hat{\beta}) > \chi^2_{(0,05;3)}$. Sehingga model regresi Poisson layak dan sesuai untuk menggambarkan hubungan antara variabel respon dan variabel predictor.

KESIMPULAN

Dari hasil analisa data dan pembahasan dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Berdasarkan jumlah kematian bayi beserta faktor-faktor yang mempengaruhinya, diperoleh bahwa :
 - a. Rata-rata jumlah kematian bayi di Provinsi Maluku pada tahun 2010 adalah 6 orang per seribu kelahiran hidup.
 - b. Rata-rata persentase persalinan yang dilakukan dengan bantuan non medis di Provinsi Maluku pada tahun 2010 adalah 59,63%.
 - c. Rata-rata pemberian ASI eksklusif di Provinsi Maluku pada tahun 2010 berkisar antara 5,16 sampai dengan 11,59 bulan.
2. Berdasarkan model regresi Poisson diperoleh faktor-faktor yang signifikan mempengaruhi kematian bayi yaitu persentase persalinan yang dilakukan dengan bantuan non medis (X_1) dan jumlah sarana kesehatan (RS dan Puskesmas) (X_7). Sehingga model regresi Poisson adalah sebagai berikut :

$$\mu = \exp(0,081017X_1 + 0,001364X_7)$$

DAFTAR PUSTAKA

- Walpole, R.E. (1982), *Pengantar Statistika*, edisi ketiga, Gramedia Pustaka Tama, Jakarta.
- Myers, R.H. (1990), *Classical and Modern Regression With Applications*, PWS Kent Publishing Company, USA.
- Setyorini, E. (2006), *Pemodelan Regresi Poisson Pada Maternal Mortality di Jawa Timur*. Tugas Akhir Jurusan Statistika FMIPA ITS, Surabaya.
- Badan Pusat Statistik (2010), *Angka Kematian Bayi*, Data Statistik Indonesia.
- Badan Pusat Statistik (2010), *Maluku Dalam Angka*, Badan Pusat Statistik Provinsi Maluku.
- Aulele, S.N. & Purhadi. (2010), *Model Geographically Weighted Poisson Regression (Studi Kasus : Jumlah Kematian Bayi di Provinsi Jawa Timur & Jawa Tengah Tahun 2007)*. Tesis Jurusan Statistika FMIPA ITS, Surabaya.



DESAIN ALAT UKUR SUHU DAN KELEMBABAN BERBASIS MIKROKONTROLER ATMEGA 16
(*The Design of Temperature and Humidity Measurement Device Based on ATmega16 Microcontroller*)

RONALDO TALAPESSY

Staf pengajar, Jurusan Fisika FMIPA – Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena Kampus Unpatti, Poka-Ambon
e-mail: rossyfi@yahoo.com

ABSTRACT

The has already designed temperature and humidity measurement devices using SHT11 sensor with display results in Liquid Crystal Display (LCD). Manually, the environment temperature was measured using a mercury thermometer and the environment humidity was measured by a hygrometer. The results were observed in analog and it often misread thus it caused errors in ready the data. To solve the problem, then were made a design temperature and humidity measuring devices digitally. The processor of this tool is ATmega16 microcontroller that processes analog input signals to obtain a digital output. Temperature and humidity sensors SHT11 were used, the measurement results and read digital display on the LCD. This design produced temperature and humidity measurement, aids accurately, it was ± 0.4 °C and $\pm 3\%$.

Keywords: Temperature, Humidity, ATmega16 Microcontroller

PENDAHULUAN

Suhu dan kelembaban lingkungan sangat mempengaruhi banyak hal, seperti tingkat kesuburan tanah di suatu daerah, proses fermentasi makanan yang terbuat kedelai, penetasan telur, gudang penyimpanan bahan kimia, sampai pada proses pengawetan makanan. Suhu lingkungan biasanya diukur dengan menggunakan termometer air raksa, sedangkan kelembaban lingkungan biasanya diukur menggunakan hygrometer. Hasil pengukuran biasanya secara analog dengan membaca skala yang tertera pada termometer dan hygrometer. Seringkali hasil pembacaan pengukuran mengalami keliru baca.

Berdasarkan hal ini, maka didesain suatu alat yang dapat memberikan informasi suhu dan kelembaban secara *real-time* yang ditampilkan pada *Liquid Crystal Display* (LCD) berukuran 2×16 .

Desain alat menggunakan mikrokontroler ATmega16 yang merupakan salah satu produk dari AVR (*Alf and Vegard's Risc Processor*) Atmel yang memiliki fasilitas fitur yang lengkap dan harga yang ekonomis (Wardhana, 2006).

Mikrokontroler ATmega16 digunakan untuk mengolah sinyal masukan yang berasal dari sensor SHT11 yang bersifat analog, kemudian diubah menjadi keluaran yang digital.

TINJAUAN PUSTAKA

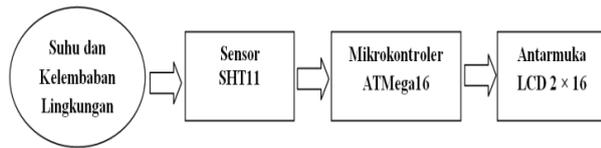
Costa et al. (2009) membuat pengaturan Kelembaban relatif dari udara di dalam inkubator bayi baru lahir digunakan *water reservoir* yang memiliki nilai 40 % sampai 60 %.

Nurhadi (2011) merancang mesin tetas yang memiliki kapasitas maksimal 96 butir ini telah diuji coba untuk menetas telur ayam dan memiliki prosentase keberhasilan 89,1%, sedangkan mesin tetas secara konvensional yang digunakan sebagai pembanding memiliki prosentase keberhasilan sebesar 81,59%.

Riza (2011) tentang perancangan sistem pengendali suhu dan monitoring kelembaban berbasis ATmega8535 pada plant inkubator. Respon sistem pada inkubator yang stabil dan mampu mempertahankan suhu referensi 36°C, 37°C, 38°C.

METODE PENELITIAN

Desain alat ukur suhu dan kelembaban dilakukan 2 tahap perancangan, yaitu perangkat keras (*hardware*) dan perancangan perangkat lunak (*Software*). Secara umum perancangan alat ditampilkan pada blok diagram dibawah ini:



Gambar 1. Blok diagram penelitian

Dari Gambar 1, sensor SHT11 melakukan respon pembacaan suhu dan kelembaban lingkungan. Selanjutnya akan mengirimkan sinyal analog yang diubah menjadi sinyal digital oleh *Analog to digital converter* (ADC) yang berada pada mikrokontroler ATmega16 (Arifianto, 2011). Hasil pengolahan sinyal adalah keluaran yang digital dan ditampilkan pada LCD.

Perancangan perangkat keras (*hardware*) terdiri dari perancangan mikrokontroler ATmega16, Sensor suhu seri SHT11, dan LCD.

Input suhu lingkungan yang analog akan dikonversi menjadi digital menggunakan persamaan (1).

$$T = d_1 + d_2 \times SO_T \dots\dots (1)$$

Berikut ini tabel koefisien konversi suhu:

Tabel 1. Koefisien konversi suhu (Sensirion Sensor Company, 2010)

VDD	d ₂ (°C)	d ₂ (°F)
5 V	-40.00	-40.00
4 V	-39.75	-39.50
3.5 V	-39.66	-39.35
3 V	-39.60	-39.28
2.5 V	-39.55	-39.23

SO _T	d ₂ (°C)	d ₂ (°F)
14 bit	0.01	0.018
12 bit	0.04	0.072

Ketidaklinearan dari sensor kelembaban dan ketelitian, maka digunakan persamaan (2).

$$RH_{Linear} = c1 + c2 \times SO_{RH} + c3 \times SO_{RH}^2 \dots (2)$$

Dimana c1, c2 dan c3 merupakan koefisien dengan nilai yang terlihat pada Tabel. 2 dan SO_{RH} adalah keluaran sensor hasil pengukuran kelembaban relatif (RH).

Tabel 2. Koefisien Konversi Kelembaban (Sensirion Sensor Company, 2010)

SO _{RH}	c1	c2	c3
12 bit	-2.0468	0.0367	-1.5955×10 ⁻⁶
8 bit	-2.0468	0.5872	-4.0845×10 ⁻⁴

Tabel 3. Menyatakan koefisien kompensasi suhu yang dapat dihitung berdasarkan persamaan (3).

$$RH_{True} = (T^{\circ}C - 25) \times (t1 + t2 \times SO_{RH}) + RH_{Linear} \dots(3)$$

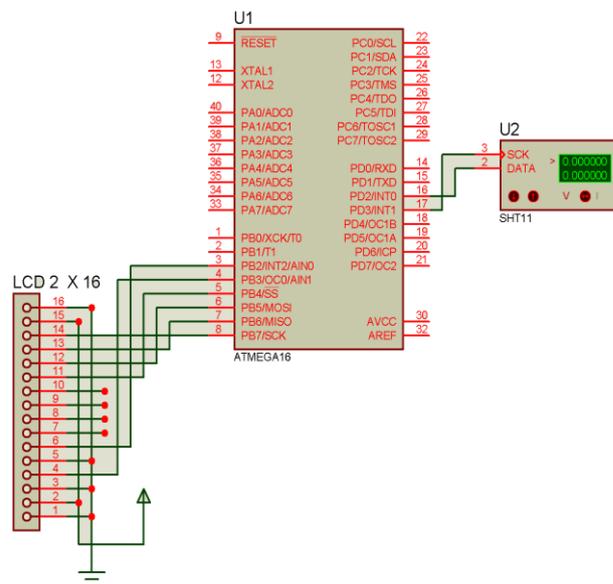
Tabel 3 Koefisien kompensasi suhu (Sensirion Sensor Company, 2010)

SO _{RH}	t ₁	t ₂
12 bit	0.01	0.00008
8 bit	0.01	0.00128

Perancangan perangkat lunak (*software*) menggunakan BASCOM AVR untuk membuat program pada mikrokontroler ATmega16.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil desain rangkaian alat ukur suhu dan kelembaban menghasilkan keluaran yang digital dengan integrasi rangkaian pada gambar 2.



Gambar 2. Rangkaian Alat Ukur Suhu dan Kelembaban

Hasil pengukuran suhu secara analog akan diubah menjadi keluaran digital menggunakan rumus (1), dan untuk mendapatkan nilai keluaran kelembaban digunakan persamaan (2) dan (3). Berikut ini listing program pada Bascom AVR.

```

Temperature:
Command = &B00000011
Call Getit
Tempc = T1c * Dataword
Tempc = Tempc - 40
Tempci = Tempc
print Tempci
Return
Humidity:
Command = &B00000101
Call Getit
Calc = C2 * Dataword
    
```

```

Calc2 = Dataword * Dataword
Calc2 = C3 * Calc2
Calc = Calc + C1
Rhlinear = Calc + Calc2
Calc = T2 * Dataword
Calc = Calc + T1c
Calc2 = Tempc - 25
Calc = Calc2 * Calc
Rhlintemp1 = Calc + Rhlinear
Rhlintempi = Rhlintemp1
Return

```

Data hasil pengukuran suhu dan kelembaban oleh SHT11 ditampilkan pada antarmuka LCD, dengan listing program sebagai berikut:

```

Config Lcdpin = Pin , Rs = Portb.3 , E
= Portb.2 , Db4 = Portb.4
Config Lcdpin = Pin , Db5 = Portb.5 ,
Db6 = Portb.6 , Db7 = Portb.7
Config Lcd = 16 * 2
Cursor Off

```

Hasil pengukuran yang dilakukan oleh sensor seri SHT11 ditunjukkan pada Tabel 4.

Tabel 4. Hasil Pengukuran Sensor Seri SHT11

Waktu (menit)	Alat Ukur		Sensor SHT11	
	Termometer (°C)	Hygrometer (%)	Suhu (°C)	Kelembaban (%)
1	34	85	32	85
2	35	78	35	75
3	36	74	36	72
4	36	72	37	71
5	37	71	37	70
6	37	70	37	69
7	37	69	37	68
8	38	69	38	67
9	38	69	38	67
10	38	68	38	67

Tabel 4. menyatakan bahwa perubahan suhu dan kelembaban berbanding terbalik. Suhu semakin tinggi akan menyebabkan proses penguapan sehingga kelembaban semakin rendah, sedangkan suhu semakin rendah akan terjadi peningkatan jumlah kandungan uap air di udara.

KESIMPULAN

1. Desain alat ukur suhu dan kelembaban telah merespon dengan akurasi $\pm 0,4$ °C dan $\pm 3\%$.
2. Hasil pengukuran suhu dan kelembaban dapat ditampilkan pada antarmuka LCD.

