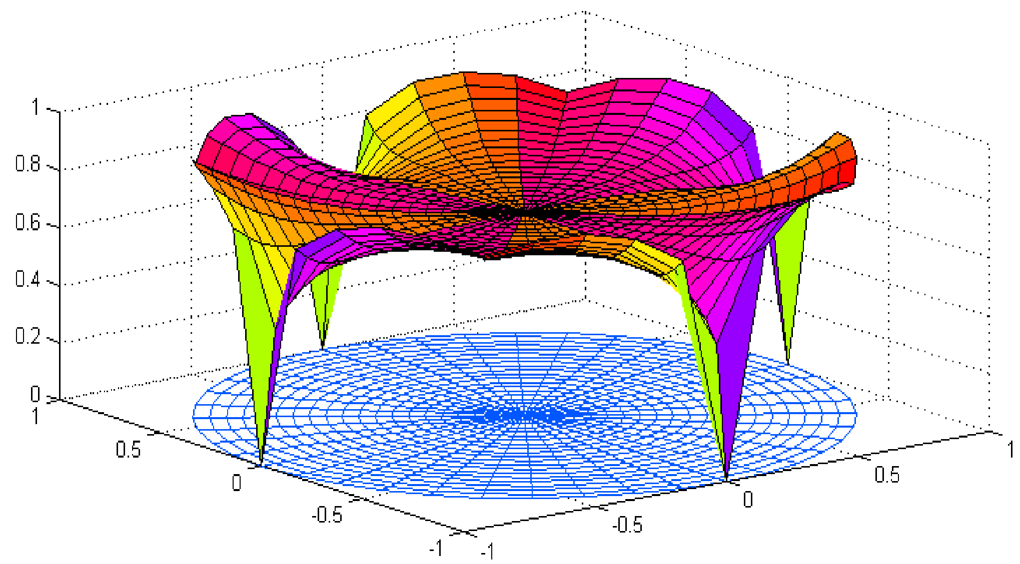
Volume 7 Nomor 1 Maret 2013

Barekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan

ISSN 1978-7227



JURUSAN MATEMATIKA FMIPA UNIVERSITAS PATTIMURA

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan
ISSN 1978-7227
Volume 7 Nomor 1 | Maret 2013

PENERBIT (PUBLISHER)
Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Pattimura Ambon

ALAMAT EDITOR (EDITORIAL ADDRESS)
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pattimura
Alamat:
Kampus FMIPA UNPATTI
Jl. Ir. M. Putuhena, Poka 97233
Ambon - Maluku

VOLUME 7 NOMOR 1 | MARET 2013

ISSN 1978-7227

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

PENELITIAN

ISSN 1978-7227

Barekeng

merupakan Jurnal Ilmu Matematika dan Terapannya sebagai suatu wahana informasi ilmiah yang menyajikan artikel (naskah) hasil penelitian meliputi bidang-bidang sebagai berikut: matematika analisis, aljabar, matematika terapan, statistika, pendidikan matematika dan ilmu komputer. Jurnal ini diterbitkan dua kali dalam setahun yaitu pada bulan Maret dan bulan Desember. Artikel atau naskah-naskah di dalam jurnal ini merupakan hasil-hasil penelitian pribadi ataupun kelompok yang belum pernah diterbitkan di jurnal-jurnal atau majalah ilmiah lainnya.

Diterbitkan oleh:
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pattimura
Ambon
2013

Jurnal Barekeng
Vol. 7 No. 1 Hal. 1 – 4 (2013)

jurnal ilmu matematika dan terapan

RING PRIMA DAN RING SEMIPRIMA

Prime Rings and Semi-Prime Rings

ELVINUS RICHARD PERSULESSY[1], **ABDUL HALIM MAHMUD**[2]
[1]*Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI*
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Maluku
[2]*Pegawai BPS Kabupaten Buru Provinsi Maluku*
Jl. Sultan Babullah No. 1, Namlea – Kabupaten Buru, Maluku
e-mail: richardelvinus@yahoo.com

ABSTRAK

Penelitian ini membahas ring prima dan ring semiprima . Jika pada ring $\boldsymbol{R}$, ditambahkan satu aksioma lagi yaitu perkalian tiga elemen dalam ring $\boldsymbol{R}$ dengan karakteristik tertentu yang menghasilkan nol, maka diperoleh struktur baru yang dikenal dengan nama ring prima dan ring semiprima. Setiap daerah integral adalah ring prima. Ring prima adalah ring semiprima tapi sebaliknya belum tentu berlaku.

Kata kunci : *Daerah Integral, Ring Prima, Ring Semiprima*.

PENDAHULUAN

Teori grup dan teori ring merupakan teori-teori yang sudah sangat dikenal dalam struktur aljabar. Pengembangan kedua teori inipun terus dilakukan. Hal ini dapat dilihat dari munculnya struktur-struktur baru yang dikembangkan dari kedua teori ini.

Jika pada ring R, ditambahkan satu aksioma lagi yaitu perkalian tiga elemen dalam ring R yang hasilnya nol, tidak perlu elemen di tengah adalah nol, tetapi dua elemen yang lain salah satunya tentu nol, maka diperoleh struktur baru yang dikenal dengan nama ring prima.Selain ring prima, ternyata jika elemen kanan dan kiri adalah sama, tidak perlu elemen di tengah adalah nol, tetapi elemen yang lain tentu nol, maka struktur baru ini disebut ring semiprima.

Walaupun hanya ditambahkan satu aksioma, namun hal ini membuat perbedaan yang sangat mendasar antara ring, ring prima dan ring semiprima. Selain itu, banyak sifat-sifat yang muncul dalam ring prima dan ring semiprima yang diperoleh dengan cara membandingkan sifat-sifat yang ada dalam ring. Hal-hal tersebut yang melatarbelakangi penelitian ini.

TINJAUAN PUSTAKA

Istilah ring pertama kali diperkenalkan oleh David Hilbert (1862-1943), tetapi sebatas pendekatan definisi yang masih abstrak. Himpunan R dikatakan ring jika terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan padanya, R memenuhi sifat-sifat yaitu terhadap operasi penjumlahan, R adalah grup abelian, terhadap operasi pergandaan R memenuhi sifat tertutup dan asosiatif serta terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan R memenuhi sifat distributif kiri dan distributif kanan. (Fraleigh, 2000)

Dari ring R dapat dibentuk struktur baru yang dinamakan ring prima jika ditambahkan satu sifat yaitu perkalian tiga elemen di R yang hasilnya nol, tidak perlu elemen di tengah adalah nol, tetapi dua elemen yang lain salah satunya tentu nol. Selain itu dapat dibentuk pula struktur baru yang dinamakan ring semiprima jika pada ring R ditambahkan sifat yaitu perkalian tiga elemen di R yang hasilnya nol, jika elemen kanan dan kiri adalah sama, tidak perlu elemen di tengah adalah nol, tetapi elemen yang lain tentu nol. (Thaheem, 2005). Ring prima adalah ring semiprima, tapi sebaliknya belum tentu berlaku. (Atteya, 2010)

Definisi 1 (Ring)
Himpunan $R \neq \emptyset$ dengan dua operasi biner, penjumlahan "+" dan pergandaan "**.**" disebut mempunyai struktur suatu ring, selanjutnya R disebut Ring (Gelanggang) jika memenuhi aksioma-aksioma:

I. Terhadap penjumlahan $\langle R, + \rangle$ merupakan grup abelian, yaitu
   1. Tertutup
      $(\forall\, a, b \in R)\ (\exists!\, c \in R\ )\ a + b = c$

2. Asosiatif
   $(\forall\, a, b, c \in R)(a + b) + c = a + (b + c)$
3. Ada elemen netral
   $(\exists\, e \in R\,)(\forall\, a \in R)\; e + a = a + e$
4. Setiap elemen R mempunyai invers
   $(\forall\, a \in R)(\exists -a \in R)\; a + (-a) = (-a) + a = 0$
5. Komutatif, $(\forall\; a, b \in R)\; a + b = b + a$

II. Terhadap pergandaan $\langle R, \cdot \rangle$ memenuhi sifat

6. Tertutup
   $(\forall\, a, b \in R)\; (\exists!\, c \in R\,)\; a \cdot b = c$
7. Asosiatif
   $(\forall\; a, b, c \in R)\; (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

III. Distributif

8. Distributif kiri
   $(\forall\, a, b, c \in R)\; a \cdot (b + c) =\; a \cdot b + a \cdot c$
9. Distributif kanan
   $(\forall\, a, b, c \in R)\; (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Teorema 1

a. Elemen satuan dalam ring R adalah tunggal
b. Invers suatu elemen dalam ring R adalah tunggal
c. Misalkan R adalah ring dengan elemen satuan dan $a, b \in R$. Jika a dan b masing-masing mempunyai invers maka ab juga mempunyai invers yaitu $(ab)^{-1} =\; b^{-1}a^{-1}$.

Teorema 2

Jika R ring dan 0 elemen netral terhadap penjumlahan, maka $(\forall\, a, b, c \in R)$ berlaku

i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
ii) $a(-b) = -ab;\;\; (-a)b = -ab$
iii) $(-a)(-b) = ab$
iv) $a(b - c) = ab - ac$

Teorema 3

Jika R ring dengan elemen satuan 1 dan $a \in R$ maka

i) $(-1)\, a = -a$
ii) $(-1)\,(-1) = 1$

Definisi 2 (Senter Dari Ring)

Jika R ring, senter dari R adalah $Z(R)$, yang didefinisikan oleh

$$Z(R) = \{z \in R | zx = xz,\; \forall\, x \in R\}.$$

Definisi 3
(Ring Yang Tidak Memuat Pembagi Nol Sejati)

Ring R tidak memuat pembagi nol sejati, jika memenuhi

$$(\forall\, a, b \in R)[ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0]$$

atau

$$(\forall\, a, b \in R)\; [(a \neq 0 \wedge b \neq 0) \Rightarrow ab \neq 0]$$

Definisi 4 (Nilpoten)

Elemen a dalam ring R disebut nilpoten (*nilpotent*) jika terdapat bilangan $n \in Z^{+}$ sedemikian hingga $a^{n} = 0$.

Teorema 4

Jika R ring, $0 \in R$ adalah nilpoten dan jika a nilpoten maka a adalah pembagi nol.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Ring Prima

Definisi 5

Ring R adalah prima jika memenuhi

$$(\forall\, a, b \in R)\; [aRb = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)].$$

Selanjutnya ring prima (*prime ring*) R dinotasikan dengan R_p.

Contoh 1

Diberikan R ring komutatif yang tidak memuat pembagi nol sejati dan $a \in R$ tertentu. Jika diketahui $(\forall\, x \in R)\; ax = 0$. Akan ditunjukkan R ring prima.
Penyelesaian:
Diketahui $(\forall\, x \in R)\; ax = 0$.

Jika kedua ruas dikalikan dengan $b \in R$ dari kanan diperoleh

$$axb = 0$$

Karena R ring yang komutatif berlaku

$$abx = 0$$

Atau dapat pula ditulis

$$abx = 0 \cdot x$$

Dengan menggunakan hukum kanselasi kanan diperoleh

$$ab = 0$$

Karena R ring yang tidak memuat pembagi nol sejati diperoleh

$$a = 0 \vee b = 0$$

Jadi R ring prima.

Ring Semiprima

Definisi 6

Ring R adalah semiprima jika memenuhi

$$(\forall\, a \in R)\; [aRa = 0 \Rightarrow a = 0].$$

Selanjutnya ring semiprima (*semiprime ring*) R dinotasikan dengan R_s.

Contoh 2

Diberikan himpunan bilangan real R dan $a \in$ R . Jika diketahui $(\forall\, x \in$R$)ax = 0$. maka R ring semiprima.

***Lemma* 1**

Diberikan R_s ring semiprima dan $a \in R_s$ sedemikian hingga

$$(\forall\, x, y \in R_s)\; [xay = 0 \Rightarrow a = 0].$$

Bukti.
Diketahui $(\forall\, x, y \in R_s)\; xay = 0$
Akan ditunjukkan $a = 0$.
Jika kedua ruas pada persamaan $xay = 0$ dikalikan $ay \in R_s$ dari kiri diperoleh

$$(ay)xay = 0$$

Karena R_s adalah ring semiprima, menurut Definisi 6 diperoleh

$$ay = 0$$

Jika kedua ruas dikalikan $a \in R_s$ dari kanan diperoleh

$$aya = 0$$

Karena R_s adalah ring semiprima menurut Definisi 6 diperoleh

$$a = 0 \blacksquare$$

Ring Prima Dan Ring Semiprima
Teorema 5
Setiap daerah integral D adalah ring prima.

Bukti.
Diketahui D adalah daerah integral. Jadi D adalah ring yang memenuhi
i) D mempunyai elemen satuan
ii) D komutatif
iii) D tidak memuat pembagi nol sejati.
Akan ditunjukkan D adalah ring prima atau $(\forall\, a, b, x \in R)[axb = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)]$

Diketahui $(\forall\, a, b, x \in R)\ axb = 0$

Menurut (ii) $(\forall\, a, b, x \in R)\ abx = 0$

atau dapat ditulis $(\forall\, a, b, x \in R)\ abx = 0. x$

Dengan menggunakan hukum kanselasi kanan diperoleh $(\forall\, a, b \in R)\ ab = 0$

Menurut (iii) $(\forall\, a, b \in R)\ a = 0 \vee b = 0$.

Jadi D ring prima. ■

Contoh 3
Himpunan bilangan real R, himpunan bilangan bulat Z, himpunan bilangan rasional Q, himpunan bilangan kompleks C, dan himpunan bilangan bulat diredusir modulo n, Z_n dengan n prima merupakan daerah integral. Sebagai akibatnya R, Z, Q, C dan Z_n, dengan n prima adalah ring prima.

Teorema 6
Ring prima adalah ring semiprima.

Bukti.

Diketahui R_p adalah ring prima atau

$$\left(\forall\, a, b, x \in R_p\right) [axb = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)]$$

Akan ditunjukkan R_p adalah ring semiprima atau

$$\left(\forall a, x \in R_p\right)[axa = 0 \Rightarrow a = 0]$$

Diketahui $\left(\forall\, a, x \in R_p\right)\ axa = 0$

Karena R_p adalah ring prima. maka diperoleh $a = 0$

Jadi R_p adalah ring semiprima. ■

Contoh 4
Karena ring prima adalah ring semiprima, sebagai akibatnya R, Z, Q, C dan Z_n dengan n prima adalah ring semiprima.

***Lemma* 2**
Diberikan R_s ring semiprima dan $\in R_s$. Jika $a^2 = 0$ maka $a \in Z(R_s)$.

Bukti.

Diketahui R_s ring semiprima dan $(\forall\, a \in R_s)\ a^2 = 0$

Akan ditunjukkan $a \in Z(R_s)$.

Dengan menggunakan hukum kanselasi kanan diperoleh

$$(\forall\, a \in R_s)\ a = 0$$

Jika kedua ruas dikalikan $x \in R_s$ dari kanan diperoleh

$$(\forall\, a, x \in R_s)\ ax = 0$$

Selanjutnya diperoleh $ax = xa$

Dengan demikian $a \in Z(R_s)$. ■

***Lemma* 3**
Senter dari ring semiprima terdiri dari elemen-elemen nilpoten bukan nol.

Bukti.

Diketahui $Z(R_s)$ adalah senter dari ring semiprima yang didefinisikan oleh

$$Z(R_s) = \{a \in R_s | a^n = 0, \forall\, n \in Z^+\}$$

Ambil sebarang $a \in Z(R_s)$

Akan ditunjukkan $a \neq 0$

$$a \in Z(R_s) \Rightarrow (\forall\, n \in Z^+)\ a^n = 0$$

Dengan demikian

$$(\forall\, a \in R_s)\ (\forall\, n \in Z^+)\ a \cdot a^{n-1} = 0$$

Jika kedua ruas dikalikan dengan $b \in R_s$ dari kanan diperoleh

$$(\forall\, a \in R_s)\ (\forall\, n \in Z^+)\ a \cdot a^{n-1} \cdot b = 0$$

Dengan menggunakan *Lemma* 1 diperoleh

$$(\forall\, a \in R_s)\ (\forall\, n \in Z^+)\ a^{n-1} = 0$$

Gunakan persamaan (ii) dalam persamaan (i) diperoleh

$$a \neq 0$$

Jadi senter dari ring semiprima terdiri dari elemen-elemen nilpoten bukan nol. ■

KESIMPULAN

Dengan berpegang pada definisi-definisi dan teorema-teorema yang ada dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

Ring prima adalah ring semiprima, tapi sebaliknya belum tentu berlaku. Selanjutnya karena setiap daerah integral adalah ring prima, maka setiap lapangan adalah ring prima.

DAFTAR PUSTAKA

Atteya, M. J. 2010. On Generalized Derivations of Semiprime Rings. *International Journal of Algebra*, **4**(12) : 591-598.

Fraleigh, J.B. 2000. *A First Course In Abstract Algebra.* Sixth Edition. Addison-Wesley Publishing Company, Massachussets.

Thaheem, A.B. 2005. On Some Properties Of Derivation On Semiprime Rings. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **29**(6) : 1143-1152.

Jurnal Barekeng
Vol. 7 No. 1 Hal. 5 – 8 (2013)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

PELABELAN SUPER MUKA ANTI-AJAIB PADA KELAS GRAF PLANAR

Super Anti-Magic Labelings of A Class of Planar Graphs

CHRISTIAN HALIM[1], **FRANCIS Y. RUMLAWANG**[2], **HENRY W. M. PATTY**[3]
[1]*Kelompok Aljabar Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI*
[2,3]*Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI*
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Maluku
e-mail: christianhalim11@yahoo.com1, rumlawang@yahoo.com, henry_4t00@yahoo.com

ABSTRAK

Penelitian ini berfokus pada pelabelan super anti-ajaib dari graf planar tipe $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. Akan ditunjukkan bahwa suatu kelas dari graf planar yang didefinisikan menggunakan graf lengkap dan suatu kelas dari graf planar yang didefinisikan menggunakan graf bipartit lengkap adalah $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ dan $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ super anti-ajaib dengan keadaan tertentu.

Kata kunci : *Graf bipartit lengkap, graf lengkap, graf planar, pelabelan super anti-ajaib* $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$, *pelabelan super anti-ajaib* $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$.

PENDAHULUAN

Diberikan *G* suatu graf bidang, berhingga, sederhana, tak berarah, dan tak terhubung, dengan himpunan titik *V*, himpunan sisi *E*, dan himpunan muka *F*. Pelabelan graf adalah fungsi yang memetakan elemen-elemen pada graf ke himpunan bilangan (umumnya bilangan bulat positif atau tak negatif).

Pada penelitian ini, dibahas pelabelan total, yaitu pelabelan dengan domain $V \cup E$ dan pelabelan dengan domain $V \cup E \cup F$, disebut pelabelan (1,1,1). Secara formal pelabelan total merupakan fungsi bijektif

$$\lambda: V \cup E \to \{1,2, \dots, |V| + |E|\}.$$

Bobot muka dari pelabelan merupakan jumlahan dari semua label (jika ada) yang dimiliki oleh muka, sisi-sisi, dan titik-titik yang mengelilinginya.

Pelabelan pada suatu graf bidang *G* disebut *d-muka anti-ajaib*, jika untuk setiap bilangan *s*, himpunan dari bobot muka dengan *s*-sisi, $\omega_s = \{a_s, a_s + d, a_s + 2d, \dots, a_s + (f_s - 1)d\}$ untuk suatu bilangan bulat $a_s > 0$ dan $d \geq 0$, dimana f_s adalah banyak muka dengan *s*-sisi. Pelabelan tersebut dikatakan *super*, jika label terkecil yang mungkin muncul pada titik-titik.

Sebuah kelas dari graf planar dapat diperoleh dengan cara menghilangkan beberapa sisi dari graf lengkap. Kelas dari graf planar yang diperoleh dinotasikan dengan Pl_n dan mengandung jumlah maksimum dari sisi-sisi yang mungkin dalam suatu graf planar dengan *n* titik.

Didefinisikan kelas graf planar lain yang diperoleh dari graf bipartit lengkap $K_{m,n}$, dengan $m, n \geq 3$ dengan menghilangkan beberapa sisi untuk menjadikannya graf planar, disebut kelas planar bipartit dan dinotasikan dengan $Pl_{m,n}$. Graf $Pl_{m,n}$ mempunyai jumlah maksimum sisi yang mungkin untuk suatu graf bipartit planar.

