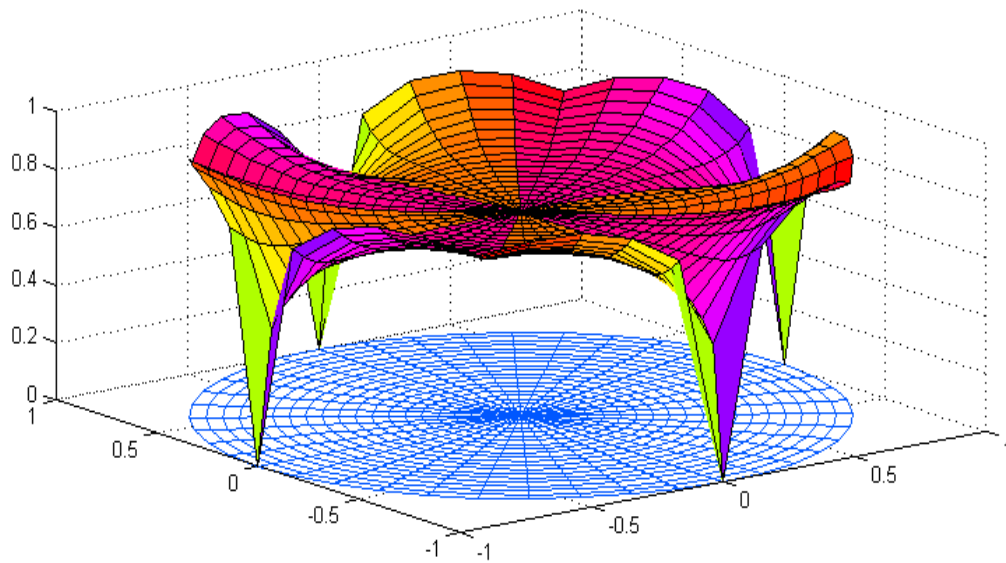


# Barekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan

ISSN 1978-7227





**jurnal ilmu matematika dan terapan**

ISSN 1978-7227

Volume 7 Nomor 2 | Desember 2013

**PENANGGUNG JAWAB**

Ketua Jurusan Matematika  
FMIPA - Universitas Pattimura

**KETUA DEWAN REDAKSI**

H. J. Wattimanela, S.Si, M.Si

**PENYUNTING AHLI**

Prof. Drs. Subanar, Ph.D (UGM Yogyakarta)  
Prof. Dr. Edi Baskoro (ITB Bandung)  
Dr. Siswadi (IPB Bogor)  
Dr. Basuki Widodo, M.Sc (ITS Surabaya)  
Prof. Dr. Thomas Pentury, M.Si (Unpatti Ambon)  
Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Unpatti Ambon)

**PENYUNTING PELAKSANA**

M. W. Talakua, S.Pd, M.Si  
F. Y. Rumlawang, S.Si, M.Si  
E. R. Persulesy, S.Si, M.Si  
L. J. Sinay, S.Si, M.Sc  
D. L. Rahakbauw, S.Si, M.Si  
V. Y. I. Ilwaru, S.Si, M.Si

**SEKRETARIAT**

Y. A. Lesnussa, S.Si, M.Si

**PENERBIT (PUBLISHER)**

Jurusan Matematika FMIPA  
Universitas Pattimura Ambon

**ALAMAT EDITOR (EDITORIAL ADDRESS)**

Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Pattimura  
Alamat:  
Kampus FMIPA UNPATTI  
Jl. Ir. M. Putuhena, Poka 97233  
Ambon - Maluku



## PENELITIAN

<b>MODEL OPTIMISASI NONLINIER JARINGAN PIPA GAS DENGAN PERCABANGAN</b> <i>Non-Linear Optimization Model for Gas Transmission System with Branch</i>	Francis Y. Rumlawang	1 – 8
<b>REGRESI FUZZY</b> <i>Fuzzy Regression</i>	Dorteus Lodewyik Rahakbauw	9 – 12
<b>APLIKASI ALGORITMA KRUSKAL DALAM PENGOTIMALAN PANJANG PIPA</b> <i>Kruskal Algorithm Application on Optimlaizing Pipes Network</i>	Abraham Zacaria Wattimena Sandro Lawalata	13 – 18
<b>SIFAT- SIFAT DASAR MATRIKS SKEW HERMITIAN</b> <i>Basic Properties of Skew Hermitian Matrices</i>	Lidia Salaka Henry W. M. Patty Mozart Winston Talakua	19 – 26
<b>KARAKTERISTIK RELASI KONGRUENSI PADA SEMIGRUP</b> <i>Characterization of Congruence Relation on Semigrup</i>	Elvinus Richard Persulesy	27 – 30
<b>ANALISIS KORELASI SOMERS'D PADA DATA TINGKAT KENYAMANAN SISWA-SISWI SMP PLUS MELATI SAMARINDA</b> <i>Somers'd Correlate Analysis on The Data Comfortable Level of Students in Plus Melati Samarinda Junior High School</i>	Prastika Kriesniati Desi Yuniarti Darnah A. Nohe	31 – 40
<b>IDENTIFIKASI STRUKTUR DASAR SMARANDACHE NEAR-RING</b> <i>Identification of Basic Structure on Smarandache Near-Ring</i>	Yohana Yunet Bakarbesy Henry W. M. Patty Elvinus Richard Persulesy	41 – 46
<b>PENGGUNAAN METODE ANALISIS DISKRIMINAN, REGRESI LOGISTIK, NEURAL NETWORK, DAN MARS UNTUK ANALISIS PERMASALAHAN KLASIFIKASI DATA HBAT DAN DATA IRIS</b> <i>The Applications of Discriminant Analysis, Laogistic Regression, Neural Network, and MARS to analyze data classification of HBAT and IRIS</i>	Ferry Kondo Lembang Dorteus Lodewyik Rahakbauw	47 – 51



merupakan Jurnal Ilmu Matematika dan Terapannya sebagai suatu wahana informasi ilmiah yang menyajikan artikel (naskah) hasil penelitian meliputi bidang-bidang sebagai berikut: matematika analisis, aljabar, matematika terapan, statistika, pendidikan matematika dan ilmu komputer. Jurnal ini diterbitkan dua kali dalam setahun yaitu pada bulan Maret dan bulan Desember. Artikel atau naskah-naskah di dalam jurnal ini merupakan hasil-hasil penelitian pribadi ataupun kelompok yang belum pernah diterbitkan di jurnal-jurnal atau majalah ilmiah lainnya.

---

**Diterbitkan oleh:**

Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Pattimura  
Ambon  
2013  
Copyright © Jurusan Matematika FMIPA Unpatti 2013

## MODEL OPTIMISASI NONLINIER JARINGAN PIPA GAS DENGAN PERCABANGAN *Non-Linear Optimization Model for Gas Transmission System with Branch*

FRANCIS Y. RUMLAUWANG

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura Ambon

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

E-mail: rumlawang@staff.unpatti.ac.id

### ABSTRACT

Gas transmission system has a branch to customer area that affects to flow rate, gas pressure, and pipe diameter. This paper discusses optimization of this transmission system. Optimum gas pressure and pipe diameter was found by minimizing cost objective function subjects to panhandle A and panhandle B constrain function. Steepest Descent method which is combined with Rangkutta methods is use to determine the optimization process. The result shows that the pipe branches affect the optimization variables.

*Keywords: Objective function, panhandle A, panhandle B, stepest descent*

### PENDAHULUAN

Indonesia adalah negara penghasil gas terbesar di dunia namun kenyataannya Indonesia belum menikmati statusnya tersebut, akibat dari kenyataan bahwa harga gas masih relatif lebih mahal, dari sumber energi lainnya. Salah satu penyebab harga yang masih relatif tinggi adalah kurangnya sarana transportasi yang memadai dan murah untuk mendistribusikan gas agar sampai ke konsumen, karena pada umumnya sumber gas berada cukup jauh dari konsumen.

Dalam proses pendistribusian, alat transportasi yang paling aman dan efektif bagi gas adalah melalui *jaringan pipa transmisi*. Namun membangun jaringan pipa gas merupakan investasi yang sangat mahal dan membutuhkan perencanaan dan perhitungan yang baik.

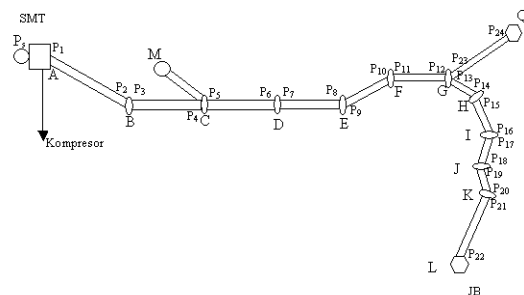
Pembangunan dan pengoperasian jaringan pipa transmisi gas yang memenuhi kualitas dan standar keamanan yang baik, dipengaruhi oleh dua faktor. Pertama *faktor ekonomi*, yang dalam hal ini adalah biaya. Biaya tersebut meliputi biaya investasi, biaya operasi, dan biaya penambangan gas. Biaya investasi terdiri dari biaya pipa dan biaya kompresor. Biaya operasi adalah biaya pengoperasian pipa transmisi dan kompresor. Sebenarnya biaya untuk membeli pipa dapat dibuat minimum dengan memilih pipa berdiameter kecil, tetapi akan mengakibatkan kehilangan tekanan yang cukup besar, sehingga diperlukan kompresor dengan daya yang cukup besar. Akibatnya biaya investasi untuk pembelian kompresor akan naik. Sebaliknya biaya investasi dengan pipa berdiameter besar cukup mahal, namun biaya

kompresor lebih murah. Kedua *faktor teknis*, meliputi kekuatan pipa, keamanan, lokasi jaringan pipa (darat dan laut), dan karakteristik dari gas (tekanan, temperatur, laju alir, viskositas gas, dan sebagainya).

Karena permasalahan utama kita disini adalah biaya dimana komponen utama dipengaruhi oleh diameter, tekanan dan *flowrate*, maka tujuan dari penulisan ini adalah membuat model untuk menghitung ukuran diameter yang optimum, serta distribusi tekanan dan *flowrate* gas sehingga biaya investasi dan operasi minimum, dengan menggunakan fungsi kendala Panhandle A dan Panhandle B, yang diimplementasikan pada jaringan pipa transmisi dengan percabangan.

### TINJAUAN PUSTAKA

#### Model Laju Alir Gas dan Biaya



Gambar 1. Skema Jaringan Pipa dari A ke L

Misalkan konsumen berada pada suatu lokasi, namakan L dan Q, sedangkan gas yang dikirim ke L dan Q melalui daerah A, B, C,...,K. Gas dari A ke L dikirim melalui jaringan pipa transmisi A-B, B-C,..., K-L serta ke Q melalui transmisi A-B, B-C,...,G-Q, dengan demikian terlihat bahwa terdapat percabangan di G, lebih jelas dapat dilihat dalam gambar 1.

Konsumen di L dan Q menentukan berapa laju alir gas dan tekanan yang diperlukan oleh mereka. Perusahaan gas harus mendesain berapa diameter pipa yang dibutuhkan dan bagaimana distribusi tekanan harus diberikan agar gas dapat sampai ke L dan Q dengan laju alir dan tekanan yang diinginkan. Tekanan dari gas yang mengalir akan mengalami penurunan sepanjang perjalanan. Hal ini harus diantisipasi oleh perusahaan gas, karena jika gas tersebut sampai ke konsumen dengan tekanan yang lebih rendah dari yang disepakati maka perusahaan akan terkena denda. Oleh karena itu diperlukan kompresor untuk menaikkan tekanan. Sebenarnya gas yang sudah mengalami proses pengolahan mempunyai tekanan tertentu. Hanya saja yang menjadi masalah adalah dengan tekanan tersebut apakah gas dapat mengalir dan sampai ke konsumen? Jika gas dapat sampai ke konsumen sesuai dengan permintaan, maka tidak diperlukan kompresor. Tapi apakah biaya minimum? Hal lain yang harus diperhatikan adalah pipa gas mempunyai keterbatasan dalam menahan tekanan, jadi perusahaan gas tidak dapat secara bebas memberikan tekanan yang tinggi dalam pengiriman gas.

Berkenan dengan pembahasan di atas maka, subbab berikut ini akan dibahas model dari alir gas dan model biaya yang dijadikan acuan untuk meminimumkan biaya pembangunan dan pengoperasian jaringan pipa transmisi gas.

Dalam menurunkan model laju alir gas dan biaya perlu diasumsikan beberapa hal untuk menyederhanakan permasalahan. Berdasarkan [3], asumsi yang dipakai adalah sebagai berikut :

1. Pipa lurus dan horisontal
2. Aliran gas dalam pipa *steady-state*
3. Temperatur gas sepanjang satu segmen pipa konstan
4. Tidak ada perubahan temperatur setelah gas keluar dari pipa
5. Faktor kompresibilitas gas (Z) sepanjang satu pipa konstan
6. Tidak ada faktor perubahan faktor kompresibilitas gas setelah keluar dari kompresor
7. Persamaan alir gas yang dipakai adalah persamaan Panhandle A dan persamaan Panhandle B.
8. Jenis kompresor yang dipakai adalah sentrifugal dan dipasang dititik awal.
9. Zat yang mengalir terdiri dari satu fasa atau gas saja
10. Perhitungan pajak, asuransi, biaya penambangan, dan faktor ekonomi lainnya diabaikan.

Berdasarkan asumsi di atas, sekarang akan ditentukan model laju alir gas dan biaya.

## 1. Model Laju Alir Steady Gas Pipa Tunggal

Persamaan dasar aliran gas diturunkan dari persamaan kesetimbangan energi dengan memasukkan persamaan empiris untuk harga faktor gesekan yang ada dalam persamaan tersebut, dan di asumsikan dalam keadaan tunak (*steady*). Berdasarkan [7] model laju alir gas pipa tunggal dengan faktor gesekan panhandle A adalah

$$Q = 0.000435 \left( \frac{T_b}{P_b} \right)^{1.07881} \left( \frac{P_1^2 - P_2^2}{T L m Z} \right)^{0.53966} A_1 \quad (1)$$

$$A_1 = \left( \frac{1}{S G g} \right)^{0.46033} d^{2.618996} \left( \frac{1}{\mu} \right)^{0.076331}$$

Sedangkan dengan faktor gesekan dengan model Panhandle B, persamaan laju alir gas adalah:

$$Q = 0.000737 \left( \frac{T_b}{P_b} \right)^{1.02} \left( \frac{P_1^2 - P_2^2}{T L m Z} \right)^{0.50999} A_2 \quad (2)$$

$$A_2 = \left( \frac{1}{S G g} \right)^{0.49} d^{2.52998776} \left( \frac{1}{\mu} \right)^{0.01999}$$

- $Q$  : laju alir gas (MMSCFD)  
 $Lm$  : panjang pipa (ft)  
 $SGg$  : gravitasi gas standar (*standard gravity of gas*)  
 $Z$  : faktor kompresibilitas gas  
 $T$  : temperatur gas (Renkin)  
 $T_b$  : temperatur dasar (Renkin)  
 $P_b$  : tekanan dasar (psia)  
 $d$  : diameter (inch)  
 $P_1$  : adalah tekanan gas yang masuk ke dalam pipa (tekanan *inlet*), dan  
 $P_2$  : adalah tekanan gas yang keluar dari pipa (tekanan *outlet*).  
 $\mu$  : viskositas gas (centipoise,cp).