DAFTAR PUSTAKA

- Arifianto, D., Chandra, F., 2011, *Jago Elektronika Rangkaian Sistem Otomatis*, Kawan Pustaka, Jakarta.
- Costa, E., Freire, R., Silva, J., Cursino, C., da Silva, J., Barros, A., 2009, *Systems Of Measurement and Control Of Relative Humidity In Newborn Incubator*, *International Workshop on Medical Measurements and Applications Cetraro*, Italy.
- Nurlandi F. 2010. *Desain Inkubator Bayi Dengan Kontrol Otomatis Yang Ekonomis Untuk Klinik Persalinan (Ecobator)*. [Skripsi]. Surabaya. ITS.
- Riza F. F, Setiawan I, Sumardi. 2011. *Perancangan Sistem Pengendali Suhu Dan Memonitoring Kelembaban Berbasis ATmega8535 Pada Plant Inkubator*. [Skripsi]. Semarang. Universitas Diponegoro.
- Sensirion. 2010. *Datasheet SHT11 Humidity and Temperature Sensor*. www.sensirion.com. Diakses 4 November 2012.
- Wardhana L. 2006. *Belajar Sendiri Mikrokontroler AVR Seri ATmega8535 Simulasi, Hardware dan Aplikasi*. Andi. Yogyakarta.



**PENERAPAN PERSAMAAN GEOTERMOMETER (SiO_2)_p
DI LAPANGAN PANAS BUMI SULI, AMBON**

(Application of Geothermometry Equation (SiO_2)_p in The Geothermal Field Suli, Ambon)

HELDA ANDAYANY

Staf Jurusan Fisika, FMIPA, Unpatti

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

e-mail: andayanyhelda2013@gmail.com

ABSTRACT

Suli hot springs area has a low level of acidity or neutral pH ranges (7,2–7,7). It is also supported by a high chloride concentration value, which ranges (208,87-226,27) ppm. This shows that the area on station 1, 2, 3, and 4 are located in areas with water flow into the upper reservoir (upflow) and belongs to hot water domination reservoir tipe (water heated reservoir).

Reservoir temperature is calculated by the formula geotermometer (SiO_2)_p considered whether applied in the four kinds geotermometer equation because it gives the calculation results are not much different temperature and has a value of rms-error is less than 2%. Reservoir temperature at a hot springs station Suli possible temperature ($161 \pm 0,9$)°C. Reservoir temperature at station 2 hot spring Suli possible hot water temperature ($172 \pm 1,0$)°C. Reservoir temperature at station 3 hot springs Suli possible temperature ($171 \pm 0,9$)°C. Reservoir temperature at station 4 hot springs Suli possible temperature ($169 \pm 1,0$)°C.

Keywords: *geothermometer equation, reservoir temperature, hot springs.*

PENDAHULUAN

Suli merupakan daerah prospek panas bumi yang terbentuk sebagai akibat aktivitas pergerakan sesar normal yang berarah Timur Laut – Barat Daya menuju Kecamatan Leihitu (Tjokrosapoetro *et. al*, 1993). Daerah ini diduga sebagai media yang memunculkan manifestasi panas bumi, seperti banyaknya sumber air panas yang dijumpai di daerah ini. Suhu permukaan air panas tersebut berkisar antara (50,8 – 60,2)°C.

Pada dasarnya penelitian ini adalah membandingkan persamaan geotermometer empiris yang sudah ada dengan persamaan geotermometer baru yang berhasil dirumuskan dengan parameter pembanding kesalahan akar pukul rata kuadrat (*rms error*). Tujuan penelitian ini adalah estimasi suhu reservoir dengan metode geokimia berdasarkan analisis kandungan unsur SiO_2 air panas yang diimplementasikan dalam persamaan geotermometer empiris (SiO_2)_p. Penelitian ini juga membandingkan hasil pengukuran suhu, pH, dan konduktivitas listrik yang terukur di permukaan dengan suhu reservoir yang diestimasi.

TINJAUAN PUSTAKA

Proses “*boilling*” yang terjadi di reservoir akan membentuk fluida uap dengan suhu dan tekanan yang relatif tinggi, sehingga pada saat keluar melalui rekahan kemungkinan kontaminasi dengan air tanah, dan keluar berupa air panas. Tekanan yang ditimbulkan oleh fluida (air panas + uap) lebih besar dibanding tekanan udara luar menyebabkan fluida hidrotermal bawah permukaan yang terkontaminasi air tanah mempunyai suhu yang tinggi (> 188° C), sehingga terjadi pendidihan (densitas fluida mengecil) kemudian menerobos ke permukaan (*upflow*) berupa semburan fluida panas terutama di daerah mata air panas (Sulaeman, 2007).

Panas bumi di Indonesia umumnya merupakan jenis hidrotermal yang mempunyai suhu tinggi (>225°C), hanya beberapa diantaranya yang mempunyai suhu sedang (150-225°C).

Lapangan panas bumi Akesahu memiliki pH antara (7,4 – 7,9) yang sebagian besar bertipe air klorida dengan suhu di permukaan antara (43,9 – 45,1)°C dan di mata air panas dijumpai adanya endapan air panas atau sinter

berwarna keputih-putihan, oksida besi berwarna kecoklatan. Hal ini menunjukkan bahwa sistem air panas yang muncul di daerah panas bumi Akesahu terletak pada zona “upflow” dan merupakan jenis reservoir dominasi air panas (“water heated reservoir”). Lazimnya gejala kenampakan panas bumi pada jenis reservoir dominasi air panas dicirikan oleh adanya sinter silika (SiO_2) di daerah Akesahu. Hasil estimasi suhu reservoir di daerah Akesahu-Tidore memiliki kisaran suhu minimum antara (145-185) $^{\circ}\text{C}$ menggunakan geotermometer SiO_2 dan kisaran suhu antara (165-199) $^{\circ}\text{C}$ menggunakan geotermometer Na-K.

Andayany (2011) mengatakan bahwa daerah mata air panas Talang Haha, Ambon merupakan jenis panas bumi dengan suhu tinggi berkisar antara (272 – 277) $^{\circ}\text{C}$ sehingga berpotensi sebagai lapangan panas bumi.

LANDASAN TEORI

Berdasarkan pada jenis fluida produksi dan jenis kandungan fluida utamanya, hidrotermal dibedakan menjadi dua jenis, yaitu satu fasa atau dua fasa. Dua fasa dapat merupakan dominasi air atau dominasi uap. Dominasi uap merupakan jenis panas bumi yang sangat jarang dijumpai dimana reservoir panas buminya mempunyai kandungan fasa uap yang lebih dominan dibandingkan dengan fasa airnya. Rekahan umumnya terisi oleh uap dan pori-pori batuan masih menyimpan air. Reservoir air panasnya umumnya terletak jauh di kedalaman di bawah reservoir dominasi uapnya.

Dominasi air merupakan jenis panas bumi yang umum terdapat di dunia dimana reservoirnya mempunyai kandungan air yang sangat dominan walaupun “boiling” sering terjadi pada bagian atas reservoir membentuk lapisan penutup uap yang mempunyai suhu dan tekanan tinggi.

Dibandingkan dengan suhu reservoir minyak, suhu reservoir panas bumi relatif sangat tinggi, bisa mencapai 350 $^{\circ}\text{C}$. Berdasarkan pada tingginya suhu, Hochstein (1990) dalam Saptadji (2009) membedakan jenis panas bumi menjadi tiga, yaitu:

1. Jenis panas bumi dengan suhu rendah, yaitu suatu jenis panas bumi yang reservoirnya mengandung fluida dengan suhu lebih kecil dari 125 $^{\circ}\text{C}$.
2. Jenis panas bumi dengan suhu sedang, yaitu suatu jenis panas bumi yang reservoirnya mengandung fluida dengan suhu antara 125 $^{\circ}\text{C}$ dan 225 $^{\circ}\text{C}$.
3. Jenis panas bumi dengan suhu tinggi, yaitu suatu jenis panas bumi yang reservoirnya mengandung fluida dengan suhu diatas 225 $^{\circ}\text{C}$.

Sinter silika berasal dari fluida hidrotermal bersusunan alkalin dengan kandungan cukup silika, diendapkan ketika fluida yang jenuh, silika amorf mengalami pendinginan dari 100 $^{\circ}\text{C}$ ke 50 $^{\circ}\text{C}$. Endapan ini dapat digunakan sebagai indikator yang baik bagi keberadaan reservoir bersuhu >175 $^{\circ}\text{C}$.

Kelarutan berbagai jenis mineral silika merupakan fungsi terhadap suhu. Tekanan dan garam terlarut tidak memiliki efek yang signifikan terhadap kelarutan silika terutama quartz dan amorf di bawah temperatur 300 $^{\circ}\text{C}$. Kondisi ini memungkinkan penggunaan konsentrasi silika

dalam fluida panas bumi untuk digunakan sebagai geotermometer. Namun untuk menggunakan silika sebagai geotermometer harus diasumsikan dahulu jenis mineral silika yang mengontrol kelarutan silika, tidak ada *mixing* dengan air tanah, serta koreksi terhadap efek pendidihan (*boiling*) akibat penurunan tekanan atau *adiabatic cooling*. Geotermometer silika merupakan salah satu geotermometer tertua yang diaplikasikan dalam bidang panas bumi.

Mahon, Fournier and Rowe (Ellis and Mahon, 1977) menyatakan bahwa pada suhu tinggi larutan hidrotermal bersifat jenuh dengan kuarsa. Suhu reservoir yang diperkirakan dari pengukuran konsentrasi silika dengan suhu yang diukur secara langsung dengan metode fisika ternyata cocok untuk air panas bumi suhu tinggi (180-260) $^{\circ}\text{C}$.

Truesdell (Ellis and Mahon, 1977) menyatakan bahwa suhu reservoir dapat diperkirakan dari konsentrasi silika (*ppm*) dengan menganggap air jenuh dengan kuarsa, adiabatik, pendinginan isoentalpi. Rumus yang menyatakan hubungan konsentrasi silika dengan suhu adalah:

$$t (^{\circ}\text{C}) = \frac{1533,5}{5,768 - \log[\text{SiO}_2]} - 273,15 \quad (1)$$

dengan t = suhu reservoir terhitung ($^{\circ}\text{C}$); $[\text{SiO}_2]$ = konsentrasi silika (*ppm*).

Geotermometer (SiO_2)_p adalah geotermometer yang melibatkan unsur SiO_2 . Indeks p menunjukkan geotermometer pada penelitian. Geotermometer tersebut ditulis dalam dua bentuk persamaan, yaitu:

$$t (^{\circ}\text{C}) = C_0 (\log \text{SiO}_2)^{C_1} - 273,15 \quad (2)$$

METODE PENELITIAN

Tahap pengambilan data primer di daerah Suli, antara lain: pengukuran suhu, pH, dan konduktivitas listrik yang terukur di permukaan yang dilakukan dengan monitoring selama 48 jam dengan interval waktu 1 jam di 4 stasion pengukuran mata air panas Suli. Selain itu, dilakukan pengambilan sampel air panas di masing-masing stasion pengukuran.

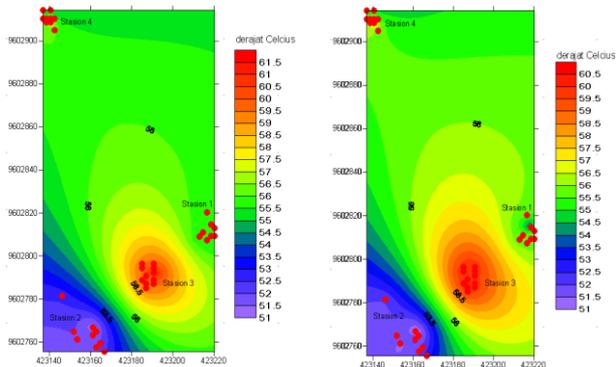
Sampel air panas yang diambil di daerah Suli, selanjutnya dianalisis. Hasil analisis berupa nilai konsentrasi silika (SiO_2) digunakan untuk mengestimasi suhu reservoir Suli berdasarkan penerapan persamaan geotermometer (SiO_2)_p yang berhasil dirumuskan, kemudian dibandingkan dengan data suhu (T-sumur bor) pada beberapa panas bumi di dunia dengan parameter pembandingan nilai kesalahan akar pukul rata kuadrat (*rms error*). Suhu yang dihitung menggunakan rumus-geotermometer dengan nilai *rms-error* < 2 % dimungkinkan sebagai suhu reservoir Suli

HASIL DAN PEMBAHASAN

Suhu rata-rata di permukaan mata air panas Suli pada 4 stasion pengukuran berkisar antara (50,8 – 60,2) $^{\circ}\text{C}$. Rentang suhu yang terjadi mungkin akibat pengaruh

percampuran dengan air permukaan (air hujan) dan suhu udara sekitarnya.

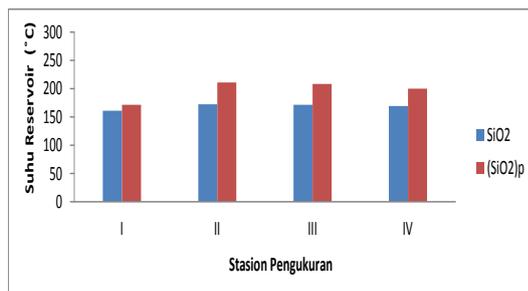
Kontur suhu permukaan air panas Suli pada Gambar 1 menunjukkan bahwa suhu rata-rata tertinggi pada hari pertama pengukuran, yaitu $60,1^{\circ}\text{C}$ terukur pada stasiun 3 mata air panas Suli. Tampilan kontur suhu pada hari kedua menunjukkan tampilan yang hampir sama dengan hari pertama, dengan suhu permukaan rata-rata tertinggi, yaitu $60,0^{\circ}\text{C}$ terukur pada stasiun 3 mata air panas Suli. Sedangkan suhu rata-rata terendah pengukuran, yaitu $52,0^{\circ}\text{C}$ pada stasiun 2 mata air panas Suli.