Penelitian ini difokuskan pada pelabelan super anti-ajaib pada kelas Pl_n dan $Pl_{m,n}$ dari graf planar.

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam [2]. [3], dan [5], diberikan definisi-definisi serta teori yang penulis gunakan dalam penulisan ini. Dalam [1], [5], dan [6], diberikan pelabelan-pelabelan lain yang telah diteliti sebelumnya. Dalam [6], Tilukay, dkk. memberikan pelabelan total super *d*-muka anti-ajaib dari hasil korona dari graf pohon dengan *r* buah graf lintasan. Dalam [4], Ramanjaneluyu memberikan pelabelan pada graf yang sama namun belum umum untuk setiap graf sehingga penulis mendefinisikan pelabelan lain yang menyempurnakannya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

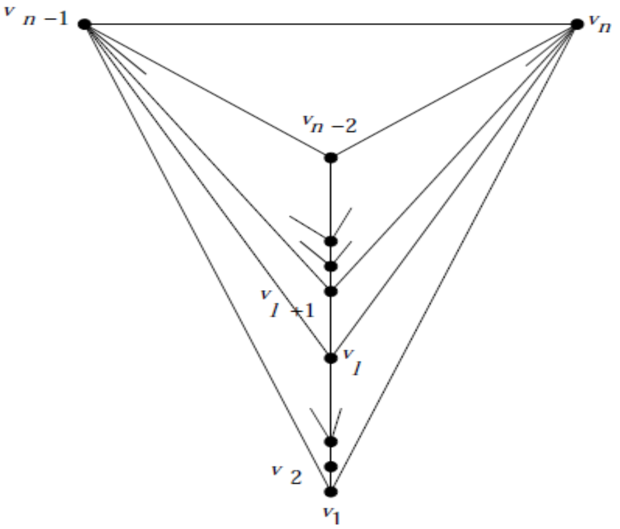
Kelas $Pl_{m,n}$ dari Graf Lengkap

Misal K_n graf lengkap dengan n titik $V_n = \{1,2,\dots,n\}$. Kelas dari graf Pl_n memiliki himpunan titik V_n dan himpunan sisi $E_n = E(K_n) \setminus \{(k,l) : 3 \le k \le n,\ k+2 \le l \le n\}$.

Graf Pl_n dapat dideskripsikan sebagai berikut:

1. Letakkan titik $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$ pada garis vertikal dengan v_1 di paling bawah, dan v_{n-2} di paling atas.
2. Kemudian letakkan titik v_{n-1} dan v_n pada garis horizontal dengan v_{n-1} berada di sebelah kiri v_n, sedemikian sehingga titik-titik v_n , v_{n-1}, dan v_{n-2} membentuk muka segitiga (lihat Gambar 1).

Sisi-sisi dari graf Pl_n sekarang dapat digambarkan tanpa ada sisi yang saling berpotongan. Setiap muka pada graf ini panjangnya 3.



Gambar 1. Graf Pl_n

Teorema 3.1.
Graf Pl_n dengan $n \ge 5$ memiliki pelabelan super anti-ajaib tipe (1,1,0).

Bukti.
Diberikan suatu kelas planar $Pl_n(V,E)$ dengan n titik, yaitu $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan $3n-6$ sisi. Didefinisikan fungsi bijektif $f : V \cup E \to A$, dengan $A = \{1,2,\dots,4n-6\}$ sebagai berikut :
Pelabelan titik :

$$f(v_i) = i\ , \text{ untuk } 1 \le i \le n$$

Pelabelan sisi :

$$f(v_{n-1}, v_i) = 2n - 1 - i\ , \text{ untuk } 1 \le i \le n-2$$

$$f(v_n, v_i) = 3n - 3 - i\ , \quad \text{untuk } 1 \le i \le n-2$$

$$f(v_{n-1}, v_n) = 3n - 3$$

$$f(v_i, v_{i+1}) = 4n - 5 - i\ , \text{ untuk } 1 \le i \le n-3$$

Karena label-label terkecil diberikan pada himpunan titik-titik, maka pelabelan ini merupakan pelabelan super. Selanjutnya dapat dilihat bahwa jumlah muka dalam pada Pl_n adalah $2n-5$. Muka yang terbentuk dari titik-titik $v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, v_n$ memiliki bobot $9n-6$. Sebanyak $n-3$ muka yang terbentuk dari titik-titik $v_l, v_{l+1}, v_{n-1}, v_l$, untuk $1 \le l \le n-3$ memiliki bobot $9n-8-l$, dan sisanya yaitu sebanyak $n-3$ muka yang terbentuk dari titik-titik v_l, v_{l+1}, v_n, v_l, untuk $1 \le l \le n-3$ memiliki bobot $11n-11-l$.

Perhatikan bahwa:

1. Hanya terdapat 1 muka dengan bobot $9n-6$.
2. Terdapat $n-3$ muka dengan bobot $9n-8-l$, untuk $1 \le l \le n-3$, yaitu :

$$\begin{aligned} l = 1 &\to\ 9n - 8 - 1 = 9n - 9 \\ l = 2 &\to\ 9n - 8 - 2 = 9n - 10 \\ &\vdots \\ l = n-4 &\to\ 9n - 8 - (n-4) = 8n - 4 \\ l = n-3 &\to\ 9n - 8 - (n-3) = 8n - 5 \end{aligned}$$

   Sehingga bobot terkecil adalah $8n-5$ dan bobot terbesar adalah $9n-9$.

3. Terdapat $n-3$ muka dengan bobot $11n-11-l$, untuk $1 \le l \le n-3$, yaitu :

$$\begin{aligned} l = 1 &\to 11n - 11 - 1 = 11n - 12 \\ l = 2 &\to 11n - 11 - 2 = 11n - 13 \\ &\vdots \\ l = n-4 &\to 11n - 11 - (n-4) = 12n - 7 \\ l = n-3 &\to 11n - 11 - (n-3) = 12n - 8 \end{aligned}$$

   Sehingga bobot terkecil adalah $12n-8$ dan bobot terbesar adalah $11n-12$.

Dapat disimpulkan bahwa untuk $n \ge 5$ dan $1 \le l \le n-3$ bobot-bobot tersebut memenuhi:

$$9n - 8 - l\ <\ 9n - 6\ < 11n - 11 - l.$$

Atau dengan kata lain, setiap muka memiliki bobot yang berbeda.

Dengan demikian graf Pl_n dengan $n \ge 5$ memilki pelabelan super anti-ajaib tipe (1,1,0).

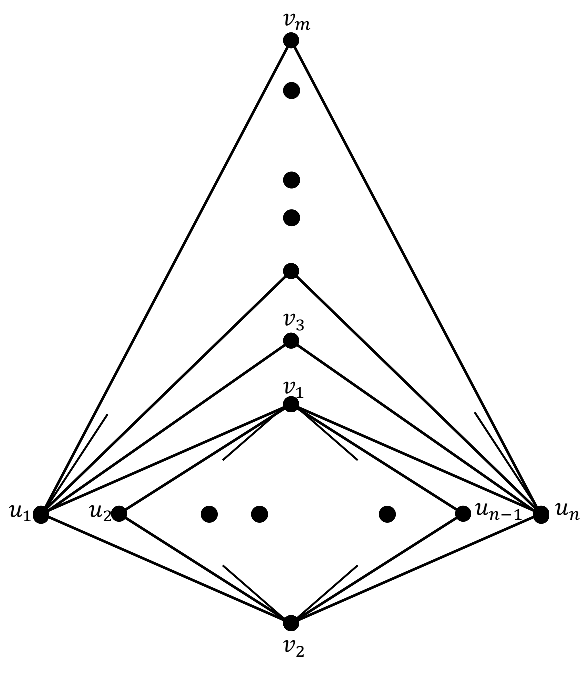
Akibat 3.2
Graf Pl_n dengan $n \ge 5$ memiliki pelabelan super anti-ajaib tipe (1,1,1).

Kelas $Pl_{m,n}$ dari graf planar bipartit

Diberikan graf bipartit lengkap $K_{m,n}(V_m, U_n)$ dengan $V_m = \{v_1, \dots, v_m\}$ dan $U_n = \{u_1, \dots, u_n\}$. Kelas graf $Pl_{m,n}$ mempunyai himpunan titik $V = V_m \cup U_n$ dan himpunan sisi $E = E(K_{m,n}(V_m, U_n)) \backslash (v_l, u_p) : \{3 \le l \le m$ dan $2 \le p \le n - 1\}$.
Jumlah titik dan sisi pada graf $Pl_{m,n}$ adalah $m + n$ dan $2m + 2n - 4$.

Selanjutnya algoritma pelukisan graf $Pl_{m,n}$ yang digunakan adalah sebagai berikut :

1. Tempatkan titik-titik $u_1, u_2, \dots, u_n$ sepanjang garis horisontal dengan u_1 sebagai titik ujung kiri dan u_n sebagai titik ujung kanan.
2. Tempatkan titik-titik $v_m, v_{m-1}, \dots, v_3, v_1$ sepanjang garis vertikal dengan v_1 sebagai titik ujung bawah dan v_m sebagai titik ujung atas sedemikian hingga $v_m, v_{m-1}, \dots, v_3, v_1$ berada di atas $u_1, u_2, \dots, u_n$.
3. Tempatkan titik v_2 di bawah $u_1, u_2, \dots, u_n$ sedemikian hingga v_1, u_k, v_2, u_{k+1} membentuk muka dengan panjang 4 untuk $1 \le k \le n - 1$.



Gambar 2. Graf $Pl_{m,n}$

Teorema 3.3
Graf $Pl_{m,n}$ dengan $m, n \ge 3$ memiliki pelabelan super anti-ajaib tipe (1,1,0).

Bukti.
Diberikan suatu kelas planar $Pl_{m,n}(V, E)$ dengan jumlah titik $m + n$ yaitu $v_1, v_2, \dots, v_m$, $u_1, u_2, \dots, u_n$ dan $2m + 2n - 4$ sisi. Didefinisikan fungsi bijektif $f: V \cup E \to C$ dengan $C = \{1,2, \dots, 4n - 6\}$ sebagai berikut :
Pelabelan titik :

$$f(v_i) = i \quad \text{untuk } 1 \le i \le m;$$
$$f(u_i) = i + m \quad \text{untuk } 1 \le i \le n.$$

Pelabelan sisi :

`

$$f(v_1, u_i) = i + m + n, \text{ untuk } 1 \le i \le n;$$
$$f(v_2, u_i) = i + m + 2n, \text{ untuk } 1 \le i \le n;$$
$$f(u_1, v_j) = 3(m + n) + 1 - 2j \quad \text{untuk } 3 \le j \le m;$$
$$f(u_n, v_j) = 3(m + n) + 2 - 2j, \quad \text{untuk } 3 \le j \le m.$$

Karena label-label terkecil diberikan pada himpunan titik-titik, maka pelabelan ini merupakan pelabelan super. Selanjutnya dapat dilihat bahwa jumlah muka dalam pada $Pl_{m,n}$ adalah $m + n - 3$. Muka yang terbentuk dari titik-titik v_1, u_1, v_3, u_n, v_1 memiliki bobot $10(m + n) - 3$. Sebanyak $n - 1$ muka yang terbentuk dari titik-titik $v_l, u_l, v_2, u_{l+1}, v_1$, untuk $1 \le l \le n - 1$ memiliki bobot $6(m + n + l + 1)$, dan sisanya yaitu sebanyak $m - 3$ muka yang terbentuk dari titik-titik $u_1, v_k, u_n, v_{k-1}, u_1$, untuk $4 \le k \le m$ memiliki bobot $14m + 13n + 10 - 6k$.

Dapat dilihat bahwa setiap muka memiliki bobot yang berbeda, maka graf $Pl_{m,n}$ dengan $m, n \ge 3$ memiliki pelabelan super anti-ajaib tipe (1,1,0).

Akibat 3.4 Graf $Pl_{m,n}$ dengan $m, n \ge 3$ memiliki pelabelan super anti-ajaib tipe (1,1,1).

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dari penelitian, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Graf Pl_n dengan $n \ge 5$ memiliki pelabelan super anti-ajaib tipe *(1,1,0)* dan *(1,1,1).*
2. Graf $Pl_{m,n}$ dengan $n, m \ge 3$ memiliki pelabelan super anti-ajaib tipe *(1,1,0)* dan *(1,1,1).*

DAFTAR PUSTAKA

1. Baca, M. & M. Miller, 2008, *Supesr edge-antimagic graphs*, Florida
2. Diestel, Reinhard, 2000, *Graph theory electronic edition 2000*. Springer-Verlac, New York
3. Harris, John, 2008, *Combinatorics and graph theory*, New York.

4. Ramanjaneyulu, K., 2008, *Anti-magic labellings of a class of planar graphs*. Australian Journal of Combinatorics volume 41: 283-290
5. Rossen, Kenneth H., 2012, *Discrete mathematics and its applications.* McGraw-Hills, New York
6. Tilukay, M. I., Salman, A. N. M., Elviyenti, M., 2012, *On super d-face antimagic total labelings of the corona product of a tree with r copies of a path.* AIP Conf. Proc. 1450, 218

Jurnal Barekeng
Vol. 7 No. 1 Hal. 9 – 14 (2013)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

DIAGRAM *UNIFIED MODELLING LANGUAGE* UNTUK MEMODELKAN LAYANAN *AUTOMATED TELLER MACHINE* DENGAN PETRI NET

DORTEUS LODEWYIK RAHAKBAUW
Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Maluku
e-mail: lodewyik@gmail.com

ABSTRAK

Penelitian ini menguraikan suatu aplikasi yang mungkin dari Petri net untuk menspesifikasikan dinamika dari sistem informasi. Petri net adalah suatu alat matematik yang menerapkan spesifikasi formal dari dinamika sistim. Suatu prosedur yang formal disarankan karena mampu mentransformasi diagram kegiatan *Unified Modeling Language* (UML) ke dalam suatu model Petri net. Atas dasar perubahan bentuk ini dimungkinkan untuk memenuhi verifikasi model dinamis dari sistim riil, yaitu untuk mengevaluasi apakah aktivitas dan ordernya terdefinisi dengan baik (*well defined*). Ini juga mungkin untuk memecahkan permasalahan alur dan sinkronisasi aktivitas suatu sistim, seperti juga untuk mengoptimalkan model dinamis. Permasalahan yang dibahas dalam tulisan ini adalah bagaimana memodelkan layanan ATM dengan berdasar pada diagram aktivasi UML (*Unified Modelling Language*) dan bagaimana memodelkan layanan ATM (*Automated Teller Machine*) dengan menggunakan Petri Nets. Dihasilkan 49 Transisi dan 26 place untuk menggambarkan kedinamikan suatu ATM.

Kata kunci : *Petri Net, ATM, UML*

PENDAHULUAN

Petri net sebagai satu alat pelengkap untuk model aktivitas dari suatu sistim. Aktivitas digambarkan dalam satu diagram kegiatan UML (*Unified Modeling Language*) yaitu suatu diagram kegiatan menunjukkan interaksi antara objek, dalam kaitan dengan menggunakan istilah aktivitas. Aktivitas diwakili sebagai *state action* dan transisi-transisi antara state secara implisit dicetuskan oleh penyelesaian tindakan-tindakan di dalam sumber state.

Proses pengembangan dari suatu sistem informasi meliputi spesifikasi yang statis dan struktur yang dinamis dari suatu sistim. Dalam beberapa tahun terakhir suatu pendekatan berorientasi objek mempunyai dominan dalam pengembangan sistim informasi. Pendekatan itu didasarkan pada fakta bahwa objek dan hubungan-hubungan tersebut mewakili karakteristik-karakteristik yang riil dari suatu sistim dalam suatu pengembangan. Sistim itulah yang menghubungkan suatu objek dengan objek yang lain dan saling menghubungkan. Tiap-tiap state dari sistem didefinisikan oleh state-state dari objek.

TINJAUAN PUSTAKA

PETRI NET

Petri net adalah suatu alat pemodelan matematik secara grafis. Dikembangkan pertama kali oleh C.A. Petri pada tahun 1962 [1], yang terdiri dari *place-place*, *transisi-transisi*, dan anak panah yang menghubungkan *place* dan *transisi*. Arah masukan anak panah (*arc*) menghubungkan suatu *input place* ke *transisi* dan jika arah masuk anak panah bergerak dari suatu *transisi* maka akan berakhir pada *output place* . *place* dapat diisi dengan beberapa *token*. keadaan pada suatu sistem pemodelan ditandai dengan penomoran/tanda (tipe dari tiap *token* dapat dibedakan) pada setiap *place*. *Transisi-transisi* merupakan komponen aktif. Model aktivitas tersebut dapat terjadi ketika (*transisi fires*), kemudian mengubah keadaan dari sutu sIstem (penandaan dari Petri net). *Transisi-transisi* hanya dapat dikatakan *fires* jika berstatus *enabled*, (dalam artian setiap *place* mempunyai cukup *token*). Ketika *transisi* menembak, *token* pada *input place* akan berkurang dan ditambahkan pada *output place* yang dituju. Jumlah token yang berpindah bergantung pada bobot (*weight*) pada tiap-tiap *arc*.

Petri net adalah 4-tuple (P, T, A, w) dengan

- P : himpunan berhingga place, $P = \{p_1, p_2, . . . , p_n\}$,
- T : himpunan berhingga transisi, $T = \{t_1, t_2, . . . , t_m\}$,
- A : himpunan arc, $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$
- ω : fungsi bobot, $\omega : A \rightarrow \{1, 2, 3, . . . \}$

maka himpunan place dan transisi tidak harus berupa himpunan berhingga melainkan bisa berupa himpunan takhingga.

HASIL DAN PEMBAHASAN

DIAGRAM AKTIVITAS

Diagram aktivitas adalah sesuatu yang khusus dalam diagram *statechart* dari UML di mana semua *state* adalah suatu tindakan , dan transisi-transisi itu tentukan oleh penyelesaian tindakan-tindakan dalam sumber *state*. Diagram aktivitas berhubungan dengan suatu kelas, untuk mengimplementasikan suatu operasi yang terjadi pada kelas/suatu kasus. Tujuan dari diagram adalah ini difokuskan pada alur suatu control dan pembawa data oleh proses internal.

State action adalah suatu keadaan dengan tindakan internal dan sedikitnya satu transisi yang berperan dalam setiap tindakan internal . Jika ada beberapa transisi yang dapat digunakan maka transisi-transisi tersebut harus mempunyai kondisi bersyarat. *state action* digunakan untuk memodelkan setiap langkah dalam tiap eksekusi dari suatu algoritma atau prosedur. Setiap keputusan menyatakan situasi ketika kondisi bersyarat digunakan untuk menandai ada tidaknya transisi-transisi yang mungkin. Transisi-transisi tersebut disebut transisi keluaran, dan transisi-transisi lain disebut transisi masukan.

Perubahan bentuk tiap-tiap sesi dari diagram aktivitas *Unified Modeling Language* ke dalam suatu model Petri net perlu dipertimbangkan. Perubahan bentuk *state* aktivitas, transisi-transisi dan keputusan-keputusan yang internal digambarkan dengan cara yang formal. Dengan demikian suatu definisi dari diagram aktivitas serta sruktur dari petri net dapat terjawab.

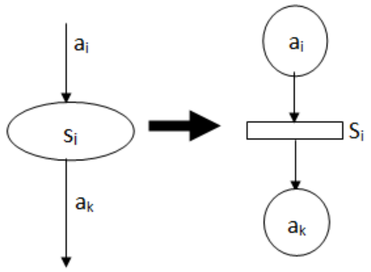
Lebih lanjut, suatu transisi yang kompleks mungkin mempunyai sumber *state* aktivitas dan targetnya. Hal ini merepresentasi sinkronisasi dan/ atau pemisahan kendali ke dalam alur-alur secara berbarengan. Suatu transisi kompleks dikatakan *enabled* ketika semua *state* dapat terlewati. Transisi kompleks yang menunjukkan sinkronisasi disebut *join*, dan yang menunjukkan pemisahan disebut *fork*.

MENTRANSFORMASIKAN *STATE* AKTIVITAS DAN TRANSISI-TRANSISI INTERNAL KE DALAM SUATU MODEL PETRI NET .