Persamaan viskositas diperoleh dari korelasi Lee-Gonzales seperti yang terdapat pada [1] adalah

$$\mu = 0.0001 \frac{(9.4 + 0.02M) T^{1.5} A_3}{209 + 19M + T}$$

$$A_3 = e^{\left( \left( 3.5 + \frac{986}{T} + 0.01M \right) \left( 0.043248 \frac{S G g \left( \frac{P_1 + P_2}{2} \right)}{Z T} \right) \right)^{\left( 1.7 \frac{197.2}{T} - 0.02M \right)}}$$

dengan  $M$  adalah berat molekul, dan  $M = 28.97 SGg$

## 2. Model Biaya Tahunan Pipa Tunggal

Seperti telah disebutkan bahwa pengiriman gas bumi merupakan suatu proyek yang membutuhkan biaya sangat besar. Biaya tersebut meliputi biaya investasi dan biaya operasi.

Berdasarkan pada [3] model biaya tahunan untuk pipa tunggal adalah sebagai berikut:

Model biaya tahunan untuk satu segmen pipa berdasarkan [3] adalah sebagai berikut:

$$C_{total} = \beta CIC + CIP + \beta OC_{komp} + OC_{pipa} \quad (3)$$

dengan

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{jika kompresor dipasang} \\ 0 & \text{jika kompresor tidak dipasang} \end{cases}$$

$$CIP = \frac{r(1+r)^n(1+Rp)CpL^l d^m}{(1+r)^n - 1} \quad (4)$$

$$CIC = \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} Ckomp \quad (5)$$

$$OCkomp = (1 + Copkomp) \cdot C_{Listrik} \quad (6)$$

$$OCpipa = \frac{r(1+r)^n(1+Rp)Cfp CpL^l d^m}{(1+r)^n - 1} \quad (7)$$

dimana

- $CIP$  : biaya tahunan untuk investasi pipa (US\$/tahun)
- $CIC$  : biaya tahunan untuk investasi kompresor (US\$/tahun)
- $OCpipa$  : Biaya operasi pipa (US\$/tahun)
- $OCkomp$  : Biaya operasi kompresor
- $R$  : tingkat suku bunga tahunan
- $Cp$  : Harga pipa per satuan panjang dan diameter (US\$/ft.inch)
- $Rp$  : Fraksi antara biaya pemasangan dengan harga pipa
- $L$  : panjang pipa (feet)
- $d$  : diameter pipa (inch)
- $Cfp$  : Fraksi antara biaya tahunan investasi pipa dan operasi pipa
- $Copkomp$  : Fraksi biaya operasi lain selain listrik dengan biaya listrik kompresor
- $l$  : konstanta ketaklinieran antara harga pipa dan panjang pipa
- $m$  : konstanta ketaklinieran antara harga pipa dan diameter pipa
- $C_{Listrik}$  : Biaya listrik yang digunakan untuk operasikan kompresor

Perlu diketahui pula bahwa  $l$  dan  $m$  dapat ditentukan dengan regresi linier jika kita mempunyai data harga pipa.

$$Ckomp = Chp (gph)^b \quad (8)$$

dengan

- $Chp$  : harga kompresor (US\$/hp)
- $gph$  : daya kompresor sentrifugal
- $b$  : konstanta ketaklinieran harga kompresor terhadap daya kompresor

$$gph = \frac{3125}{2061} \frac{QPT_1(Z_1 + Z_2) \left[ \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\left( \frac{k-1}{kEp} \right)} - 1 \right] k}{T_b(k-1)} + bl + sl \quad (9)$$

dimana

- $Z_1$  : faktor kompresibilitas gas sebelum melalui kompresor
- $Z_2$  : faktor kompresibilitas gas sesudah melalui kompresor
- $P_1$  : tekanan gas sebelum melalui kompresor
- $P_2$  : tekanan gas sesudah melalui kompresor
- $Ep$  : eksponen adiabatik

- $k$  : efisiensi kompresor
- $bl$  : bearing losses dan seal losses, daya tambahan yang diberikan untuk menggantikan daya kompresor yang hilang akibat adanya proses hidraulik dan mekanik.
- $sl$  : bearing losses dan seal losses, daya tambahan yang diberikan untuk menggantikan daya kompresor yang hilang akibat adanya proses hidraulik dan mekanik.

$$C_{Listrik} = \frac{1}{8760} (19809.32047 A_4 + 6532.321518(bl + sl)CeHy) \quad (10)$$

$$A_4 = \frac{QP_b TZ \left[ \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\left( \frac{k-1}{kEp} \right)} - 1 \right] k}{T_b(k-1)}$$

dengan

- $Ce$  : biaya listrik
- $Hy$  : jam operasi pertahun

### 3. Model Biaya dan Laju Alir untuk N Segmen Pipa

Model biaya tahunan untuk N segmen pipa adalah sebagai berikut:

$$C_{total} = \beta \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} Ckomp + \beta OCkomp + CIP_i + OCpipa_i \quad (11)$$

$$CIP_i = \sum_{i=1}^N \frac{r(1+r)^n(1+Rp)CpL_i^l d_i^m}{(1+r)^n - 1}$$

$$OCpipa_i = \sum_{i=1}^N \frac{r(1+r)^n(1+Rp)Cfp CpL_i^l d_i^m}{(1+r)^n - 1}$$

Berdasarkan persamaan Panhandle A, laju alir gas untuk N segmen pipa adalah dengan mensubstitusikan nilai  $P$  dan  $\Delta P$  ke persamaan diatas, diperoleh persamaan laju alir gas untuk model Penhandle A sebagai berikut:

$$Q_i = 0.000435 \left( \frac{T_b}{P_b} \right)^{1.07881} \left( \frac{P_{i+1}^2 - P_{i+2}^2}{T_i L m_i Z} \right)^{0.53966} A_{i1} \quad (12)$$

$$A_{i1} = \left( \frac{1}{SGg_i} \right)^{0.46033} d_i^{2.618996} \left( \frac{1}{\mu_i} \right)^{0.076331}$$

sedangkan berdasarkan persamaan Penhandle B diperoleh

$$Q_i = 0.000737 \left( \frac{T_b}{P_b} \right)^{1.02} \left( \frac{P_{i+1}^2 - P_{i+2}^2}{T_i L m_i Z} \right)^{0.50999} A_{2i} \quad (13)$$

$$A_{2i} = \left( \frac{1}{SGg_i} \right)^{0.49} d_i^{2.52998776} \left( \frac{1}{\mu_i} \right)^{0.01999}$$

dengan

$$\mu_i = 0.0001 \frac{(9.4 + 0.02M_i) T_i^{1.5} A_{3i}}{209 + 19M_i + T_i}$$

$$A_{3i} = e^{\left( \left( 3.5 + \frac{986}{T_i} + 0.01M_i \right) \left( 0.043248 \frac{SGg_i \left( \frac{P_{i+1} + P_{i+2}}{2} \right)}{Z T_i} \right) \right)^{\left( 1.7 - \frac{197.2}{T_i} - 0.02M_i \right)}}$$

dimana  $M_i = 28.97 SGg_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N$

### 4. Tarif Toll Transportasi (Tollfee)

Tollfee adalah biaya yang harus dibayar pemakai jaringan pipa transmisi untuk setiap volume gas yang dialirkan melalui sistem pemipaan tersebut. Tollfee ditetapkan berdasarkan laju pengembalian investasi yang dipengaruhi oleh berbagai batasan.



Perhitungan *Tollfee* sebenarnya melibatkan banyak faktor ekonomi, tetapi dalam tulisan ini dibahas metode perhitungan *Tollfee* yang sederhana. Sesuai dengan asumsi kita bahwa perhitungan pajak dapat diabaikan, maka *Tollfee* dapat dihitung sebagai berikut:

1. Hitung biaya tahunan pembangunan dan pengoperasian sistem jaringan pipa (tanpa biaya penambangan). Dalam hal ini kita sebut biaya tahunan sebagai  $C_{total}$
2.  $C_{total}$  dapat dipisah menjadi *CIP*, *CIC*, *OCpipa*, dan *OCkomp*.
3. *CIP* dan *OCpipa* dipisah setiap segmen diperoleh  $CIP = CIP_1 + CIP_2 + CIP_3 + \dots + CIP_N$   
 $OCpipa = OCpipa_1 + OCpipa_2 + \dots + OCpipa_N$
4. Berdasarkan asumsi bahwa kompresor terletak pada awal segmen, maka kompresor tersebut akan mempengaruhi gas yang mengalir pada semua segmen, dengan demikian *CIC* dan *OCkomp* dibagi ke tiap segmen dengan melakukan pembobotan berdasarkan panjang pipa.

$$CIC_i = \frac{L_i}{L_f} CIC$$

$$OCkomp_i = \frac{L_i}{L_f} OCkomp$$

dengan  $L_f$  adalah panjang total pipa.

5. Besar *Tollfee* tiap segmen berdasarkan [6] adalah

$$Tf_i = \frac{CIP_i + OCpipa_i + CIC_i + OCkomp_i}{Q_i(365)(1000)} \quad (14)$$

### Metode Optimisasi

Berdasarkan penjelasan sebelumnya persamaan (11) dapat dipandang sebagai fungsi objektif biaya, sedangkan persamaan (12) dan persamaan (13) masing-masing merupakan fungsi kendala panhandle A dan penhandle B. Dengan demikian permasalahan kita adalah meminimumkan fungsi objektif biaya terhadap fungsi biaya. Dalam bagian ini dibahas metode yang digunakan untuk proses optimisasi dimaksud.

### 1. Penurunan Metode Optimisasi

Berdasarkan [2], misalkan kita mempunyai fungsi objektif  $C(x)$  dengan fungsi kendala  $W_i(x)$ , untuk  $i = 1, 2, \dots, M$ . Nilai minimum dari fungsi  $C(x)$  yang memenuhi  $W_i(x) = 0$  dicapai pada titik  $U(T) = x^*$ ; yaitu suatu titik yang diperoleh ketika kurva ketinggian fungsi  $C(x)$  bersinggungan dengan fungsi kendala  $W_i(x)=0$ . Untuk memperoleh titik tersebut kita memulai proses pengotimasian dari titik  $U(0) = x_0$ ; yaitu suatu titik yang juga memenuhi kendala  $W_i(x) = 0$ .

Untuk sampai pada titik  $U(T) = x^*$  kita setiap langkah kita haruslah memenuhi  $W_i(x) = 0$ , dengan kata lain setiap titik yang diperoleh harus memenuhi  $W_i(x) = 0$ : Untuk mencapai kondisi ini setiap *arah gerak* harus menyinggung  $W_i(x) = 0$ . Arah gerak ini yang kita sebut  $Ut$  yang berbentuk:

$$Ut = -\nabla C(x) + \sum_{j=1}^M \alpha_j \nabla W_j(x) \quad (15)$$

dengan  $\alpha_j$  adalah suatu nilai tertentu dan  $t$  adalah parameter iterasi.

$Ut$  juga merupakan kombinasi linier dari  $\nabla C(x)$  dan  $\nabla W_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ . Agar selalu menyinggung fungsi kendala  $W_i(x) = 0$ , haruslah pada  $W_i(x) = 0$  berlaku:

$$\begin{aligned} \frac{dW_i}{dt} &= \nabla W_i \circ Ut = 0 \\ &= \nabla W_i(x) \circ \left( -\nabla C(x) + \sum_{j=1}^M \alpha_j \nabla W_j(x) \right) \\ &= -\nabla W_i(x) \circ \nabla C(x) + \sum_{j=1}^M \alpha_j \nabla W_i(x) \circ \nabla W_j(x) = 0 \end{aligned}$$

sehingga

$$\sum_{j=1}^M \alpha_j \nabla W_i(x) \circ \nabla W_j(x) = \nabla W_i(x) \circ \nabla C(x) \quad (16)$$

Dengan demikian  $\alpha_j$  dapat ditentukan sebagai berikut.

$$A\alpha = B$$

dimana

$$A = \begin{bmatrix} \nabla W_1 \circ \nabla W_1 & \nabla W_1 \circ \nabla W_2 & \dots & \nabla W_1 \circ \nabla W_N \\ \nabla W_2 \circ \nabla W_1 & \nabla W_2 \circ \nabla W_2 & \dots & \nabla W_2 \circ \nabla W_N \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \nabla W_N \circ \nabla W_1 & \nabla W_N \circ \nabla W_2 & \dots & \nabla W_N \circ \nabla W_N \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \nabla W_1 \circ \nabla C \\ \nabla W_2 \circ \nabla C \\ \vdots \\ \nabla W_N \circ \nabla C \end{bmatrix}$$

Dan dapat ditulis sebagai

$$\alpha = A^{-1} B$$

### 2. Metode Rangekutta Orde 4

Pandang  $Ut$  sebagai persamaan diferensial orde satu yang diketahui nilai awal  $U(0) = x_0$ : Dengan demikian kita mempunyai MNA yang berbentuk:

$$U(0) = x_0, \quad Ut = -\nabla C(x_k) + \sum_{j=1}^M \alpha_j \nabla W_j(x_k)$$

Dengan pendekatan numerik permasalahan diatas dapata diselesaikan dengan metode Rungekutta orde 4.

Dalam proses penyelesaiannya, metode ini digunakan untuk menghitung hampiran solusi pada titik-titik  $x = x_1, x_2, \dots$  dengan  $x_i = x_0 + ih$  dan  $h$  menyatakan ukuran langkah. Menurut [5], skema untuk menghampiri fungsi  $U$  pada  $x_1 = x_0 + h$  adalah sebagai berikut:

$$U(x_1) = U(x_0) + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0) \\ k_2 &= hf(x_0 + k_1/2) \\ k_3 &= hf(x_0 + k_2/2) \\ k_4 &= hf(x_0 + k_3) \end{aligned}$$

dimana

$$f(x_k) = -\nabla C(x_k) + \sum_{j=1}^M \alpha_j \nabla W_j(x_k)$$

Secara iteratif fungsi  $U$  dapat dihitung dititik  $x_2, x_3, \dots$



**HASIL DAN PEMBAHASAN**

**Implementasi dan Analisis Hasil Optimisasi**

Model laju alir dan biaya, serta metode optimisasi yang diperoleh dari bagian sebelumnya akan diimplementasikan dalam suatu jaringan pipa transmisi gas dengan percabangan (lihat Gambar 1.) Dalam jaringan ini pada daerah C terdapat penambahan laju alir, akibat dari adanya tambahan gas yang bersumber di M. Dengan mengasumsikan bahwa segmen pipa dari M ke C tidak diperhitungkan dalam proses optimisasi, secara keseluruhan terdapat 12 segmen pipa.