Gambar 1. Kontur suhu permukaan air panas Hatuasa (a) hari pertama; dan (b) hari kedua

Hubungan antara suhu, pH, dan konduktivitas listrik rata-rata yang terukur di permukaan air panas selama dua hari, yaitu semakin tinggi suhu permukaan air, maka semakin tinggi nilai konduktivitas yang terukur di permukaan air, sebaliknya pH yang terukur makin rendah.

Berdasarkan persamaan (1) dan (2), maka dapat dihitung suhu reservoir Suli seperti ditunjukkan pada Gambar 2.

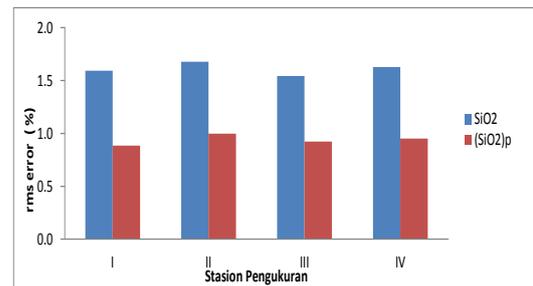


Gambar 2. Grafik perhitungan suhu reservoir suli yang dihitung dengan rumus geotermometer SiO_2 dan $(\text{SiO}_2)_p$.

Dengan demikian, suhu reservoir Suli yang dihitung berdasarkan persamaan (1) dan (2) adalah $(161 - 172)^{\circ}\text{C}$.

Gambar 3 menunjukkan hasil perhitungan nilai rms error rumus geotermometer SiO_2 dan $(\text{SiO}_2)_p$. Dengan demikian, suhu reservoir pada stasiun 1 mata air panas Suli dimungkinkan bersuhu $(161 \pm 0,9)^{\circ}\text{C}$. Suhu reservoir pada stasiun 2 mata air panas Suli dimungkinkan bersuhu $(172 \pm 1,0)^{\circ}\text{C}$. Suhu reservoir pada stasiun 3 mata air panas Suli bersuhu $(171 \pm 0,9)^{\circ}\text{C}$. Suhu reservoir pada stasiun 4 mata air panas Suli bersuhu $(169 \pm 1,0)^{\circ}\text{C}$.

Rentang suhu mungkin disebabkan adanya sirkulasi air panas di dalam reservoir Suli.



Gambar 3. Hasil perhitungan nilai rms error rumus geotermometer SiO_2 dan $(\text{SiO}_2)_p$.

KESIMPULAN

Pada mata air panas Hatuasa, semakin tinggi suhu permukaan air, maka semakin besar nilai konduktivitas listrik yang terukur di permukaan air, sebaliknya pH yang terukur makin kecil.

Penerapan persamaan geotermometer $(\text{SiO}_2)_p$ mengestimasi suhu reservoir pada stasiun 1 mata air panas Suli dimungkinkan bersuhu $(161 \pm 0,9)^{\circ}\text{C}$. Suhu reservoir pada stasiun 2 mata air panas Suli dimungkinkan bersuhu $(172 \pm 1,0)^{\circ}\text{C}$. Suhu reservoir pada stasiun 3 mata air panas Suli bersuhu $(171 \pm 0,9)^{\circ}\text{C}$. Suhu reservoir pada stasiun 4 mata air panas Suli bersuhu $(169 \pm 1,0)^{\circ}\text{C}$.

Dengan menggunakan persamaan geotermometer $(\text{SiO}_2)_p$, sistem panas bumi Suli adalah jenis panas bumi dengan suhu sedang, yaitu suhu antara $(161 - 172)^{\circ}\text{C}$ sehingga berpotensi sebagai lapangan panas bumi.

Perlu digunakan geotermometer-geotermometer lain sebagai pembanding geotermometer $(\text{SiO}_2)_p$, misalnya geotermometer gas-gas panas bumi dan geotermometer mineral ubahan batuan.

Perlu adanya penyelidikan lanjutan di daerah Suli sebagai daerah prospek panas bumi, misalnya eksplorasi lanjut (*pre feasibility study*).

DAFTAR PUSTAKA

- Andayany, H. 2011. Estimasi Suhu Reservoir Sumber Mata Air Panas Hatuasa Ambon Dengan Metode Geokimia Berdasarkan Pengembangan Persamaan Geotermometer Empiris. Tesis. Program Studi S2 Ilmu Fisika, UGM, Yogyakarta, tidak diterbitkan.
- Ellis, A.J. and Mahon, W.A.J., 1977, *Geochemistry and Geothermal System*, Academic Press, New York, N.Y., 392 pp.
- Fournier, R.O. and Truesdell, A.H., 1973, *An Empirical Na-K-Ca Geothermometer of Natural Water*, *Geochim, Cosmochim. Acta*, 43: 1235-1275.
- Marini, L. and Susangkyono, A.E., 1999, *Fluid Geochemistry of Ambon Island (Indonesia)*, *Geothermics*, Vol. 28: 184-204.
- Saptadji, N., 2009, *Energi Panas Bumi di Indonesia*, ITB, Bandung.

- Sulaeman, B., Asngari dan Nuryasin, 2007, Penyelidikan Geokimia Panas Bumi Daerah Akeshu-Tidore, Maluku Utara, Pusat Sumber Daya Geologi, Bandung.
- Tjokrosoetro, S., E. Rusmana dan Suharsono, 1993, Laporan Geologi Lembar Ambon, Maluku, PPPG, Bandung. 32 h + peta geologi skala 1:250.000.

SIFAT-SIFAT DASAR PERLUASAN INTEGRAL LEBESGUE
(*Basic Properties Of Extended Lebesgue Integral*)

Yopi Andry Lesnussa, Henry Junus Wattimanela, Mozart Winston Talakua
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Pattimura
Email : yopi_a_lesnussa@yahoo.com

ABSTRACT

EL-Integral is extended of Lebesgue integral, $(EL) \int_a^b f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu$.

Lebesgue integral is defined with early arrange measure theory that famous with Lebesgue measure. A function $f:[a,b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ is said *EL*-integrable on $[a,b]$, if there exist series interval that no piled up $\{I_k\}$ in $[a,b]$ so that $\mu([a,b] - \bigcup I_k) = 0$,

$f \in L(\overline{I}_k)$ for every k and $A = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu$ finite. Value A is called value of *EL*-

Integral function f on $[a,b]$. Extended of Lebesgue integral (*EL*-Integral) is notated

by : $(EL) \int_E f d\mu = \int_a^b f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu$.

Keywords: *Measure Space, Lebesgue Measure, Lebesgue Integral, Sifat-sifat Dasar EL-Integral.*

PENDAHULUAN

Perkembangan analisis dimulai dengan penemuan Kalkulus oleh Newton dan Leibniz yang berhasil mengembangkan teorema fundamental yaitu mengenai antiderivatif. Salah satu konsep dasar dalam analisis adalah integral. Teori integral klasik dikembangkan oleh Cauchy dan Riemann pada pertengahan abad ke-19. Namun kekurangan dari integral Riemann ini muncul ketika proses integrasi dikenakan pada fungsi yang diskontinu, misalnya fungsi Dirichlet yang tidak terintegral Riemann. Untuk mengatasi kekurangan ini, pada tahun 1902, Lebesgue seorang matematikawan Perancis mendefinisikan integral Lebesgue dengan terlebih dahulu menyusun teori ukuran yang dikenal dengan Ukuran Lebesgue (pada garis lurus). Denjoy (1912) membangun teori integral dengan mencermati karakteristik kekontinuan fungsi primitifnya menghasilkan suatu integral yang disebut Integral Denjoy khusus. Perron (1914) membangun teori integralnya dengan mendasarkan pada pengertian fungsi mayor dan fungsi minor yang disebut Integral Perron. Pada tahun 1957-1960 Henstock dan Kurzweil secara terpisah dalam waktu hampir bersamaan mengembangkan integral jenis Riemann dengan mengubah peran konstanta positif δ

pada konstruksi integral Riemann menjadi fungsi positif δ yang disebut dengan integral Riemann kontinu lengkap atau integral Henstock-Kurzweil (Integral-*HK*) (Soeparna 1999).

Telah diketahui bahwa meskipun integral Denjoy khusus, integral Perron dan integral-*HK* mengitlakan sifat yang berbeda dari integral Lebesgue tetapi ketiga integral ini ekuivalen dan juga merupakan pengitlakan dari integral Lebesgue. Soeparna (1996) menyatakan bahwa posisi integral Lebesgue dalam integral-*HK* adalah rapat (*dense*) terkendali, ini berarti bahwa untuk setiap fungsi f yang terintegral-*HK* terdapat barisan fungsi terintegral Lebesgue $\{f_n\}$ yang konvergen terkendali ke fungsi f .

Selanjutnya dengan mencermati sebuah fungsi yang tidak terintegral Lebesgue pada selang tertutup $[0,1]$ tetapi terintegral Lebesgue pada setiap selang bagiannya. Soeparna (1999) mendefinisikan sebuah integral baru yang disebut Perluasan integral Lebesgue (integral-*EL*). Berdasarkan pada uraian di atas maka peneliti tertarik untuk mendalami dan menganalisis secara mendetail mengenai bentuk dan sifat dasar dari integral-*EL*. Dalam penelitian ini, peneliti akan menggunakan definisi dan

teorema serta teori matematika lain untuk menjelaskan permasalahan ini.

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam perkembangan teori integral, sekitar abad ke-20, Lebesgue mengembangkan teori ukuran dengan mengitlakan konsep panjang selang-selang ke dalam ukuran himpunan pada bilangan nyata (*real*). Ia mengembangkan teori integral dengan menggunakan ukuran Lebesgue (pada garis lurus), yang ditulis dalam naskah publikasinya yang berjudul *Integral Longueur aire* pada tahun 1902 (Jain, 1986). Selanjutnya integral tersebut dikembangkan menjadi integral Lebesgue yang bekerja pada ruang ukuran.

Sejalan dengan perkembangan teori integral, didalam pendefinisian secara deskriptif integral Lebesgue yang dibangun oleh Lebesgue memerlukan fungsi yang kontinu mutlak. Pada tahun 1912, A. Denjoy mendefinisikan integral Denjoy khusus dengan menggunakan fungsi kontinu yang sekaligus kontinu mutlak teritlak. Fungsi $F:[a,b] \rightarrow \mathfrak{R}$ dikatakan kontinu mutlak pada $x \in [a,b]$, ditulis $F \in AC^*(x)$ dan F dikatakan kontinu mutlak teritlak ditulis $F \in ACG^*(x)$. Terbukti bahwa fungsi $f:[a,b] \rightarrow \mathfrak{R}$ terintegral Lebesgue pada selang $[a,b]$ jika dan hanya jika terdapat fungsi $F:[a,b] \rightarrow \mathfrak{R}$ yang bersifat kontinu mutlak pada $[a,b]$ dan $F'(x) = f(x)$ h.d. pada $[a,b]$.

Fungsi $f:[a,b] \rightarrow \mathfrak{R}$ terintegral-HK pada $[a,b]$ jika dan hanya jika terdapat fungsi $F:[a,b] \rightarrow \mathfrak{R}$ yang bersifat kontinu dan ACG^* pada $[a,b]$ dan $F'(x) = f(x)$ h.d. pada $[a,b]$. Oleh karena itu setiap fungsi yang terintegral Lebesgue pada selang $[a,b]$ akan terintegral-HK juga pada selang yang sama. Telah diketahui bahwa Integral Denjoy khusus, integral Perron dan integral-HK adalah berbeda dan ketiganya merupakan pengitlakan dari integral Lebesgue. Barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan konvergen terkendali ke fungsi f pada selang $[a,b]$ jika memenuhi syarat berikut : (i). f_n terintegral-HK pada $[a,b]$ dengan primitif F_n untuk setiap n dan barisan $\{f_n\}$ konvergen ke f h.d. pada $[a,b]$, (ii). Barisan $\{F_n\}$ bersifat ACG^* seragam pada $[a,b]$ dan (iii). $\{f_n\}$ konvergen, katakan ke F pada. Selanjutnya posisi integral Lebesgue dalam integral-HK adalah rapat (*dense*) terkendali. Ini berarti bahwa untuk setiap fungsi f yang terintegral-HK terdapat barisan fungsi yang terintegral Lebesgue $\{f_n\}$ yang konvergen terkendali ke fungsi f .

Ukuran Lebesgue

Definisi 1 (Ukuran Lebesgue)

Panjang suatu selang terbatas I baik terbuka, tertutup, setengah terbuka atau setengah tertutup dengan

titik pangkal a dan titik ujung b ($a < b$) didefinisikan sebagai bilangan $l(I) = |I| = b - a$. Pengertian ukuran suatu himpunan didefinisikan dengan menggunakan pengertian panjang selang.

Definisi 2

Jika \mathcal{A} aljabar (aljabar- σ) pada himpunan X , dan aljabar- σ himpunan $\mathcal{A} \subset 2^X$ disebut Ruang Terukur (*measurable space*), ditulis (X, \mathcal{A}) . Dan anggota \mathcal{A} disebut Himpunan Terukur (*measurable set*).