Perubahan bentuk diagram aktivitas ke dalam suatu model Petri net didasarkan pada perubahan bentuk perintah yang ditunjukkan dalam gambar 1-3. Gambar 1 menunjukkan aturan berhubungan dengan perubahan bentuk dari suatu *state* aktivitas dan menyertakan transisi-transisi masukan dan keluaran yang internal. *State* aktivitas s_i diubah menjadi s_i transisi dari suatu Petri net. Suatu transisi masukan a_i dari *state* aktivitas s_i diubah menjadi *place* masukan a_i dari s_i transisi diubah menjadi tempat masukan a_i dari transisi s_i suatu Petri net. Transisi keluaran a_k dari *state* aktivitas s_i diubah menjadi tempat keluaran a_k dari transisi s_i dari suatu Petri net.

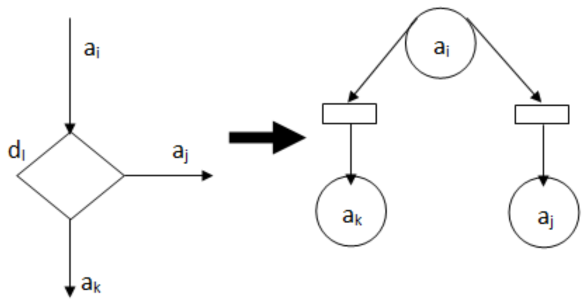
Perubahan bentuk suatu keputusan dan menyertakan transisi-transisi masukan dan keluaran dari diagram aktivitas ke dalam *place-place* dan transisi-transisi suatu Petri net ditunjukkan di dalam gambar 2. Transisi masukan a_i diubah menjadi *place* masukan a_i dan transisi-transisi keluaran a_j dan a_k diubah menjadi *place* keluaran a_k dan a_j dari suatu Petri net. Suatu keputusan ditunjukkan dengan dua atau lebih transisi. Banyaknya transisi-transisi pada suatu Petri net sama banyaknya dengan transisi-transisi keluaran pada suatu keputusan.

Diagram aktivitas dengan transisi keluaran lebih dari satu dapat diperagakan seperti yang ditunjukkan di dalam gambar 3. *State* Aktivitas menyatakan s_i dimodelkan dengan



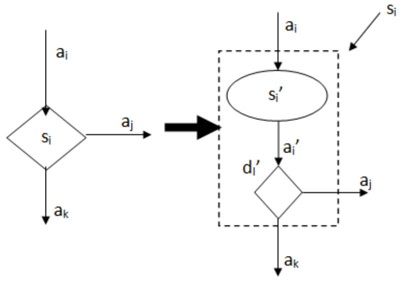
Gambar 1: Perubahan bentuk perintah untuk satu *state* aktivitas

state aktivitas s_i' dan keputusan d_l', yang dihubungkan dengan transisi a_i'. transisi masukan a_i dari *state* aktivitas s_i menjadi transisi masukan dari *state* aktivitas s_i'.



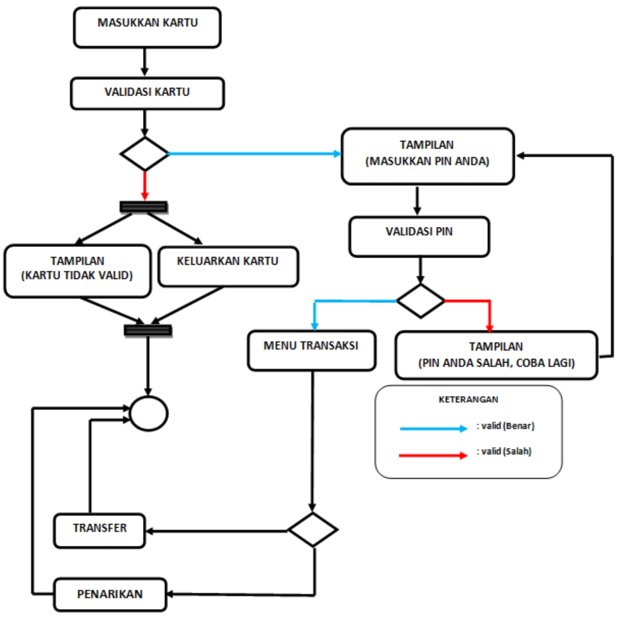
Gambar 2: Perubahan bentuk perintah untuk suatu keputusan

transisi-transisi keluaran a_j dan a_k menjadi transisi-transisi keluaran keputusan d_l'. struktur ini dapat diubah menjadi suatu Petri net menurut aturan menggambar di atas yang ditunjukkan oleh gambar-gambar 1 dan 2.

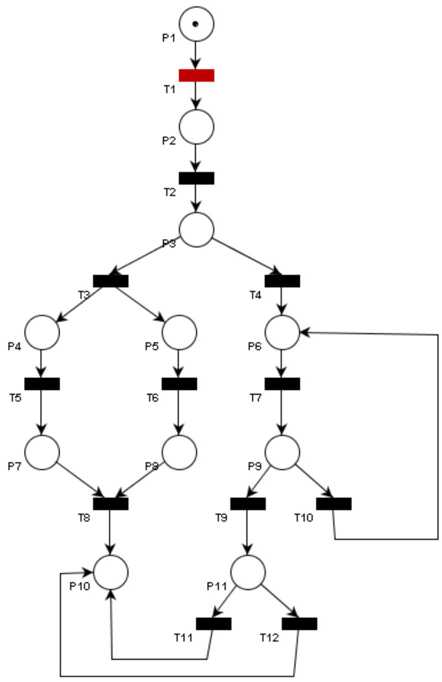


Gambar 3: Perubahan bentuk memerintah karena *state* aktivitas dengan sisa transisi lebih dari satu

CONTOH ILUSTRASI



Gambar 4 : Diagram aktivitas untuk mesin ATM



Gambar 5 : Model Petri net dari Diagram aktivitas pada Gambar 4

3 kasus.

1. Kartu valid PIN valid
2. Kartu tidak valid
3. Kartu valid PIN tidak valid

Matriks *forward incidence.*

$$\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0
\end{bmatrix}$$

Matriks *Backward incidence*.

$$\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1
\end{bmatrix}$$

Keadaan awal petri net

$X_0 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$

1. Kartu Valid Pin Valid

$X_1 = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$

$X_2 = [0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$

$X_3 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$

$X_4 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0]^T$

$X_5 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]^T$

$X_6 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]^T$

Dengan susunan transisi yang di fire secara berurutan adalah : $T_1, T_2, T_4, T_7, T_9, T_{10}$

2. Kartu tidak valid

$X_1 = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$

$X_2 = [0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$

$X_3 = [0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$

$X_4 = [0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$

$X_5 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]^T$

$X_6 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]^T$

Dengan susunan transisi yang di fire secara berurutan adalah : $T_1, T_2, T_3, T_5, T_6, T_8$

3. Kartu valid PIN tidak valid

$X_1 = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$

$X_2 = [0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$

$X_3 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$

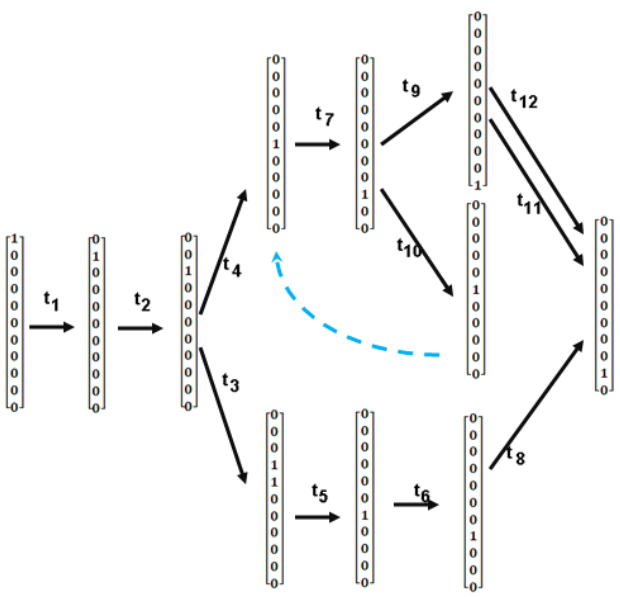
$X_4 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0]^T$

$X_5 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$

$X_6 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0]^T$

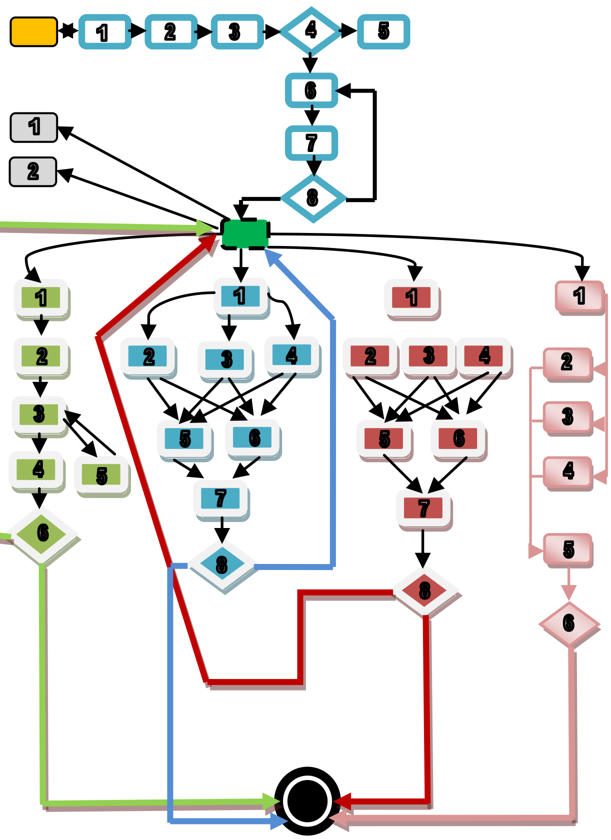
Ket: Yang di tandai kurung kurawal berulang.
Dengan susunan transisi yang di fire secara berurutan adalah : $T_1, T_2, T_4, T_7, T_{10}, T_7, T_{10}, \ldots$

Coverability tree



Tahap pertama yang dilakukan dalam membangun *coverability tree* adalah menentukan *node root*. Node root menyatakan keadaan awal Petri net yaitu $[1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$. Pada keadaan ini transisi t_1 *enabled* dengan mem*fire* transisi ini keadaan Petri net menjadi $[0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ transisi yang *enabled* pada keadaan ini adalah t_2 , dan keadaan Petri net menjadi $[0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ setelah t_2 di *fire*. Berikutnya ada dua transisi yang *enabled* yaitu t_3 dan t_4 dan apabila t_3 di*fire* maka keadaan Petri net menjadi $[0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$, pada keadaan ini t_5 dan t_6 *enabled* dan bila dilakukan pem*fire*an berturut turut t_5, t_6 maka didapat juga keadaan Petri net secara berturut-turut adalah $[0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$, $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]^T$, sekarang pada keadaan Petri net $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]^T$ transisi yang *enabled* hanya t_8 dan bila di lakukan pem*fire*an didapat keadaan akhir Petri net adalah $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]^T$. Selanjutnya pada saat keadaan Petri net $[0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$, ada dua transisi yang *enabled* yaitu t_3 dan t_4. Sudah dilakukan pem*fire*an untuk t_3 dan apabila dilakukan pem*fire*an untuk t_4 akan merubah keadan Petri net menjadi $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$, sekarang satu-satunya transisi yang *enabled* adalah t_7 dan keadaan Petri net menjadi $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0]^T$ setelah t_7 di*fire*. Sekarang ada t_9 dan t_{10} yang *enabled* dan apabila t_{10} di*fire* akan kembali ke keadaan Petri net saat $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$, sedangkan apabila t_9 yang di*fire* maka akan merubah keadaan Petri net menjadi $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]^T$ sekarang ada dua transisi yang *enabled* yaitu t_{11} dan t_{12} dan walaupun salah satunya di*fire* tetap akan merubah keadaan akhir Petri net menjadi $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]^T$.

SIMULASI LAYANAN PADA ATM (AUTOMATED TELLER MACHINE) BNI



Gambar 6 : Diagram aktivitas untuk mesin ATM BNI

Tabel 1.
Keterangan Transisi dari petri net pada Gambar 6

No	Kode Transisi	Keterangan
1	T_0	Nasabah masuk ke ATM
2	T_1	Nasabah memasukkan kartu ATM
3	T_2	Validasi kartu
4	T_3	Kartu tidak valid
5	T_4	Kartu valid
6	T_5	Nasabah memasukkan PIN
7	T_6	Validasi PIN
8	T_7	PIN tidak valid
9	T_8	PIN valid
10	T_9	GANTI PIN
11	T_{10}	Registrasi PIN lama
12	T_{11}	Registrasi PIN baru
13	T_{12}	Format PIN salah
14	T_{13}	Pembatalan Ganti PIN
15	T_{14}	Stop transaksi
16	T_{15}	Transaksi lain
17	T_{16}	TRANSFER
18	T_{17}	Pembatalan transfer
19	T_{18}	Dari rekening giro
20	T_{19}	Dari rekening tabungan
21	T_{20}	Dari kartu kredit
22	T_{21}	Ke rekening bank lain
23	T_{22}	Ke rekening BNI
24	T_{23}	Masukkan no rekening bank lain
25	T_{24}	Masukkan no rekening BNI
26	T_{25}	Stop transaksi
27	T_{26}	Transaksi lain
28	T_{27}	PEMBAYARAN
29	T_{28}	REGISTRASI e-CHANEL
30	T_{29}	PENARIKKAN TUNAI
31	T_{30}	Dari rekening giro
32	T_{31}	Dari rekening tabungan
33	T_{32}	Dari kartu kredit
34	T_{33}	Lainnya
35	T_{34}	Salah masukkan nominal
36	T_{35}	Masukkan nominal sudah benar
37	T_{36}	Nominal 250.000
38	T_{37}	Nominal 500.000
39	T_{38}	Nominal 1.000.000
40	T_{39}	Nominal 1.200.000
41	T_{40}	Pengambilan dengan bukti struk
42	T_{41}	Pengambilan tanpa bukti struk
43	T_{42}	INFORMASI SALDO
44	T_{43}	Rekening giro
45	T_{44}	Rekening tabungan
46	T_{45}	Kartu kredit
47	T_{46}	Transaksi lain
48	T_{47}	Stop transaksi
49	T_{48}	Pengambilan kartu
50	T_{49}	Pengambilan struk

Tabel 2.
Keterangan Place dari petri net pada Gambar 6

No	Kode Transisi	Keterangan
1	P_0	Antrian nasabah
2	P_1	Nasabah didalam ATM
3	P_2	Kartu masuk ATM
4	P_3	Proses validasi kartu ATM
5	P_4	Kartu yang tidak valid di tampung di ATM
6	P_5	Kartu valid
7	P_6	Menu masukkan PIN
8	P_7	Proses validasi PIN
9	P_8	Tampilan menu utama
10	P_9	Masukkan PIN lama
11	P_{10}	Masukkan PIN baru
12	P_{11}	Menu mau lanjut transaksi atau tidak
13	P_{12}	Menu tampilan Transfer
14	P_{13}	Pilih transfer ke Rek.BNI / bank lain
15	P_{14}	Masukkan no rek bank lain
16	P_{15}	Masukkan no rek BNI
17	P_{16}	Menu mau lanjut transaksi atau tidak
18	P_{17}	Menu PEMBAYARAN
19	P_{18}	Menu Reg. e-channel
20	P_{19}	Menu transaksi arah penarikan
21	P_{20}	Nominal transaksi penarikan
22	P_{21}	Input Nominal yang tidak ada pada menu
23	P_{22}	Mau cetak receipt atau tidak
24	P_{23}	Proses cetak receipt
25	P_{24}	Menu arah informasi saldo
26	P_{25}	Jumlah Saldo, mau Transaksi lain
27	P_{26}	Terima kasih sudah melakukan transaksi

KESIMPULAN

1. Petri net mampu merepresentasikan cara kerja mesin ATM dengan 49 Transisi dan 26 Place.
2. Dalam pengembangan sistem yang lebih besar sekalipun sepertii ATM Petri net mampu merepresentasikan selama sistem bersifat tidak *deadlock*

DAFTAR PUSTAKA

Adzkiya, D. 2008, *Membangun Petri Net Lampu Lalu Lintas dan Simulasinya*,Tesis Magister, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Bordbar, B., Giacomini, L., Holding, D.J., Design Of Distributed Manufacturing Systems Using Uml And Petri Nets, Department of Electronic Engineering, School of Engineering, Aston University, Aston Triangle, Birmingham.

David, R. dan Alla, H. 2005, *Discrete, Continuous, and Hybrid Petri Nets*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.

Saldhana, J.A., Shatz, S.M., UML Diagrams to Object Petri Net Models: An Approach for Modeling and Analysis, Department of Electrical Engineering and Computer Science University of Illinois, Chicago.

Storrle, H, Models of Software Architecture, Fakult¨at f¨ur Mathematik und Informatik Ludwig-Maximilians-Universit¨at M¨unchen

Jurnal Barekeng
Vol. 7 No. 1 Hal. 15 – 18 (2013)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

PENERAPAN ANALISIS KORELASI PARSIAL UNTUK MENENTUKAN HUBUNGAN PELAKSANAAN FUNGSI MANAJEMEN KEPEGAWAIAN DENGAN EFEKTIVITAS KERJA PEGAWAI
(Studi Kasus pada Badan Pendapatan, Pengelolaan Keuangan dan Aset Daerah Provinsi Maluku)

ADE MARLEN TELUSSA[1], ELVINUS RICHARD PERSULESSY[2], ZETH ARTHUR LELEURY[3]
[1]*Kelompok Statistika Jurusan Matematika FMIPA Unpatti*
[2,3]*Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI*
Jl. Ir. M. Putuhena, KampusUnpatti, Poka-Ambon, Maluku
e-mail: telussaademarlen@yahoo.co.id, richardelvinus@yahoo.com, zetharthur82@gmail.com

ABSTRAK

Korelasi parsial digunakan untuk mempelajari hubungan murni antara sebuah 1ariable bebas (X_1) dengan 1ariable terikat (Y) dengan mengendalikan atau mengontrol 1ariable-variabel bebas yang lain yaitu 1ariable X_2 dan X_3 yang diduga mempengaruhi hubungan antara 1ariable X_1 dengan Y. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana hubungan Pelaksanaan Fungsi Manajemen Kepegawaian dengan Efektivitas Kerja Pegawai. Sampel yang digunakan dalam penelitian ini berjumlah 50 responden. Metode 1ariable data yang digunakan lebih dulu yaitu uji validitas dan reliabilitas serta uji asumsi dalam hal ini yaitu uji normalitas dengan mengunakan uji kolmogorov-smirnov. Hubungan dari antara ketiga 1ariable bebas terhadap 1ariable terikat yang terjadi hubungan yang kuat adalah 1ariable pelatihan, dimana 1ariable penempatan kerja pegawai sesuai dengan keahlian dan kemampuannya dan 1ariable promosi dikontrol yaitu dengan $r_{y.x_3-x_1x_2} = 0.603$. berdasarkan uji signifikansi, terdapat hubungan yang signifikan antara pelatihan dan efektivitas kerja pegawai karena $t_{hitung} = 5.127 > t_{tabel} = 2.013$, jika penempatan pegawai sesuai dengan keahlian dan kemampuannya dan juga promosi dibuat tetap (dikontrol).

Kata kunci : *Efektifitas kerja, korelasi parsial, manajemen kepegawaian, uji signifikansi, uji kolmogorov-smirnov* .

PENDAHULUAN

Statistika merupakan cabang ilmu yang bertujuan mengubah data menjadi informasi. Pada hakikatnya Statistika mencangkup kegiatan-kegiatan, gagasan-gagasan, serta hasil yang sangat beraneka ragam. Statistika terbagi atas dua golongan besar, yaitu Statistika deskriptif dan Statistika inferensial / induktif. Statistik deskriptif hanya berkaitan dengan mempelajari cara-cara pengumpulan dan penyusunan data, pengolahan, analisis dan penyajian data. Sedangkan menyangkut penarikan kesimpulan serta pengambilan keputusan tergantung statistika inferensial (Irianto, 2003). Dalam statistika terdapat beberapa pengujian dan prosedur yang banyak digunakan dalam penelitian, salah satunya adalah korelasi. Korelasi adalah studi yang membahas tentang derajat hubungan antara dua variabel atau lebih. Besarnya tingkat keeratan hubungan antara dua variabel atau lebih dapat diketahui dengan mencari besarnya angka korelasi yang biasa disebut dengan koefisien korelasi.