Dengan mendefinisikan beberapa variabel, model biaya tahunan dan model laju alir diperoleh dari bagian kedua. Kita mendefinisikan fungsi objektif biaya sebagai berikut:

$$C_{total} = \beta C_{IC} + C_{IP_i} + \beta O_{Ckomp} + O_{Cpipa_i}$$

$$C_{IP_i} = \sum_{i=1}^{12} \frac{r(1+r)^n (1+Rp) C_p L_i^l d_i^m}{(1+r)^n - 1} \quad (17)$$

$$O_{Cpipa_i} = \sum_{i=1}^{12} \frac{r(1+r)^n (1+Rp) C_{fp} C_p L_i^l d_i^m}{(1+r)^n - 1}$$

$$Q_i = 0.000435 \left(\frac{T_b}{P_b}\right)^{1.07881} \left(\frac{P_{2i-1}^2 - P_{2i}^2}{T_i L m_i Z}\right)^{0.53966} A_i = 0 \quad (18)$$

$$A_i = \left(\frac{1}{SGg_i}\right)^{0.46033} d_i^{2.618996} \left(\frac{1}{\mu_i}\right)^{0.076331}$$

sedangkan berdasarkan persamaan Penhandle B diperoleh

$$Q_i = 0.000737 \left(\frac{T_b}{P_b}\right)^{1.02} \left(\frac{P_{2i-1}^2 - P_{2i}^2}{T_i L m_i Z}\right)^{0.50999} A_{2i} = 0 \quad (19)$$

$$A_{2i} = \left(\frac{1}{SGg_i}\right)^{0.49} d_i^{2.52998776} \left(\frac{1}{\mu_i}\right)^{0.01999}$$

dengan  $i = 1, 2, 3, \dots, 12$

**1. Asumsi Data**

Data masukan yang dipakai dalam proses optimisasi ini dapat dilihat pada Tabel 1. Sedangkan data dari jaringan pipa transmisi SMTJB dapat dilihat pada Tabel 2.

Dengan menggunakan asumsi data yang ada dan dengan menganggap temperatur pipa pada setiap segmen sama, maka terdapat 39 variabel optimasi yaitu  $\{d_1, \dots, d_{11}, P_1, \dots, P_{24}\}$  dengan  $P_1$  adalah tekanan inlet setelah melewati kompresor dianggap sebagai tekanan di A,  $P_{22}$  sebagai tekanan outlet di L serta  $P_{24}$  adalah tekanan outlet di N.

**2. Kondisi Awal**

Dalam memilih kondisi awal  $U(0) = x_0 = (d_1^0, \dots, d_{11}^0, P_1^0, \dots, P_{24}^0)$  haruslah memenuhi kendala  $PA_i = 0$ , dimana  $i = 1, 2, \dots, 12$ . Dan untuk menghindari perhitungan imajiner  $P_{2i-1}^0 > P_{2i}^0$ . Untuk memudahkan kita diberikan suatu metode khusus, yakni:

**2.1. Metode Penarik**

Dalam proses optimisasi menentukan kondisi awal  $x_0$  sangat penting karena harus memenuhi persamaan kendala  $PA_j(x_0) = 0$ . Oleh karena itu diperlukan kiat khusus agar kondisi awal kita tidak perlu memenuhi

persamaan kendala  $PA_j(x_0)=0$ , dengan menarik nilai awal tersebut ke kendala. Metode penarik berbentuk:

$$x_{k+1} = x_k - h_k \sum_{j=1}^M PA_j \nabla PA_j(x_k) \quad (20)$$

**Tabel 1.** Data masukan yang berupa tetapan

Simbol	Keterangan	Nilai	Satuan
Z	faktor kompressibilitas gas	0.9	
T	Temperatur pipa	5500	Renkin
SGg	gravitasi gas standar	0.624	
Pb	Tekanan Dasar	14.73	psia
Tb	Temperatur Dasar	5200	Renkin
Ps	Tek. Gas sblm masuk	1000	psia
Bl	kompresor bearing losses	30	
Sl	seal losses	20	
Rp	fraksi biaya pemasangan dengan harga pipa	1.4	
Ep	ekponen adiabatik	0.9	
K	efisiensi kompresor	1.24	
Cfp	fraksi biaya tahunan investasi dengan operasi pipa	0.2	
Cp	harga pipa	0.569 848	US\$/ft. inch
Chp	harga kompresor	1500	US\$/hp
L	konstanta ketaklinieran harga dengan panjang pipa	1	
M	konstanta ketaklinieran harga dengan diameter pipa	1.428 178	
N	jangka waktu pembayaran	20	
R	tingkat suku bunga tahunan	0.12	
Ce	biaya listrik	0.055	
Hy	jam operasi pertahun	8760	
Copkomp	fraksi biaya operasi selain listrik dengan biaya listrik kompresor	0.75	
B	konstanta ketaklinieran harga terhadap daya kompresor	1	

**Tabel 2.** Data yang ada di lapangan

Segmen	Daerah	Panjang (Km)
1	A-B	39
2	B-C	23
3	C-D	19
4	D-E	17.15
5	E-F	13.2
6	F-G	10
7	G-H	11.5
8	H-I	7.9
9	I-J	10.5
10	J-K	13.2
11	K-L	19.2
12	G-Q	10.1

**2.2. Kendala Tambahan**

Telah diketahui bahwa kendala yang digunakan dalam model ini adalah Persamaan laju alir gas yang diturunkan berdasarkan persamaan panhandle A dan panhandle B. Namun karena tekanan inlet dan tekanan outlet ditetapkan maka ini dapat dijadikan sebagai kendala. Pada titik percabangan dimana terjadi penambahan laju alir, tekanan pada titik tersebut tidak terjadi perubahan, dalam hal laju alir mengalami penurunan tekanan yang keluar dari titik percabangan itu dianggap sama, sedangkan untuk titik pertemuan antar segmen tanpa percabangan tekanannya sama. Perlu diketahui pula dalam proses optimisasi tekanan yang diperoleh tidak boleh lebih besar dari tekanan maksimum pipa. Dengan demikian tekanan maksimum dalam pipa juga merupakan kendala. Dalam hal ini proses optimisasi akan berhenti jika tekanan telah melebihi tekanan maksimum pipa.

**3. Hasil Optimisasi dan Analisis**

Hasil optimisasi disini dibagi dalam dua kasus yakni yang pertama pada cabang keluaran yaitu dititik G, laju alir gas yang keluar dari titik tersebut dibuat sama, sedangkan untuk kasus yang kedua dibuat tidak sama yaitu pada segmen 7 laju alirnya lebih besar dari segmen 12. Dalam kedua kasus ini tekanan di titik percabangan di anggap sama.

**3.1. Kasus 1**

**Tabel 3.** Hasil Optimisasi Kasus 1, dengan kendala persamaan panhandle A

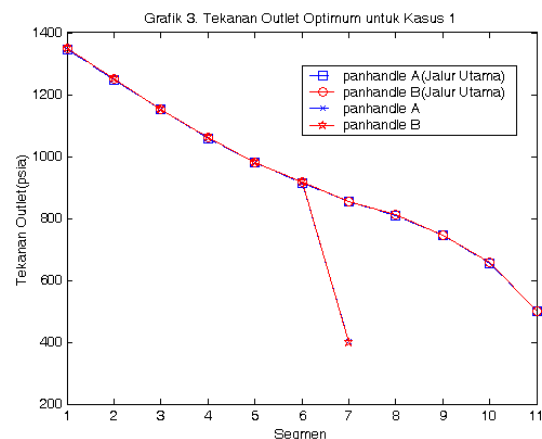
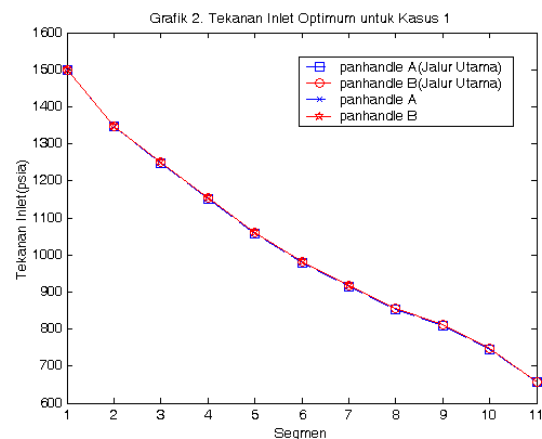
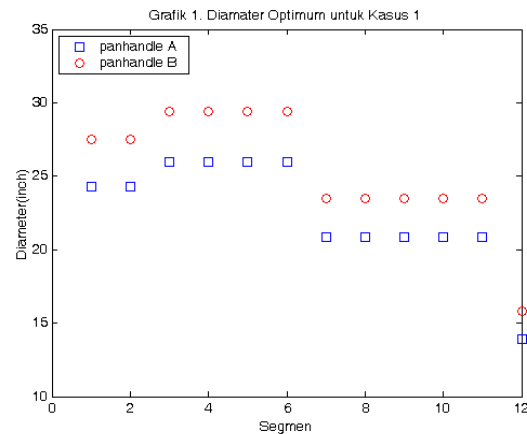
Seg	Diameter	P inlet	P outlet	Biaya (\$/ft.thn)	Tollfee
1	24.287	1500.000	1346.690	47.283	0.0170
2	24.287	1346.690	1248.041		0.0100
3	25.940	1248.041	1151.643		0.0069
4	25.940	1151.643	1057.515		0.0062
5	25.940	1057.515	979.227		0.0048
6	25.940	979.227	915.675		0.0036
7	20.889	915.675	853.871		0.0074
8	20.889	853.871	808.790		0.0051
9	20.889	808.790	744.817		0.0067
10	20.889	744.817	655.909		0.0084
11	20.888	655.909	500.000		0.0123
12	13.934	915.675	400.000		0.0054
Total Tollfee					0.0939

**Tabel 4.** Hasil Optimisasi Kasus 1, dengan kendala persamaan panhandle B

Seg	Diameter	P inlet	P outlet	Biaya (\$/ft.thn)	Tollfee
1	27.478	1500.000	1348.333	51.054	0.0184
2	27.478	1348.333	1250.441		0.0109
3	29.426	1250.441	1154.172		0.0075
4	29.426	1154.172	1059.901		0.0068
5	29.426	1059.901	981.276		0.0052
6	29.426	981.276	917.290		0.0040
7	23.502	917.290	855.600		0.0079
8	23.502	855.600	810.535		0.0054
9	23.502	810.535	746.480		0.0072
10	23.502	746.480	657.238		0.0090
11	23.502	657.238	500.000		0.013
12	15.825	917.290	400.000		0.0057
Total Tollfee					0.1011

Dalam kasus ini optimisasi menggunakan flowrate pada segmen 1 dan segmen 2, 1000 mmscfd, untuk segmen 3 sampai segmen 6, 1250 mmscfd, untuk segmen 7 sampai segmen 11, 625 mmscfd, dan segmen 12, 625 mmscfd. Selanjutnya  $P_1 = 1500 \text{ psia}$ ;  $P_{22} = 500 \text{ psia}$ ; dan  $P_{24} = 400 \text{ psia}$ : Hasil optimisasinya dapat dilihat dalam Tabel 3 dan Tabel 4.

Dalam bentuk grafik distribusi tekanan dan diameter pada setiap segmen adalah sebagai berikut:



Dari hasil yang diperoleh dari tabel maupun dari grafik terlihat bahwa pada jalur utama besar diameter optimal bergantung pada laju alirnya. Jika segmen mempunyai laju alir yang sama maka diameter optimum dari segmen tersebut juga sama. Seperti dalam tabel maupun grafik untuk segmen 1 dan segmen 2, dimana laju

alirnya sama yakni 1000 mmscfd, diameter optimumnya sama yaitu 24.287 inch untuk optimisasi dengan panhandle A dan 27.678 inch bila optimisasi dengan panhandle B. Untuk segmen 3 sampai segmen 6 dengan laju alir 1250 mmscfd juga mempunyai diameter optimum yang sama, demikian pula untuk segmen 7 sampai segmen 11 dengan laju alir 625 mmscfd. Namun pada segmen percabangan yakni segmen 12 walaupun laju alir di segmen tersebut sama dengan di segmen 7, terlihat bahwa diameter optimum cukup kecil hal ini karena panjang segmen tersebut pendek dan tekanan outputnya ditetapkan kecil.

Untuk distribusi tekanan, terlihat bahwa tekanan terus turun di setiap segmen untuk jalur utama maupun percabangan. Dari Grafik 2. dan Grafik 3. tekanan *inlet* maupun tekanan *outlet* untuk setiap segmen tidak terdapat perbedaan yang signifikan bila optimasi dilakukan dengan kendala panhandle A dan panhandle B. Hal ini karena telah ditetapkan terlebih dahulu tekanan *inlet* dan tekanan *outlet* dari jaringan pipa.

**3.2 Kasus 2**

Optimisasi di sini menggunakan *flowrate* pada segmen ke 1 dan 2, 1000 mmscfd, untuk segmen 3 sampai segmen 6, 1250 mmscfd, untuk segmen 7 sampai segmen 11, 750 mmscfd, dan untuk segmen 12, 500 mmscfd. Selanjutnya  $P1 = 1500 \text{ psia}$ ;  $P22 = 500 \text{ psia}$ ; dan  $P24 = 400 \text{ psia}$ . Hasil dari optimisasi tersebut dapat dilihat dalam Tabel 5 dan Tabel 6.