Definisi 3

Diberikan (X, \mathcal{A}) ruang terukur fungsi $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$ disebut ukuran pada X (*measure*) jika memenuhi aksioma-aksioma berikut :

- $\mu(\phi) = 0$
- $\mu(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}$
- Jika $\{E_k\} \subset \mathcal{A}$ dan $E_k \cap E_l = \phi, \quad \forall k \neq l$ berakibat $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$.

Definisi 4

Ruang terukur (X, \mathcal{A}) diperlengkapi dengan suatu ukuran μ disebut Ruang Ukuran (*measure space*) dan ditulis dengan (X, \mathcal{A}, μ) .

Definisi 5

Diberikan himpunan $A \subseteq \mathfrak{R}$ dan \mathfrak{I} menyatakan koleksi semua barisan selang terbuka $\{I_n\}$ sehingga $A \subseteq \bigcup_n I_n$.

Ukuran luar himpunan A , ditulis $\mu^*(A)$ adalah bilangan

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_n l(I_n) : \{I_n\} \in \mathfrak{I} \right\}$$

Berikut ini disajikan beberapa sifat ukuran luar suatu himpunan.

Teorema 1

- Jika $A, B \subset \mathfrak{R}$ dengan $A \subset B$, maka $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- Jika $A \subset \mathfrak{R}$ dan A singleton, maka $\mu^*(A) = 0$

Akibat Teorema 1 (ii), jika $A \subset \mathfrak{R}$ dan A terhitung (*countable*), maka $\mu^*(A) = 0$.

Teorema 2

Jika A berupa selang, maka $\mu^*(A) = l(A)$.

Definisi 6

Himpunan $E \subset \mathfrak{R}$ dikatakan terukur Lebesgue jika untuk setiap himpunan $A \subset \mathfrak{R}$ berlaku :

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Telah diketahui bahwa $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$ dan μ^* bersifat sub aditif, yaitu

$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$, karena itu definisi 6 di atas cukup ditulis sebagai : Himpunan $E \subset \mathfrak{R}$ dikatakan terukur Lebesgue jika untuk setiap himpunan $A \subset \mathfrak{R}$ berlaku $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$.

Untuk selanjutnya dengan himpunan terukur dimaksudkan adalah himpunan terukur Lebesgue.

Teorema 3

- (i). Jika E merupakan himpunan terukur, maka E^c juga himpunan terukur.
- (ii). \emptyset dan \mathfrak{R} masing-masing himpunan terukur.
- (iii) Jika $\mu^*(A) = 0$, maka A himpunan terukur.
- (iv) Jika E_1, E_2 masing-masing merupakan himpunan terukur, maka $E_1 \cup E_2$ juga himpunan terukur.

Teorema 4

Setiap interval adalah terukur.

Teorema 5

Jika A_1, A_2, \dots, A_n himpunan-himpunan terukur yang saling asing, maka

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A_i)$$

Berdasarkan pada Teorema 2.2.1.3 (i) dan (iv) diperoleh bahwa Σ , yaitu koleksi semua himpunan terukur (Lebesgue), merupakan aljabar himpunan pada \mathfrak{R} . Lebih lanjut dapat dibuktikan bahwa Σ merupakan suatu aljabar- σ (aljabar-sigma) himpunan pada \mathfrak{R} .

Jika Σ aljabar (aljabar- σ) himpunan pada X dan $E \in \Sigma$ maka $\Sigma_E = \{E \cap A : A \in \Sigma\}$ merupakan aljabar (aljabar- σ) himpunan pada E , terlihat bahwa $\Sigma_E \subset \Sigma$.

Definisi 7

Ukuran Lebesgue μ adalah suatu fungsi dari Σ ke \mathfrak{R} dengan $\mu(A) = \mu^*(A)$ untuk setiap $A \in \Sigma$. Suatu sifat “ P ” dikatakan berlaku h.d. pada himpunan $X \subset \mathfrak{R}$ jika untuk setiap himpunan $A \subset X$ dengan $\mu(A) = 0$ sehingga “ P ” berlaku pada $X - A$.

Definisi 8

Suatu fungsi bernilai riil yang diperluas f , yaitu $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$ dikatakan terukur Lebesgue pada A atau terukur pada $A \in \Sigma$ jika himpunan $\{x \in A : f(x) > \alpha\}$ terukur untuk setiap bilangan riil α .

Integral Lebesgue

Definisi 9

Misalkan $E \subset \mathfrak{R}$ suatu himpunan sebarang fungsi $\chi_E : \mathfrak{R} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$ dinamakan fungsi karakteristik dari E jika :

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

disebut fungsi karakteristik (*characteristic function*) pada E .

Definisi 10

Diberikan $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ disebut fungsi langkah (*step function*) jika ada selang-selang I_1, I_2, \dots, I_n yang saling asing $I_i \cap I_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$ dan terdapat bilangan c_1, c_2, \dots, c_n sehingga :

$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^n I_k \text{ ada, } \varphi(x) = \begin{cases} c_k, & x \in I_k \\ 0, & x \notin I_k \end{cases}$$

Jadi $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n c_k \chi_{I_k}$. Sehingga untuk

$x \in [a, b] = \bigcup_{k=1}^n I_k$, maka ada tepat I sehingga $x \in I_i$,

$$\text{maka } \varphi(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k}(x) = c_i \chi_{I_i}(x) = c_i \cdot 1 = c_i.$$

Definisi 11

Jika (X, \mathcal{A}, μ) ruang ukuran, fungsi $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$ disebut fungsi sederhana (*simple function*) pada X , jika terdapat bilangan c_1, c_2, \dots, c_n dan himpunan terukur E_1, E_2, \dots, E_n , sedemikian sehingga :

$$X = \bigcup_{k=1}^n E_k \text{ dan } \varphi(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}$$

Jika $E \subset \mathcal{A}$ maka $\varphi(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{(E \cap E_k)}$, juga

merupakan fungsi sederhana pada E . Lebih lanjut jika $E_k \cap E_l = \emptyset, \forall k \neq l$, maka fungsi sederhana

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}(x) \text{ disebut fungsi sederhana bentuk}$$

kanonik.

Definisi 12

Diberikan $\varphi : \mathfrak{R} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$ fungsi sederhana dengan

$$\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i} \text{ dan } E \in \Sigma. \text{ Integral Lebesgue fungsi}$$

sederhana φ pada E didefinisikan sebagai bilangan

$$(L) \int_E \varphi = (L) \int_E \varphi d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \mu(E_i \cap E).$$

Definisi 13

Diberikan $f : \mathfrak{R} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$ fungsi terbatas dan E himpunan terukur. Integral Lebesgue atas dan bawah fungsi f pada E didefinisikan oleh

$$\int_E^- f = \inf \left\{ \int_E \varphi : \varphi \geq f, \varphi \text{ fungsi sederhana} \right\}$$

$$\int_E^- f = \sup \left\{ \int_E \varphi : \varphi \leq f, \varphi \text{ fungsi sederhana} \right\}$$

Jika kedua integral ini bernilai sama dan hingga, maka dikatakan bahwa fungsi f terintegral Lebesgue pada E dan nilainya ditulis dengan $\int_E f = \int_E f d\mu$. Jika $E = [a, b]$,

bilangan $\int_E f$ biasa ditulis $\int_a^b f$, jadi $\int_E f = \int_a^b f$.

Definisi 14

Diberikan $f : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fungsi terukur nonnegatif. Integral Lebesgue fungsi f pada $[a, b]$ didefinisikan oleh :

$$\int_a^b f = \sup \left\{ \int_a^b u : 0 \leq u \leq f, u \text{ fungsi terukur terbatas pada } [a, b] \right\}$$

Jika $\int_a^b f$ hingga maka f dikatakan terintegral Lebesgue pada $[a, b]$.

Teorema 6

Diberikan f, g fungsi terukur nonnegatif yang didefinisikan pada $[a, b]$, serta A dan B merupakan himpunan bagian terukur di dalam $[a, b]$. Dipenuhi :

a. Untuk semua $k > 0$, $\int_a^b k f = k \int_a^b f$,

Lebih lanjut, jika f terintegral Lebesgue pada $[a, b]$ maka $k f$ terintegral pada $[a, b]$.

b. Berlaku $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

Lebih lanjut, jika f dan g terintegral Lebesgue pada $[a, b]$ maka $f + g$ terintegral pada $[a, b]$.

Definisi 15

Fungsi terukur f dikatakan terintegral Lebesgue pada himpunan terukur E , jika fungsi-fungsi nonnegatif f^+ dan f^- masing-masing terintegral Lebesgue pada E dan didefinisikan :

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

Selanjutnya f^+ bagian positif fungsi f didefinisikan sebagai fungsi $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ dan f^- bagian negatif fungsi f didefinisikan sebagai fungsi $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Jika f terukur maka f^+ dan f^- juga terukur. Diperoleh bahwa $f = f^+ - f^-$ dan $|f| = f^+ + f^-$. Fungsi terukur $f : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ terintegral

Lebesgue pada $[a, b]$ jika dan hanya jika $|f|$ terintegral Lebesgue pada $[a, b]$. Dalam hal ini f^+ dan f^- terintegral Lebesgue pada $[a, b]$ dan integral Lebesgue f pada $[a, b]$ didefinisikan sebagai

$$\int_a^b f d\mu = \int_a^b f^+ d\mu - \int_a^b f^- d\mu$$

Teorema 7

Diberikan f dan g fungsi terintegral Lebesgue pada $[a, b]$ serta A dan B merupakan himpunan bagian terukur dari $[a, b]$, dipenuhi :

a. $k f$ terintegral Lebesgue pada $[a, b]$ dan

$$\int_a^b k f = k \int_a^b f \text{ untuk setiap } k.$$

b. $f + g$ terintegral Lebesgue pada $[a, b]$ dan

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

c. jika $f \leq g$ h.d. pada $[a, b]$, maka $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

d. jika $f = g$ h.d. pada $[a, b]$, maka $\int_a^b f = \int_a^b g$

e. berlaku $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

f. jika A dan B saling asing, maka $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Perluasan Integral Lebesgue

Pada bagian ini akan disajikan pengertian Perluasan Integral Lebesgue atau disebut Integral-EL dan beberapa sifat yang berlaku padanya. Integral-EL merupakan suatu perluasan integral Lebesgue. Untuk selanjutnya $f \in L(\overline{I}_k)$ dimaksudkan bahwa f terintegral Lebesgue

pada \overline{I}_k dan $(L) \int_{\overline{I}_k} f d\mu$ menyatakan nilai integral

Lebesgue fungsi f pada \overline{I}_k , μ ukuran Lebesgue dan \overline{I}_k suatu selang

Definisi 16

Suatu fungsi $f : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dikatakan terintegral-EL pada $[a, b]$ jika terdapat barisan selang yang tidak tumpang tindih $\{I_k\}$ di dalam $[a, b]$ sehingga

$$\mu\left([a, b] - \bigcup I_k\right) = 0, \quad f \in L(\overline{I}_k)$$

untuk setiap k dan $A = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu$ berhingga.

Bilangan A tersebut disebut nilai integral-EL fungsi f pada $[a, b]$, ditulis :

$$(EL) \int_{\bar{I}_k} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu$$

Teorema 8 (Ketunggalan)

Jika f terintegral-EL $[a, b]$, maka nilai integral A yang dimaksud di dalam Definisi 16 adalah tunggal.

Bukti :

Andaikan ada dua nilai A_1 dan A_2 seperti di dalam Definisi 16 berarti :

1. Terdapat barisan selang yang tidak tumpang tindih $\{I_k\}$ di dalam $[a, b]$ sehingga

$$\mu\left([a, b] - \bigcup I_k\right) = 0, f \in L(\bar{I}_k) \text{ untuk setiap } k \text{ dan}$$

$$A_1 = (EL) \int_{\bar{I}_k} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu$$

2. Terdapat barisan selang yang tidak tumpang tindih $\{J_l\}$ di dalam $[a, b]$ sehingga

$$\mu\left([a, b] - \bigcup J_l\right) = 0, f \in L(\bar{J}_l) \text{ untuk setiap } k \text{ dan}$$

$$A_2 = (EL) \int_{\bar{I}_k} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{J_l} f d\mu$$

Dibentuk barisan selang $\{H_{kl}\}$ dengan $H_{kl} = I_k \cap J_l$ untuk setiap k dan l . Jelas bahwa $\{H_{kl}\}$ merupakan barisan himpunan terukur yang tidak tumpang tindih, sebab

$$\begin{aligned} \mu\left([a, b] - \bigcup_k \bigcup_l H_{kl}\right) &= \mu\left([a, b] - \bigcup_k \bigcup_l (I_k \cap J_l)\right) \\ &= \mu\left([a, b] - \bigcup_k \left(I_k \cap \left(\bigcup_l J_l\right)\right)\right) \\ &= \mu\left([a, b] - \bigcup_k I_k\right) = 0 \end{aligned}$$

Diperoleh :

$$\begin{aligned} |A_1 - A_2| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu - \sum_{l=1}^{\infty} (L) \int_{J_l} f d\mu \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (L) \int_{I_k \cap J_l} f d\mu - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (L) \int_{I_k \cap J_l} f d\mu \right| = 0 \end{aligned}$$

Jadi $A_1 = A_2$. Sehingga diperoleh bahwa nilai A adalah tunggal. ■

Untuk selanjutnya bilangan $A = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu$ di

dalam Definisi 16 disebut nilai integral-EL fungsi f pada

$[a, b]$ dan ditulis $(EL) \int_a^b f$, jadi

$$(EL) \int_a^b f = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu$$

Himpunan semua fungsi yang terintegral-EL pada $[a, b]$ ditulis $EL[a, b]$. Akibat langsung dari Definisi 16 adalah bahwa setiap fungsi f yang terintegral Lebesgue pada $[a, b]$ adalah terintegral-EL pada $[a, b]$. Seperti dinyatakan dalam teorema berikut ini.