Untuk mempelajari hubungan antara satu variabel bebas dengan satu variabel terikat tanpa memperdulikan kemungkinan adanya pengaruh ataupun kaitan dengan variabel-variabel lain, Statistika menyediakan teknik korelasi lugas atau korelasi sederhana. Tetapi dalam hal memperhatikan atau memperhitungkan variabel lain, Statistika menyediakan suatu alat yang disebut teknik korelasi parsial. Korelasi parsial adalah suatu teknik statistika yang digunakan untuk mempelajari hubungan murni antara sebuah variabel bebas (X_1) dengan variabel terikat (Y) dengan mengendalikan atau mengontrol variabel-variabel bebas yang lain(X_2) yang diduga mempengaruhi hubungan antara variabel X_1 dengan Y (Sulistiyono, 2012). Korelasi parsial bukan hanya dapat menggunakan satu variabel kontrol saja tapi bisa lebih dari satu variabel, seperti dalam penelitian ini dengan menggunakan dua variabel kontrol untuk mengetahui hubungan dari fungsi pelaksanaan manajemen kepegawaian terhadap efektivitas kerja pegawai, yang mana pegawai sangat berperan penting dalam instansi pemerintahan, efektif dan efisien maupun tidak efektif dan tidak efisiennya pekerjaan masing-masing pegawai sangat mempengaruhi instansi tersebut, sehingga tiap pimpinan melaksanakan fungsi manajemen kepegawaian. Fungsi manajemen kepegawaian terdiri dari beberapa hal, yaitu penempatan pegawai sesuai dengan kemampuan dan keahliannya, promosi dari pimpinan serta pelatihan. Jika ketiga hal itu dapat terlaksana dengan baik maka masing-masing pegawai dapat bekerja secara efektif dan memperoleh hasil yang maksimal.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui apakah terdapat hubungan yang signifikan antara penempatan pegawai sesuai dengan keahlian dan kemampuannya, promosi, dan pelatihan dengan pegawai dengan efektivitas kerja pegawai pada BPPKAD Provinsi Maluku.

TINJAUAN PUSTAKA

Korelasi parsial (*partial correlation*) merupakan perluasan dari korelasi sederhana atau korelasi *pearson.* Jika korelasi sederhana melibatkan satu variabel terikat (*dependent*) dan satu variabel bebas (*independent*), maka korelasi parsial melibatkan lebih dari satu variabel bebas dan satu variabel terikat. Variabel bebasnya terbagi atas dua penggunaan yaitu satu variabel bebas sebagai yang memiliki hubungan dengan variabel terikat dan variabel bebas yang lainnya sebagai variabel kontrol dimana variabel ini diduga mempengaruhi hubungan antara satu variabel bebas dan satu variabel terikat. Dengan demikian, analisis korelasi parsial merupakan suatu metode yang digunakan untuk mengidentifikasi kuat lemahnya hubungan antar variabel bebas dan variabel terikat, dimana variabel bebas lainnya dikontrol atau dianggap berpengaruh (Irianto, 2006).

Ada beberapa teori yang digunakan sebagai landasan penelitian ini sebagai berikut.

Analisis Korelasi Parsial

Untuk menghitung koefisien korelasi dengan korelasi parsial, dilakukan terlebih dahulu perhitungan korelasi tunggal, dengan rumus sebagai berikut:

$$r = \frac{n\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{\{n\sum X^2 - (\sum X)^2\}\{n\sum Y^2 - (\sum Y)^2\}}}$$

dimana:

n = Jumlah data

X = Variabel bebas

Y = Variabel terikat

Untuk menghitung koefisien korelasi parsial dapat digunakan rumus berikut:

$$r_{y.x_1-X_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2}r_{x_1x_2}}{\sqrt{1-{r^2}_{x_1x_2}}\sqrt{1-{r^2}_{yx_2}}}$$

dimana:

r_{yx_1} = korelasi antara variabel terikat Y dengan variabel bebas X_1

r_{yx_2} = korelasi antara variabel terikat Y dengan variabel bebas X_2

$r_{x_1x_2}$ = korelasi antara variabel bebas X_1 dengan variabel bebas X_2

Uji Validitas dan Reliabilitas

Pengujian validitas data digunakan untuk mengukur sah atau valid tidaknya suatu kuesioner. Suatu kuesioner dianggap valid jika pertanyaan pada kuesioner mampu mengungkapkan sesuatu yang diukur oleh kuesioner tersebut (Ghozali, 2001).

Pengujian validitas dilakukan dengan bantuan program *SPSS for windows*. Pengambilan keputusan berdasarkan nilai *p value* atau nilai signifikasi kurang dari 0,05, maka item pertanyaan tersebut dinyatakan valid dan sebaliknya jika nilai p *value* atau signifikasi sama dengan atau lebih dari 0,05 dinilai tidak valid

Yang dimaksud dengan reliabilitas adalah pengukuran untuk suatu gejala. Semakin tinggi reliabilitas suatu alat ukur, maka semakin stabil alat tersebut untuk digunakan. Tingkat reliabilitas suatu konstruk atau variabel penelitian dapat dilihat dari hasil statistik *Cronbach Alpha* (α) Suatu variabel dikatakan *reliable* jika memberikan nilai *cronbach alpha* > 0,60 (Ghozali, 2005). Semakin nilai alphanya mendekati satu maka nilai reliabilitas datanya semakin terpercaya.

Uji Normalitas dengan uji kolmogorov-smirnov

Interpretasi hasil Uji Kolmogorov Smirnov adalah bahwa jika nilainya di atas 0,05 maka distribusi data dinyatakan memenuhi asumsi normalitas, dan jika nilainya di bawah 0,05 maka diinterpretasikan sebagai tidak normal. Hipotesis pada uji ini adalah sebagai berikut:

Ho : data berdistribusi normal

H_1 : data tidak berdistribusi normal

Sig >0.05 : H_0 diterima, maka data berdistribusi normal.

Sig <0.05 : H_0 ditolak, maka data tidak berdistribusi normal.

Uji signifikan koefisien korelasi parsial (uji-t)

Uji-t digunakan untuk menguji berarti atau tidaknya hubungan variabel-variabel bebas penempatan pegawai sesuai dengan keahlian dan kemampuannya (X_1), promosi (X_2), dan latihan (X_3) dengan variabel terikatnya adalah efektivitas kerja pegawai (Y). Jika hubungan antara variabel-variabel secara parsial signifikan maka sampel dapat digeneralisasikan pada populasi dimana sampel diambil atau mencerminkan keadaan populasi. Uji-t diselesaikan dengan rumus, sebagai berikut:

$$t = \frac{r \cdot \sqrt{n-k}}{\sqrt{1-r^2}}$$

Keterangan:
r = koefisien korelasi parsial
n = Jumlah responden
k = banyaknya variabel

Hipotesis pada uji ini adalah sebagai berikut:
H_0 : tidak terdapat hubungan yang signifikan
H_1 : terdapat hubungan yang signifikan
$t_{hitung} < t_{tabel}$, maka H_0 diterima sehingga tidak terdapat hubungan yang signifikan.
$t_{hitung} > t_{tabel}$, maka H_0 ditolak sehingga terdapat hubungan yang signifikan.

METODE PENELITIAN

Data yang dipergunakan dalam penelitian adalah data primer yang diperoleh dengan membagikan kuesioner kepada pegawai. Pada penelitian ini yang dijadikan unit observasi adalah 50 orang pegawai BPPKAD provinsi Maluku.

Penelitian ini dilakukan dengan cara merumuskan masalah, membuat kuesioner, membagikan kuesioner, menguji validitas dan reliabilitas, pengujian asumsi, dan interpretasi hasil sesuai dengan bahan atau materi penelitian kemudian dipertanggungjawabkan secara ilmiah.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil pengujian validitas menunjukkan bahwa seluruh pertanyaan mempunyai *r* hitung yang lebih besar dari *r* tabel yaitu 0.2845 sehingga seluruh pertanyaan dalam kesioner penelitian ini valid yang artinya kuesionernya sah atau valid. Sedangkan hasil uji reliabilitas menunjukkan bahwa semua pernyataan pada kuesioner dinilai reliabel karena nilai *Cronbach's Alpha* pada setiap variabel > 0,6.

Dari hasil uji normalitas dengan *Kolmogorov-Smirnov test* diperoleh nilai Z adalah 0.562 dan *Asymp.sig* yaitu 0.911, yang mana lebih besar dari 0.05 sehingga dapat disimpulkan bahwa data berdistribusi normal (data menyebar secara normal). Jadi, data layak dipakai karena memenuhi asumsi normalitas.

Analisis Data dengan Menggunakan Teknik Korelasi Parsial

Korelasi parsial digunakan untuk melihat hubungan antara variabel penempatan pegawai sesuai dengan keahlian dan kemampuannya (X_1), promosi (X_2), dan latihan (X_3) dengan efektivitas kerja pegawai (Y) secara parsial. Teknik ini diawali dengan melakukan perhitungan korelasi tunggal setelah itu perhitungan terhadap korelasi parsial.

Sebelum menghitung korelasi parsial, dilakukan terlebih dahulu perhitungan korelasi tunggal. korelasi antara masing-masing variable disajikan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Matriks Korelasi pada Korelasi Tunggal

		PPSKK (X1)	Promosi (X2)	Pelatihan (X3)	EKP (Y)
Koefisien korelasi	PPSKK (X1)	1.000	-.118	.127	.105
	Promosi (X2)	-.118	1.000	-.061	-.100
	Latihan (X3)	.127	-.061	1.000	.609
	EKP (Y)	.105	-.100	.609	1.000

Korelasi parsial dengan satu variabel kontrol dibuat dalam bentuk matriks korelasi. Pada tabel 2 dan tabel 3, disajikan korelasi antara masing-masing variabel dimana variabel X_1 dikontrol dan variabel X_2 dikontrol.

Tabel 2. Matriks Korelasi pada Korelasi Parsial; X_1 Dikontrol

	PPSKK (X_1)	Promosi (X_2)	Pelatihan (X_3)	EKP (Y)
PPSKK (X_1)	1	0	0	0
Promosi (X_2)	0	1	-0.04	-0.088
Pelatihan (X_3)	0	-0.04	1	0.604
EKP (Y)	0	-0.088	0.604	1

Tabel 3. Matriks Korelasi pada Korelasi Parsial; X_2 Dikontrol

	PPSKK (X_1)	Promosi (X_2)	Pelatihan (X_3)	EKP (Y)
PPSKK (X_1)	1	0	0.121	0.094
Promosi (X_2)	0	1	0	0
Pelatihan (X_3)	0.121	0	1	0.607
EKP (Y)	0.094	0	0.607	1

Dari hasil analisis korelasi parsial didapat korelasi antara penempatan kerja pegawai sesuai dengan keahlian dan kemampuannya dengan efektivitas kerja pegawai dimana promosi dan latihan dikendalikan (dikontrol) adalah 0.026. Hal ini menunjukkan bahwa terjadi hubungan yang sangat lemah antara penempatan kerja pegawai sesuai dengan keahlian dan kemampuannya dengan efektivitas kerja pegawai jika promosi dan latihan dikendalikan (dikontrol). Sedangkan arah hubungan adalah positif karena nilai *r* positif, artinya semakin tinggi penempatan kerja pegawai sesuai dengan keahlian dan kemampuannya maka semakin meningkatkan efektivitas kerja pegawai.

Sedangkan hasil analisis korelasi parsial didapat korelasi antara promosi dengan efektivitas kerja pegawai dimana penempatan kerja pegawai sesuai dengan keahlian dan kemampuannya dan juga latihan dikendalikan (dikontrol) adalah -0.076. Hal ini menunjukkan bahwa terjadi hubungan yang sangat lemah antara promosi dengan efektivitas kerja pegawai jika penempatan kerja pegawai sesuai dengan keahlian dan kemampuannya dan latihan dikendalikan (dikontrol). Sedangkan arah hubungan adalah negatif karena nilai *r* negative yang artinya arah hubungannya berlawanan/bertentangan.

Selanjutnya dari hasil analisis korelasi parsial didapat korelasi antara latihan dengan efektivitas kerja pegawai dimana penempatan kerja pegawai sesuai dengan keahlian dan kemampuannya dan juga promosi dikendalikan (dikontrol) adalah 0.603. Hal ini menunjukkan bahwa terjadi hubungan yang kuat antara latihan dengan efektivitas kerja pegawai jika penempatan kerja pegawai sesuai dengan keahlian dan kemampuannya dan promosi dikendalikan (dikontrol). Sedangkan arah hubungan adalah positif karena nilai *r* positif, artinya semakin tinggi pelatihan kerja terhadap pegawai maka semakin meningkatkan efektivitas kerja pegawai.

Uji Signifikansi (uji t)

Uji signifikansi digunakan untuk menguji berarti atau tidaknya hubungan variabel-variabel *independent* penempatan pegawai sesuai dengan keahlian dan kemampuannya (X_1), promosi (X_2), dan latihan (X_3) dengan variabel dependent efektivitas kerja pegawai (Y). Jika hubungan antara variabel-variabel secara parsial signifikan maka sampel dapat digeneralisasikan pada populasi dimana sampel diambil atau mencerminkan keadaan populasi.

Korelasi parsial antara X_1 dengan Y ; dengan X_2 dan X_3 dianggap tetap (dikontrol):

$$t = \frac{r_{y.x_1-x_2x_3} \cdot \sqrt{n-4}}{\sqrt{1 - r_{y.x_1-x_2x_3}{}^2}} = 0.176$$

Harga *t* hitung tersebut selanjutnya dibandingkan dengan harga *t* tabel. Untuk taraf nyata 5% uji dua sisi, dan dengan db = n-k = 46, maka diperoleh *t* tabel = 2,013. Ternyata harga *t* hitung kurang dari *t* tabel, sehingga H_0 diterima. Hal ini berarti tidak terdapat hubungan yang signifikan antara penempatan pegawai sesuai dengan keahlian dan kemampuannya dan efektivitas kerja pegawai, jika promosi dan latihan dibuat tetap (dikontrol).

Selanjutnya korelasi parsial antara X_2 dengan Y ; dengan X_1 dan X_3 dianggap tetap (dikontrol):

$$t = \frac{r_{y.x_2-x_1x_3} \cdot \sqrt{n-4}}{\sqrt{1 - r_{y.x_2-x_1x_3}{}^2}} = -0.517$$

Harga *t* hitung tersebut selanjutnya dibandingkan dengan harga *t* tabel. Ternyata harga *t* hitung kurang dari *t* tabel, sehingga H_0 diterima. Hal ini berarti tidak terdapat hubungan yang signifikan antara promosi dan efektivitas kerja pegawai, jika promosi dan latihan dibuat tetap (dikontrol).

Sedangkan korelasi parsial antara X_3 dengan Y ; dengan X_1 dan X_2 dianggap tetap (dikontrol):

$$t = \frac{r_{y.x_3-x_1x_2} \cdot \sqrt{n-4}}{\sqrt{1 - r_{y.x_3-x_1x_2}{}^2}} = 5.127$$

ternyata harga *t* hitung lebih besar dari *t* tabel, sehingga H_0 ditolak. Hal ini berarti terdapat hubungan yang signifikan antara pelatihan dan efektivitas kerja pegawai, jika penempatan pegawai sesuai dengan keahlian dan kemampuannya dan juga promosi dibuat tetap (dikontrol).

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa, Hubungan dari antara ketiga variabel bebas yaitu penempatan pegawai sesuai dengan keahlian dan kemampuannya (X_1), promosi (X_2), dan pelatihan (X_3) terhadap variabel terikat yaitu efektivitas kerja pegawai (Y) yang terjadi hubungan yang kuat adalah variabel pelatihan, dimana variabel penempatan kerja pegawai sesuai dengan keahlian dan kemampuannya dan variabel promosi dikontrol. Semakin tinggi pelatihan kerja terhadap pegawai maka semakin meningkatkan efektivitas kerja pegawai. Artinya dari ketiga batasan fungsi pelaksanaan manejemen kepegawaian yang terlaksana dengan baik adalah pelatihan pegawai BPPKAD Provinsi Maluku.

DAFTAR PUSTAKA

Furqon.(1997). *Statistika Terapan Untuk Penelitian*. Alfabeta. Bandung.

Ghozali, Imam, 2001, *Aplikasi Analisis Multivariat dengan program SPSS*, Badan Penerbit Universitas Diponegoro, Semarang

Ghozali, Imam, 2005, *Aplikasi Analisis Multivariat dengan program SPSS*, Badan Penerbit Universitas Diponegoro, Semarang

Irianto, Agus. (2006). *Statistik: Konsep Dasar dan Aplikasi*. Kencana. Jakarta.

Manulang, M. (1981). *Dasar-dasar Manajemen*.Ghalia Indonesia. Jakarta.

Steers, Richard M. (1985). *Efektivitas Organisasi*. Airlangga. Jakarta

Sunyoto, Danang. (2007). *Analisis Regresi dan Korelasi Bivariat*.Amara Books.Yokyakarta.

Wursanto, I.G. (1989). *Manajemen Kepegawaian*. Kanisius.Yogyakarta.

Jurnal Barekeng
Vol. 7 No. 1 Hal. 19 – 22 (2013)

jurnal ilmu matematika dan terapan

KARAKTERISTIK ENERGI GELOMBANG DAN ARUS PERAIRAN DI PROVINSI MALUKU

Characteristic of Wave Energy and Current Velocity of Coastal Area at Maluku Province

GRACE LOUPATTY
Staf Jurusan Fisika FMIPA UNPATTI
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Maluku
e-mail: grace_loupatty@yahoo.com

ABSTRAK

Beberapa wilayah di Provinsi Maluku memiliki bentuk topografi pantai yang dari waktu ke waktu mengalami perubahan terhadap struktur garis pantainya. Faktor utama yang turut berpengaruh adalah profil pola gelombang laut dan pola arus permukaan pada pesisir pantai.
Penelitian ini bertujuan untuk mengkarakterisasi serta menganalisis profil gelombang laut dan arus air laut pada tujuh lokasi pantai di Provinsi Maluku.
Dengan pengukuran periode gelombang *T*, tinggi gelombang *H*, maka dihitung panjang gelombang *L* dan energi gelombang *E*. Kemudian dianalisis dengan menggunakan excel dan analisis klaster hirarkhi dengan program SPSS. Kecepatan arus dihitung dan dianalisis pada ketujuh lokasi pantai.
Hasil yang diperoleh pada ketujuh lokasi tersebut, dapat disimpulkan bahwa energi gelombang dan kecepatan arus di Teluk Baguala memiliki karakteristik yang berbeda terhadap enam lokasi pantai yang lain.

Kata Kunci : Karakteristik, energi gelombang, arus

PENDAHULUAN

Perairan Maluku tergolong memiliki wilayah perairan yang dalam dan dangkal. Pada kedua wilayah perairan tersebut secara alami terjadi proses pengadukan atau pencampuran air permukaan dengan air di bagian dasar karena adanya pengaruh gelombang, arus, angin dan pasang surut. Hal ini merupakan suatu proses fenomena alam yang biasanya terjadi pada suatu perairan. Proses alamiah yang terjadi pada perairan tersebut dapat dikaji lewat parameter oseanografi pantai yaitu gelombang, arus, angin, pasang surut dan transport sedimen.

Gelombang laut merupakan gerakan permukaan air laut akibat hembusan angin. Angin yang bertiup di atas permukaan air laut menimbulkan gelombang dan membawa suatu kecepatan yang mempunyai energi. Energi gelombang dapat dijadikan sebagai energi pengganti minyak atau energi terbarukan.

Penelitian ini bertujuan untuk mengkarakterisasi serta menganalisis profil gelombang laut dan arus air laut pada beberapa lokasi pantai di Provinsi Maluku.