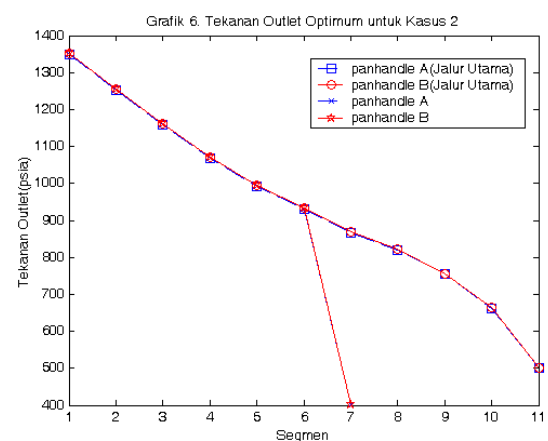
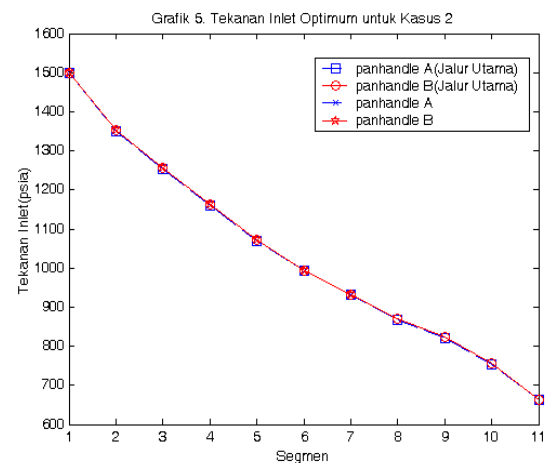
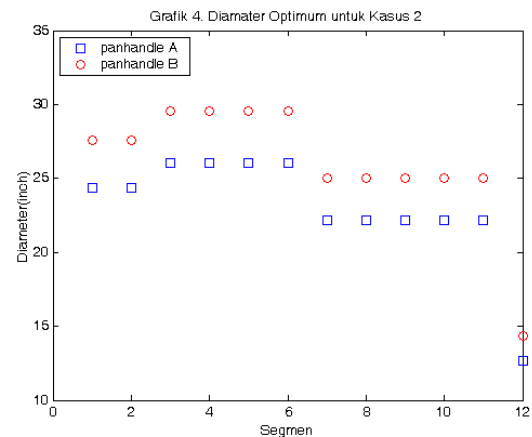
**Tabel 5.** Hasil Optimisasi Kasus 2, dengan kendala persamaan panhandle A

Seg	Diameter	P inlet	P outlet	Biaya (\$/ft.thn)	Tollfee
1	24.388	1500.000	1349.908	47.790	0.0171
2	24.388	1349.908	1253.532		0.0101
3	26.048	1253.532	1159.554		0.0069
4	26.048	1159.554	1068.030		0.0063
5	26.048	1068.030	992.138		0.0048
6	26.048	992.138	930.722		0.0036
7	22.185	930.722	866.999		0.0063
8	22.185	866.999	820.478		0.0044
9	22.185	820.478	754.384		0.0058
10	22.185	754.384	662.331		0.0073
11	22.185	662.331	500.000		0.0106
12	12.692	930.722	400.000		0.0065
Total Tollfee					0.0897

**Tabel 6.** Hasil Optimisasi Kasus 2, dengan kendala persamaan panhandle B

Seg	Diameter	P inlet	P outlet	Biaya (\$/ft.thn)	Tollfee
1	27.593	1500.000	1351.626	51.675	0.0185
2	27.594	1351.626	1256.074		0.0109
3	29.549	1256.074	1162.317		0.0076
4	29.549	1162.317	1070.764		0.0068
5	29.549	1070.764	994.651		0.0053
6	29.549	994.651	932.916		0.0040
7	25.017	932.916	869.258		0.0068
8	25.017	869.258	822.709		0.0047
9	25.017	822.709	756.464		0.0062
10	25.017	756.464	663.961		0.0078
11	25.017	663.961	500.000		0.0114
12	14.369	932.916	400.000		0.0068
Total Tollfee					0.0967

Dalam bentuk grafik distribusi tekanan dan diameter pada setiap segmen dalam kasus ini adalah sebagai berikut:



Dari hasil yang ditampilkan dalam tabel dan grafik dalam kasus di sini, sama halnya dengan kasus sebelumnya terlihat bahwa optimisasi dengan menggunakan kendala panhandle A lebih baik dari hasil optimisasi dengan menggunakan kendala panhandle B masih tetap lebih baik. Dalam tabel terlihat bahwa pada jalur utama pun, diameter pipa akan sama, jika laju alir dalam pipa tersebut sama.

Dalam kasus ini terlihat bahwa bila segmen 12 dikurangi laju alirnya dan segmen 7 sampai segmen 11 ditambah laju alirnya maka, diameter optimum di segmen

12 akan mengecil sedangkan diameter optimum di segmen 7 sampai 11 akan membesar. Sedangkan untuk jalur lainnya tidak terjadi perubahan yang signifikan. Sama halnya dengan kasus sebelumnya dari grafik 5, dan grafik 6, terlihat bahwa tekanan *inlet* maupun tekanan *outlet* dari setiap segmen cenderung sama, baik untuk optimisasi dengan kendala panhandle A maupun panhandle B.

## KESIMPULAN DAN SARAN

### Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dari bab-bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa

1. Diameter pipa optimum untuk optimisasi dengan kendala panhandle A lebih kecil dibandingkan dengan bila optimisasi dengan kendala panhandle B.
2. Titik percabangan berpengaruh dalam proses optimisasi ini. Karena pada titik percabangan tersebut terjadi penambahan maupun pengurangan laju alir
3. Dengan laju alir yang sama diameter pipa belum tentu sama hal ini karena pengaruh tekanan dan panjang pipa.
4. Distribusi tekanan inlet maupun tekanan outlet dalam setiap segmen pipa sama, untuk optimisasi dengan kendala panhandle A maupun panhandle
5. Akibat dari 1 dan 4 maka optimisasi dengan kendala panhandle A menghasilkan biaya yang lebih kecil dari optimisasi dengan kendala panhandle B.

### Saran

1. Hasil yang ditampilkan dalam tulisan ini hanya terdiri dari dua kasus saja. Sebenarnya masih dapat dikembangkan ke berbagai kasus dengan variasi laju alir, tekanan inlet, dan tekanan outlet hanya saja dibutuhkan cukup lama waktu untuk proses optimisasi. Dengan demikian diharapkan akan dilakukan proses optimisasi dengan berbagai variasi tersebut dikemudian hari.
2. Dalam melakukan proses optimisasi dengan menggunakan MATLAB dibutuhkan cukup lama waktu agar hasil dapat ditampilkan, hal ini mungkin karena keterbatasan dari penulis ataupun mungkin karena keterbatasan dari MATLAB, oleh karena itu disarankan agar proses optimisasi ini dapat dikerjakan dengan program lain dikemudian hari.
3. Tampilan program untuk permasalahan ini juga belumlah baik, masih diperlukan perbaikan-perbaikan yang lebih. Dengan demikian penulis berharap agar tampilan program ini pun dapat diperbaiki kemudian.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ikoku, Chi. U, *Natural Gas Production Engineering*, John Wiley and Sons Inc., New York 1984.
- [2] Rao S.S, *Optimization Theory and Application*, 2nd ed, Wiley Eastern Limited, 1989.
- [3] Mochamad Apri., *Model Biaya Total Jaringan Pipa Transmisi Gas dan Optimasinya*, Departemen Matematika ITB Bandung, Tugas Akhir, 2002.

- [4] Mucharam, L., Hartono, A. B, Model untuk Penentuan Diameter Optimum Pipa Transmisi Gas dengan Model Waymouth, Panhandle A, Panhandle B dan Blasius, JTM-FIKTM-ITB Vol VII No. 4, 2000
- [5] OPPINET, Final Result- March 2002, *Optimization on Gas and Transmission & Distribution Pipeline Network*, Center for Research on the Application and Advancement of Mathematics- P4M ITB.
- [6] Matthews, John H., Kurtis D. Fink *Numerical Methods Using MATLAB*, 3rd ed, Prentice hall, Upper Saddle River, New Jersey 1999.
- [7] Arsegianto, Suwono E., Apri Mochamad., *Non-Linear Optimization Model for Gas Transmission System: A Case of Grissik-Duri Pipeline*, SPE International, 2003.

## REGRESI FUZZY *Fuzzy Regression*

**DORTEUS LODEWYIK RAHAKBAUW**

Staf Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon  
E-mail: lodewyik@gmail.com

### ABSTRAK

Dalam statistik, Analisis regresi memiliki bahasan ketergantungan satu variabel dengan satu atau lebih variabel yang lain. Tujuan dari analisa regresi adalah untuk menaksir parameter berdasarkan data empiris. Bentuk linier  $y = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_n x_n$ , Dimana  $y$  adalah variabel output,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah variabel input, dan  $0, 1, \dots, n$  adalah parameter, yang merupakan bentuk matematika berulang dalam analisa regresi. Suatu permasalahan regresi linier yang lebih luas dimana terdapat parameter fuzzy dan data fuzzy dapat diselesaikan dengan pendekatan *symmetric triangular fuzzy number* dimana titik-titiknya dibagi dan dicocokkan berdasarkan data kemudian diselesaikan dengan masalah pemrograman linier.

**Keywords:** *regresi fuzzy, regresi linier, symmetric triangular fuzzy number*

### PENDAHULUAN

Istilah fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh Prof. Lotfi A. Zadeh pada tahun 1965, kemudian berkembang menjadi logika fuzzy yang didasari teori himpunan fuzzy. Pada teori himpunan fuzzy, peranan derajat keanggotaan sebagai penentu keberadaan dalam suatu himpunan.

### TINJAUAN PUSTAKA

#### ANALISIS REGRESI

Analisis regresi adalah bagian statistik, yang membahas ketergantungan atas satu variabel dengan satu atau lebih variabel yang lain. Ketergantungan biasanya diasumsikan untuk mempunyai suatu bentuk matematis tertentu dengan satu parameter atau lebih. Tujuan dari analisa regresi adalah untuk menaksir parameter berdasarkan data empiris. Bentuk linier

$$y = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_n x_n \quad (1)$$

Dimana  $y$  adalah variabel output,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah variabel input, dan  $0, 1, \dots, n$  adalah parameter, yang merupakan bentuk matematika berulang dalam analisa regresi. Problem analisa regresi dirumuskan dalam kaitannya dengan bentuk linear yang disebut regresi linear. Diberikan, suatu contoh regresi linear dengan satu variabel.

Selanjutnya diasumsikan bentuk,

$$y = \gamma_0 + \gamma_1 x \quad (2)$$

merepresentasikan suatu *straight line*.

Diberikan himpunan data yang diamati  $\langle a_1, b_1 \rangle < a_2, b_2 \rangle, \dots, \langle a_m, b_m \rangle$  dari pasangan variabel  $\langle x, y \rangle$ , harus diperoleh nilai  $\gamma_0$  dan  $\gamma_1$ , untuk itu *error* total dari titik estimasi pada *straight line* dengan pengaruh korespondensi titik observasi adalah minimal.

Penggunaan metode regresi linear, berdasarkan *least square error*, *total error* dapat ditentukan dengan rumus,

$$\sum_{i=1}^m [b_i - (\gamma_0 + \gamma_1 a_i)]^2$$

Sedangkan nilai-nilai optimal dari  $\gamma_0$  dan  $\gamma_1$  diperoleh dengan rumus:

$$\gamma_1 = \frac{m \sum_{i=1}^m a_i b_i - \sum_{i=1}^m a_i \sum_{i=1}^m b_i}{m \sum_{i=1}^m a_i^2 - (\sum_{i=1}^m a_i)^2}$$
$$\gamma_0 = \frac{\sum_{i=1}^m b_i - \gamma_1 \sum_{i=1}^m a_i}{m}$$

yang bisa digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi.

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Terdapat dua motivasi untuk mengembangkan analisis regresi fuzzy. Motivasi yang pertama adalah



realisasi yang sering tidak realistis untuk mengasumsikan bahwa suatu fungsi *crisp* dari (1), merepresentasikan hubungan antara variabel-variabel yang diberikan. Relasi fuzzy, meskipun kurang tepat namun secara intuitif cukup realistis. Motivasi yang kedua adalah berdasarkan data sebenarnya, yang mana dalam aplikasi-aplikasi Fuzzy secara tak terpisahkan. Dua motivasi ini akan menjelaskan analisis regresi fuzzy. Suatu masalah yang melibatkan parameter-parameter fuzzy dan data *crisp*, sementara yang lain melibatkan parameter-parameter *crisp* dan data fuzzy. Dalam penulisan ini, akan diperlihatkan dua jenis regresi fuzzy linear.

**1. Regresi Linier Dengan Parameter-Parameter Fuzzy.**

Dalam regresi fuzzy tipe ini, ketergantungan variabel output terhadap variabel input di tunjukkan dalam bentuk,

$$Y = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n \tag{3}$$

dimana  $C_1, C_2, \dots, C_n$  adalah *fuzzy number*, dan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah variabel input bernilai riil; untuk setiap pasangan- $n$  dari nilai variabel-variabel input, nilai dari variabel output didefinisikan oleh (3) adalah *fuzzy number* dari  $Y$ . Diberikan titik-titik dari himpunan data *crisp*  $\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle$ , tujuan dari masalah regresi ini adalah mendapatkan parameter-parameter fuzzy  $C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$ , yang mana (3) menunjukkan kecocokan terbaik dari titik-titik data ini, sesuai dengan beberapa kriteria kebaikannya.

Diasumsikan bahwa parameter-parameter dalam (3) adalah *symmetric triangular fuzzy number* sebagai berikut:

$$C_i(c) = \begin{cases} 1 - \frac{|c-c_i|}{s_i} & \text{untuk } c_i - s_i \leq c \leq c_i + s_i \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases} \tag{4}$$

dimana  $c_i$  titik dimana  $C_i(c_i) = 1$  dan  $s_i > 0$  merupakan *spread* dari  $C_i$  (setengah dari panjang *support* himpunan  $C_i$ ). Diberikan  $C_i$ , yang ditunjukkan dalam perkiraan kondisi *linguistic*  $c_i$  atau sekitar  $c_i$ , dinotasikan dengan  $C_i = \langle c_i, s_i \rangle$  untuk semua  $i \in \mathbb{N}_n$ . Maka, ini sangat mudah untuk membuktikan dengan *extension principle* bahwa  $Y$  dalam (3) adalah juga *symmetric triangular fuzzy number* diberikan oleh,

$$Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{|y-x^Tc|}{s^T|x|} & \text{untuk } x \neq 0 \\ 1 & \text{untuk } x = 0, y \neq 0 \\ 0 & \text{untuk } x = 0, y = 0 \end{cases} \tag{5}$$

untuk semua  $y \in \mathbb{R}$ , dimana

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}, |x| = \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \\ \vdots \\ |x_n| \end{bmatrix}$$

dan  $T$  dinotasikan sebagai transpos.