Teorema 9

Jika fungsi f terintegral Lebesgue pada $[a, b]$, maka f terintegral-EL pada $[a, b]$.

Bukti :

Diberikan fungsi f terintegral Lebesgue pada $[a, b]$.

Dibentuk barisan $\{I_k\}$ dengan cara sebagai berikut

$$I_k = \left[a + \frac{b-a}{k-1}, a + \frac{b-a}{k} \right] \text{ untuk setiap } k = 1, 2, \dots$$

Diperoleh $\mu\left([a, b] - \bigcup I_k\right) = 0, f \in L(\bar{I}_k)$ untuk setiap

$$k \text{ dan } (EL) \int_a^b f = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu = (L) \int_a^b f d\mu$$

berhingga.

Jadi fungsi terintegral-EL pada $[a, b]$ ■

Teorema 10

Jika fungsi f terintegral-EL pada $[a, b]$ dan $f = g$ h.d. pada $[a, b]$, maka g terintegral-EL pada $[a, b]$ dan

$$(EL) \int_a^b g = (EL) \int_a^b f.$$

Bukti :

f terintegral-EL pada $[a, b]$ berarti ada barisan selang yang tidak tumpang tindih $\{I_k\}$ di dalam $[a, b]$ sehingga

$$\mu\left([a, b] - \bigcup I_k\right) = 0, f \in L(\bar{I}_k) \text{ untuk setiap } k \text{ dan}$$

$$(EL) \int_a^b f = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu \text{ berhingga.}$$

Karena $g = f$ h.d. pada $[a, b]$ dan $f \in L(\bar{I}_k)$ untuk

setiap k maka $g = f$ h.d. pada I_k untuk setiap k , sehingga diperoleh $g \in L(\bar{I}_k)$ dan

$$(L) \int_{I_k} g d\mu = (L) \int_{I_k} f d\mu \text{ untuk setiap } k. \text{ Jadi}$$

$$(EL) \int_a^b g = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} g d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu = (EL) \int_a^b f. \quad \blacksquare$$

Fungsi nonnegatif yang terintegral-EL ternyata juga terintegral Lebesgue pada selang yang sama, seperti dinyatakan dalam teorema berikut ini.

Teorema 11

Jika f terintegral-EL pada $[a, b]$ dan $f \geq 0$ h.d. pada $[a, b]$, maka f terintegral Lebesgue pada $[a, b]$.

Bukti :

f terintegral-EL pada $[a, b]$ berarti ada barisan selang yang tak tumpang tindih $\{I_k\}$ di dalam $[a, b]$ sehingga $\mu([a, b] - \bigcup I_k) = 0, f \in L(\bar{I}_k)$ untuk setiap k dan

$$(EL) \int_a^b f = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f \text{ berhingga.}$$

Untuk setiap n dibentuk fungsi f_n dengan rumus :

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ untuk } x \in \bar{I}_k \\ 0 & \text{ untuk } x \notin \bar{I}_k \end{cases}$$

Terlihat bahwa $\{f_n\}$ naik monoton h.d. pada $[a, b]$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ h.d. pada $[a, b]$ dan $f_n \in L(\bar{I}_k)$ untuk setiap k .

Menurut Teorema Kekonvergenan Monoton Lebesgue maka $f \in L[a, b]$ dan

$$(L) \int_a^b f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_a^b f_n \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f \, d\mu$$

berhingga. Jadi $f \in L[a, b]$. ■

Dalam Teorema berikut ini dinyatakan bahwa integral-EL memenuhi sifat linear.

Teorema 12

Jika f, g terintegral-EL pada $[a, b]$ dan $\alpha \in R$, maka :

- αf terintegral-EL pada $[a, b]$ dan

$$(EL) \int_a^b \alpha f = \alpha (EL) \int_a^b f$$

- $f + g$ terintegral-EL pada $[a, b]$ dan

$$(EL) \int_a^b (f + g) = (EL) \int_a^b f + (EL) \int_a^b g$$

Bukti :

- Jika f terintegral-EL pada $[a, b]$ berarti ada barisan selang yang tidak tumpang tindih $\{I_k\}$ di dalam $[a, b]$ sehingga $\mu([a, b] - \bigcup I_k) = 0, f \in L(\bar{I}_k)$ untuk setiap k dan $(EL) \int_a^b f = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f \text{ berhingga.}$

Untuk setiap $k, f \in L(I_k) \Rightarrow \alpha f \in L(I_k)$ dan

$$(L) \int_{I_k} \alpha f \, d\mu = \alpha (L) \int_{I_k} f \, d\mu$$

diperoleh

$$\begin{aligned} (EL) \int_a^b \alpha f &= \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} \alpha f \, d\mu = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f \, d\mu \\ &= \alpha (EL) \int_a^b f \end{aligned}$$

berhingga.

Jadi $\alpha f \in EL[a, b]$. ■

- Jika g terintegral-EL pada $[a, b]$ berarti ada barisan selang yang tidak tumpang tindih $\{J_l\}$ di dalam $[a, b]$ sehingga $\mu([a, b] - \bigcup J_l) = 0, g \in L(\bar{J}_l)$ untuk

setiap l dan $(EL) \int_a^b g = \sum_{l=1}^{\infty} (L) \int_{J_l} g \, d\mu$ berhingga.

Dibentuk barisan selang yang tidak tumpang tindih $\{H_{kl}\}$ dengan $H_{kl} = I_k \cap J_l$ seperti pada Teorema 8

$$\mu\left([a, b] - \bigcup_k \bigcup_l H_{kl}\right) = 0,$$

$f, g \in L(H_{kl}) \Rightarrow f + g \in L(H_{kl})$ untuk setiap k dan l

$$\begin{aligned} (EL) \int_a^b (f + g) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (L) \int_{H_{kl}} (f + g) \, d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (L) \int_{I_k \cap J_l} (f + g) \, d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left((L) \int_{I_k \cap J_l} f \, d\mu + (L) \int_{I_k \cap J_l} g \, d\mu \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (L) \int_{I_k \cap J_l} f \, d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (L) \int_{I_k \cap J_l} g \, d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f \, d\mu + \sum_{l=1}^{\infty} (L) \int_{J_l} g \, d\mu \end{aligned}$$

$$(EL) \int_a^b (f + g) = (EL) \int_a^b f + (EL) \int_a^b g$$

Jadi $(f + g) \in EL[a, b]$. ■

Teorema 13

Jika f, g terintegral-EL pada $[a, b]$ dan $f \leq g$ h.d. pada $[a, b]$, maka $(EL) \int_a^b f \leq (EL) \int_a^b g$.

Bukti :

$f \leq g$ h.d. pada $[a, b]$ berakibat $g - f \geq 0$ h.d. pada $[a, b]$, f, g terintegral-EL pada $[a, b]$ berakibat $g - f$

terintegral-EL pada $[a, b]$, sehingga diperoleh $(EL) \int_a^b (g - f) \geq 0$ atau $(EL) \int_a^b f \leq (EL) \int_a^b g$. ■

Teorema 14

Jika f terintegral-EL pada $[a, b]$ dan $[u, v] \subseteq [a, b]$, maka f terintegral-EL pada $[u, v]$.

Bukti :

f terintegral-EL pada $[a, b]$ berarti ada barisan selang yang tidak tumpang tindih $\{I_k\}$ di dalam $[a, b]$ sehingga $\mu([a, b] - \bigcup I_k) = 0, f \in L(\bar{I}_k)$ untuk setiap k dan $(EL) \int_a^b f = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu$ berhingga.

Dibentuk barisan $\{J_k\}$ dengan $J_k = I_k \cap [u, v]$ untuk setiap $k, J_k = \emptyset$ atau $J_k = I_k$ atau $J_k = \bar{I}_N$ dengan $I_N = I'_N \cup I''_N$ untuk suatu $N, \mu([u, v] - \bigcup J_k) = 0$, seba $\mu([u, v] - \bigcup I_k) = 0$ dan $[a, b] - \bigcup I_k \subseteq [u, v] - \bigcup J_k$.

Karena $f \in L(\bar{I}_k)$ untuk setiap k berakibat $f \in L(\bar{J}_k)$ untuk setiap k .

Terdapat dua kemungkinan :

- i) Jika $\{J_k\}$ barisan berhingga, maka $\sum_{k=1}^N (L) \int_{I_k} f d\mu$ berhingga diperoleh $f \in L[u, v] \subseteq EL[u, v]$
- ii) Jika $\{J_k\}$ barisan tak berhingga, maka ada bilangan asli N sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu = \sum_{k=1}^{N-1} (L) \int_{I_k} f d\mu + (L) \int_{I_N} f d\mu + (L) \int_{I_N} f d\mu + \sum_{k=N+1}^{\infty} (L) \int_{J_k} f d\mu$$

diperoleh $\sum_{k=N+1}^{\infty} (L) \int_{J_k} f d\mu$ berhingga, sehingga f terintegral-EL pada $[u, v]$.

Jadi dari (i) dan (ii), maka dapat diperoleh $f \in EL[a, b]$. ■

Teorema 15

Jika $f \in EL[a, b]$ dan $a < c < b$, maka

$$(EL) \int_a^b f = (EL) \int_a^c f + (EL) \int_c^b f.$$

Bukti :

f terintegral-EL pada $[a, b]$ berarti ada barisan selang yang tidak tumpang tindih $\{I_k\}$ di dalam $[a, b]$ sehingga $\mu([a, b] - \bigcup I_k) = 0, f \in L(\bar{I}_k)$ untuk setiap k dan $(EL) \int_a^b f = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu$ berhingga.

Karena $[a, c] \subseteq [a, b]$ diperoleh $f \in EL[a, c]$

Karena $[c, b] \subseteq [a, b]$ diperoleh $f \in EL[c, b]$

Diambil barisan $\{A_k\}$ dan $\{B_k\}$ dengan $A_k = I_k \cap [a, c]$ dan $B_k = I_k \cap [c, b]$ sehingga $I_k = A_k \cup B_k$ untuk setiap k dan diperoleh $\mu([a, c] - \bigcup A_k) = 0$ dan $\mu([c, b] - \bigcup B_k) = 0$

$$\begin{aligned} & f \in L(A_k) \text{ dan } f \in L(B_k) \\ & (EL) \int_a^b f = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{A_k \cup B_k} f d\mu \\ & (EL) \int_a^b f = \sum_{k=1}^{\infty} \left((L) \int_{A_k} f d\mu + (L) \int_{B_k} f d\mu \right) \\ & (EL) \int_a^b f = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{A_k} f d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{B_k} f d\mu \\ & (EL) \int_a^b f = (EL) \int_a^c f + (EL) \int_c^b f. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 16

Jika f fungsi terintegral-EL pada $[a, b]$, maka untuk setiap bilangan positif ε terdapat bilangan positif δ sehingga untuk setiap himpunan $A \subseteq [a, b]$ dengan $\mu(A) < \delta$

berlaku bahwa $\left| (EL) \int_A f \right| < \varepsilon$.

Bukti :

f terintegral-EL pada $[a, b]$ berarti terdapat barisan selang yang tidak tumpang tindih $\{I_k\}$ di dalam $[a, b]$ sehingga $\mu([a, b] - \bigcup I_k) = 0, f$ terintegral Lebesgue

pada I_k untuk setiap k dan $(EL) \int_a^b f = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu$ berhingga.

Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0, \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu$ berhingga berarti terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $k \geq n_0$ berlaku $\left| \sum_{k=n_0}^{\infty} (L) \int_{I_k} f d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

f terintegral Lebesgue pada I_k untuk setiap k , berarti terdapat bilangan $\delta_k > 0$ sehingga jika $A_k \subseteq I_k$ dengan

$$\mu(A_k) < \delta_k \text{ berakibat } \left| (L) \int_{A_k} f d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{2n_0}.$$

Dipilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n_0}\}$ dan diambil sebarang $A \subseteq [a, b]$ dengan $\mu(A) < \delta$ sehingga diperoleh

$$\left| (L) \int_{A_k} f d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{2n_0}$$

Diperoleh

$$\mu(A \cap I_k) < \delta \text{ sehingga } \left| (L) \int_{A \cap I_k} f \, d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{2n_0}.$$

Jadi :

$$\begin{aligned} \left| (EL) \int_A f \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{A \cap I_k} f \, d\mu \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_0} \left| (L) \int_{A \cap I_k} f \, d\mu \right| + \left| \sum_{k=n_0+1}^{\infty} (L) \int_{A \cap I_k} f \, d\mu \right| \\ &< \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{2n_0} + \left| \sum_{k=n_0+1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f \, d\mu \right| \\ \left| (EL) \int_A f \right| &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema berikut ini menunjukkan bahwa $L[a, b]$ merupakan himpunan bagian sejati di dalam $EL[a, b]$.