TINJAUAN PUSTAKA

Perairan Maluku yang merupakan bagian dari perairan Indonesia Timur memiliki keadaan fisik yang unik. Perairan ini terdiri dari laut yang dalam dengan topografi dasar laut yang majemuk dan memiliki wilayah laut yang luas karena merupakan batas antara dua samudera, yaitu samudera Pasifik dan samudera Hindia. Disamping itu, perairan Maluku juga tergolong memiliki wilayah perairan yang dalam dan dangkal. Pada kedua wilayah perairan tersebut secara alami terjadi proses pengadukan atau pencampuran air permukaan dengan air di bagian dasar karena adanya pengaruh gelombang, arus, angin dan pasang surut. Hal ini merupakan suatu proses fenomena alam yang biasanya terjadi pada suatu perairan. Proses alamiah yang terjadi pada perairan tersebut dapat dikaji lewat parameter oseanografi pantai seperti gelombang dan arus.

Gelombang Laut

Gelombang laut merupakan suatu fenomena alam berupa penaikan dan penurunan air secara perlahan dan dapat dijumpai di seluruh dunia. Gelombang yang berada di laut sering nampak tidak teratur dan sering berubah-ubah. Hal ini bisa diamati dari permukaan airnya yang diakibatkan oleh arah perambatan gelombang yang sangat bervariasi serta bentuk gelombangnya yang tidak beraturan, apalagi jika gelombang tersebut dibawah pengaruh angin.

Angin yang berhembus di atas permukaan air yang semula tenang akan menyebabkan gangguan pada permukaan tersebut, selanjutnya timbul riak-riak gelombang kecil di atas permukaan air. Angin yang bertiup di permukaan laut ini merupakan pembangkit utama gelombang. Apabila kecepatan angin bertambah, riak gelombang tersebut menjadi bertambah besar dan jika angin berhembus terus-menerus akhirnya terbentuk gelombang. Disamping itu, pergerakan massa air yang ditimbulkan oleh angin dapat menghasilkan momentum dan energi sehingga gelombang yang dihasilkan tidak menentu.

Pratikto (2000) mengatakan bahwa bentuk dan perambatan gelombang yang bervariasi serta tidak beraturan sangat mempengaruhi karakteristik gelombang yang terjadi pada perairan tersebut. Selain terjadi perubahan tinggi, panjang dan kecepatan gelombang juga terjadi fenomena lain seperti pendangkalan, refraksi, difraksi dan pantulan sebelum gelombang tersebut pecah. Pendangkalan gelombang adalah proses berkurangnya tinggi gelombang akibat perubahan kedalaman dimana kecepatan gelombangnya berkurang dan akibatnya juga terjadi refraksi karena arah gerak puncak gelombang mengikuti bentuk kontur kedalaman laut. Refraksi ditekankan pada perubahan tinggi gelombang karena pembelokan arah puncak gelombang. Sedangkan difraksi adalah proses pemindahan ke arah daerah yang terlindungi sehingga menyebabkan timbulnya gelombang.

Menurut Tarigan (1986) gelombang laut merupakan gejala alam yang menimbulkan ayunan tinggi dan rendahnya massa air yang bergerak tanpa hentinya pada lapisan permukaan maupun di bawah permukaan laut. Susunan gelombang di laut baik bentuknya maupun macamnya sangat bervariasi dan kompleks sehingga hampir tidak dapat diuraikan dan sulit digambarkan secara sistematis karena tidak linieran, tiga dimensi dan mempunyai bentuk yang random. Bentuk gelombang yang dihasilkan cenderung tidak menentu dan tergantung pada beberapa sifat gelombang seperti periode dan tinggi gelombang yang dibentuk (Triadmojo, 1999).

Gelombang didefenisikan sebagai ombak yang besar-besar ditengah lautan (Badudu dan Zain,2001). Gelombang laut merupakan salah satu penyebab yang berperan dalam pembentukan maupun perubahan bentuk pantai (Dahuri, 1987). Jika gelombang menjalar dari tempat yang dalam menuju ke tempat yang makin lama makin dangkal, pada suatu tempat tertentu gelombang tersebut akan pecah dan dilepaskan ke pantai dalam bentuk hempasan ombak.

Panjang gelombang dapat dihitung dengan persamaan (Souisa,2002):

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} = 1.56T^2 \qquad (1)$$

dimana:
T = periode ombak (detik)
g = Percepatan gravitasi = 9,81 m/s^2
L= Panjang gelombang (m)

Selanjutnya apabila dihitung periode ombak signifikan H_S, dan tinggi ombak signifikan didapat dari tinggi rerata dari 33% tinggi nilai pencatatan gelombang. Hal yang sama juga dapat digunakan untuk menghitung periode ombak.

Energi total gelombang adalah jumlah energi kinetik dan energi potensial. Energi kinetik adalah energi yang disebabkan oleh kecepatan partikel air karena adanya gerak gelombang sedangkan energi potensial adalah energi yang dihasilkan oleh perpindahan muka air karena adanya gelombang (Triadmodjo, 1996). Energi gelombang berubah dari satu titik ke titik yang lain sepanjang satu panjang gelombang, L, dan energi rerata dihitung dengan persamaan:

$$E = \frac{1}{8} g\rho_0 H^2 \mathrm{L} \qquad (2)$$

dimana:
ρ_0 = rapat massa, (kg/m^2)
H= tinggi gelombang, (m)
L=panjang gelombang,(m)
E= energi, (J)

Arus

Arus merupakan gerakan air yang sangat luas yang sering terjadi pada seluruh lautan. Gelombang yang datang menuju pantai dapat menimbulkan arus pantai *(nearshore current)*. Arus juga dapat terbentuk akibat oleh angin yang bertiup dalam selang waktu yang sangat lama, dapat juga disebabkan oleh ombak yang membentur pantai secara miring. Dapat pula disebabkan oleh gelombang yang terbentuk dari gelombang yang datang menuju garis pantai. Dengan demikian akan terjadi dua system arus yang mendominasi pergerakan air laut yaitu arus meretas pantai (*rip current)* dan arus sejajar pantai atau arus susur pantai (*longshore current)*.

Arus dapat juga membawa sedimen yang mengapung (*suspended sediment)* maupun yang terdapat didasar laut. Begitu pula dengan arus susur pantai dan arus meretas pantai. Keduanya merupakan arus yang berperan dalam transport sedimen di sepanjang pantai serta pembentukan berbagai sedimen yang terdapat di pantai.

METODE PENELITIAN

Lokasi Penelitian

a. Pulau Ambon:
   Pantai Teluk Ambon Dalam,Pantai Teluk Ambon Luar, Pantai Teluk Baguala
b. Pulau Seram Bagian Barat:
   Pantai Kamariang, Pantai Kairatu, Pantai Waisarisa, Pantai Piru

Peralatan

Peralatan yang digunakan :
a. GPS, Kompas
b. Rambu gelombang (*palm*), *Current cross*
c. Stopwatch/ timer
d. Meter rol (50m)
e. Speed boat/perahu
f. Kamera
g. Busur derajat, Alat tulis

Prosedur Penelitian

i. Parameter Gelombang (tinggi gelombang, periode gelombang dan kedalaman air/ pasang-surut)
 Prosedur kerja:
 1. Rambu gelombang (*palm*) dipasang pada daerah *breaker zone* saat air surut, setelah terpasang maka ditentukan titik 0 (sebagai titik awal), kemudian pengamatan dilakukan dengan cara:
 a. Pengukuran periode gelombang *T,* sebanyak N kali dalam waktu 30 menit.
 b. Pengukuran tinggi gelombang *H*,
 c. Pengukuran sudut datang gelombang terhadap garis pantai setiap 30 menit.
 2. Pengambilan data dilakukan selama waktu diatas untuk menentukan energi gelombang

ii. Kecepatan Arus
 Prosedur kerja:
 Dengan menggunakan speedboad/perahu, pengukuran dimulai pada stasiun 1 (jarak pengambilan stasiun diambil berdasarkan panjang garis pantai pengamatan). Diulangi 3 kali dan hasil akhir diambil reratanya. Setelah itu berpindah ke stasiun 2,3,…,7.
 Pengukuran kecepatan arus dilakukan pada hari pertama sampai hari ke-enam .

Analisis Data

Hasil pengukuran periode gelombang *T* dan tinggi gelombang *H*, dihitung panjang gelombang *L* dengan persamaan (1). Kemudian energi gelombang *E* dihitung dengan menggunakan persamaan (2).

Hasil pengamatan yang diperoleh dianalisis dengan menggunakan excel dan analisis klaster hirarkhi menggunakan program SPSS.

Kecepatan arus dihitung dan dianalisis pada ketujuh lokasi perairan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Gelombang dan Kecepatan Arus

Untuk menghitung energi gelombang maka data parameter gelombang ditabulasikan untuk 7 stasiun dengan variabel X1-X3, dihitung reratanya dengan menggunakan excel. Kecepatan arus, di tabulasikan untuk 7 stasiun dengan variabel X4-X6 , dihitung reratanya juga dengan menggunakan excel:

X1 = rerata energi pada pagi hari

X2 = rerata energi pada siang hari

X3 = rerata energi pada sore hari

X4 = rerata kecepatan arus pada pagi hari

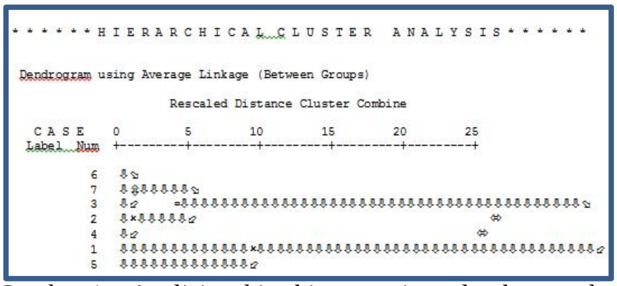
X5 = rerata kecepatan arus pada siang hari

X6 = rerata kecepatan arus pada sore hari

Tabel 1. Rerata Energi dan Rerata kecepatan arus

No	Pantai	X1	X2	X3	X4	X5	X6
2	TAL	562.06	806.31	620.36	0.22	0.22	0.24
3	TBG	37.53	2.39	0.61	0.21	0.19	0.22
4	KAMA	287.64	470.22	579.66	0.40	0.46	0.49
6	WAI	108.75	202.74	238.93	0.23	0.25	0.26
7	PIR	69.48	108.77	271.12	0.40	0.46	0.49
1	TAD	392.54	1220.15	1488.35	0.32	0.34	0.33
5	KAI	520.10	1723.94	2503.82	0.17	0.33	0.35

Setelah dilakukan analisis data menggunakan analisis cluster hierarkhi dengan menggunakan program SPSS, diperoleh hasil sebagai berikut:



Gambar 1. Analisis hirarki energi gelombang dan kecepatan arus

Dari analisis diperoleh 2 kelas.

Kelas I = Teluk 3 yaitu Pantai teluk Baguala,

Kelas II = Teluk 1 (Pantai Teluk Ambon Dalam), 2 (Pantai Teluk Ambon Luar), 4 (Pantai Kamariang), 5 (Pantai Kairatu), 6 (Pantai Waisarisa), dan 7 (Pantai Piru).

Teluk Baguala mempunyai nilai energi gelombang dan kecepatan arus yang berbeda dengan pantai yang lain. Nilai energi gelombang dan kecepatan arus di Pantai Kamariang mempunyai kemiripan dengan nilai energi gelombang dan kecepatan arus di Teluk Ambon Dalam,di Pantai Waisarisa dan Pantai Kairatu, juga mirip dengan di Pantai Piru dan Teluk Ambon Luar.

Energi gelombang berpengaruh terhadap morfologi pantai khususnya abrasi dan rekresi.

Abrasi merupakan proses pengikisan oleh energi gelombang laut dan arus laut yang bersifat merusak atau pengangkutan tanah yang tebalnya sama, terjadi di suatu permukaan tanah. Rekresi merupakan kenampakan pembentukan pantai yang maju ke arah laut berupa hadirnya daratan yang baru.

Parameter-paramater gelombang dan pola sirkulasi air laut pada daerah pantai merupakan faktor kajian yang utama karena erat kaitannya dengan proses perubahan morfologi pantai yaitu proses pengikisan (abrasi pantai) dan proses pembentukan (rekresi). Besarnya proses tersebut bergantung pada besarnya energi yang dihempaskan oleh gelombang ke pantai.

Dengan informasi parameter gelombang yang ada, jika dilakukan perhitungan dengan persamaan normalisasi CERC, maka dapat diketahui pantai mengalami abrasi, rekresi, atau pantai dalam keadaan kesetimbangan (tidak terjadi abrasi maupun rekresi).

KESIMPULAN

Kesimpulan

Berdasarkan hasil perhitungan dan analisis pada ketujuh lokasi tersebut, dapat disimpulkan bahwa energi gelombang dan kecepatan arus di Teluk Baguala memiliki karakteristik yang berbeda terhadap keenam lokasi pantai yang lain.

Saran

Sebaiknya dilakukan penelitian yang sama pada lokasi lain di Provinsi Maluku, agar dapat diperoleh informasi yang lebih lengkap tentang parameter oseanografi dan dapat dibuat pemetaan gugus pulau berdasarkan potensi wilayah kepulauan.

DAFTAR PUSTAKA

Badudu dan Zain, 2001. *Kamus Besar Bahasa Indonesia*. Balai Pustaka, Jakarta.

Dahuri, R., 1987. *Pengelolaan Sumber Daya Wilayah Pesisir dan Lautan Secara Terpadu.* Pradya Paramita, Jakarta.

Pratikto, W.A. dkk, 2000. *Struktur Pelindung Pantai*, hibah Pengajaran – Like. Teknik Kelautan, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Souisa, M., 2002. *Fisika Kelautan*, Jurusan Fisika Universitas Pattimura, Ambon.

Tarigan, M. S., 1986. *Studi Pendahuluan Energi Gelombang di Teluk Ambon Bagian Luar.* Puslitbang Oseanologi-LIPI, Ambon

Triadmodjo, B., 1996. *Pelabuhan.* Beta Offset, Yogyakarta.

Triadmodjo, B., 1999. *Teknik Pantai.* Beta Offset, Yogyakarta.

Jurnal Barekeng
Vol. 7 No. 1 Hal. 23 – 28 (2013)

INTEGRAL DELTA DAN SIFAT-SIFATNYA

Delta Integral and Properties of Delta Integral

MOZART WINSTON TALAKUA[1], MARLON STIVO NOYA VAN DELSEN[2]
[1]*Staf Jurusan Matematika, FMIPA, Unpatti*
[2]*Alumni Jurusan Matematika, FMIPA, Unpatti*
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Maluku
e-mail: ocat_08@yahoo.com; marlonnvd@gmail.com

ABSTRACT

Delta integral is the development of Riemann integral. The definition of Delta integral can be develop from definition of δ-partition with construction and constructive definition of Riemann integral. A function $f:[a,b]\to\Re$ is said to be Riemann integralable on $[a,b]$, then it is also Delta integralable. But partition of Delta integral is refine from Riemann integral. So that the value of Delta integral function f on $[a,b]$ is better with Riemann integral.

Keywords: *Delta Integral, Riemann Integral, δ-Cover Fill, δ-Partition*

PENDAHULUAN

Salah satu konsep dasar dalam matematika analisis adalah integral atau antiturunan atau antiderivatif. Ide integral sebenarnya telah muncul pada zaman Archimedes. Tetapi jika dikatakan teori integral, maka pertama kali ditemukan pada pertengahan abad ke-19. Teori integral klasik pertama kali diperkenalkan oleh Cauchy dan Riemann.

Pada tahun 1854 George F. Benhard Riemann mulai memperhalus definisi yang digunakan oleh Cauchy, dan Riemann pun mengadakan penelitian tentang integral fungsi diskontinu. Dari penelitian tersebut Riemann berhasil menemukan suatu metode khusus dari integral yang sangat mudah untuk didefinisikan, sehingga metode integral itu disebut integral Riemann, dan sebagian besar mahasiswa yang mengambil kalkulus akan mempelajari bentuk integral Riemann.

Seperti yang diketahui, setelah Riemann menemukan teori integral yang lebih baik dari teori-teori integral sebelumnya, ada banyak pengembangan penelitian dari beberapa pakar matematika yang mengakibatkan bermunculannya teori-teori integral baru yang merupakan pengembangan dari integral Riemann. Salah satu pengembangan integral Riemann adalah integral Delta yang dikembangkan oleh seorang berkebangsaan Indonesia bernama Muslich pada tahun 1997. Muslich mengembangkan tipe integral Delta dengan mencermati pengertian liput penuh-δ dan definisi konstruktif dari integral Riemann, sehingga didefinisikan teori integral Delta.

Dengan demikian dikatakan bahwa integral Delta merupakan generalisasi dari integral Riemann. Pada umumnya teori yang sering diajarkan adalah integral Riemann, padahal integral Riemann hanyalah merupakan bentuk umum dari integral Delta, dengan tujuan mendefinisikan integral Delta dan menguji sifat-sifat yang berlaku pada integral Riemann pada integral Delta.

TINJAUAN PUSTAKA

Kalkulus berhasil ditemukan sekitar tahun 1670, dan tokoh-tokoh matematika yang berperan dalam penemuan kalkulus adalah Newton dan Leibniz. Kedua tokoh ini berhasil mengembangkan teorema fundamental, yaitu yaitu mengenai anti derivative. Kemudian A. Cauchy (1789-1857) mulai mengembangkan teori tersebut, dan berhasil meneliti tentang integral dari fungsi kontinu. Pada tahun 1584, Benhard Riemann mulai memperhalus definisi yang digunakan oleh Cauchy, dan Riemann pun mengadakan penelitian tentang integral fungsi

Diskontinu. Dari penelitian tersebut Riemann berhasil menemukan sutau metode khusus dari integral yang sangat simpel untuk didefinisikan, sehingga metode integral itu disebut Integral Riemann. Kemudian pada tahun 1875 Darboux berhasil memodifikasi integral Riemann dengan mendefinisikan Integral atas dan integral bawah sehingga terdefinisi suatu integral baru yang ekuivalen dengan integral Riemann.

Seperti yang diketahui, setelah Riemann menemukan teori integral yang lebih baik dari teori-teori integral sebelumnnya, ada banyak pengembangan penelitian dari beberapa pakar matematika yang mengakibatkan bermunculannya teori-teori integral baru yang lebih konstruktif dari integral Riemann. Teori-teori integral yang berhasil ditentukan merupakan generalisasi dari integral Riemann sehingga teori-teori tersebut sering disebut sebagai integral-integral jenis Riemann. Beberapa jenis integral Riemann terus dikaji dalam penelitian-penelitian lebih lanjut, seperti di China ada beberapa karya ilmiah yang dihasilkan Ding Chuan Song, Lu Shi-Pan, Ma Zhen-Min, Li Bao-Ling dan Ye Guo-Ju. Salah satu integral jenis Riemann adalah integral Delta yang dikembangkan oleh Muslich pada tahun 1997.

Dalam mengembangkan integral Delta, diperlukan definisi-definisi, teorema-teorema, dan sifat-sifat dari liput penuh-δ serta limit dan kontinu delta.

Liput Penuh-δ

Diberikan konstanta $\delta > 0$. Untuk setiap $\xi \in [a,b]$ dibentuk selang $D_\xi = (r,s)$ dengan

$\xi - \delta < r < \xi < s < \xi + \delta$

dan D_ξ disebut selang-δ dasar di titik ξ. Selanjutnya dibentuk keluarga semua pasangan selang-δ dasar di titik itu, yaitu:

$\Delta_\xi = \{D_\xi = (r,s); \xi - \delta < r < \xi < s < \xi + \delta, \xi \in [a,b]\}$

dan Δ_ξ disebut sistem selang-δ dasar titik ξ. Sistem selang-δ dasar Δ_ξ ini memenuhi sifat-sifat sebagai berikut.

Sifat 1

Untuk setiap $D_\xi \in \Delta_\xi$ dan $(c,d) \subset [a,b]$ dengan $c < \xi < d$ maka berlaku $D_\xi \cap (c,d) \in \Delta_\xi$.

Sifat 2

Apabila $D_\xi', D_\xi'' \in \Delta_\xi$ maka $D_\xi = (D_\xi' \cap D_\xi'') \in \Delta_\xi$

Sifat 3

Apabila $D_\xi'' \in \Delta_\xi$ untuk $\alpha \in A$ dan $A \neq \varnothing$, maka $D_\xi = \bigcup_{\alpha \in A} D_\xi^\alpha \in \Delta_\xi$.