Masalah sebenarnya dari pencarian parameter-parameter fuzzy  $C_1, C_2, \dots, C_n$  dapat dikonversi ke masalah untuk mencari vektor-vektor  $c$  dan  $s$  seperti  $Y(y)$

(5) dengan mencocokkan data. Dua kriteria terbaik biasanya digunakan dalam masalah ini. Berdasarkan kriteria pertama, untuk setiap data yang diberikan  $\langle a_j, b_j \rangle$ , dimana  $a_j$  adalah nilai-nilai vektor dari variabel-variabel input,  $b_j$  pasti bagian dari koresponding *fuzzy number*  $b_j$  dengan *grade* lebih besar atau sama dengan suatu nilai  $h \in [0,1]$ . Untuk  $Y_j(b_j) \geq h$  untuk setiap  $j \in \mathbb{N}_m$ , dimana  $Y_j$  adalah *fuzzy number* didefinisikan dalam (5) untuk  $x = a_j$ . Berdasarkan kriteria ke dua, nonspesifik total dari parameter-parameter fuzzy haruslah diminimumkan/ diperkecil. Ini yang dibutuhkan untuk memperoleh ekspresi spesifik (3) untuk kecocokan yang cukup (dilihat dari nilai  $h$ ). Kenonspesifikan dari tiap-tiap parameter *fuzzy*  $C_j$  diberikan oleh (4) mungkin ditunjukkan dengan *spread*  $s_i$ .

Untuk masalah regresi *fuzzy* dapat diformulasikan dengan kondisi masalah pemrograman linier dasar sebagai berikut .

minimumkan  $\sum_{i=1}^m s_i$

berdasarkan

$$(1-h)s^T|a_j| - |b_j - a_j^Tc| \geq 0, j \in \mathbb{N}_m \tag{6}$$

$$s_i \geq 0, i \in \mathbb{N}_M$$

**Contoh Regresi Linier Dengan Parameter-Parameter Fuzzy**

Diberikan  $\langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 4,3 \rangle$  adalah data yang merepresentasi ketergantungan variabel  $y$  terhadap variabel  $x$ . Untuk mengilustrasikan regresi fuzzy linear dari data ini, diasumsikan bentuk,

$$Y = Cx$$

dimana  $C = \langle c, s \rangle$  adalah parameter fuzzy ditunjukan sebagai anggota(member) *symmetric triangular fuzzy*. Maka, masalah pemrograman linear memiliki bentuk:

minimumkan  $s$

berdasarkan

$$(1-h)s - |1-c| \geq 0$$

$$2(1-h)s - |2-2c| \geq 0$$

$$3(1-h)s - |2-3c| \geq 0$$

$$4(1-h)s - |3-4c| \geq 0$$

masalah ini dapat ditunjukkan dalam bentuk sederhana seperti yang diberikan di bawah ini.

minimumkan  $s$

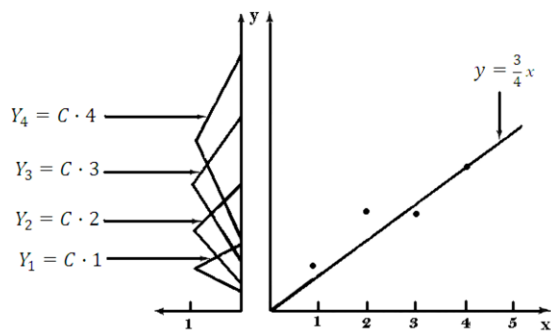
berdasarkan

$$s \geq \frac{1}{1-h} \max \left( |1-c|, \left| \frac{2}{3}-c \right|, \left| \frac{3}{4}-c \right| \right)$$

$h \in [0,1]$  adalah *fixed number*

Menyelesaikan masalah ini, akan didapat nilai optimalnya adalah,

$$c^* = \frac{5}{6} \text{ dan } s^* = \frac{1}{6(1-h)}$$



Gambar 1: Ilustrasi dari contoh regresi linier dengan parameter Fuzzy

Sehingga,

$$C = \left\langle \frac{5}{6}, \frac{1}{6(1-h)} \right\rangle$$

Memilih  $h = \frac{2}{3}$  diperoleh  $C = \left\langle \frac{5}{6}, \frac{1}{2} \right\rangle$  himpunan fuzzy  $Y_j = C \cdot a_j$  untuk  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$  dan  $a_4 = 4$  ditunjukkan dalam gambar 1. Juga yang ditunjukkan dalam gambar tersebut adalah *linear least-square fitting*.

### 2. Regresi Linier dengan data Fuzzy

Dalam regresi fuzzy tipe ini, ketergantungan variabel output terhadap variabel input di tunjukkan dalam bentuk,

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n \tag{7}$$

dimana nilai-nilai variabel-variabel input dan output adalah *fuzzy number*, diasumsikan untuk *triangular* dan *symmetric*, dan  $a_1, a_2, \dots, a_n$  adalah parameter-parameter bernilai riil. Diberikan  $X_i = \langle x_i, s_i \rangle$  untuk semua  $i \in \mathbb{N}_n$ . Maka

$$Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{|y - a^T x|}{s^T |a|} & \text{untuk } a \neq 0 \\ 1 & \text{untuk } a = 0, y \neq 0 \\ 0 & \text{untuk } a = 0, y = 0 \end{cases} \tag{8}$$

untuk semua  $y \in \mathbb{R}$ , dimana

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix},$$

Data diberikan dari pasangan  $\langle X^{(j)} Y^{(j)} \rangle$ , dimana  $X^{(j)}$  adalah  $n$ -tupel dari *symmetric triangular fuzzy number*, dan  $Y^{(j)}$  adalah *symmetric triangular fuzzy number* untuk setiap  $j \in \mathbb{N}_m$ . Tujuan dari masalah regresi ini adalah memperoleh parameter-parameter  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sebagaimana fungsi linear fuzzy (7) mencocokkan data yang diberikan sebaik mungkin. Dua kriteria terbaik biasanya sering digunakan. berdasarkan kriteria pertama, perbedaan total antara area dari *actual fuzzy number*  $Y^{(j)}$  dan area dari *fuzzy number*  $Y_j$  diperoleh untuk  $X^{(j)}$  berdasarkan (7), dimana  $j \in \mathbb{N}_m$ , harusnya diminimumkan/diperkecil. berdasarkan kriteria ke dua, *fuzzy number*  $Y^{(j)}$  dan  $Y_j$  seharusnya kompatibel paling

tidak untuk beberapa derajat tertentu  $h \in [0,1]$ ; kompatibel(*com*), didefinisikan,

$$(Y^{(j)}, Y_j) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \min [Y^{(j)}(y), Y_j(y)]$$

Menggunakan dua kriteria ini, dijelaskan masalah regresi fuzzy dapat diformulasikan dengan kondisi dari masalah optimasi berikut:

Minimumkan

$$\sum_{j=1}^m \left| \int_{\mathbb{R}} Y^{(j)}(y) dy - \int_{\mathbb{R}} Y_j(y) dy \right| \tag{9}$$

Berdasarkan

$$\min_{j \in \mathbb{N}_m} \text{com}(Y^{(j)}, Y_j) \geq h$$

diberikan  $X_i^{(j)} = \langle x_i^{(j)}, s_i^{(j)} \rangle$  untuk semua  $i \in \mathbb{N}_n$  dan  $Y^{(j)} = \langle y^{(j)}, s^{(j)} \rangle$  maka, masalah regresi *fuzzy* dari tipe ini dapat juga diformulasikan dengan bentuk,

minimumkan

$$\sum_{j=1}^m \left| s^{(j)} - \sum_{i=1}^n |a_i| s_i^{(j)} \right|$$

berdasarkan

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^n |a_i| s_i^{(j)} + \sum_{i=1}^n a_i x_i^{(j)} &\leq y^{(j)} - s^{(j)} \\ \sum_{i=1}^n |a_i| s_i^{(j)} + \sum_{i=1}^n a_i x_i^{(j)} &\geq y^{(j)} - s^{(j)} \end{aligned} \tag{10}$$

$a_i \in \mathbb{R}$  untuk semua  $i \in \mathbb{N}_n$  dan semua  $j \in \mathbb{N}_m$

### Contoh Regresi Linier Dengan Data Fuzzy

Untuk mengilustrasikan pendeskripsian metode regresi linear dengan data fuzzy, selanjutnya diberikan bentuk linear simpel,

$$Y = aX$$

dan berikut data dalam kondisi atas pasangan input/output *fuzzy number*:

$$\begin{aligned} &\langle \langle 5/6, 1/2 \rangle, \langle 1, 0 \rangle \rangle \\ &\langle \langle 5/3, 1/2 \rangle, \langle 2, 1/2 \rangle \rangle \\ &\langle \langle 5/2, 1/2 \rangle, \langle 3, 1/2 \rangle \rangle \\ &\langle \langle 10/3, 1/2 \rangle, \langle 4, 0 \rangle \rangle \end{aligned}$$

Menerapkan (10) ke dalam contoh ini diperoleh:

$$\text{Minimumkan } |a| + |1 - a|$$

Berdasarkan

$$\begin{aligned} -\frac{|a|}{2} + \frac{5a}{6} &\leq 1, \\ \frac{|a|}{2} + \frac{5a}{6} &\geq 1, \\ -\frac{|a|}{2} + \frac{5a}{3} &\leq 1.5, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{|a|}{2} + \frac{5a}{3} &\geq 1.5, \\ -\frac{|a|}{2} + \frac{5a}{2} &\leq 2.5, \\ \frac{|a|}{2} + \frac{5a}{2} &\geq 2.5 \\ -\frac{|a|}{2} + \frac{10a}{3} &\leq 4 \\ \frac{|a|}{2} + \frac{10a}{3} &\geq 4 \\ a &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Formula ini dapat disederhanakan menjadi bentuk,

$$\text{Minimumkan } |a| + |1 - a|$$

Berdasarkan

$$\begin{aligned} a &\in [6/8, 3], \\ a &\in [9/13, 9/7], \\ a &\in [5/6, 5/4], \\ a &\in [24/23, 24/17], \end{aligned}$$

Hasil dari masalah ini, nilai optimal dari parameter  $a$  adalah  $a^* = 24/23$ . Sedemikian sehingga bentuk dari  $Y = aX$  dengan kecocokan terbaik (berdasarkan kriteria yang dipilih) adalah  $Y = 24x/23$ .

### KESIMPULAN

Setiap permasalahan Regresi linear yang memuat parameter-parameter fuzzy ataupun data fuzzy dapat diselesaikan dengan pendekatan *symmetric triangular fuzzy number*

### DAFTAR PUSTAKA

- Klir, J.G & Yuan, B., 1995, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Application*. Prentice Hall Inc, New Jersey.
- Zimmerman., 1991, *Fuzzy Set Theory and its application*, second edition, Kluwer Academic Publisher, Massachusetts-USA.

## APLIKASI ALGORITMA KRUSKAL DALAM PENGOTIMALAN PANJANG PIPA *Kruskal Algorithm Application on Optimlaizing Pipes Network*

ABRAHAM ZACARIA WATTIMENA<sup>1</sup>, SANDRO LAWALATA<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

<sup>2</sup>Alumni Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Maluku

E-mail: ampiwattimena@rocketmail.com

### ABSTRAK

Algoritma Kruskal dalam pencarian pohon merentang minimum dapat di aplikasikan pada jaringan pipa yang terpasang di lokasi jalan Ina Tunjari Karang Panjang Ambon. Skripsi ini adalah penelitian yang bersifat studi kasus dan merupakan suatu aplikasi graf dalam kehidupan sehari-hari. Permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah panjang pipa yang terpasang pada jalan Ina Tunjari Ambon sepanjang 1448 meter sedangkan panjang pipa dengan menggunakan algoritma Kruskal sepanjang 1026 meter. Dalam skripsi ini dititik beratkan pada pengoptimalan panjang pipa yang merupakan salah satu masalah pohon merentang minimum pada graf. Jaringan pipa akan direpresentasikan ke dalam bentuk graf terhubung, tak berarah dan berbobot.

**Kata kunci:** *Algoritma Kruskal, Graf, Pipa, Pohon merentang minimum.*

### PENDAHULUAN

Dengan perubahan zaman yang semakin maju, menantang ilmu matematika dalam menghadirkan aplikasi baru yang juga tidak kalah hebatnya. Aplikasi yang diciptakan lebih efisien baik dari segi produktifitas juga biaya. Setiap orang ingin mendapatkan keuntungan dan kenyamanan yang lebih sehingga memunculkan banyak segi yang harus diminimumkan tanpa mengurangi fungsinya. Karena hal inilah, sering muncul permasalahan-permasalahan dalam kehidupan yang perlu dicari solusi yang tepat. Salah satu contohnya masalah jaringan aliran air di pemasangan pipa dalam arti pemasangan pipa yang optimal untuk mengalirkan air ke semua rumah

Permasalahan ini dapat diselesaikan dengan menggunakan teori graf. Jaringan aliran Air yang terpasang dapat direpresentasikan ke dalam bentuk graf terhubung, berbobot dan tak berarah (*connected, weighted and undirected graph*). Dengan menggunakan penerapan algoritma Kruskal dalam pohon merentang minimum, panjang pipa air yang terpasang dapat diminimumkan. Algoritma ini membentuk pohon merentang minimum untuk tiap langkah. Sehingga berdasarkan kinerjanya nanti baik dengan perhitungan manual maupun uji hasil dengan bantuan program

aplikasi matematika Maple 11 pengoptimalan jaringan pipa yang terpasang dapat diketahui.

### TINJAUAN PUSTAKA

Menurut catatan sejarah, masalah jembatan Königsberg adalah masalah yang pertama kali menggunakan graf pada tahun 1736. Di kota Königsberg (sebelah timur) negara bagian Prussia (Jerman) sekarang bernama Koliningrad, terhadap sungai Pregal yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai. Ada tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan dibelah oleh sungai tersebut. Masalahnya adalah apakah mungkin ketujuh buah jembatan itu masing-masing satu kali dilalui dan kembali lagi di tempat semula. Sebagian penduduk kota sepakat bahwa memang tidak mungkin melalui setiap jembatan itu hanya sekali dan kembali lagi ke tempat asal mula keberangkatan, tetapi mereka tidak dapat menjelaskan kecuali dengan cara coba-coba (Rinaldi, 2003).

Pada tahun 1736, seorang matematikawan Swiss Leonard Euler adalah orang pertama yang berhasil menemukan jawaban masalah itu. Permasalahannya adalah menentukan suatu cara untuk melalui setiap

jembatan tepat satu kali. Euler menggunakan representasi titik dan garis untuk menyelesaikan masalah tersebut. Konsep yang diperkenalkan Euler dalam karya tulisnya yang saat ini dikenal sebagai teori graf. Teori ini terus berkembang seiring ditemukannya berbagai aplikasi dalam menyelesaikan permasalahan-permasalahan modern (Siang Jong Jek, 2006).