Teorema 17

Jika $f \in EL[a, b]$ dan $f \in L[a, b]$, maka ada $[c, d] \subset [a, b]$ sehingga $f \in EL[c, d]$ dan $f \notin L[c, d]$.

Bukti :

Andaikan untuk setiap $[x, y] \subset [a, b]$ berlaku $f \in L[x, y]$ akan ditunjukkan bahwa $f \notin L[a, b]$

ambil sebarang $[c, d] \subset [a, b]$ Diperoleh $f \in L[c, d]$

Karena $[a, c] \subset [a, b]$, $[d, b] \subset [a, b]$ diperoleh juga $f \in L[a, c]$ dan $f \in L[d, b]$

Berarti $f \in L[a, b]$

Ini kontradiksi dengan $f \notin L[a, b]$. ■

Dengan demikian diperoleh bahwa $f \in EL[c, d]$ dan $f \notin L[c, d]$.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan dari bab-bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa

1. Integral-EL merupakan perluasan dari integral Lebesgue yang dinotasikan dengan :

$$(EL) \int_a^b f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (L) \int_{I_k} f \, d\mu.$$

2. Jika f terintegral Lebesgue maka f terintegral-EL, tetapi sebaliknya belum pasti ($f \in L[a, b] \subset f \in EL[a, b]$). Secara umum sifat-sifat dasar yang berlaku pada integral Lebesgue berlaku juga pada integral-EL.
3. Beberapa sifat-sifat dasar yang berlaku pada integral-EL, sebagai berikut :

- a). Jika f terintegral-EL pada $[a, b]$, maka nilai integral-EL fungsi f pada $[a, b]$ tunggal.
- b). Fungsi f terintegral-EL pada $[a, b]$ jika dan hanya jika f terintegral-HK pada $[a, b]$.
- c). Jika fungsi f terintegral-EL pada $[a, b]$ dan $f = g$ h.d pada $[a, b]$ maka g terintegral-EL pada $[a, b]$ dan $(EL) \int_a^b f = (EL) \int_a^b g$.
- d). Jika f terintegral-EL pada $[a, b]$ dan $f \geq 0$ h.d pada $[a, b]$ maka f terintegral lebesgue pada $[a, b]$.
- e). Jika f, g terintegral-EL pada $[a, b]$ dan $f \leq g$ h.d pada $[a, b]$ maka $(EL) \int_a^b f \leq (EL) \int_a^b g$.
- f). Jika f terintegral-EL pada $[a, b]$ dan $[u, v] \subset [a, b]$ maka f terintegral-EL pada $[u, v]$.
- g). Jika $f \in EL[a, b]$ dan $a < c < b$, maka $(EL) \int_a^b f = (EL) \int_a^c f + (EL) \int_c^b f$.

DAFTAR PUSTAKA

- De, Barra, G., (1981), *Measure Theory And Integration.*, Third Avenue., John Wiley and Sons. Inc., New York.
- Gordon, R, A., (1994), *The Integrals Of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock.*, Graduate Studies In Mathematics 4, Volume 4., American Mathematical Society., USA.
- Hutahaean, E., (1989), *Analisis Real II*, Penerbit Karunika, Universitas Terbuka, Jakarta.
- Jain, P. K. and Gupta, V. P., (1986), *Lebesgue Measure and Integration.* Wiley Eastern Limited, New Delhi.
- Royden, H, L., (1989), *Real Analysis*, Third Edition, Macmillan Publishing Company, New York.
- Rudin, W., (1976), *Principles Of Mathematical Analysis*, Third Edition, Mc Graw-Hill Book Company., Ltd, Singapore.
- Soeparna, D., (1999), *An Extension of General Lebesgue Integral*, Proceeding of the SEAMS-Gadjah Mada University Conference, Yogyakarta.
- Wheeden, R, L and Zygmund, A., (1977), *Measure and Integral; An Introduction to real Analysis.*, Marcel Dekker. Inc., New York.

**PEMODELAN STATISTICAL DOWNSCALLING
DENGAN PENDEKATAN REGRESI BAYES ROBUST PCA
(STUDI KASUS : DATA GCM STASIUN AMBON)**

FERRY KONDO LEMBANG

Staf Jurusan Matematika, FMIPA, Unpatti
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
e-mail: ferrykondolembang@yahoo.co.id

ABSTRACT

Masalah mendasar dari prediksi model curah hujan adalah keakuratan model berdasarkan proses stokhastik skala global maupun skala kecil. *Statistical Downscaling* (SD) merupakan salah satu alternatif untuk mengatasi masalah tersebut. SD adalah model yang menghubungkan skala global GCM dengan skala yang lebih kecil (lokal) dengan jalan pra-pemrosesan reduksi dimensi domain grid untuk mengatasi kasus multikolinearitas. Metode reduksi dimensi yang serikali digunakan adalah *Principal Component Analysis* (PCA). Namun PCA tidak dapat diandalkan jika ada pengamatan outlier dalam data, sehingga diperlukan reduksi dimensi yang *robust*. Reduksi dimensi *robust* menggunakan *Robust Principal Component Analysis* (ROBPCA) dengan estimator *robust* MCD. Dari hasil reduksi dimensi domain grid tersebut selanjutnya diregresikan dengan variabel respon berupa data curah hujan di stasiun Ambon dengan pendekatan regresi Bayes. Pendekatan regresi Bayes ROBUST PCA menjadi salah satu alternatif pada pemodelan SD. Hasil Penelitian menunjukkan Metode regresi Bayes ROBPCA cenderung lebih baik pada domain 8x8 dilihat pada kriteria kebaikan model RMSE terkecil yaitu 231,4 dan R-Square terbesar 38,1% dibandingkan domain 3x3 dan domain 12x12

Keywords: *Statistical Downscaling, GCM, ROBPCA, Regresi Bayes*

PENDAHULUAN

Analisis regresi merupakan analisis statistika yang bertujuan untuk memodelkan hubungan antara variabel bebas (X) dan variabel tidak bebas (Y). Metode *Ordinary Least Square* (OLS) merupakan salah satu metode estimasi parameter yang paling terkenal dalam model regresi karena relatif mudah. Kemudahan tersebut sebagai akibat adanya beberapa asumsi yang cukup ketat antara lain asumsi *error* identik independen dan berdistribusi normal yang harus dipenuhi sehingga akan diperoleh satu model taksiran untuk semua model data serta tidak terjadi kolinearitas ganda antara variabel bebas. Banyak metode estimasi parameter yang digunakan untuk mengatasi adanya multikolinearitas, antara lain: regresi komponen utama, regresi kuadrat

terkecil parsial (PLS), regresi *ridge*, serta pendekatan regresi Bayes (Box and Tiao, 1973).

Salah satu penerapan yang dianggap sebagai penerapan pendekatan regresi Bayes dalam analisis regresi adalah Regresi *ridge*. Jika pada metode *Ordinary Least squares* (OLS) parameter regresi (β) diasumsikan konstan, tetapi pada pendekatan Bayes parameter model diasumsikan memiliki sebaran tertentu. Informasi ini disebut informasi prior. *Update* informasi prior pada parameter θ menggunakan informasi sampel yang terdapat dalam data (melalui fungsi *likelihood*), sehingga diperoleh informasi posterior yang akan digunakan untuk pengambilan keputusan (Gelman, dkk., 1995 dalam Prastyo, 2008). Prior pada regresi *ridge* adalah $\beta \sim N(\theta, \sigma_{\beta}^2 I)$ yang berarti parameter regresi independen satu sama lain.

Pada beberapa kasus, korelasi diantara variabel independen terjadi dengan pola yang khusus (tertentu),

misalnya pada model curah hujan dengan data luaran GCM. Namun informasi GCM sifatnya global dan tidak berlaku untuk informasi skala kecil, sehingga untuk menjembatani Skala GCM ke Skala Kecil dipakai Teknik *Downscaling* (Wigena, 2006) yang merupakan teknik pereduksian dimensi. Metode reduksi dimensi dalam pra-pemrosesan yang digunakan antara lain : *Principal Component Analysis* (PCA) , Transformasi *Wavelet Diskrit* (TWD) (Anggraeni, 2009), Kernel PCA (Manorang, 2009), dan ROBUST PCA (Khotimah, 2009). Hasil reduksi dimensi dalam pra-pemrosesan menggunakan ROBUST PCA untuk mendapatkan validasi model curah hujan bisa diselesaikan dengan pendekatan regresi bayes sehingga dikenal dengan istilah regresi *Bayes ROBUST PCA*. Dalam perspektif statistika permasalahan ini merupakan pemodelan hubungan antara variabel iklim stasiun skala besar dengan komponen utama hasil reduksi pra-pemrosesan ROBUST PCA. Komponen utama hasil reduksi dimensi ROBUST PCA dibagi atas 2 komponen yaitu, data *in-sample* untuk mendapatkan model dan data *out-sample* untuk mendapatkan validasi model. Kriteria kebaikan model untuk perbandingan kinerja hasil reduksi dimensi PCA dengan model regresi *Bayes ROBUST PCA* adalah RMSEP dan $R^2_{predict}$. Nilai RMSEP merupakan nilai dari *error* hasil taksiran sehingga model terbaik adalah model dengan RMSEP minimum yang menandakan nilai taksiran mendekati nilai sebenarnya sedangkan semakin besar nilai $R^2_{predict}$, maka semakin baik pula model yang didapatkan karena mampu menjelaskan lebih banyak data (Draper dan Smith, 1996).

TINJAUAN PUSTAKA

Principal Component Analysis (PCA)

PCA adalah suatu prosedur untuk mereduksi dimensi data dengan cara mentransformasi variabel-variabel asli yang berkorelasi menjadi satu set variabel baru yang independen yang merupakan kombinasi linier dari variabel asal sedemikian hingga varians menjadi maksimum (Johnson, 2002).

Misalkan vektor random $X' = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ yang terdiri dari sejumlah observasi sebanyak p variabel dan mempunyai matriks varian-kovarian Σ . Σ mempunyai pasangan *eigenvalue-eigenvektor*

$(\lambda_1 e_1), (\lambda_2 e_2), \dots, (\lambda_p e_p)$, dimana $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$.

Maka kombinasi linier PC dapat ditulis sebagai berikut :

$$Z_1 = e_1 X = e_{11} X_1 + e_{21} X_2 + \dots + e_{p1} X_p$$

$$Z_2 = e_2 X = e_{12} X_1 + e_{22} X_2 + \dots + e_{p2} X_p$$

⋮

$$Z_p = e_p X = e_{1p} X_1 + e_{2p} X_2 + \dots + e_{pp} X_p$$

Model PC ke- i dapat juga ditulis dengan notasi $Z_i = e_i X$ dimana : $i = 1, 2, \dots, p$ dan oleh karenanya :

$$\text{Var}(Z_i) = e_i' \Sigma e_i \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$\text{Cov}(Z_i, Z_k) = e_i' \Sigma e_k \quad i \neq k$$

PC tidak berkorelasi dan mempunyai varians yang sama dengan eigenvalue dari Σ , sehingga:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \dots + \sigma_{pp} = \sum_{i=1}^p \text{Var}(X_i) = \text{tr}(\Sigma) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p,$$

maka:

$$\text{Proporsi varians ke-}i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p}$$

Apabila PC yang diambil sebanyak k dimana ($k < p$), maka:

$$\text{Proporsi variansi } k \text{ PC} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p}$$

Menurut Johnson (2002) dan Jolliffe (1986) ada beberapa acuan dalam menentukan banyaknya PC, yaitu: melihat scree plot, melihat *eigenvalue* yang lebih besar dari satu, dan total variansi yang dapat dijelaskan adalah 80 sampai 90 persen.

Pendeteksian *Outlier*

Outlier merupakan suatu pengamatan yang menyimpang cukup jauh dari pengamatan lainnya sehingga menimbulkan kecurigaan bahwa pengamatan tersebut berasal dari distribusi data yang berbeda (Hawkins dalam Sujatmiko, 2005:4). Pada data univariate, pengamatan *outlier* dapat dengan mudah terlihat dengan menggunakan beberapa plot sederhana, seperti scatter plot, stem and leaf, boxplot, dan sebagainya, sedangkan pada data multivariate identifikasi *outlier* umumnya didasarkan pada *Mahalanobis Distance* (MD),

$$d_{MD} = \sqrt{(x_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (x_i - \mu)} \quad (5)$$

dengan μ merupakan vektor rata-rata data dan Σ merupakan matriks varian-kovarian. Suatu pengamatan diidentifikasi sebagai *outlier* jika suatu pengamatan mempunyai nilai d_{MD} lebih besar dari $\sqrt{\chi^2_{p,(1-\alpha)}}$. Namun

identifikasi *outlier* pada data multivariate dengan jarak mahalanobis tidak maksimal karena adanya efek *masking* (adanya pengamatan *outlier* lain yang berdekatan) dan *swamping* (adanya pengamatan yang bukan *outlier* yang teridentifikasi sebagai *outlier*) (Rousseeuw dan Van Zomeren, 1990). Oleh karena itu, digunakan *Robust Distance* (RD) dengan estimator MCD (Rocke dan Woodruff, 1996), sehingga RD dapat dituliskan,

$$d_{RD} = \sqrt{(x_i - \mathbf{T}(\mathbf{X})_{MCD})^T \mathbf{C}(\mathbf{X})_{MCD}^{-1} (x_i - \mathbf{T}(\mathbf{X})_{MCD})} \quad (6)$$

sama halnya dengan MD, sebuah pengamatan x_i diidentifikasi sebagai *outlier* jika mempunyai nilai d_{RD} lebih besar dari $\sqrt{\chi^2_{p,(1-\alpha)}}$.