Sifat 4

Untuk setiap $D_\xi \in \Delta_\xi$, maka D_ξ memuat ξ dan $u, v \in D_\xi$ sehingga $u < \xi < v$.

Sifat 5

Apabila $D_\xi = (r,s) \in \Delta_\xi$, maka ada $u_1, v_1 \in D_\xi$ dengan $r < u_1 < \xi$ dan $\xi < v_1 < s$.

Berdasarkan definisi selang-δ dasar dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $\xi \in [a,b]$ terdapat sistem selang-δ dasar Δ_ξ di titik ξ. Selanjutnya untuk setiap $\xi \in [a,b]$ diambil tepat satu $D_\xi \in \Delta_\xi$ dan dibangun keluarga semua D_ξ yang disimbolir dengan:

$G = D_\xi; D_\xi \in \Delta_\xi, \xi \in [a,b]$

Didefinisikan liput penuh-δ (LP-δ) pada selang $[a,b]$ sebagai koleksi pasangan selang buka titik:

$\Delta = \{((u,v);\xi); u, v \in D_\xi, u \le \xi \le v, D_\xi \in G\}$

yang disebut liput penuh-δ atau disebut pula liput penuh dasar-Δ (LPD-Δ) selang $[a,b]$, sedangkan G yang membangkitkan LP-δ selang $[a,b]$ disebut pembangkit atau generator LP-δ tersebut.

Apabila Δ merupakan LP-δ selang $[a,b]$ maka partisi-δ P selang $[a,b]$ didefinisikan sebagai:

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n; b = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$$
$$= \{((x_{i-1}, x_i); \xi_i)\}$$

dengan $x_{i-1}, x_i \in D_{\xi_i}$, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ dan $D_{\xi_i} \in \Delta$.

Teorema di bawah ini mengungkapkan eksitensi partisi-δ P selang $[a,b]$ jika diberikan LP-δ.

Teorema 1

Untuk setiap LP-δ selang $[a,b]$ dapat dibangun partisi-δ P selang $[a,b]$ yaitu:

$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n; b = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$

dengan $x_{i-1}, x_i \in D_{\xi_i}$, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ dan $D_{\xi_i} \in \Delta$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sifat 6

Untuk setiap generator G dan $\xi \in [a,b]$ ada r, s dengan $r < \xi < s$ sehingga untuk setiap $u, v \in [r,s]$ berlaku $D_u \cap D_v \neq \varnothing$ dengan $D_u, D_v \in G$.

Teorema 2

Untuk setiap liput penuh-δ selang $[a,b]$ pasti memuat partisi-δ pada setiap $[c,d] \subset [a,b]$.

Teorema 3

Jika diberikan liput penuh-δ_1, Δ_1, dan liput penuh-δ_2, Δ_2, dengan $\delta_1 < \delta_2$ maka partisi-δ_1 lebih halus dari partisi-δ_2.

Sifat-sifat Dasar Integral Riemann

Diberikan $f,g:[a,b]\to\Re$ terbatas. Jika $f,g\in R[a,b]$ dan α bilangan riil maka $\alpha f\in R[a,b]$, $f+g\in R[a,b]$ dan berlaku

i. $\int_a^b \alpha f\,dx=\alpha\int_a^b f\,dx$

ii. $\int_a^b (f+g)\,dx=\int_a^b f\,dx+\int_a^b g\,dx$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pengertian Dasar dan Definisi

Diberikan konstanta $\delta>0$, dan liput liput-δ (LP-δ) selang $[a,b]$ yaitu:

$$\Delta=\{((u,v);\xi);u,v\in D_\xi,u\in\xi\in v,D_\xi\in \mathrm{G}\}$$

Adapun partisi-δ P selang $[a,b]$ yang dibangun oleh liput penuh-δ Δ didefinisikan sebagai :

$$P=\{a=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n=b;\ \xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$$
$$=\{((x_{i-1},x_i);\xi)\}$$

dengan $x_{i-1},x_i\in D_\xi$ dan $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$ dan untuk pembahasan berikutnya partisi-δ $P=\{((x_{i-1},x_i);\xi)\}$ cukup ditulis dengan $P=\{((u,v);\xi)\}$ dengan $u,v\in D_\xi$ dan $x_{i-1}\le D_\xi\le x_i$. Sedangkan eksitensi partisi-δ P selang $[a,b]$ dijamin oleh Teorema 1, dan selanjutnya Integral Delta didefinisikan dalam bentuk definisi konstruktif berdasar jumlah Riemann sebagaimana diungkap pada Definisi di bawah ini.

Definisi 1 (Integral Riemann)

Fungsi bilangan real $f:[a,b]\to\Re$ dikatakan terintegral Riemannn (terintegral-R) pada $[a,b]$ ditulis $f\in[a,b]$ jika terdapat bilangan real A sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat bilangan $\delta>0$ sehingga untuk setiap partisi

$$P=\{a=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n=b;\ \xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$$

pada $[a,b]$ yang memenuhi $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$ dan $0\le x_{i-1}-x_i\le\delta$ untuk semua $i=1,2,3,\ldots,n$ berlaku :

$$\left|(P)\sum_{i=1}^{n} f(\xi)(x_{i-1}-x_i)-\mathrm{A}\right|<\varepsilon$$

Nilai integral Riemann fungsi f pada $[a,b]$ diberikan oleh A dan dinotasikan dengan :

$$A=(R)\int_a^b f\,dx$$

Definisi 2 (Integral Delta)

Diberikan fungsi bilangan real $f:[a,b]\to\Re$.fungsi f dikatakan terintegral Delta (terintegral-R_δ) pada $[a,b]$ ditulis $f\in R_\delta[a,b]$ jika terdapat bilangan B dan liput penuh-δ sehingga untuk setiap partisi-δ $P=\{(u,v);\ \xi\}$ selang $[a,b]$ berlaku :

$$\left|(P)\sum_{i=1}^{n} f(\xi)(u-v)-\mathrm{B}\right|<\varepsilon$$

Bilangan B disebut nilai integral Delta (integral-R_δ) fungsi f pada $[a,b]$ dan dinotasikan dengan :

$$B=(R_\delta)\int_a^b f\,dx$$

dan jumlah $(P)\sum$ meliputi semua partisi-δ P selang $[a,b]$. Pada pembahasan selanjutnya notasi $R_\delta[a,b]$ dimaksud himpunan semua fungsi terintegral Delta pada $[a,b]$. Teorema berikut menunjukkan bahwa nilai integral Delta fungsi f pada $[a,b]$ adalah tunggal.

Sifat-sifat Integral Delta

Teorema 4 (Sifat Ketunggalan)

Diberikan fungsi bilangan real $f:[a,b]\to\Re$. Jika f terintegral-R_δ pada $[a,b]$ maka nilai integralnya tunggal.

Bukti :

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon>0$.Misalkan A_1 dan A_2 adalah nilai integral-R_δ fungsi f pada $[a,b]$, maka terdapat liput penuh-δ Δ_1 selang $[a,b]$ sehingga untuk setiap partisi-δ $P_1=\{((u',v');\xi')\}$ selang $[a,b]$ dengan $((u',v');\xi')\in\Delta_1$ berlaku :

$$\left|(P_1)\sum f(\xi')(v'-u')-\mathrm{A}_1\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

dan terdapat liput penuh-δ Δ_2 selang $[a,b]$ sehingga untuk setiap partisi-δ $P_2=\{((u'',v'');\xi'')\}$ selang $[a,b]$ dengan $((u'',v'');\xi'')\in\Delta_2$ berlaku :

$$\left|(P_2)\sum f(\xi'')(v''-u'')-\mathrm{A}_2\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Misalkan Δ_1 dibangkitkan oleh $\{D'_\varepsilon\}$ dan Δ_2 dibangkitkan oleh $\{D''_\varepsilon\}$. Selanjutnya didefinisikan liput penuh-δ Δ selang $[a,b]$ yang dibangkitkan oleh $\{D_\varepsilon\}$ dengan $D_\varepsilon=D'_\varepsilon\cap D''_\varepsilon$. Sehingga untuk setiap partisi-δ $P_i, i=1,2$ dan berlaku :

$$|\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_2|\le\left|\mathrm{A}_1-(\mathrm{P})\sum f(\xi)(v-\mathrm{u})+(\mathrm{P})\sum f(\xi)(v-\mathrm{u})-\mathrm{A}_2\right|$$

$$\le\left|(\mathrm{P})\sum f(\xi)(v-\mathrm{u})-\mathrm{A}_1\right|+\left|(\mathrm{P})\sum f(\xi)(v-\mathrm{u})-\mathrm{A}_2\right|$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Jadi $\mathrm{A}_1=\mathrm{A}_2$. ■

Teorema 5 (Sifat Kelinieran)
Diberikan fungsi bernilai real f dan g didefinisikan pada $[a,b]$ masing-masing terintegral-R_δ pada $[a,b]$ dan $\alpha \in \Re$, maka $f+g$ dan αf terintegral-R_δ pada $[a,b]$ dan berlaku:

a. $(R_\delta)\int_a^b (f+g)\,dx = (R_\delta)\int_a^b f\,dx + (R_\delta)\int_a^b g\,dx$

b. $(R_\delta)\int_a^b \alpha f\,dx = \alpha (R_\delta)\int_a^b f\,dx$

Bukti :
Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$.

a. Karena f dan g terintegral-R_δ pada $[a,b]$ berarti terdapat bilangan A dan terdapat liput penuh-δ Δ_1 selang $[a,b]$ sehingga untuk setiap-δ $P_1 = \{((u',v');\xi')\}$ selang $[a,b]$ dengan $((u',v');\xi') \in \Delta_1$ berlaku :

$$\left|(P_1)\Sigma f(\xi')(v'-u') - \mathrm{A}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan terdapat bilangan B dan terdapat liput penuh-δ Δ_2 selang $[a,b]$ sehingga untuk setiap-δ $P_2 = \{((u'',v'');\xi'')\}$ selang $[a,b]$ dengan $((u'',v'');\xi'') \in \Delta_2$ berlaku :

$$\left|(P_2)\Sigma f(\xi'')(v''-u'') - \mathrm{B}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Misalkan Δ_1 dibangkitkan oleh $\{D'_\varepsilon\}$ dan Δ_2 dibangkitkan oleh $\{D''_\varepsilon\}$. Selanjutnya didefenisikan liput penuh-δ Δ selang $[a,b]$ yang dibangkitkan oleh $\{D_\varepsilon\}$ dengan $D_\varepsilon = D'_\varepsilon \cap D''_\varepsilon$. Sehingga untuk setiap partisi-δ $P = \{((u,v);\xi)\}$ selang $[a,b]$ dengan $((u,v);\xi) \in \Delta$ pasti merupakan partisi-δ $P_i, i = 1,2$ dan berlaku :

$$\begin{aligned}&\left|(\mathrm{P})\Sigma(f+g)(\xi)(v-\mathrm{u}) - (\mathrm{A}+\mathrm{B})\right| \\ &\le \left|(\mathrm{P})\Sigma f(\xi)(v-\mathrm{u}) - \mathrm{A}\right| + \left|(\mathrm{P})\Sigma g(\xi)(v-\mathrm{u}) - \mathrm{B}\right| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Jadi $f+g$ terintegral-R_δ pada $[a,b]$ ke bilangan $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, sehingga

$$(R_\delta)\int_a^b (f+g)\,dx = \mathrm{A}+\mathrm{B}$$

$$= (R_\delta)\int_a^b f\,dx + (R_\delta)\int_a^b g\,dx$$

b. Demikian juga berlaku :

$$\left|(\mathrm{P})\Sigma \alpha f(\xi)(v-\mathrm{u}) - \alpha\mathrm{A}\right| \le |\alpha| \left|(\mathrm{P})\Sigma f(\xi)(v-\mathrm{u}) - \mathrm{A}\right|$$

$$\le |\alpha| + \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$$

Jadi αf terintegral-R_δ pada $[a,b]$ ke suatu bilangan $\alpha\mathrm{A}$, sehingga

$$(R_\delta)\int_a^b \alpha f\,dx = \alpha (R_\delta)\int_a^b f\,dx$$

Dengan demikian Teorema 4 terbukti. ■

Teorema 6 (Sifat Penambahan Selang)
Diberikan fungsi bernilai real $f:[a,b] \to \Re$. Jika f terintegral-R_δ pada $[a,b]$ dan $[b,c]$ maka f terintegral-R_δ pada $[a,c]$ dan berlaku :

$$(R_\delta)\int_a^b f\,dx + (R_\delta)\int_b^c f\,dx = (R_\delta)\int_a^c f\,dx$$

Bukti :
Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Misalakan $\mathrm{A} = (R_\delta)\int_a^b f\,dx$ dan $\mathrm{B} = (R_\delta)\int_b^c f\,dx$ berarti terdapat liput penuh-δ Δ_1 selang $[a,b]$ sehingga untuk setiap-δ $P_1 = \{((u',v');\xi')\}$ selang $[a,b]$ dengan $((u',v');\xi') \in \Delta_1$ berlaku :

$$\left|(P_1)\Sigma f(\xi')(v'-u') - \mathrm{A}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan terdapat bilangan B dan terdapat liput penuh-δ Δ_2 selang $[b,c]$ sehingga untuk setiap-δ $P_2 = \{((u'',v'');\xi'')\}$ selang $[b,c]$ dengan $((u'',v'');\xi'') \in \Delta_2$ berlaku :

$$\left|(P_2)\Sigma f(\xi'')(v''-u'') - \mathrm{B}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Misalkan Δ_1 dibangkitkan oleh $\{D'_\varepsilon\}$ dan Δ_2 dibangkitkan oleh $\{D''_\varepsilon\}$, kemudian dibentuk liput penuh-δ Δ selang $[a,c]$ yang dibangkitkan oleh $\{D_\varepsilon\}$ dengan

$$D_\varepsilon = \begin{cases} D'_\varepsilon \text{ jika } \xi \in [a,b) \\ D_b \text{ jika } \xi = b \\ D''_\varepsilon \text{ jika } \xi \in (\mathrm{b},\mathrm{c}] \end{cases}$$

Jika $P = \{a = a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n = c;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ merupakan partisi-δ selang $[a,c]$ maka terdapat suatu k, sehingga $b \in [a_{k-1}, a_k], k = 1, 2, \ldots, n$, .
Mudah dipahami bahwa:
$P' = \{a = a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} = b;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, b\}$ merupakan partisi-δ selang $[a,b]$ dengan $((u',v');\xi') \in \Delta_1$ dan
$P'' = \{b, a_k, a_{k+1}, \ldots, = c;\ b, \xi_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n\}$

merupakan partisi-δ selang $[b,c]$ dengan $((u'',v'');\xi'')\in\Delta_2$.

Sehingga diperoleh :

$$\left|(\mathrm{P})\Sigma f(\xi)(v-\mathrm{u})-(\mathrm{A}-\mathrm{B})\right|$$
$$\leq\left|(\mathrm{P})\Sigma f(\xi)(v-\mathrm{u})-\mathrm{A}\right|+\left|(\mathrm{P})\Sigma f(\xi)(v-\mathrm{u})-\mathrm{B}\right|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

Jadi terbukti bahwa $f\in R_\delta[a,c]$ dan berlaku :

$$(R_\delta)\int_a^c f\,dx=\mathrm{A}+\mathrm{B}$$
$$=(R_\delta)\int_a^b f\,dx+(R_\delta)\int_b^c f\,dx$$

Teorema 7 (Kriteria Cauchy)

Diberikan fungsi bernilai real $f:[a,b]\to\Re$.

Fungsi $f\in R_\delta[a,b]$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat liput penuh-δ selang $[a,b]$ sehingga untuk setiap dua partisi-δ $P_1=\{(u',v');\xi\}$ dan $P_2=\{(u'',v'');\xi\}$ selang $[a,b]$ berlaku :

$$\left|P_1\Sigma f(\xi')(v'-u')-P_2\Sigma f(\xi'')(v''-u'')\right|<\varepsilon$$

Bukti :

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon>0$.

(i) Syarat Perlu.

Diketahui $f\in R_\delta[a,b]$ maka terdapat liput penuh-δ Δ selang $[a,b]$ sehingga untuk setiap dua partisi-δ $P_1=\{(u',v');\xi\}$ dan $P_2=\{(u'',v'');\xi\}$ selang $[a,b]$ dengan $((u',v');\xi)((u'',v'');\xi)\in\Delta$ berlaku :

$$\left|R_\delta\int_a^b f\,dx-P_1\Sigma f(\xi')(v'-u')\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$
$$\left|R_\delta\int_a^b f\,dx-P_2\Sigma f(\xi'')(v''-u'')\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

Sehingga diperoleh :

$$\left|P_1\Sigma f(\xi')(v'-u')-P_2\Sigma f(\xi'')(v''-u'')\right|$$
$$\leq\left|P_1\Sigma f(\xi')(v'-u')-R_\delta\int_a^b f\,dx\right|$$
$$+\left|P_2\Sigma f(\xi'')(v''-u'')-R_\delta\int_a^b f\,dx\right|$$
$$\leq\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon$$

(ii) Syarat Cukup.

Ambil suatu partisi-δ $P_1=\{(u',v');\xi\}$ selang $[a,b]$ dengan $((u',v');\xi)\in\Delta$ maka nilai $P_1\Sigma f(\xi')(v'-u')$ berhingga sehingga koleksi

$$\mathcal{A}=\{P_1\Sigma f(\xi')(v'-u');P_1=\text{partisi-}\delta\text{ selang }[a,b]\}$$

Merupakan himpunan bilanagan real terbatas. Karena banyaknya $\mathcal{A}$ tak berhingga maka $\mathcal{A}$ mempunyai titik limit, sebut A. jadi diperoleh :

$$\left|P_1\Sigma f(\xi')(v'-u')-A\right|<\varepsilon$$

Berarti untuk setiap partisi-δ $P=\{(u,v);\xi\}$ selang $[a,b]$ dengan $(u,v);\xi\in\Delta$ berlaku :

$$\left|P\Sigma f(\xi)(v-u)-A\right|$$
$$\leq\left|P\Sigma f(\xi)(v-u)-P_1\Sigma f(\xi')(v'-u')\right|$$
$$+\left|P_1\Sigma f(\xi')(v'-u')-A\right|$$
$$<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

Jadi $f\in R_\delta[a,b]$.

Contoh 1

Diberikan fungsi bernilai real $f:[0,2]\to\Re$ dengan

$$f(x)=\begin{cases}1,0\leq x<1\\2,1\leq x\leq 2\end{cases}$$

akan ditunjukkan $f\in R_\delta[0,2]$.

Diberikan sebarang $\varepsilon>0$ dan ambil sebarang partisi

$$P'=\left\{0,1-\delta,1+\delta,2;\frac{1-\delta}{2},\frac{2-\delta}{2},\frac{3+\delta}{2}\right\}$$

dan

$$P''=\left\{0,1-2\delta,1+2\delta,2;\frac{1-\delta}{2},\frac{2-\delta}{2},\frac{3+\delta}{2}\right\}$$

Diperoleh :

$$P'\Sigma f(\xi')(v'-u')$$
$$=f(\xi_1')(1-\delta-0)$$
$$+f(\xi_2')(1+\delta-(1-\delta))+f(\xi_3')(2-(1+\delta))$$
$$=f\left(\frac{1-\delta}{2}\right)(1-\delta)+f\left(\frac{2-\delta}{2}\right)(2\delta)+f\left(\frac{3+\delta}{2}\right)(1-\delta)$$
$$=1(1-\delta)+1(2\delta)+2(1-\delta)$$
$$=1-\delta+2\delta+2-2\delta$$
$$=3-\delta$$

$$P''\Sigma f(\xi'')(v''-u'')$$
$$=f(\xi_1'')(1-2\delta-0)+f(\xi_2'')(1+2\delta-(1-2\delta))$$
$$+f(\xi_3')(2-(1+2\delta))$$
$$=f\left(\frac{1-\delta}{2}\right)(1-2\delta)+f\left(\frac{2-\delta}{2}\right)(4\delta)$$
$$+f\left(\frac{3+\delta}{2}\right)(1-2\delta)$$
$$=1(1-2\delta)+2(4\delta)+2(1-2\delta)$$
$$=1-2\delta+8\delta+2-4\delta$$
$$=3+2\delta$$

Sehingga diperoleh

$$\left|P'\Sigma f(\xi')(v'-u')-P''\Sigma f(\xi'')(v''-u'')\right|$$
$$=\left|3-\delta-(3+2\delta)\right|$$
$$=\left|3-\delta-3-2\delta\right|=3\delta$$

Dengan mengambil $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$ maka menurut Kriteria Cauchy (Teorema 6) berakibat $f \in R_\delta[0,2]$.