### 1. Representasi Visual

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak persoalan yang dapat disimpulkan sebagai persoalan yang berhubungan dengan himpunan, yang mana logika dari persoalan tersebut seringkali digambarkan dengan sebuah graf. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf dinyatakan berupa objek sebagai verteks, noktah, titik, node, atau bulatan. Sedangkan hubungan antar objek-objek tersebut dinyatakan dengan *edge* atau sisi. Contoh umum dari teori graf adalah penggunaan pohon merentang minimum dengan menggunakan Algoritma Kruskal salah satunya yaitu pengoptimalan jaringan aliran air. Jaringan Aliran air dapat direpresentasikan sebagai graf, dimana rumah sebagai verteks sedangkan pipa sebagai sisi. Untuk melakukan analisis dengan menggunakan Algoritma Kruskal, maka harus dilakukan penelitian lebih lanjut yakni melakukan pengukuran jarak antar rumah, dan jarak pipa dengan rumah. Setelah dilakukan pengukuran kemudian hasil pengukuran tersebut direpresentasikan ke dalam graf.

### 2. Graf Terhubung (*Connected Graph*)

Suatu Graf  $G$  merupakan suatu pasangan  $\{E(G), V(G)\}$  dimana  $V(G)$  merupakan sebuah himpunan berhingga yang tidak kosong dan elemennya disebut verteks. Sedangkan  $E(G)$  adalah pasangan yang tidak berurut dari elemen-elemen verteks  $V(G)$  yang disebut dengan sisi. Sisi yang direpresentasikan dapat berupa garis lurus ataupun melengkung.

### 3. Graf Tak Berarah (*Undirected Graph*)

Dalam graf  $G$  jika sisi yang menghubungkan verteks-verteks dalam graf  $G$  memiliki arah maka graf  $G$  disebut graf berarah (*directed graph*) atau *digraph*, sebaliknya jika verteks dalam graf  $G$  dihubungi oleh sisi tanpa arah maka Graf  $G$  disebut graf tak berarah (*undirected graph*).

### 4. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)

Graf berbobot adalah graf yang mempunyai nilai berupa bilangan non negatif pada setiap sisinya.

### 5. Pohon

Pohon adalah merupakan suatu graf terhubung yang tidak memuat sirkuit, *loop*, dan sisi ganda. Pohon yang hanya terdiri dari satu verteks disebut pohon yang menyusut. Sedangkan Hutan (*forest*) adalah sekumpulan dua atau lebih pohon.

### 6. Pohon Merentang (*Spanning Tree*)

Pohon Merentang  $T$  dari suatu graf terhubung adalah suatu graf bagian dari graf  $G$  yang mengandung semua verteks dari  $G$  dan merupakan suatu pohon. Sisi pada

suatu pohon merentang biasa disebut cabang (*branch*). Dan sisi di  $G$  yang tidak terdapat di pohon merentang  $T$  disebut tali (*chord*).

## 7. Algoritma Kruskal

Algoritma Kruskal merupakan salah satu algoritma dalam teori graf untuk menyelesaikan persoalan pohon merentang minimum. Algoritma Kruskal ditemukan pada tahun 1956 oleh seorang ilmuwan matematika, statistika, komputer dan psikometrika Joseph yaitu Bernard Kruskal, Jr yang berasal dari Amerika. Dasar pembentukan Algoritma Kruskal berasal dari analogi *growing forest*. *Growing forest* maksudnya adalah untuk membentuk pohon merentang minimum  $T$  dari graf  $G$  adalah dengan cara mengambil satu-persatu sisi dari graf  $G$  dan memasukannya dalam pohon yang telah terbentuk sebelumnya. Seiring dengan berjalannya iterasi pada setiap sisi maka *forest* akan memiliki pohon yang semakin sedikit. Oleh sebab itu analogi ini disebut *growing forest*. Algoritma Kruskal akan terus menambahkan sisi-sisi ke dalam hutan yang sesuai hingga akhirnya tidak akan ada lagi *forest*, melainkan hanyalah sebuah pohon merentang minimum.

Adapun langkah kerja Algoritma Kruskal sebagai berikut :

1. Lakukan pengurutan terhadap setiap sisi di graf  $G$  mulai dari sisi dengan bobot terkecil.
2. Pilih sisi  $(u, v)$  yang mempunyai bobot minimum yang tidak membentuk sirkuit di  $T$ . Tambahkan  $(u, v)$  kedalam  $T$ .
3. Ulangi langkah 2 sampai pohon merentang minimum terbentuk, yaitu ketika sisi di dalam pohon merentang  $T$  berjumlah  $n - 1$  ( $n$  adalah jumlah simpul pada graf)

*Pseudocode* dari Algoritma Kruskal sebagai berikut:

```

Procedure Kruskal (input G: graph, output T : pohon);
{
  1. Membentuk MST T dari graph terhubung G
  2. Masukkan Graph-berbobot terhubung  $G = (V, E)$ , yang
     mana  $|v| = n$ 
  3. Keluaran : MST  $T = (V, E)$ 
}
Deklarasi
       $i, p, q, u, v : integer$ 
Algoritma
Cari sisi  $(p, q)$  dari  $E$  yang berbobot terkecil
 $T \leftarrow \{(p, q)\}$ 
While  $T < n - 1$  do pilih sisi  $(u, v)$  dari  $E$  yang bobotnya terkecil.
If  $(u, v)$  tidak membentuk siklus di  $T$  then
   $T \leftarrow T \cup \{(u, v)\}$ 
endif
endfor

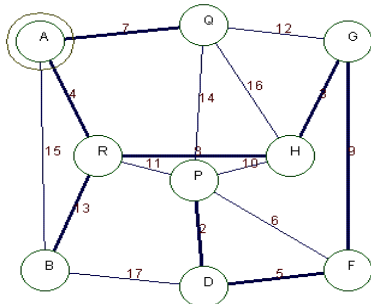
```

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini akan membahas Algoritma Kruskal yang digunakan untuk mengoptimalkan panjang pipa air yang terpasang di Jalan Ina Tuni Karang Panjang Ambon. Sebelumnya, akan diperlihatkan lebih terperinci lagi penggunaan Algoritma Kruskal dalam penyelesaian masalah pohon merentang minimum pada contoh berikut.

**Contoh 1**

Diberikan suatu graf  $G$  seperti gambar di bawah ini, dengan menggunakan Algoritma Kruskal bentuklah pohon merentang minimumnya.



Gambar 1. Graf terhubung, berbobot dan tak berarah  $G(9,16)$

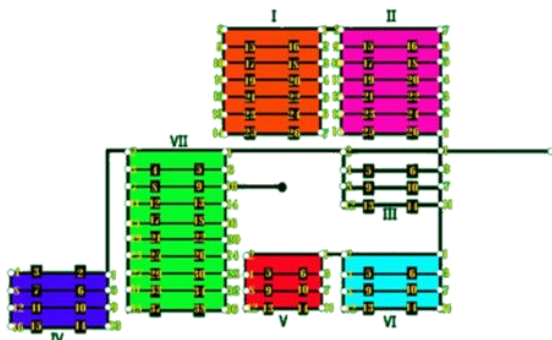
Berdasarkan Gambar 1, pohon merentang minimum dengan menggunakan algoritma Kruskal dapat diselesaikan dalam beberapa tahapan seperti berikut :

1. Pilih sembarang sisi dalam graf  $G$  dengan bobot yang paling minimum masukkan ke dalam  $T$  yaitu  $(P, D)$  dengan bobot 2.
2. Pilih sisi  $(R, A)$  dengan bobot 4.
3. Pilih sisi  $(D, F)$  dengan bobot 5.
4. Pilih sisi  $(A, Q)$  dengan bobot 7. sisi  $(F, P)$  tidak dipilih karena nanti akan membentuk sebuah sirkuit.
5. Pilih sisi  $(G, H)$  dengan bobot 8.
6. Pilih sisi  $(H, R)$  dengan bobot 8.
7. Pilih sisi  $(F, G)$  dengan bobot 9.
8. Pilih sisi  $(R, B)$  dengan bobot 13.

Sehingga pohon merentang yang terpakai dari graf  $G(9,16)$  adalah dengan bobot paling minimum dan memiliki nilai:

$$W = 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 8 + 9 + 13 = 56$$

Dalam pembahasan mengenai jaringan pipa yang terpasang pada Jalan Ina Tuni Karang Panjang Ambon penulis menggunakan gambar graf terhubung yang merupakan representasi dari sketsa kompleks yang terdiri dari 7 kompleks pada Jalan Ina Tuni Karang Panjang Ambon gambar tersebut digunakan untuk menentukan pohon merentang minimum dan panjang pipa yang optimal dapat dilihat pada gambar di bawah ini



Gambar 2. Graf Terhubung Jaringan Pipa Yang Terpasang pada Jalan Ina Tuni Karang Panjang Ambon

**1. Jaringan Pipa Yang Terpasang pada Jalan Ina Tuni Karang panjang Ambon**

Data panjang pipa yang terpasang pada lokasi jalan Ina Tuni Karang panjang Ambon terbagi atas 7 kompleks yang memiliki panjang 1448 meter yang diperoleh dari PT.Dream Sukses Airindo. Jaringan Pipa air ini dapat direpresentasikan sebagai graf terhubung, berbobot, dan tak berarah. Dimana rumah direpresentasikan sebagai verteks dan jalur-jalur pipa yang terpasang sebagai sisi. Berikut ini adalah gambar representasi jaringan pipa yang terpasang di lokasi tersebut.

**2. Penentuan Pohon Merentang Minimum**

Dari skema jaringan pemasangan pipa air pada jalan ina tuni Karang Panjang Ambon oleh PT. DreAm Sukses Airindo (DSA) dibagi atas 7 kompleks jaringan pemasangan pipa. Dari setiap kompleks akan dibentuk pohon merentang minimum untuk mendapatkan pemasangan pipa yang optimal dengan menggunakan Algoritma Kruskal kemudian dari 7 pohon merentang minimum tersebut dapat dihitung panjang pipa yang optimal. Ambil Sub Graf Dari Graf Terhubung yaitu Skema jaringan Pipa yang di representasikan dengan Gambar 2 karena kompleks I sama dengan Kompleks II Dengan menggunakan Cara yang sama yaitu Algoritma Kruskal pada kompleks I berlaku pada kompleks II .

Langkah-langkah menemukan panjang pipa minimum dengan menggunakan Algoritma Kruskal pada representasi jaringan pipa graf  $G(26,31)$  yaitu sebanyak  $n - 1, n =$  banyaknya verteks. Berikut adalah tahapan kerjanya dengan melihat Gambar 2

1. Pengurutan setiap sisi pada mulai dari sisi terkecil  $(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7), (8,9), (9,10), (10,11), (11,12), (12,13), (13,14), (1,26), (2,24), (3,22), (4,20), (5,18), (6,16), (9,15), (10,17), (11,19), (12,21), (13,23), (14,25), (15,16), (17,18), (19,20), (21,22), (23,24), (25,26),$  dan  $(8,7)$
2. Pilih sisi  $(1,2)$  yang tidak membentuk sirkuit tambahkan pada  $T$ .
3. Ulangi langkah kedua pilih sisi yang minimum yang tidak membentuk sirkuit di  $T$  dan tambahkan pada  $T$  diperoleh sisi-sisi sebagai berikut :  $(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7), (8,9), (9,10), (10,11), (11,12), (12,13), (13,14), (1,26), (2,24), (3,22), (4,20), (5,18), (6,16), (9,15), (10,17), (11,19), (12,21), (13,23), (14,25), (21,22)$

dan,

1. Pengurutan setiap sisi pada mulai dari sisi terkecil  $(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7), (8,9), (9,10), (10,11), (11,12), (12,13), (13,14), (7,26), (6,24), (5,22), (4,20), (3,18), (2,16), (9,15), (1,17), (11,19), (12,21), (13,23), (14,25), (15,16), (17,18), (19,20), (21,22), (23,24), (21,22),$  dan  $(1,8)$
2. Pilih sisi  $(1,2)$  yang tidak membentuk sirkuit tambahkan pada  $T$ .
3. Ulangi langkah kedua pilih sisi yang minimum yang tidak membentuk sirkuit di  $T$  dan tambahkan pada  $T$  diperoleh sisi-sisi sebagai berikut :  $(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7), (8,9), (9,10),$

(10,11), (11,12), (12,13), (13,14), (7,26), (2,24),  
 (3,22), (4,20), (5,18), (6,16), (9,15), (10,17),  
 (11,19), (12,21), (13,23), (14,25), (25,26)

Dengan menggunakan Algoritma Kruskal pada sehingga bobot yang terpakai adalah:

Tabel 1 Algoritma Kruskal kompleks I dan II

Sisi	Bobot	Sisi	Bobot
(1,2)	6	(2,24)	6
(2,3)	6	(3,22)	6
(3,4)	6	(4,20)	6
(4,5)	6	(5,18)	6
(5,6)	6	(6,16)	6
(6,7)	6	(9,15)	6
(8,9)	6	(10,17)	6
(9,10)	6	(11,19)	6
(10,11)	6	(12,21)	6
(11,12)	6	(13,23)	6
(12,13)	6	(14,25)	6
(13,14)	6	(21,22)	8
(1,26)	6	<b>Total</b>	<b>152</b>

Sisi	Bobot	Sisi	Bobot
(1,2)	6	(6,24)	6
(2,3)	6	(5,22)	6
(3,4)	6	(4,20)	6
(4,5)	6	(3,18)	6
(5,6)	6	(2,16)	6
(6,7)	6	(9,15)	6
(8,9)	6	(10,17)	6
(9,10)	6	(11,19)	6
(10,11)	6	(12,21)	6
(11,12)	6	(13,23)	6
(12,13)	6	(14,25)	6
(13,14)	6	(21,22)	8
(7,26)	6	<b>Total</b>	<b>152</b>

Panjang pipa yang digunakan pada kompleks 1 adalah 222 meter berlaku perhitungan yang sama pada kompleks 2 maka  $W = 222 + 222 = 444$  meter setelah menggunakan Algoritma Kruskal 152 meter untuk kompleks 1 dan 2 maka  $W = 152 + 152 = 304$  meter sehingga diperoleh hasil penggunaan pipa yang lebih optimal beserta pohon merentang minimum.

Ambil Sub Graf dari Graf Terhubung yaitu Skema jaringan Pipa yang di representasikan dengan Pipa Pada kompleks III sama dengan Kompleks V dan VI Dengan menggunakan Cara yang sama yaitu Algoritma Kruskal pada kompleks III berlaku dalam kompleks V dan VI.

Langkah-langkah menemukan panjang pipa minimum dengan menggunakan Algoritma Kruskal pada representasi jaringan pipa graf  $G(14,16)$  yaitu sebanyak  $n - 1, n =$  banyaknya verteks. Berikut adalah tahapan kerjanya dengan melihat Gambar 2.