Estimator MCD

Metode MCD merupakan upaya untuk menemukan h observasi ($h \leq n$) yang memiliki determinan matriks varian-kovarian terkecil dengan $[(n+p+1)/2] \leq h \leq n$.

$$\text{MCD} \approx \min \left\{ \det(\mathbf{C}(\mathbf{X})_j) \right\}, j = 1, 2, \dots, \binom{n}{h}$$

di mana $C(\mathbf{X})$ adalah matriks varian-kovarian berdasarkan pengamatan x_i dengan $i \in J$. Estimator MCD diberikan

$$\text{oleh: } \mathbf{T}(\mathbf{X}) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h x_i \text{ dan}$$

$$C(\mathbf{X}) = \frac{1}{h-1} \sum_{i=1}^h (x_i - \mathbf{T}(\mathbf{X}))(x_i - \mathbf{T}(\mathbf{X}))^t$$

MCD mencari subsampel h , sebanyak ${}^n C_h$, sehingga untuk n besar dibutuhkan komputasi yang panjang untuk menemukan estimator MCD. Oleh karena itu, untuk meminimalisasi waktu komputasi digunakan algoritma FAST-MCD oleh Rousseeuw dan Van Driessen (1999). Inti dari algoritma FAST-MCD adalah *C-Step*.

Teorema C-Steps.

Diketahui $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}^t$ merupakan himpunan data sejumlah n observasi yang terdiri dari p variabel. Misal $H_1 \subset \{1, \dots, n\}$ dimana $|H_1| = h$. Tetapkan

$$\mathbf{T}_1 := \left(\frac{1}{h}\right) \sum_{i \in H_1} \mathbf{x}_i \text{ dan } \mathbf{C}_1 := \left(\frac{1}{h}\right) \sum_{i \in H_1} (\mathbf{x}_i - \mathbf{T}_1)(\mathbf{x}_i - \mathbf{T}_1)^t. \text{ Jika}$$

$\det(\mathbf{C}_1) \neq 0$ definisikan jarak relatif :

$$d_{1(i)} = \sqrt{(\mathbf{x}_i - \mathbf{T}_1)^t \mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{x}_i - \mathbf{T}_1)}, \quad i = 1, \dots, n$$

Selanjutnya ambil himpunan H_2 sedemikian sehingga,

$$\{d_1(i); i \in H_2\} := \{(d_1)_{1n}, \dots, (d_1)_{hn}\}$$

di mana $(d_1)_{1n} \leq (d_1)_{2n} \leq \dots \leq (d_1)_{nn}$ merupakan urutan jarak,

kemudian \mathbf{T}_2 dan \mathbf{C}_2 dihitung berdasarkan himpunan H_2 .

Sehingga $\det(\mathbf{C}_2) \leq \det(\mathbf{C}_1)$, akan sama jika dan hanya jika $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ dan $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2$. Tetapkan

$\mathbf{T}(\mathbf{X})$ dan $C(\mathbf{X})$ sebagai estimator dari subsampel yang memberikan determinan matriks varian-kovarian minimum. Berdasarkan subsampel yang memberikan determinan matriks varian-kovarian minimum diberikan pembobotan pada data,

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{jika } (x_i - \mathbf{T}(\mathbf{X}))^t C(\mathbf{X})^{-1} (x_i - \mathbf{T}(\mathbf{X})) \leq \chi_{p,0.975}^2 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Selanjutnya estimator MCD adalah:

$$\mathbf{T}(\mathbf{X})_{MCD} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \text{ dan}$$

$$C(\mathbf{X})_{MCD} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \mathbf{T}(\mathbf{X})_{MCD})(x_i - \mathbf{T}(\mathbf{X})_{MCD})^t}{\sum_{i=1}^n w_i - 1}$$

Regresi Linier

Analisis regresi adalah analisis statistika yang bertujuan untuk memodelkan hubungan antara variabel prediktan (respon) dengan variabel penjelas (Walpole, 1995).

Secara umum model yang menggambarkan hubungan antara variabel penjelas (X) dengan variabel respon (Y) adalah:

$$Y = f(X) + \varepsilon \quad (12)$$

dalam bentuk matriks model regresi dinyatakan dengan (Draper dan Smith, 1992) :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \dots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & \dots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & \dots & X_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Kriteria yang seringkali digunakan untuk kebaikan model regresi adalah RMSE dan R^2 . Nilai RMSE menunjukkan keakuratan suatu model, sehingga model yang baik adalah model dengan nilai RMSE kecil. Nilai RMSE dari model dapat diperoleh dari persamaan:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - p - 1}}$$

sedangkan R^2 menunjukkan proporsi keragaman total nilai-nilai variabel respon yang dapat diterangkan oleh variabel-variabel prediktor dalam model yang digunakan. Secara umum, semakin besar nilai R^2 suatu model, maka model tersebut semakin baik. Nilai R^2 dapat dihitung dari,

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{Error}}{SS_{Total}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

Regresi Bayes

Model bayesian dikembangkan dari teorema bayes. Teorema bayes digunakan sebagai dasar dari metode penaksiran parameter suatu distribusi atau suatu model. Dalam teorema bayes, besaran parameter θ disajikan sebagai berikut :

$$p(\theta | \mathbf{x}) = \frac{L(\mathbf{x} | \theta) p(\theta)}{p(\mathbf{x})}$$

dengan $p(\theta)$ adalah distribusi prior, $L(\mathbf{x} | \theta)$ adalah likelihood dari sampel, dan $p(\theta | \mathbf{x})$ adalah distribusi posterior dari θ . Pembaharuan informasi prior pada parameter θ menggunakan informasi sampel yang terdapat dalam data (melalui fungsi likelihood), sehingga diperoleh informasi posterior yang akan digunakan untuk pengambilan keputusan.

Pendekatan Bayes dalam regresi dilakukan dengan membentuk sebaran posterior dari parameter (Lindley and Smith, 1972; Berger, 1985 dalam Setiawan, 2003). Posterior ini merupakan hasil kali antara prior dengan fungsi kemungkinan.

Model umum regresi normal ganda dengan k buah peubah bebas (termasuk intersep) adalah :

$$\underline{y} = X \underline{\beta} + \varepsilon$$

diasumsikan $\underline{\beta} \sim N(\underline{\theta}, V)$ dimana V adalah matriks ragam-peragam $\underline{\beta}$ sehingga simetris, sedangkan

$\underline{y} \sim N(X \underline{\beta}, I \sigma^2)$. Dengan demikian fungsi priornya adalah :

$$p(\underline{\beta}) \propto (2\pi)^{-k/2} |V|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} (\underline{\beta} - \underline{\theta})^t V^{-1} (\underline{\beta} - \underline{\theta})\right\}$$

Fungsi kemungkinan dari model regresi normal ganda adalah :

$$l(y|\beta) \propto \frac{1}{\sigma^n} (2\pi)^{-n/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\underline{y} - X\underline{\beta})^T (\underline{y} - X\underline{\beta}) \right]$$

GCM

GCM adalah suatu model berbasis komputer yang terdiri dari berbagai persamaan numerik dan deterministik yang terpadu dan mengikuti kaidah-kaidah fisika. Model ini menduga perubahan unsur-unsur cuaca dalam bentuk luaran grid-grid yang berukuran 100-500 km menurut lintang dan bujur (von Storch *et al.* 1993 dalam Sutikno, 2008). GCM merupakan suatu alat penting dalam studi keragaman iklim dan perubahan iklim (Zorita dan Storch, 1999). Namun informasi GCM masih berskala global, sehingga sulit untuk memperoleh langsung informasi berskala lokal dari GCM. Tetapi GCM masih mungkin digunakan untuk memperoleh informasi skala lokal atau regional bila teknik *downscaling* digunakan (Fernandez, 2005 dalam Wigena, 2006).

Downscaling didefinisikan sebagai upaya menghubungkan antara sirkulasi variabel skala global (variabel penjelas) dan variabel skala lokal (variabel respon) (Sutikno, 2008). Untuk menjembatani skala GCM yang besar dengan skala yang lebih kecil (kawasan yang menjadi studi) digunakan teknik *Statistical Downscaling* (SD). SD adalah suatu proses *downscaling* yang bersifat statik dimana data pada grid-grid berskala besar dalam periode dan jangka waktu tertentu digunakan sebagai dasar untuk menentukan data pada grid berskala lebih kecil (Wigena, 2006).

Pendekatan SD menggunakan data regional atau global untuk memperoleh hubungan fungsional antara skala lokal dengan skala global GCM. Secara umum bentuk hubungan tersebut dinyatakan dengan:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{Z}) + \boldsymbol{\varepsilon}$$

dimana:

- Y** : variabel respon (curah hujan)
Z : variabel penjelas (gabungan dari hasil reduksi spasial (lintang-bujur) variabel GCM)
ε : sisaan

METODOLOGI PENELITIAN

Data yang digunakan adalah data sekunder yang diperoleh dari data luaran GCM model CSIRO-Mk3 dari Australia, dengan domain GCM yang digunakan adalah domain 3x3 (9 grid), domain 8x8 (64 grid), dan domain 12x12 (144 grid). Lokasi grid yang diambil adalah ditengah-tengah Kabupaten Kota Ambon. Periode data yaitu tahun 1967-2000. Variabel yang digunakan pada penelitian ini adalah variabel luaran CSIRO Mk3 sebagai variabel prediktor yang meliputi: *precipitable water* (PRW), tekanan

permukaan laut (SLP), komponen angin meridional (VA), komponen zonal (UA), ketinggian geopotensial (ZG), dan kelembaban spesifik (HUS). Ketinggian (level) yang digunakan dalam penelitian adalah 850 hPa, 500 hPa, dan 200 hPa. Sedangkan variabel respon⁽⁶⁾ yaitu data curah hujan bulanan Stasiun Kota Ambon. Adapun tahapan-tahapan analisis data dalam penelitian ini, yaitu :

1. Melakukan standarisasi data.
2. Mencari komponen utama menggunakan *principal component analysis* (PCA) dengan langkah seperti berikut:

- a. Membuat matriks varian-kovariansi Σ .
- b. Menurunkan nilai akar karakteristik (*eigen value*) λ dengan persamaan $|\Sigma - \lambda I| = 0$ dan *eigen vektor* dengan persamaan $\Sigma \mathbf{X} = \lambda_i \mathbf{X}$.
- c. Menentukan jumlah komponen utama yang dibangkitkan (dengan melihat keragaman kumulatif yang lebih besar sama dengan 85%).
- d. Mendapatkan variabel baru yaitu z_{CPCA} .

Mencari komponen utama menggunakan *robust principal component analysis* (ROBPCA), dengan langkah seperti berikut:

- a. Menentukan elemen subsampel dari X, yaitu X_{h_1} yang diperoleh dari observasi terpilih.
- b. Menentukan $\mathbf{T}(\mathbf{X})_1$ dan $\mathbf{C}(\mathbf{X})_1$, $\det \mathbf{C}(\mathbf{X})_1$ dan $\text{inv} \mathbf{C}(\mathbf{X})_1$.
- c. Menentukan RD₁.
- d. Mengurutkan nilai RD.
- e. Observasi yang mempunyai nilai RD terkecil ke-1 sampai dengan terkecil ke-h digunakan sebagai X_{h_2} .
- f. Mengulang langkah b-d sampai diperoleh subsampel yang konvergen, yaitu $\det \mathbf{C}(\mathbf{X})_2 \leq \det \mathbf{C}(\mathbf{X})_1$. Tetapkan $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ dan $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ sebagai estimator subsampel yang mempunyai determinan matriks varian-kovarian minimum.
- g. Berdasarkan subsampel yang memberikan determinan matriks varian-kovarian minimum, diberikan pembobotan w_i terhadap data:
- h. Mendapatkan estimator MCD: $\mathbf{T}(\mathbf{X})_{MCD}$ dan $\mathbf{C}(\mathbf{X})_{MCD}$.
- i. Menentukan nilai akar karakteristik (*eigen value*) λ dengan menghitung $|\mathbf{C}(\mathbf{X})_{MCD} - \lambda I| = 0$ dan *eigen vektor* dengan persamaan $\mathbf{C}(\mathbf{X})_{MCD} \mathbf{X} = \lambda_i \mathbf{X}$.
- e. Menentukan jumlah komponen utama yang dibangkitkan (dengan dengan melihat keragaman kumulatif yang lebih besar sama dengan 85%).
- f. Mendapatkan variabel baru yaitu z_{ROBPCA} .