Contoh 2

Diberikan fungsi Dirichlet $f:[0,1] \to \Re$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} 1, x = \text{rasional} \\ 0, x = \text{irrasional} \end{cases}$$

akan ditunjukkan $f \in R_\delta[0,1]$.

Diberikan sebarang $\varepsilon > \frac{1}{2}$. Dipilih partisi-$\delta$

$$P' = \{0 = x_0', x_1', ..., x_n' = 1; \xi_1', \xi_2', ..., \xi_n'\}$$

dengan $\xi_i' = $ rasional, dan partisi-δ

$$P'' = \{0 = x_0'', x_1'', ..., x_n'' = 1; \xi_1'', \xi_2'', ..., \xi_n''\}$$

dengan $\xi_i'' = $ irrasional.

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} P'\sum f(\xi')(v'-u') &= P'\sum 1(v'-u') \\ &= 1(P'\sum(v'-u')) \\ &= 1(1-0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P''\sum f(\xi'')(v''-u'') &= P''\sum 0(v''-u'') \\ &= 0(P''\sum(v''-u'')) \\ &= 0(1-0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dan

$$\left|P'\sum f(\xi')(v'-u') - P''\sum f(\xi'')(v''-u'')\right| = |1-0| = 1 > \varepsilon$$

Menurut Kriteria Cauchy berakibat $f \notin R_\delta[0,1]$

KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan dan uraian pada bab-bab sebelumnya maka dapat diambil beberapa kesimpulan antara lain :

1. Diberikan fungsi bilangan riil $f:[a,b] \to \Re$. Fungsi f dikatakan terintegral Delta (terintegral-R_δ) pada $[a,b]$ ditulis $f \in R_\delta[a,b]$ jika terdapat bilangan B dan liput penuh-δ sehingga untuk setiap partisi-δ $P = \{(u,v);\xi\}$ selang $[a,b]$ berlaku:

   $$\left|(P)\sum_{i=1}^{n} f(\xi)(u-v) - B\right| < \varepsilon$$

   Bilangan B disebut nilai integral Delta (integral-R_δ) fungsi f pada $[a,b]$ dan dinotasikan dengan:

   $$B = (R_\delta)\int_a^b f\,dx$$

Secara umum sifat-sifat dasar yang berlaku pada integral Riemann berlaku juga pada integral Delta sebagai berikut: sifat ketunggalan, kelinieran, penambahan selang dan kriteria Cauchy.

DAFTAR PUSTAKA

Gordon, R, A., (1994), *The Integrals Of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock., Graduate Studies In Mathematics 4*, Volume 4., American Mathematical Society.,USA.

Hutahaean, E., (1989), *Analisis Real II*, Penerbit Karunika, Universitas Terbuka, Jakarta.

Jain, P. K. and Gupta, V. P., (1986), *Lebesgue Measure and Integration*. Wiley Eastern Limited, New Delhi.

Royden, H, L., (1989), *Real Analysis*, Third Edition, Macmillan Publishing Company, New York.

Soeparna, D., (2006), *Pengantar Analisis Real*, Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Soeparna, D., (2006), *Pengantar Analisis Abstrak*, Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Muslich, (2005), *Analisis Real II*, Lembaga Pengembangan Pendidikan,Surakarta.

Jurnal Barekeng
Vol. 7 No. 1 Hal. 29 – 30 (2013)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

KOMUTATOR DAN IDENTITAS KOMUTATOR

Commutator and Commutator Identity

ABDUL HALIM MAHMUD[1], **ELVINUS RICHARD PERSULESSY**[2], **HENRY W. M. PATTY**[3]
[1]*Pegawai BPS Kabupaten Buru Provinsi Maluku*
Jl. Sultan Babullah No. 1, Namlea – Kabupaten Buru, Maluku
[2,3]*Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI*
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Maluku
e-mail: richardelvinus@yahoo.com, henry_4t00@yahoo.com

ABSTRAK

Senter $\boldsymbol{Z(R)}$ adalah himpunan semua elemen yang komutatif dengan setiap elemen dalam ring $\boldsymbol{R}$. Elemen-elemen yang saling komutatif dengan karakteristik tertentu membentuk struktur komutator. Lebih lanjut komutator merupakan dasar bagi terbentuknya identitas-identitas komutator.

Kata kunci : *Identitas komutator, komutator, ring.*

PENDAHULUAN

Himpunan $R \neq \emptyset$ merupakan ring jika terhadap operasi penjumlahan, R grup abelian, terhadap operasi pergandaan R tertutup dan asosiatif, serta memenuhi distributif kiri dan kanan. Selanjutnya elemen di R yang komutatif dengan setiap elemen di R jika dikumpulkan akan membentuk senter untuk ring R yang dinotasikan dengan $Z(R)$.

Dibutuhkan sebarang dua elemen yang komutatif di R untuk membentuk sifat komutatif. Artinya dua elemen ini mempunyai kemampuan yang sama untuk bertukar posisi satu dengan yang lain. Selanjutnya elemen-elemen ini dengan karakteristik tertentu yaitu selisih dari perkalian sebarang dua elemen yang saling komutatif membentuk struktur baru yang dinamakan komutator.

Struktur komutator merupakan landasan teori bagi terbentuknya identitas-identitas komutator. Hal-hal tersebut yang melatarbelakangi penelitian ini.

TINJAUAN PUSTAKA

Istilah ring pertama kali diperkenalkan oleh David Hilbert (1862-1943), tetapi sebatas pendekatan definisi yang masih abstrak. Himpunan R dikatakan ring jika terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan padanya, R memenuhi sifat-sifat yaitu terhadap operasi penjumlahan, R adalah grup abelian, terhadap operasi pergandaan R memenuhi sifat tertutup dan asosiatif serta terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan R memenuhi sifat distributif kiri dan distributif kanan. (Fraleigh, 2000)

Diberikan R ring dengan senter $Z(R)$ dan $x, y \in R$. Komutator (*commutator*) $xy - yx$ dinotasikan dengan $[x, y]$. (Thaheem, 2005). Pada identitas komutator berlaku sifat-sifat penjumlahan (Atteya, 2010).

Definisi 1 (Ring)
Himpunan $R \neq \emptyset$ dengan dua operasi biner, penjumlahan "+" dan pergandaan "**.**" disebut mempunyai struktur suatu ring, selanjutnya R disebut Ring (Gelanggang) jika memenuhi aksioma-aksioma:

I. Terhadap penjumlahan $\langle R, + \rangle$ merupaka grup abelian, yaitu
   1. Tertutup
      $(\forall\, a, b \in R)\ (\exists!\, c \in R\ )\ a + b = c$
   2. Asosiatif
      $(\forall\, a, b, c \in R)\ (a + b) + c = a + (b + c)$
   3. Ada elemen netral
      $(\exists\, e \in R\ )(\forall\, a \in R)\ e + a = a + e$
   4. Setiap elemen R mempunyai invers
      $(\forall\, a \in R)(\exists - a \in R)\ a + (-a) = (-a) + a = 0$
   5. Komutatif
      $(\forall\ a, b \in R)\ a + b = b + a$

II. Terhadap pergandaan $\langle R, \cdot \rangle$ memenuhi sifat
   6. Tertutup
      $(\forall\, a, b \in R)\ (\exists!\, c \in R\ )\ a \cdot b = c$

7. Asosiatif
   $(\forall\ a, b, c \in R)\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

III. Distributif
8. Distributif kiri
   $(\forall\ a, b, c \in R)\ a \cdot (b + c) = \ a \cdot b + a \cdot c$
9. Distributif kanan,
   $(\forall\ a, b, c \in R)\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Definisi 2 (Senter Dari Ring)
Jika R ring, senter dari R adalah $Z(R)$, didefinisikan oleh
$$Z(R) = \{z \in R | zx = xz, \forall\ x \in R\}$$

Definisi 3 (Ring Komutatif)
Suatu ring R dikatakan ring yang komutatif jika R memenuhi sifat komutatif terhadap operasi " $\cdot$ ", yaitu
$$(\forall\ a, b \in R)\ a \cdot b = b.a$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini disajikan definisi komutator dan identitas komutator disertai teorema pendukungnya.

Komutator

Definisi 4
Diberikan R ring dengan senter $Z(R)$ dan $x, y \in R$. Komutator (*commutator*) $xy - yx$ dinotasikan dengan $[x, y]$. Atau dengan simbol logika dapat didefinisikan sebagai berikut.
$$(\forall\ x, y \in R)\ [x, y] = xy - yx$$
Dalam penelitian ini komutator $xy - yx$ ditulis $xy - yx$.

Identitas Komutator
Teorema 1
Jika R ring dengan pusat $Z(R)$, maka $(\forall\ a, b, x, y, \in R)$ berlaku identitas-identitas komutator (*commutator identities*) berikut ini :
(i) $[a, xy] = x[a, y] + [a, x]y$
(ii) $[ax, y] = a[x, y] + [a, y]x$
(iii) $[ax + xb\ , x] = [ax, x] + [xb, x]$

Bukti
(i) Akan ditunjukkan $[a, xy] = x[a, y] + [a, x]y$
$$\begin{aligned}[a, xy] &= axy - xya \\ &= (xay - xay) + axy - xya \\ &= (xay - xya) + (axy - xay) \\ &= x(ay - ya) + (ax - xa)y \\ &= x[a, y] + [a, x]y\end{aligned}$$
(ii) Akan ditunjukkan $[ax, y] = a[x, y] + [a, y]x$
$$\begin{aligned}[ax, y] &= axy - yax \\ &= axy + (-ayx + ayx) - yax \\ &= (axy - ayx) + (ayx - yax) \\ &= a(xy - yx) + (ay - ya)x \\ &= a[x, y] + [a, y]x = 0\end{aligned}$$
(iii) Akan ditunjukkan $[ax + xb\ , x] = [ax, x] + [xb, x]$
$$\begin{aligned}[ax + xb\ , x] &= (ax + xb)\ x - x(ax + xb) \\ &= (axx + xbx) - (xax + xxb) \\ &= axx + xbx - xax - xxb \\ &= (axx - xax) + (xbx - xxb) \\ &= [ax, x] + [xb, x]\ \blacksquare\end{aligned}$$

Bentuk (i) dan (ii) pada Teorema 1 disebut identitas komutator dasar (*basic commutator identities*). Sedangkan (iii) merupakan identitas komutator yang ditambahkan untuk mendukung pembahasan.

KESIMPULAN

Dari pembahasan tersebut dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

Untuk membentuk sifat komutatif di R dibutuhkan dua elemen. Dua elemen dikatakan saling komutatif jika keduanya mempunyai kemampuan yang sama untuk bertukar posisi satu dengan yang lain. Selanjutnya selisih dari perkalian kedua elemen ini dapat membentuk struktur baru yang dinamakan komutator.

DAFTAR PUSTAKA

Atteya, M. J. 2010. On Generalized Derivations Of Semiprime Rings. *International Journal of Algebra*, **4**(12) : 591-598.

Fraleigh, J.B. 2000. *A First Course In Abstract Algebra.* Sixth Edition. Addison-Wesley Publishing Company, Massachussets.

Thaheem, A.B. 2005. On Some Properties Of Derivation On Semiprime Rings. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **29**(6) : 1143-1152.

Jurnal Barekeng
Vol. 7 No. 1 Hal. 31 – 35 (2013)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

ALJABAR-C^* KOMUTATIF

Commutative C-algebra*

HARMANUS BATKUNDE
Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Maluku
e-mail: batkunde@yahoo.com

ABSTRACT

These notes in this paper will discuss about C^*-algebras commutative and its properties. The theory of algebra-*, Banach-* algebra, C^*-algebras and *-homomorphism are included. We also give some examples of commutative C^*-algebras. We shall prove and discuss some important properties of commutative C^*-algebras and *-homomorphism.

Keywords : **-homomorphism, C*-algebras, commutative C*-algebras*.

PENDAHULUAN

Banyak konsep dalam analisis fungsional maupun aljabar telah memberikan banyak sumbanagan dalam pengembangan ilmu matematika, baik yang diterapkan langsung maupun yang memperkaya teori-teori matematika yang terus dipakai dalam pengembangan teori lainnya.

Aljabar-C^* (dibaca: aljabar C bintang/star) adalah salah satu konsep lanjut yang dihasilkan dari tinjauan-tinjauan lanjut dari konsep-konsep pada analisis fungsional dan konsep operator aljabar. Lebih lanjut berbagai teori dasar dari aljabar-C^* akan turut dijelaskan dalam penulisan ini, salah satunya adalah aljabar-C* komutatif. Beberapa sifat maupun syarat suatu aljabar-C* dapat dikelompokan dalam aljabar-C* komutatif akan dibahas sekaligus akan ditunjukkan beberapa contoh dari aljabar-C* komutatif.

TINJAUAN PUSTAKA

Penelitian mengenai aljabar-C* dimulai dengan oleh Werner Heisenberg dan dalam suatu pengembangan lebih lanjut yang lebik matematik dari Pasqal Jordan sekitar tahun 1933. [4]

Selanjutnya John Von Neumann mencoba menyusun kerangka umum aljabar ini yang kemudian diterbitkan dalam kumpulan tulisan pada operator ring. Tulisan ini disebut sebagai kelas khusus dari aljabar-C^* yang dikenal sebagai aljabar Von Neumann. [7]

Sekitar tahun 1940an, C. E. Rickart mendeskripsikan aljabar-B* yang kemudian dikenal sebagai aljabar Banach-* [9]. Kemudian di tahun yang sama yaitu tahun 1943, penelitian dari Israel Gelfam dan Mark Naimark menghasilkan suatu karakterisasi abstrak dari aljabar-C^*, yang kemudian berlanjut dengan aljabar-C* komutatif. [3]

Definisi 1. (Ruang norm, ruang Banach)
Misalkan X adalah suatu ruang vektor. Suatu fungsi $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi:

1) $\|x\| \geq 0$; untuk setiap $x \in X$;
   $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$;
2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$; untuk setiap $x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$;
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; untuk setiap $x, y \in X$;

disebut **norm** pada X dan pasangan $(\|\cdot\|, X)$ disebut **ruang norm**. Lebih lanjut, ruang norm yang lengkap (terhadap normnya) disebut **ruang Banach.**

Definisi 2. (Fungsional linear terbatas, ruang dual)
Suatu **fungsional linear** f adalah suatu pemetaan linear dengan domain suatu ruang vector X dan *range*-nya berupa lapangan K, dengan demikian :

$$f : D(f) \to K.$$

Di sini, $K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$. Jika ada $c \in \mathbb{R}$

sehingga $|f(x)| \leq c\|x\|$ dengan $x \in X$ maka f disebut **fungsional linear terbatas**.

Himpunan semua fungsional linear terbatas di X membentuk suatu ruang norm dengan norm yang didefinisikan oleh

$$\|f\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, \|x\|=1} |f(x)|.$$

Himpunan ini disebut **ruang dual** dari X dan dinotasikan dengan X^*

Definisi 3. (Aljabar, aljabar komutatif)

Aljabar A atas lapangan K dengan sifat

$$x, y \in A, \text{ maka } xy \in A,$$

yang memenuhi sifat-sifat:

(1) $(xy)z = x(yz)$;

(2) $x(y + z) = xy + xz$;
$(x + y)z = xy + yz$;

(3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$;

untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $\alpha \in K$. Dalam hal ini $K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$.

Lebih lanjut A disebut komutatif jika perkaliannya komutatif, yaitu untuk setiap $xy \in A$ berlaku:

$$xy = yx,$$

dan A disebut aljabar dengan elemen satuan jika terdapat suatu $e \in A$ sehingga untuk setiap $y \in A$ berlaku:

$$ex = xe = x,$$

e merupakan elemen satuan.

Definisi 4. (Aljabar bernorm, aljabar Banach)

Misalkan A adalah suatu ruang norm, jika A adalah aljabar, maka A disebut aljabar bernorm. Dimana A merupakan suatu aljabar, sedemikian hingga untuk setiap $x, y \in A$, berlaku:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|,$$

dan jika A memiliki elemen satuan e,

$$\|e\| = 1.$$

Aljabar bernorm yang lengkap (terhadap normnya) disebut **aljabar Banach.**

Definisi 5. (involusi, aljabar-*, aljabar Banach-*)

Suatu pemetaan $* : A \to A$ $(a \mapsto a^*)$, dengan A adalah ruang vektor atas lapangan K, disebut **involusi** jika memenuhi sifat:

1. $x^{**} = x$;
2. $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha} x^* + \bar{\beta} y^*$;
3. $(xy)^* = y^* x^*$;

untuk setiap $x, y \in A$ dan $\alpha, \beta \in K$.

Suatu aljabar yang dilengkapi involusi disebut aljabar-* (baca: aljabar bintang/star) **.**

Sedangkan aljabar Banach yang dilengkapi dengan involusi dan memenuhi sifat:

4. $\|x^*\| = \|x\|$,

disebut **Aljabar Banach-***.

Definisi 6.

Misalkan A adalah aljabar-*. Maka $x \in A$ disebut

Self-adjoint jika $x = x^*$.

Normal jika $xx^* = x^* x$.

Proyeksi jika x self adjoint dan $x^2 = x$.

Isometri parsial jika $x^* x$ adalah proyeksi.

Isometri jika $x^* x = 1$.

Coisometri jika $xx^* = 1$.

Uniter jika x adalah isometri dan coisometri.

Definisi 7.

Suatu **fungsional linear multiplikatif** pada suatu aljabar Banach tak nol A adalah homomorfisma tak nol dari A ke $\mathbb{C}$. Himpunan semua funsional linear multiplikatif pada A disebut **ruang ideal maksimal**, dan dinotasikan dengan $\Omega(A)$.

Teorema 8.

Misalkan A adalah aljabar Banach komutatif dengan elemen satuan,

1) Jika $\phi \in (A)$, maka $\|\phi\| = 1$.
2) Ruang $\Omega(A)$ tak kosong, dan pemetaan $\phi \mapsto ker(\phi)$ adalah suatu bijeksi dari $\Omega(A)$ pada pada himpunan semua ideal maksimal dari A.

Bukti.

1) Andaikan $\phi \in \Omega(A)$ dan $a \in$ A sedemikian hingga $\|a\| < 1 = \phi(a)$. Misalkan $b = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$. Maka $a + ab = b$, dan
$$\phi(b) = \phi(a) + \phi(a)\phi(b) = 1 + \phi(b).$$
Hal ini tidaklah mungkin. Jadi, $\|\phi\| \leq 1$. Karena $\phi(1) = 1$, maka terbukti bahwa $\|\phi\| = 1$.

2) Misalkan $\phi \in \Omega(A)$, berlaku bahwa $M = ker\phi$ adalah suatu ideal tutup dari kodimensi 1 pada A, dengan demikan merupakan maksimal. Jika $\phi_1, \phi_2 \in \Omega(A)$ dan $ker\phi_1 = ker\phi_2$, maka untuk setiap $a \in A, a - \phi_2(a) \in ker\phi_1$. Hal ini mengakibatkan $\phi_1(a - \phi_2(a)) = 0$ atau $\phi_1(a) = \phi_2(a)$. Ini menunjukkan bahwa pemetaan ini satu-satu.
Sebaliknya, jika M adalah ideal maksimal, maka $d(M, 1) \geq 1$ karena bola buka satuan dengan pusat 1, memuat elemen-elemen yang dapat dibalik, sehingga closure dari M tetap tidak memuat 1.
Kemudian, dapat dilihat bahwa closure juga merupakan ideal, lebih lanjut merupakan ideal sejati. Disimpulkan bahwa M sendiri tutup. Jadi kuosien A/M adalah aljabar Banach komutatif sederhana, dan

karena satu-satunya aljabar Banach komutatif sederhana adalah $\mathbb{C}$ maka pemetaan kuosien ϕ memberikan suatu homomorfisma kontinu dari $A \to \mathbb{C}$. Lebih lanjut, pemetaan ini bijektif.
Untuk melihat bahwa $\Omega(A)$ tak kosong, kita asumsikan $A \neq \mathbb{C}$, (jika tidak, identifikasi A dengan $\mathbb{C}$ menghasilkan homomorfisma tak nol) jadi A tidak sederhana.
Misalkan I adalah suatu ideal sejati dari A. Karena A memiliki identitas, maka terdapat suatu ideal sejati maksimal dari A yang memuat I. ∎

Definisi 9. (aljabar -*C)**

Suatu aljabar Banach-* yang memenuhi:

$$\|x^*x\| = \|x\|^2,$$

disebut **aljabar -*C**.**
Persamaan (6) disebut aksioma-*C** atau kondisi -*C**.