1. Pengurutan setiap sisi pada mulai dari sisi terkecil (3,6), (7,10), (11,14), (12,13), (8,9), (4,5), (5,6), (9,10), (13,14), (1,3), (3,7), (7,11), (2,4), (4,8), (8,12) dan (1,2)
2. Pilih sisi (3,6) yang tidak membentuk sirkuit tambahkan pada  $T$ .
3. Ulangi langkah kedua pilih sisi yang minimum yang tidak membentuk sirkuit di  $T$  dan tambahkan pada  $T$  diperoleh sisi-sisi sebagai berikut : (3,6), (4,5), (8,9), (7,10), (11,14), (12,13), (5,6), (9,10)(13,14), (1,3), (2,4), (3,7), (8,12).

Dengan menggunakan Algoritma Kruskal sehingga bobot yang terpakai adalah:

Tabel 2 Algoritma Kruskal Kompleks III,V,dan VI

Sisi Dan Bobot			
(3,6)	6	(3,7)	10
(4,5)	6	(9,10)	8
(8,9)	6	(13,14)	8
(7,10)	6	(1,3)	10
(5,6)	8	(2,4)	10
(11,14)	6	(8,12)	10
(12,13)	6	<b>Total</b>	<b>100</b>

Panjang pipa yang digunakan pada kompleks III,V dan VI adalah

$$W = 150 + 150 + 150 = 450 \text{ meter.}$$

Setelah menggunakan Algoritma Kruskal adalah  $W = 100 + 100 + 100 = 300$  meter sehingga diperoleh hasil penggunaan pipa yang lebih optimal beserta pohon merentang minimum.

Ambil Sub Graf pada Graf Terhubung Skema jaringan pipa yang terpasang pada kompleks IV. Langkah-langkah menemukan panjang pipa minimum dengan menggunakan Algoritma Kruskal pada representasi jaringan pipa graf  $G(16,18)$  yaitu sebanyak  $n - 1, n =$  banyaknya verteks. Berikut adalah tahapan kerjanya dengan melihat Gambar 2

1. Pengurutan setiap sisi pada mulai dari sisi terkecil (1,2), (3,4), (8,7), (5,6), (12,11), (9,10), (13,14), (16,15), (2,3), (6,7), (10,11), (14,15), (4,5), (5,9), (9,13), (1,8), (8,12), dan (12,16)
2. Pilih sisi (1,2) yang tidak membentuk sirkuit tambahkan pada  $T$ .
3. Ulangi langkah kedua pilih sisi yang minimum yang tidak membentuk sirkuit di  $T$  dan tambahkan pada  $T$  diperoleh sisi-sisi sebagai berikut : (1,2), (3,4), (8,7), (5,6), (9,10), (12,11), (15,16), (13,14), (2,3), (6,7), (10,11), (14,15), (4,5), (5,9), (9,13).



Dengan menggunakan Algoritma Kruskal sehingga bobot yang terpakai seperti diperlihatkan pada Tabel 3.

Tabel 3. Algoritma Kruskal Kompleks IV

Sisi	Bobot	Sisi	Bobot
(1,2)	6	(2,3)	8
(3,4)	6	(6,7)	8
(8,7)	6	(10,11)	8
(5,6)	6	(14,15)	8
(9,10)	6	(4,5)	10
(12,11)	6	(5,9)	10
(15,16)	6	(9,13)	10
(13,14)	6	<b>Total</b>	<b>110</b>

Panjang pipa yang digunakan pada kompleks VII adalah 140 meter setelah menggunakan Algoritma Kruskal adalah 110 meter sehingga memperoleh hasil yang lebih optimal .

Skema jaringan pipa yang terpasang pada kompleks VII

Langkah-langkah menemukan panjang pipa minimum dengan menggunakan Algoritma Kruskal pada representasi jaringan pipa graf (38,46) yaitu sebanyak  $n - 1$ ,  $n =$  banyaknya verteks. Berikut adalah tahapan kerjanya dengan melihat Gambar 4.2

1. Pengurutan setiap sisi pada mulai dari sisi terkecil (5,6), (9,10), (13,14), (16,18), (20,22)(24,26), (28,30), (32,34), (36,38), (3,4), (7,8), (11,12), (15,17), (19,21), (23,25), (27,29), (31,33), (35,37), (1,6), (6,10), (10,14), (14,16), (16,20), (20,24), (24,28), (28,32), (32,36), (2,3), (3,7), (7,11), (11,15), (15,19), (19,23), (23,27), (27,31), (31,35), (4,5), (8,9), (12,13), (17,18), (21,22), (25,26), (29,30), (33,34), (37,38), dan (1,2)
2. Pilih sisi (6,5) yang tidak membentuk sirkuit tambahkan pada  $T$ .
3. Ulangi langkah kedua pilih sisi yang minimum yang tidak membentuk sirkuit di  $T$  dan tambahkan pada  $T$  diperoleh sisi-sisi sebagai berikut : (6,5), (10,9), (14,13), (16,18), (20,22)(24,26), (28,30), (32,34), (36,38), (3,4), (7,8), (11,12), (15,17), (19,21), (23,25), (27,29), (31,33), (35,37), (1,6), (6,10), (10,14), (14,16), (16,20), (20,24), (4,5), (28,32), (32,36), (37,38), (2,3), (3,7), (7,11), (17,18), (19,23), (23,27), (21,22), (31,35), (29,30),

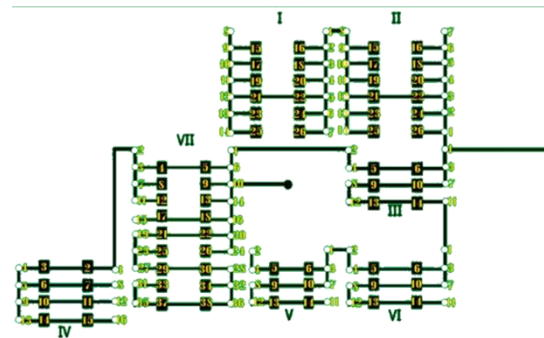
Dengan menggunakan Algoritma Kruskal sehingga bobot yang terpakai dapat dilihat pada Tabel 4.

Panjang pipa yang digunakan pada kompleks IV adalah 362 meter setelah menggunakan Algoritma Kruskal adalah 260 meter sehingga memperoleh hasil yang lebih optimal .

Tabel 4. Algoritma Kruskal Kompleks VII

Sisi dan Bobot					
(6,5)	6	(15,17)	6	(2,3)	8
(10,9)	6	(19,21)	6	(3,7)	8
(14,13)	6	(23,25)	6	(7,11)	8
(16,18)	6	(27,29)	6	(19,23)	8
(20,22)	6	(31,33)	6	(23,27)	8
(24,26)	6	(35,37)	6	(31,35)	8
(28,30)	6	(1,6)	8	(4,5)	8
(32,34)	6	(6,10)	8	(17,18)	8
(36,38)	6	(10,14)	8	(21,22)	8
(3,4)	6	(14,16)	8	(29,30)	8
(7,8)	6	(16,20)	8	(37,38)	8
(11,12)	6	(20,24)	8	(28,32)	8
<b>TOTAL</b>		<b>260</b>		<b>(32,16)</b>	<b>8</b>

Berikut adalah Pohon merentang minimum dari Jaringan Pipa Yang Terpasang pada Jalan Ina Tuni Karang Panjang Ambon. Dapat dilihat dengan Gambar 3 berikut ini.



Gambar 3. Pohon Merentang Minimum Jaringan Pipa Yang Terpasang pada Jalan Ina Tuni Karang Panjang Ambon.

## KESIMPULAN

Berdasarkan data PT.Dream Sukses Airindo panjang pipa yang terpasang pada lokasi yang di teliti dimana 7 kompleks serta pipa induk pada jalan ina tuni Karang Panjang Ambon di jadikan sampel adalah 1448 meter. Sedangkan analisis graf dengan representasi jaringan pipa yang terpasang pada lokasi tersebut menggunakan Algoritma Kruskal menghasilkan panjang pipa 1026 meter. Selisih antara yang telah terpasang dan menggunakan Algoritma Kruskal panjang pipa antara yang telah terpasang dan menggunakan Algoritma Kruskal sepanjang 422 meter. Sehingga dapat disimpulkan bahwa jaringan pipa yang terpasang pada lokasi tersebut belum optimal.

## DAFTAR PUSTAKA

- Aldous Joan M and Wilson. Robin J. 2000. *Graphs And Applications*. Faculty Of Mathematics And Computing, The Open Unirvesity. Great Britain.

- Munir, Rinaldi. 2003. *Matematika Diskrit*, penerbit informatika bandung.
- [http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph\\_Kruskal](http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Kruskal) 4 Februari 2012 pukul 12:00 Wit.
- [http://en.wikipedia.org/wiki/Kruskal%27s\\_algorithm](http://en.wikipedia.org/wiki/Kruskal%27s_algorithm) Februari 2012 pukul 12:30 Wit.
- <http://www.informatika.org/~rinaldi/Matdis/20092010/Makalah0910/MakalahStrukdis0910-012.pdf>.  
4 Februari 2012 Pukul 12:15 Wit.



**SIFAT-SIFAT DASAR MATRIKS SKEW HERMITIAN**  
*Basic Properties of Skew Hermitian Matrices*

LIDIA SALAKA<sup>1</sup>, HENRY W. M. PATTY<sup>2</sup>, MOZART WINSTON TALAKUA<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

<sup>2,3</sup>Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Maluku

E-mail: henrywmpatty81@gmail.com

**ABSTRAK**

Matriks didefinisikan sebagai susunan persegi panjang dari elemen-elemen yang diatur dalam baris dan kolom. Matriks dengan elemen-elemen penyusunnya merupakan bilangan kompleks dikenal dengan matriks bilangan kompleks. Salah satu bentuk khusus dari matriks bilangan kompleks adalah matriks Skew Hermitian beserta sifat-sifatnya yang menjadikan matriks tersebut berbeda dengan matriks real. Penelitian ini membahas bagaimana mengetahui bentuk dari matriks Skew Hermitian, serta sifat-sifat aljabar matriks yang berlaku pada matriks Skew Hermitian, dengan tahapan penelitian sebagai berikut: mengubah matriks Hermitian menjadi matriks Skew Hermitian dengan cara mengenakan operasi pergandaan skalar  $i$  (bilangan imajiner) pada matriks Hermitian, menyusun sifat-sifat dasar matriks Skew Hermitian berdasarkan sifat dan definisi dari elemen-elemen penyusunnya. Hasil penelitian menunjukkan bahwa sebuah matriks bujursangkar merupakan matriks Skew Hermitian jika setiap elemen-elemen penyusunnya merupakan bilangan kompleks beserta transpose konjugatnya dan matriks tersebut identik dengan negatif matriks transpose konjugatnya. Keterkaitannya dengan bentuk matriks lainnya juga merupakan suatu sifat yang berlaku pada matriks Skew Hermitian.

**Kata kunci :** *bilangan kompleks, konjugat transpose, matriks, matriks Hermitian*

**PENDAHULUAN**

Dalam perkembangan aljabar telah ditemukan beberapa bentuk matriks khusus dengan sifat-sifatnya yang dapat digunakan untuk meneliti perkembangan aljabar matriks. Salah satu diantaranya adalah bentuk khusus dari matriks bilangan kompleks beserta sifat-sifatnya yang menjadikan matriks tersebut berbeda dengan matriks real. Salah satu bentuk dari matriks bilangan kompleks adalah matriks Hermitian yang ditemukan pada tahun 1855 oleh Charles Hermite, yang menyatakan bahwa suatu matriks Hermitian adalah suatu matriks kompleks berukuran  $n \times n$  yang memiliki nilai yang sama dengan matriks transpose konjugatnya, dengan diagonal utamanya adalah bilangan real.

Seperti diketahui bahwa operasi matriks tidak terlepas dari operasi-operasi penjumlahan, operasi pergandaan, dan operasi pergandaan skalar. Pada matriks Hermitian pun berlaku operasi-operasi tersebut, salah satu diantaranya adalah operasi pergandaan skalar. Jika pada

matriks Hermitian dikenakan operasi pergandaan skalar  $i$  (bilangan imajiner), menghasilkan suatu matriks yang baru, dimana negatif matriks tersebut sama dengan matriks transpose konjugatnya, dan elemen pada diagonal utamanya adalah bilangan imajiner murni. Bentuk matriks baru ini yang dikenal dengan matriks Skew Hermitian.

Selanjutnya dengan memperhatikan elemen diagonal utama beserta elemen transpose konjugatnya, mengakibatkan adanya perbedaan bentuk dan sifat-sifat dari matriks Skew Hermitian jika dibandingkan dengan matriks Hermitian dan matriks lainnya. Hal inilah yang melatarbelakangi peneliti untuk melakukan penelitian dengan judul Sifat-sifat Dasar Matriks Skew Hermitian.

**TINJAUAN PUSTAKA**

Matriks adalah suatu konsep dasar dalam dunia Aljabar yang pertama digunakan pada tahun 1850 oleh Sylvester, yang mendefinisikan matriks sebagai susunan

elemen-elemen dalam bentuk bujursangkar. Kemudian pada tahun 1855 Charles Hermite memperkenalkan matriks Hermitian sebagai bentuk dari matriks bilangan kompleks.

Dengan merujuk pada buku Schaum's Outlines Aljabar Linier Edisi Ketiga, matriks dapat dibedakan menjadi matriks-matriks khusus diantaranya matriks transpose, matriks simetri, matriks simetri miring, dan lain-lain. Selain bentuk-bentuk matriks di atas, dalam jurnal *Lecture Notes For Math 623 Matrix Analysis*, yang disusun oleh Michael E. O'Sullivan (April 18, 2013) ditulis tentang matriks Skew Hermitian dengan keistimewaan dan keunikannya. Berdasarkan sumber tersebut dan dukungan beberapa literatur lainnya peneliti mencoba menyusun sebuah penelitian dengan harapan semoga dapat mudah dipahami.

### Definisi 1 (Matriks)

Matriks didefinisikan sebagai susunan persegi panjang dari bilangan-bilangan yang diatur dalam baris dan kolom. Matriks  $A$  ditulis sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Susunan di atas disebut sebuah matriks  $m$  kali  $n$  (ditulis  $A_{m \times n}$ ) karena memiliki  $m$  baris dan  $n$  kolom. Sebagai aturan, kurung siku [ ], kurung biasa ( ) atau bentuk  $\| \|$  digunakan untuk mengurangi susunan persegi panjang dari bilangan-bilangan tersebut.