3. Melakukan regresi linear berganda dengan variabel penjelas adalah komponen utama yang dihasilkan dari masing-masing metode, dengan model regresinya $Y = f(Z) + \epsilon$.
4. Menganalisis kinerja hasil reduksi dimensi dan pemodelan SD dengan metode ROBUST PCA.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pra-pemrosesan Pemodelan SD

Langkah awal dalam pemodelan SD adalah reduksi dimensi, yang seringkali disebut sebagai pra-pemrosesan data. Pereduksian dilakukan pada dimensi spasialnya yaitu lintang dan bujur atau disebut grid dan pada semua variabel di setiap level serta pada setiap domain. Dalam hal ini setiap grid adalah variabel prediktor, sehingga pada domain 3x3, 8x8, dan 12x12 secara berurutan ada 9, 64, dan 144 variabel yang akan direduksi.

Metode Reduksi Dimensi Robust PCA

Berdasarkan Kriteria beberapa komponen utama pertamanya telah menerangkan keragaman data lebih besar sama dengan 85% maka tabel 1 dibawah ini menerangkan PC optimal dari metode reduksi dimensi Robust PCA.

Tabel 1. Jumlah PC Optimal dan Keragaman Kumulatif PC Variabel Luaran GCM dengan Menggunakan Metode ROBPCA

No.	Variabel	Domain 3x3		Domain 8x8		Domain 12x12	
		Jml PC	Ker. Kum. (%)	Jml PC	Ker. Kum. (%)	Jml PC	Ker. Kum. (%)
1	HUSS	1	0.930	2	0.878	3	0.867
2	HUS200	1	0.986	1	0.853	2	0.902
3	HUS500	1	0.933	2	0.938	3	0.858
4	HUS850	1	0.920	2	0.887	3	0.867
5	PRW	1	0.937	2	0.889	2	0.899
6	SLP	1	0.920	1	0.876	1	0.961
7	UA200	1	0.955	1	0.912	2	0.973
8	UA500	1	0.923	2	0.865	3	0.900
9	UA850	1	0.934	2	0.856	2	0.855
10	VAS	1	0.917	2	0.897	3	0.852
11	VA200	1	0.924	1	0.943	2	0.889
12	VA500	1	0.856	3	0.857	5	0.860
13	VA850	1	0.923	3	0.898	4	0.853
14	ZG200	1	0.987	1	0.947	1	0.888
15	ZG500	1	0.995	1	0.966	1	0.896
16	ZG850	1	0.991	1	0.937	1	0.901

Berdasarkan Tabel 1 diketahui hasil reduksi dimensi variabel luaran GCM dengan menggunakan metode ROBPCA. Pada domain 3x3, jumlah komponen utama optimal yang terbentuk dengan keragaman yang dapat diterangkan lebih besar sama dengan 85% adalah satu komponen utama. Pada domain 8x8, komponen utama optimal yang digunakan antara satu sampai dengan tiga komponen utama. Pada domain 12x12, komponen utama optimal yang digunakan tidak lebih dari empat komponen utama, kecuali variabel HUSS dan VA500 yang menggunakan lima komponen utama.

Secara umum, variabel pada level permukaan mempunyai komponen utama yang semakin banyak sebanding dengan semakin luasnya domain, kecuali variabel SLP. Namun, hal tersebut juga tidak berlaku untuk variabel ZG200, ZG500, dan ZG850, karena cukup dengan satu komponen utama, variabel tersebut sudah mampu menjelaskan lebih dari 85% pada setiap domain. Berbeda dengan variabel HUSS, VAS, VA200, VA500, dan VA850 yang memerlukan cukup banyak komponen utama agar mampu menjelaskan lebih dari 85% total keragaman data.

Pemodelan SD

Tahap berikutnya adalah pemodelan SD. Pemodelan SD menggunakan regresi linier berganda, dengan variabel prediktor adalah gabungan dari variabel hasil reduksi dimensi variabel-variabel GCM pada masing-masing domain berdasarkan metode ROBUST PCA dan variabel respon yaitu data curah hujan bulanan stasiun Ambon.

Pemodelan SD dengan metode regresi Bayes ROBPCA menggunakan variabel prediktor yang merupakan gabungan dari variabel hasil reduksi dimensi variabel-variabel GCM dengan metode ROBPCA yang dilakukan pada setiap domain. Pada domain 3x3 menggunakan 16 variabel prediktor, pada domain 8x8 menggunakan 27 variabel prediktor, dan pada domain 12x12 menggunakan 38 variabel prediktor (lihat Tabel 1). Nilai RMSE dan R^2 hasil pemodelan SD dengan menggunakan metode regresi bayes ROBPCA pada masing-masing stasiun dan domain teringkas dalam Tabel 2 berikut:

Tabel 2. RMSE dan R^2 Pemodelan SD dengan Metode Regresi BAYES ROBPCA

Stasiun Curah Hujan	GRID 3x3		GRID 8x8		GRID 12x12	
	RMSE	R^2	RMSE	R^2	RMSE	R^2
Ambon	245,9	28,2%	231,4	38,1%	244,43	36,4%

Berdasarkan Tabel 2 diketahui bahwa kinerja pemodelan SD antardomain tidak ada perbedaan yang signifikan untuk stasiun Ambon. Semakin luas domain semakin besar nilai R^2 dan semakin kecil nilai RMSE-nya. Nilai RMSE pada domain 8x8 ternyata lebih kecil dari nilai RMSE pada domain 3x3 dan 12x12. Hal ini berarti semakin luas domain tidak menjamin meningkatkan keakuratan suatu model dan sebaliknya. Hanya saja, untuk ukuran R-square terbesar 38,1 % ini belum dapat digolongkan model ini layak digunakan sebab kriteria layaknya model adalah $\geq 80\%$.

KESIMPULAN

Berdasarkan tujuan penelitian serta memperhatikan analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Total variabel prediktor yang dihasilkan metode ROBPCA menurut domain secara berurutan adalah 16, 27, dan 38 variabel.
2. Pemodelan SD dilakukan dengan menggunakan regresi Bayes, dengan variabel prediktor adalah gabungan dari variabel hasil reduksi dimensi variabel GCM pada masing-masing domain berdasarkan metode ROBPCA dan variabel respon yaitu data curah hujan bulanan kota Ambon. Tidak terdapat konsistensi luasan domain terhadap besar kecilnya nilai RMSE dan R^2 . Untuk kasus ini, model pada domain 8x8 menjadi yang paling baik sebab menghasilkan nilai RMSE terkecil dan R-Square terbesar.

DAFTAR PUSTAKA

- Draper, N.R. dan Smith, H. (1992). *Analisis Regresi Terapan, Edisi kedua*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama.
- Johnson, R.A and Wichern, D.W. (2002). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. 5th Ed. New Jersey: Prentice Hall.
- Jolliffe, I.T. (1986). *Principal Component Analysis, Second Ed.* New York: Springer-Verlag.
- Rousseeuw, P.J. and Van Zomeren, B.C. (1990). "Unmasking Multivariate *Outliers* and Leverage Points," *Journal of the American Statistical Association*, 85, 633–651.
- Rousseeuw, P.J., and Van Driessen, K. (1999). "A Fast Algorithm for the Minimum Covariance Determinant Estimator", *Technometrics*, Vol. 41, No. 3, 212-223.
- Sujatmiko, Irwan. (2005). "*Analisis Komponen Utama dengan Menggunakan Matriks Varians-Kovarians yang Robust*" Tesis. Jurusan Statistik-ITS. Surabaya.
- Sutikno. (2008). "*Statistical Downscaling Luaran GCM dan Pemanfaatannya untuk Peramalan Produksi Padi*" Disertasi. Bogor: Program Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor.
- Walpole, R. E. (1995). "*Pengantar Statistika, Edisi ketiga*". Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama.
- Wigena, A.H. (2006). "*Pemodelan Statistical Downscaling dengan Regresi Projection Pursuit untuk Peramalan Curah Hujan Bulanan*" Disertasi. Bogor: Program Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor.
- Zorita, E. and von Storch, H., (1999): "The analog method as a simple statistical downscaling technique: comparison with more complicated method", *Journal of Climate*, 12, 2474-2489.

Barekeng terbit dua kali dalam setahun yaitu Bulan Maret dan Desember. *Barekeng* menerima naskah dalam bentuk hasil penelitian, catatan penelitian (*note*) atau artikel ulas balik (*review/ minireview*) dan ulasan (*feature*) baik dalam bahasa Indonesia maupun dalam bahasa Inggris yang berkaitan dengan bidang Matematika dan Terapannya. Naskah yang dikirimkan merupakan naskah asli yang belum pernah diterbitkan di media manapun.

PENGIRIMAN NASKAH

Naskah dikirimkan kepada:

Redaksi *Barekeng*

Jurusan Matematika

Fakultas MIPA

Universitas Pattimura

Jl. Ir. M. Putuhena, Poka-Ambon

Email: jurnalbarekeng@gmail.com

Naskah yang dikirimkan harus dalam bentuk naskah cetak (*hard copy*) dan naskah lunak (*soft copy*), disertai dengan alamat korespondensi lengkap dan alamat *email* yang dapat dihubungi.

Naskah cetak (*hard copy*):

Naskah cetak dikirim sebanyak satu eksemplar dengan format pengetikan menggunakan *Microsoft Word* seperti berikut:

- Naskah diketik 1 spasi pada kertas HVS Ukuran A4 dengan batas tepi 2 cm dan berbentuk 2 kolom dengan jarak antar kolom 0.5 cm. Tipe huruf *Times New Roman* berukuran 10 point.
- Jumlah halaman maksimum 12 halaman termasuk Lampiran (Gambar dan Tabel). Setiap halaman diberi nomor secara berurutan pada tepi kanan atas. Untuk keterangan Lampiran: Tipe huruf *Times New Roman* berukuran 9 point.
- Persamaan matematika (*equations*) dapat diketik dengan menggunakan *MS Equations* atau *MathType* dengan tipe huruf *Cambria* atau *Times New Roman* berukuran 10 point.

Naskah lunak (*soft copy*):

Naskah lunak harus dalam format *Microsoft Word* dan dikirimkan dalam bentuk disk (CD, DVD), *flashdisk*, atau *attachment email*.

SUSUNAN NASKAH

- a. Judul dalam Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris untuk artikel berbahasa Indonesia dan Judul dalam Bahasa Inggris untuk artikel berbahasa Inggris.
- b. Nama Lengkap Penulis (tanpa gelar).
- c. Nama Lembaga atau Institusi, disertai Alamat Lengkap dengan nomor kode pos. Untuk korespondensi dilengkapi No. Telp., fax dan *email*.
- d. Judul Ringkas (*Running Title*) (jika diperlukan).

- e. Abstrak (*Abstract*) dalam Bahasa Inggris atau Bahasa Indonesia.
- f. Kata Kunci (*Keywords*) dalam Bahasa Inggris atau Bahasa Indonesia.
- g. Pendahuluan (*Introduction*) meliputi latar belakang, masalah dan tujuan penelitian.
- h. Tinjauan Pustaka meliputi ulasan (*review*) penelitian dari beberapa literatur serta teori-teori dasar yang mendukung penelitian.
- i. Metode Penelitian (*Methods and Materials*) meliputi bahan, cara, dan analisis dalam penelitian (jika ada).
- j. Hasil dan Pembahasan (*Results and Discussion*) ditulis secara berkesinambungan dalam satu rangkaian naskah penulisan.
- k. Kesimpulan (*Conclusion*)
- l. Ucapan Terima Kasih (*Acknowledgements*) (Jika diperlukan)
- m. Daftar Pustaka ditulis memakai sistem nama dan disusun menurut abjad. Di bawah ini beberapa contoh penulisan sumber acuan:

Jurnal :

Efron, B. 1983. *Estimating the Error Rate of Prediction Rule: Improvement on Cross-Validation*. J. Amer. Statist. Assoc., 78:316-331.

Buku :

Dennis, G. Z., 1986, *Differential Equations with Boundary Value Problems*. Ed ke-2. Boston: Massachusetts. PWS Publishers.

Skripsi/Tesis/Disertasi :

Mochamad Apri., *Model Biaya Total Jaringan Pipa Transmisi Gas dan Optimasinya*, Departemen Matematika ITB Bandung, Tugas Akhir, 2002.

Informasi dari Internet :

Mallat, Stephane, 1999, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Second Edition, Academic Press 24-28 Oval Road, London NW1 7DX UK, <http://www.hbuk.co.uk/ap/>

- n. Lampiran meliputi Gambar dan Tabel beserta keterangannya (jika diperlukan).

CATATAN (NOTE)

- Naskah harus dikirimkan ke redaksi selambat-lambatnya 2 (dua) bulan sebelum bulan penerbitan jurnal (Maret dan Desember).
- Naskah akan dinilai oleh tim penilai yang relevan sebelum diterbitkan dan tim redaksi berhak merubah struktur naskah tanpa merubah isi naskah.
- Naskah dapat diterima atau ditolak. Naskah ditolak, jika tidak memenuhi kriteria penulisan, pelanggaran hak cipta, kualitas rendah, dan tidak menanggapi korespondensi redaksi. Pengumuman naskah ditolak atau diterima paling lambat 1 (satu) bulan setelah naskah terkirim.
- Penulis atau penulis pertama yang akan mendapat 1 (satu) eksemplar jurnal yang sudah diterbitkan.

Barekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan



© Jurusan Matematika FMIPA Unpatti 2012