Lebih lanjut dapat dilihat bahwa untuk suatu aljabar Banach-* A, involusinya adalah isometrik, yaitu:

$$\|x-y\| = \|(x-y)^*\| = \|x^* - y^*\|.$$

Contoh 10.

1. Diberikan suatu ruang Hilbert kompleks H dan $\mathcal{B}(H)$ adalah himpunan semua operator linier terbatas pada H. $\mathcal{B}(H)$ adalah aljabar-C*. Lebih lanjut, setiap subaljabar-* dari $\mathcal{B}(H)$ yang tertutup terhadap normnya merupakan aljabar-C*, aljabar-C* ini disebut aljabar-C* konkrit.
2. Misalkan X adalah suatu ruang Hausdorff kompak local dan $C_0(X)$ adalah himpunan semua fungsi-fungsi kontinu yang bernilai 0 saat menuju tak hingga. Definisikan $f^*(t) = \overline{f(t)}$ (untuk $t \in X$). Maka $C_0(X)$ adalah aljabar-*. Dengan $\|f\| = \mathrm{Sup}_{t\in X}|f(t)|$, $C_0(X)$ adalah aljabar-*C**. Lebih lanjut, $C_0(X)$ memiliki elemen satuan jika dan hanya jika X kompak.

Definisi 11. (Homomorfisma-*)

Jika A_1 dan A_2 masing-masing adalah aljabar-*C**, suatu **homomorfisma-*** $\phi: A_1 \to A_2$ adalah suatu homomorfisma aljabar sedemikian sehingga

$$\phi(x^*) = \phi(x)^*; x \in A_1.$$

Lebih lanjut, homomorfisma-* yang bijektif dari A_1 ke A_2 disebut **isomorfisma.**

Proposisi 12.

Jika A adalah aljabar-*C**, maka proyeksi taknol memiliki norm 1. Lebih lanjut jika x uniter, maka

$$\sigma(x^{-1}) = \{\lambda^{-1}: \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Bukti.

Jika x adalah proyeksi taknol, maka $\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|x^2\| = \|x\|$, dengan demikian $\|x\| = 1$. Jika x uniter maka $xx^* = 1$ (ini adalah invertible dengan involusi sebagai inversnya) ∎

Proposisi 13.

Terdapat paling banyak satu norm pada suatu aljabar-* A yang membuat A menjadi suatu aljabar-*C**.

Bukti.

Misalkan $\|\cdot\|_1$ dan $\|\cdot\|_2$ adalah dua norm di aljabar-* A yang membuatnya menjadi suatu aljabar-*C**, maka

$$\|x\|_i^2 = \|x^2 x\| = \sup\{|\lambda|: \lambda \in \sigma(x^*x)\}; \mathrm{i} = 1{,}2.$$

Dengan demikian $\|x\|_1$ dan $\|x\|_2$. ∎

Proposisi 14.

Misalkan A adalah suatu aljabar-*C** dan $x \in A$, dimana x self-adjoint, maka $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$. Jika $u \in A$ uniter, maka $\sigma(u)$ subhimpunan dari suatu lingkaran satuan.

Bukti.

Misalkan u uniter dalam suatu aljabar-*C** A dengan elemen satuan dan $\lambda \in \sigma(x)$.
Karena $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|1\|, |\lambda| \leq 1$. Perhatikan bahwa $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1})$. Karena $u^{-1} = u^*$ uniter, kita simpulkan bahwa $|\lambda| = 1$. Untuk $x \in A$ uniter, dengan mempertimbangkan $\widetilde{A}$, kita asumsikan A memiliki elemen satuan.
Fungsi $\exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}$. Dapat dilihat bahwa $u = \exp(ix)$ uniter (dengan $u^* = \exp(-\mathrm{i}x)$),
Jika $\lambda \in \sigma(x)$ dan $b = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^n(x-\lambda)^{n-1}}{n}$, maka

$$\begin{aligned} e^{ix} - e^{i\lambda} &= \left(e^{i(x-\lambda)} - 1\right)e^{i\lambda} \\ &= (x-\lambda)be^{i\lambda}. \end{aligned}$$

Karena b komutatif dengan x, dan $x - \lambda$ tidak invertible, $\exp(ix) - e^{i\lambda}$. Dengan demikian $|e^{i\lambda}| = 1$, dan oleh karena itu $\lambda \in \mathbb{R}$. Dengan kata lain, $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$. ∎

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 15.

Misalkan A adalah aljabar Banach komutatif.

1. Jika $\phi \in \Omega(A)$, maka $\|\phi\| = 1$
2. $\Omega(A)$ tak kosong, dan pemetaan $\phi \mapsto \ker(\phi)$ mendefinisikan suatu bijeksi dari $\Omega(A)$ ke himpunan semua ideal maksimal dari A.

Bukti.

1. Andaikan $\phi \in \Omega(A)$ dan $a \in A$ sedemikian sehingga $\|a\| < 1 = \phi(a)$. Misalkan $b = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$.
Maka $a + ab = b$, dan

$$\phi(b) = \phi(a) + \phi(a)\phi(b) = 1 + \phi(b).$$

Kontradiksi, jadi $\|\phi\| \leq 1$. Karena $\phi(1) = 1$, dengan demikian terbukti bahwa $\|\phi\| = 1$.

2. Misalkan $\phi \in \Omega(a)$, maka berlaku bahwa $M = \ker(\phi)$ adalah ideal tutup kodimensi 1 dari A, dengan demikian merupakan suatu maksimal.
   Jika $\phi_1, \phi_2 \in \Omega(A)$ dan $\ker(\phi_1) = \ker(\phi_2)$, maka untuk setiap $a \in A, a - \phi_2(a) \in \ker(\phi_1)$. Hal ini mengakibatkan $\phi_1(a) = \phi_2(a)$, atau pemetaannya satu-satu.
   Sebaliknya, jika M adalah suatu maksimal ideal, maka $(M, 1) \geq 1$. Karena bola buka satuan dengan pusat 1 hanya memuat elemen-elemen yang memiliki invers, maka berlaku bahwa closure dari M tidak termuat.
   Perhatikan bahwa closure adalah sebuah ideal, jadi merupakan ideal sejati.
   Dengan demikian disimpulkan bahwa M tutup, sehingga A/M adalah suatu aljabar Banach komutatif sederhana.
   Diketahui bahwa $A/M = \mathbb{C}$. Jadi pemetaaan quotient membrikan suatu homomorfisma dari $A \to \mathbb{C}$ dengan $\ker(\phi) = M$. Lebih lanjut pemetaan ini bijektif. Selanjutnya dapat dilihat bahwa Ω(A) tak kosong. ■

Proposisi 16.

Misalkan A adalah aljabar-C* dan $x \in A$ normal. Maka

$$r(x) = \|x\|.$$

Bukti.

Aksioma-C* mengakibatkan $\|x^*x\| = \|x\|^2$. Perhatikan juga bahwa xx^* adalah self-adjoint. Dengan demikian diperoleh $\|(x^*x)^2\| = \|x^*x\|^2 = \|x\|^4$. Dengan induksi matematika diperoleh $\left\|(x^*x)^{2^n}\right\| = \|x\|^{2^{n+1}}$.

$$\begin{aligned}
r(x) &= \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \|x^{2n}\|^{2^{-n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \|x^{2n}\|^{2^{(-n-1)+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\|((x^*)^{2n} x^{2n})^{2^{-n-1}}\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\|((x^*x)^{2n})^{2^{-n-1}}\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\|(x^*x)^{2^{-1}}\right\| \\
&= \|x^*x\|^{\frac{1}{2}} \\
&= (\|x\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|x\|.
\end{aligned}$$
■

Definisi 17. (Aljabar-C* satuan dan komutatif)

Suatu aljabar-C* disebut a**ljabar-C* satuan** jika memiliki elemen satuan. Jika A adalah aljabar-C* dalamnya berlaku sifat komutatif perkalian yakni,

$$xy = yx$$

disebut **aljabar-C* komutatif.**

Contoh 18.

1. $M_n(\mathbb{C})$ yakni himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ adalah aljabar C-* dengan operator norm dan involusi Hermitian. Lebih lanjut. $M_n(\mathbb{C})$ bukan merupakan aljabar-C* komutatif, atau disebut aljabar-C* nonkomutatif.

2. $C_0(X)$ adalah aljabar-C*, dan merupakan aljabar-C* komutatif.

Jika A adalah suatu aljabar-C*, misalkan

$$\widehat{A} = \{\phi: A \to \mathbb{C} \,|\phi \text{ adalah homomorfisma tak nol}\}.$$

Misalkan X kompak lokal dan $x \in X$, maka untuk $\phi_x: C_0(x) \to \mathbb{C}$, yang didefinisikan oleh

$$\phi_x(b) = b(x),$$

adalah suatu homomorfisma. Lebih lanjut, semua homomorfisma dari $C_0(x)$ adalah dalam bentuk ini.

Teorema 19.

Jika A adalah suatu aljabar-C* komutatif, maka $\widehat{A}$ kompak lokal dalam topologi-lemah*. Lebih lanjut, A isomorfik dengan $C_0(\widehat{A})$ terhadap pemetaan

$$f: A \to C_0(\hat{A}\,),$$

yang didefinisikan oleh

$$f_a(\phi) = \phi(a).$$

Bukti.

Sebagai catatan, perhatikan bahwa $\widehat{A}$ subhimpunan tertutup dari $\mathbb{C}^A$.
Jika A memiliki elemen satuan, maka setiap homomorfisma taknol memiliki norm = 1. Berdasarkan teorema Alaoglu-Birkhoff, maka $\widehat{A}$ kompak dalam topologi-lemah*.
Jika A tidak memiliki elemen satuan

Teorema 20. (Gelfan-Naimark)

Setiap aljabar-C* komutatif isomorfis dengan $C_0(X)$, dengan X adalah suatu ruang Hausdorff kompak.

Definisi 21. (Spektrum)

Misalkan A adalah suatu aljabar-C* satuan. Untuk $a \in A$, **spektrum** didefinisikan oleh

$$sp(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,|\lambda 1 - a \text{ tidak memiliki invers}\}.$$

Dapat dilihat bahwa $sp(a)$merupakan subhimpunan kompak dari $\mathbb{C}$. Diaktakan a positif jika a self-adjoint dan $sp(a) \subseteq [0, \infty)$. Definisikan suatu urutan parsial pada anggota-anggota self-adjoint dengan $a \leq b$ jika dan hanya jika $a - b$ positif.
Misalkan A adalah suatu himpunan normal $(a \in A, a^*a = aa^*)$, dan C*$(a, 1)$ adalah subaljabar yang dibangun oleh a dan elemen satuan 1. Jika $\lambda \in sp(a)$, maka $\phi_\lambda(a) = \lambda$, secara tunggal mendefinisikan suatu homomorfisma-* dari C*$(a, 1)$ ke $\mathbb{C}$.

Teorema 22.

C*(a,1) adalah Aljabar-C* dan isomorfik dengan C$\big(sp(a)\big)$.

Bukti.

Jelas bahwa C*(a,1) adalah aljabar-C*.
Misalkan C*(a,1) $= X$, maka untuk setiap $\phi \in \hat{B}$ secara tunggal ditentukan oleh $\lambda_\phi = \phi(a)$. Lebih lanjut, $\phi(a) = \lambda$, perhatikan bahwa hal ini mengakibatkan $\phi(\lambda 1 - a) = 0$, dengan demikian $\lambda_\phi \in sp(a)$.
Selanjutnya, perhatikan juga untuk Pemetaan C*$(a, 1)$ ke $C\big(sp(a)\big)$; $\big(b \mapsto f_b\big)$, dimana $f_b(\lambda) = \phi_\lambda(b)$.
Jika $b = p(a, a^*)$; dengan p polinomial dua variabel koefisien kompleks, maka $\lambda \mapsto f_b(\lambda) = p\big(\lambda, \bar{\lambda}\big)$ kontinu, lebih lanjut kontinu untuk setiap b. Pemetaan $b \mapsto f_b$ ini adalah suatu homomorfisma-* dan kontinu.
Dengan demikian merupakan fungsi pada karena untuk setiap $\lambda \in sp(a)$ secara tunggal mendefinisikan $\phi_\lambda \in \widehat{B}$

Akibat 23.

Jika a normal, maka $\|a\| = \sup\{|\lambda| \,|\lambda \in sp(a)\}$.

Bukti.

Dari teorema sebelumnya maka dapat dilihat bahwa $f(a) \in A$ untuk setiap a normal dan $f\colon sp(a) \to \mathbb{C}$ kontinu.
Perhatikan bahwa

$$\lambda 1 - f(a) = (\lambda - f)(a),$$

Dengan demikian $sp\big(f(a)\big) \subseteq \mathrm{range}(f)$. Lebih khusus, jika $\mathrm{range}(f) \subseteq [0.\infty)$, maka $f(\mathrm{a})$ positif. Kemudian karena a^*a selalu normal dan positif, definisikan

$$|a| = \sqrt{(a^*a)}$$

untuk setiap $a \in A$.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, kesimpulan yang dapat diambil yakni, Suatu aljabar-C* disebut **aljabar-*C** komutatif*** jika dalamnya berlaku sifat komutatif perkalian. Selain itu, setiap aljabar-C* komutatif isomorfis dengan $C_0(X)$, dengan X adalah suatu ruang Hausdorff kompak. Lebih lanjut, dengan menggunakan transformasi Gelfand konsep aljabar-C* dapat ditinjau lebih luas lagi terutama untuk aljabar-C* nonkomutatif.

DAFTAR PUSTAKA

Arveson, William, An Invitasion to C*-algebra, Springer-Verlag, New York, 1976, Graduate Text in Mathematics, No. 39.

Davidson, Kenneth R, (1996) C*-algebras by example, Fields Institute Monographs, vol.6, American Mathematical Society, Providence, RI,

Doran, Robert S; Belfi, Victor A. (1986), Characterization of C*-algebras: The Gelfand-Neimark Theorems, CRC press

Emch, G. (1972) Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, Wiley-Interscience

Landsman, N. P. (2003) Lectures Notes on C*-Algebras and K-Theory. Korteweg-de Vries Institute for Mathematics University of Amsterdam.

Lin, Huaxin, An Introductionto the classification of Amenable C*-algebras. World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd

Neumann, J. Von. (1961) Collected works. Vol.III. Rings of Operator, Pergamon Press, New York

Farah, Ilijas. C*-Algebras and Their Representations

Rickart, C. E. (1946) Banach Algebras with an Adjoint Operation. Ann. Of. Math (2) 47:528-550

PEDOMAN PENULISAN

Barekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan

Barekeng terbit dua kali dalam setahun yaitu Bulan Maret dan Desember. *Barekeng* menerima naskah dalam bentuk hasil penelitian, catatan penelitian (*note*) atau artikel ulas balik (*review/ minireview*) dan ulasan (*feature*) baik dalam bahasa Indonesia maupun dalam bahasa Inggris yang berkaitan dengan bidang Matematika dan Terapannya. Naskah yang dikirimkan merupakan naskah asli yang belum pernah diterbitkan di media manapun.

PENGIRIMAN NASKAH

Naskah dikirimkan kepada:

Redaksi *Barekeng*
Jurusan Matematika
Fakultas MIPA
Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena, Poka-Ambon
Email: jurnalbarekeng@gmail.com

Naskah yang dikirimkan harus dalam bentuk naskah cetak (*hard copy*) dan naskah lunak (*soft copy*), disertai dengan alamat korespondensi lengkap dan alamat *email* yang dapat dihubungi.

Naskah cetak (*hard copy*):

Naskah cetak dikirim sebanyak satu eksemplar dengan format pengetikan menggunakan *Microsoft Word* seperti berikut:

- Naskah diketik 1 spasi pada kertas HVS Ukuran A4 dengan batas tepi 2 cm dan berbentuk 2 kolom dengan jarak antar kolom 0.5 cm. Tipe huruf *Times New Roman* berukuran 10 point.
- Jumlah halaman maksimum 12 halaman termasuk Lampiran (Gambar dan Tabel). Setiap halaman diberi nomor secara berurutan pada tepi kanan atas. Untuk keterangan Lampiran: Tipe huruf Times New Roman berukuran 9 point.
- Persamaan matematika (*equations*) dapat diketik dengan menggunakan *MS Equations* atau *MathType* dengan tipe huruf *Cambria* atau Times New Roman berukuran 10 point.

Naskah lunak (*soft copy*):

Naskah lunak harus dalam format *Microsoft Word* dan dikirimkan dalam bentuk disk (CD, DVD), *flashdisk*, atau *attachment email*.

SUSUNAN NASKAH

a. Judul dalam Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris untuk artikel berbahasa Indonesia dan Judul dalam Bahasa Inggris untuk artikel berbahasa Inggris.
b. Nama Lengkap Penulis (tanpa gelar).
c. Nama Lembaga atau Institusi, disertai Alamat Lengkap dengan nomor kode pos. Untuk korespondensi dilengkapi No. Telp., fax dan *email*.
d. Judul Ringkas (*Running Title*) (jika diperlukan).
e. Abstrak (*Abstract*) dalam Bahasa Inggris atau Bahasa Indonesia.
f. Kata Kunci (*Keywords*) dalam Bahasa Inggris atau Bahasa Indonesia.
g. Pendahuluan (*Introduction*) meliputi latar belakang, masalah dan tujuan penelitian.
h. Tinjauan Pustaka meliputi ulasan (*review*) penelitian dari beberapa literatur serta teori-teori dasar yang mendukung penelitian.
i. Metode Penelitian (*Methods and Materials*) meliputi bahan, cara, dan analisis dalam penelitian (jika ada).
j. Hasil dan Pembahasan (*Results and Discussion*) ditulis secara berkesinambungan dalam satu rangkaian naskah penulisan.
k. Kesimpulan (*Conclusion*)
l. Ucapan Terima Kasih (*Acknowledgements*) (Jika diperlukan)
m. Daftar Pustaka ditulis memakai sistem nama dan disusun menurut abjad. Di bawah ini beberapa contoh penulisan sumber acuan:

   Jurnal :
   Efron, B. 1983. *Estimating the Error Rate of Prediction* Rule: Improvement on Cross-Validation. J. Amer. Statist. Assoc., 78:316-331.

   Buku :
   Dennis, G. Z., 1986, *Differential Equations with Boundary Value Problems*. Ed ke-2. Boston: Massachusetts. PWS Publishers.

   Skripsi/Tesis/Disertasi :
   Mochamad Apri., *Model Biaya Total Jaringan Pipa Transmisi Gas dan Optimasinya,* Departemen Matematika ITB Bandung, Tugas Akhir, 2002.

   Informasi dari Internet :
   Mallat, Stephane, 1999, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Second Edition, Academic Press 24-28 Oval Road, London NW1 7DX UK, http://www.hbuk.co.uk/ap/
n. Lampiran meliputi Gambar dan Tabel beserta keterangannya (jika diperlukan).

CATATAN (NOTE)

- Naskah harus dikirimkan ke redaksi selambat-lambatnya 2 (dua) bulan sebelum bulan penerbitan jurnal (Maret dan Desember).
- Naskah akan dinilai oleh tim penilai yang relevan sebelum diterbitkan dan tim redaksi berhak merubah struktur naskah tanpa merubah isi naskah.
- Naskah dapat diterima atau ditolak. Naskah ditolak, jika tidak memenuhi kriteria penulisan, pelanggaran hak cipta, kualitas rendah, dan tidak menanggapi korespondensi redaksi. Pengumuman naskah ditolak atau diterima paling lambat 1 (satu) bulan setelah naskah terkirim.
- Penulis atau penulis pertama yang akan mendapat 1 (satu) eksemplar jurnal yang sudah diterbitkan.

Barekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan

ISSN 1978 - 7227