### Teorema 1

Jika ukuran matriks  $A$  dan  $B$  adalah sedemikian sehingga operasi matriks dapat dikerjakan, maka

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$  dan  $(A - B)^T = A^T - B^T$
- $(kA)^T = kA^T$ ,  $k$  skalar
- $(AB)^T = B^T A^T$

### Definisi 2 (Matriks Simetris Miring)

Diberikan matriks bujur sangkar  $A$  maka matriks simetris miring adalah matriks yang memenuhi:

$$-A = A^T$$

### Contoh 1

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix} - A = (-1)A \\ &= (-1) \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi  $-A = A^T$

### Definisi 3 (Matriks Hermitian)

Diberikan matriks kompleks bujur sangkar  $A$  maka matriks Hermitian adalah matriks yang memenuhi :

$$A = \overline{A^T}$$

### Contoh 2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 - 2i & 4 + 7i \\ 1 + 2i & -4 & -2i \\ 4 - 7i & 2i & 5 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 + 2i & 4 - 7i \\ 1 - 2i & -4 & 2i \\ 4 + 7i & -2i & 5 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A^T} = \begin{bmatrix} 3 & 1 - 2i & 4 + 7i \\ 1 + 2i & -4 & -2i \\ 4 - 7i & 2i & 5 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\overline{A^T}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 - 2i & 4 + 7i \\ 1 + 2i & -4 & -2i \\ 4 - 7i & 2i & 5 \end{bmatrix} = A$$

Jadi  $A = \overline{\overline{A^T}}$

### Definisi 4 (Vektor)

Vektor merupakan besaran yang mempunyai arah dan mempunyai panjang (*magnitude*) dan diberi notasi dengan huruf tebal, misalnya:  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$  dan  $\mathbf{p}$ .

Sebuah vektor  $\mathbf{a}$  berdimensi  $n$  adalah suatu aturan  $n$  tuple dari bilangan-bilangan ditulis sebagai baris  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  atau sebagai sebuah kolom

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$a_i$  merupakan komponen-komponen vektor dimana  $a_i \in \mathbb{R}$  dan  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### Definisi 5 (Ruang Vektor)

Misalkan  $V$  sebarang himpunan dan  $V \neq \emptyset$ . Himpunan  $V$  disebut ruang vektor atas lapangan  $L$  terhadap operasi "+" dan "." yang didefinisikan padanya jika  $(\forall u, v, w \in V)(\forall k, l \in L)$  dipenuhi aksioma-aksioma berikut :

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$
- $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- $k\mathbf{u} \in V$
- $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
- $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
- $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$
- $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

### Definisi 6 (Bilangan Kompleks)

Sebuah bilangan kompleks  $z \in \mathbb{C}$  terdiri atas bagian nyata  $x = \text{Re}(z)$  dan bagian imajiner  $y = \text{Im}(z)$  dengan bentuk  $z = x + iy$ . Untuk  $i$  sebuah bilangan imajiner  $i = \sqrt{-1}$ . Untuk selanjutnya bilangan kompleks  $z_n = x_n + iy_n$  dengan  $n = 1, 2, 3, \dots$

### Definisi 7 (Kesekawanan/Conjugation)

Diberikan  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = x + iy$  maka sekawan  $z$  dituliskan sebagai  $\bar{z}$  dan didefinisikan sebagai  $\bar{z} = x - iy$ ,  $\bar{\bar{z}} \in \mathbb{C}$ .

**Definisi 8** (Pembagian Bilangan Kompleks)

Diberikan  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , hasil pembagian dua bilangan kompleks berlaku sesuai dengan:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$$

**Teorema 2**

Operasi-operasi yang didefinisikan pada bilangan kompleks memenuhi hukum-hukum berikut:

- (a) Hukum komutatif
  - (i).  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ; (ii).  $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- (b) Hukum asosiatif
  - (i).  $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ ;
  - (ii).  $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
- (c) Hukum distributif
  - $z_1(z_2 + z_3) = (z_1 z_2 + z_1 z_3)$
- (d) Distributivitas kesekawanan
  - (i).  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ;
  - (ii).  $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ ;
  - (iii).  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ ;
  - (iv).  $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$
- (e)  $\overline{\bar{z}} = z$
- (f)  $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy)$   
 $= x^2 + y^2 = (Re(z))^2 +$

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

**Matriks Skew Hermitian**

**Definisi 9**

Sebuah matriks  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  dengan transpose konjugatnya  $A^*$  disebut Matriks Skew Hermitian jika,  $-A = A^*$  dengan elemen-elemen penyusunnya merupakan bilangan kompleks, dan semua elemen pada diagonal utama merupakan bilangan imajiner. Elemen pada baris ke- $k$  kolom ke- $l$  sama dengan negatif konjugat kompleks dari elemen pada baris ke- $l$  kolom ke- $k$ , atau dengan kata lain untuk setiap  $a_{kl}, a_{lk} \in \mathbb{C}$  dan  $k, l = 1, 2, \dots, n$ , berlaku  $a_{kl} = -\bar{a}_{lk}$

Matriks Skew Hermitian  $A$  dinotasikan dengan:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| a_{kl} = -\bar{a}_{lk} \in \mathbb{C}, a_{kk} \in im(\mathbb{Z}) \right\}$$

Himpunan matriks-matriks Skew Hermitian dengan orde  $n$  dinotasikan dengan  $\mathcal{SH}_n$ .

**Contoh 3**

Matriks  $A = \begin{bmatrix} -i & 2+i \\ -2+i & 0 \end{bmatrix}$ ,  
 $B = \begin{bmatrix} i & 2+i & -2+i \\ -2+i & 0 & 3-2i \\ 2+i & -3-2i & 0 \end{bmatrix}$  adalah matriks Skew Hermitian.

Penyelesaian :

Untuk matriks  $A$ , dengan mentranspose-konjugatkan matriks  $A$  maka diperoleh:

$$A^T = \begin{bmatrix} -i & -2+i \\ 2+i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A^T} = \begin{bmatrix} \bar{-i} & \overline{-2+i} \\ \overline{2+i} & \bar{0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} i & -2-i \\ 2-i & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} i & -2-i \\ 2-i & 0 \end{bmatrix} = -A$$

Karena  $A^* = -A$ , maka  $A$  adalah matriks Skew Hermitian.

Untuk matriks  $B$ , dengan mentranspose-konjugatkan matriks  $B$  maka diperoleh:

$$B^T = \begin{bmatrix} i & -2+i & 2+i \\ 2+i & 0 & -3-2i \\ -2+i & 3-2i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B^T} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \overline{-2+i} & \overline{2+i} \\ \overline{2+i} & \bar{0} & \overline{-3-2i} \\ \overline{-2+i} & \overline{3-2i} & \bar{0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -i & -2-i & 2-i \\ 2-i & 0 & -3+2i \\ -2-i & 3+2i & 0 \end{bmatrix}$$

Karena  $B^* = -B$ , maka  $B$  adalah Skew Hermitian.

**Sifat-Sifat Matriks Skew Hermitian**

**Sifat 1**

Untuk sebarang matriks  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  dengan transpose konjugatnya  $A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , maka berlaku:

- (a)  $A + A^* \in \mathcal{H}_n$
- (b)  $A - A^* \in \mathcal{SH}_n$

Bukti :

Ambil sebarang  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  dengan transpose konjugatnya  $A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, A^* = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

dimana untuk setiap  $a_{kl}, \bar{a}_{kl} \in \mathbb{C}$  dan  $a_{kl} = x_{kl} + iy_{kl}$ ,  $\bar{a}_{kl} = x_{kl} - iy_{kl}$  dengan  $k, l = 1, 2, \dots, n$ .

(a). Dengan menjumlahkan matriks  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  dan  $A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  diperoleh:

$$A + A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11}i & \dots & x_{1n} + y_{1n}i \\ x_{21} + y_{21}i & \dots & x_{2n} + y_{2n}i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} + y_{n1}i & \dots & x_{nn} + y_{nn}i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{11} - y_{11}i & \dots & x_{n1} - y_{n1}i \\ x_{12} - y_{12}i & \dots & x_{n2} - y_{n2}i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} - y_{1n}i & \dots & x_{nn} - y_{nn}i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x_{11} + y_{11}i) + (x_{11} - y_{11}i) & \dots & (x_{1n} + y_{1n}i) + (x_{n1} - y_{n1}i) \\ (x_{21} + y_{21}i) + (x_{12} - y_{12}i) & \dots & (x_{2n} + y_{2n}i) + (x_{n2} - y_{n2}i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_{n1} + y_{n1}i) + (x_{1n} - y_{1n}i) & \dots & (x_{nn} + y_{nn}i) + (x_{nn} - y_{nn}i) \end{bmatrix}$$

Dimisalkan  $A + A^* = B$  maka,

$$A + A^* = B = \begin{bmatrix} 2x_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & 2x_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & 2x_{nn} \end{bmatrix}$$

Dengan,

$$\begin{aligned} b_{12} &= (x_{12} + x_{21}) + (y_{12} - y_{21})i & \dots & \quad b_{1n} = (x_{1n} + x_{n1}) + (y_{1n} - y_{n1})i \\ b_{21} &= (x_{21} + x_{12}) + (y_{21} - y_{12})i & \dots & \quad b_{2n} = (x_{2n} + x_{n2}) + (y_{2n} - y_{n2})i \\ & \vdots & & \quad \vdots \\ b_{n1} &= (x_{n1} + x_{1n}) + (y_{n1} - y_{1n})i & \quad b_{n2} &= (x_{n2} + x_{2n}) + (y_{n2} - y_{2n})i \end{aligned}$$

Untuk membuktikan bahwa  $A + A^* = B$  adalah Hermitian, cukup ditunjukkan bahwa  $B = B^*$ .

Dengan mentranspose-konjugatkan matriks  $B$  maka diperoleh :

$$\begin{aligned} B^T &= \begin{bmatrix} 2x_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & 2x_{22} & \dots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & 2x_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_{11} & \dots & (x_{n1} + x_{1n}) + (y_{n1} - y_{1n})i \\ (x_{12} + x_{21}) + (y_{12} - y_{21})i & \dots & (x_{n2} + x_{2n}) + (y_{n2} - y_{2n})i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{1n} + x_{n1}) + (y_{1n} - y_{n1})i & \dots & 2x_{nn} \end{bmatrix} \\ \overline{B^T} &= \begin{bmatrix} \overline{2x_{11}} & \dots & \overline{(x_{n1} + x_{1n}) + (y_{n1} - y_{1n})i} \\ \overline{(x_{12} + x_{21}) + (y_{12} - y_{21})i} & \dots & \overline{(x_{n2} + x_{2n}) + (y_{n2} - y_{2n})i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{(x_{1n} + x_{n1}) + (y_{1n} - y_{n1})i} & \dots & \overline{2x_{nn}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{2x_{11}} & \dots & \overline{(x_{n1} + x_{1n}) + (y_{n1} - y_{1n})i} \\ \overline{(x_{12} + x_{21}) + (y_{12} - y_{21})i} & \dots & \overline{(x_{n2} + x_{2n}) + (y_{n2} - y_{2n})i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{(x_{1n} + x_{n1}) + (y_{1n} - y_{n1})i} & \dots & \overline{2x_{nn}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_{11} & \dots & (x_{n1} + x_{1n}) - (y_{n1} - y_{1n})i \\ (x_{12} + x_{21}) - (y_{12} - y_{21})i & \dots & (x_{n2} + x_{2n}) - (y_{n2} - y_{2n})i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{1n} + x_{n1}) - (y_{1n} - y_{n1})i & \dots & 2x_{nn} \end{bmatrix} \\ \overline{B^T} &= B^* \\ &= \begin{bmatrix} 2x_{11} & \dots & (x_{1n} + x_{n1}) + (y_{1n} - y_{n1})i \\ (x_{21} + x_{12}) + (y_{21} - y_{12})i & \dots & (x_{2n} + x_{n2}) + (y_{2n} - y_{n2})i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{n1} + x_{1n}) + (y_{n1} - y_{1n})i & \dots & 2x_{nn} \end{bmatrix} \\ B^* &= \begin{bmatrix} 2x_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & 2x_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & 2x_{nn} \end{bmatrix} = B \end{aligned}$$

Dengan,

$$\begin{aligned} b_{12} &= (x_{12} + x_{21}) + (y_{12} - y_{21})i & \dots & \quad b_{1n} = (x_{1n} + x_{n1}) + (y_{1n} - y_{n1})i \\ b_{21} &= (x_{21} + x_{12}) + (y_{21} - y_{12})i & \dots & \quad b_{2n} = (x_{2n} + x_{n2}) + (y_{2n} - y_{n2})i \\ & \vdots & & \quad \vdots \\ b_{n1} &= (x_{n1} + x_{1n}) + (y_{n1} - y_{1n})i & \quad b_{n2} &= (x_{n2} + x_{2n}) + (y_{n2} - y_{2n})i \end{aligned}$$

Karna  $B = B^*$ , maka  $A + A^* = B$  adalah Hermitian.

(b). Dengan mengurangkan matriks  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  dan  $A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  diperoleh :

$$\begin{aligned} A - A^* &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \dots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \dots & \overline{a_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \dots & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11}i & \dots & x_{1n} + y_{1n}i \\ x_{21} + y_{21}i & \dots & x_{2n} + y_{2n}i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} + y_{n1}i & \dots & x_{nn} + y_{nn}i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{11} - y_{11}i & \dots & x_{n1} - y_{n1}i \\ x_{12} - y_{12}i & \dots & x_{n2} - y_{n2}i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} - y_{1n}i & \dots & x_{nn} - y_{nn}i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (x_{11} + y_{11}i) - (x_{11} - y_{11}i) & \dots & (x_{1n} + y_{1n}i) - (x_{n1} - y_{n1}i) \\ (x_{21} + y_{21}i) - (x_{12} - y_{12}i) & \dots & (x_{2n} + y_{2n}i) - (x_{n2} - y_{n2}i) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{n1} + y_{n1}i) - (x_{1n} - y_{1n}i) & \dots & (x_{nn} + y_{nn}i) - (x_{nn} - y_{nn}i) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dimisalkan  $A - A^* = C$  maka,

$$A - A^* = C = \begin{bmatrix} 2y_{11}i & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & 2y_{22}i & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & 2y_{nn}i \end{bmatrix}$$

Dengan,

$$\begin{aligned} c_{12} &= (x_{12} - x_{21}) + (y_{12} + y_{21})i & \dots & \quad c_{1n} = (x_{1n} - x_{n1}) + (y_{1n} + y_{n1})i \\ c_{21} &= (x_{21} - x_{12}) + (y_{21} + y_{12})i & \dots & \quad c_{2n} = (x_{2n} - x_{n2}) + (y_{2n} + y_{n2})i \\ & \vdots & & \quad \vdots \\ c_{n1} &= (x_{n1} - x_{1n}) + (y_{n1} + y_{1n})i & \quad c_{n2} &= (x_{n2} - x_{2n}) + (y_{n2} + y_{2n})i \end{aligned}$$

Untuk membuktikan bahwa  $A - A^* = C$  adalah Skew Hermitian, cukup ditunjukkan bahwa  $-C = C^*$ .

Dengan mentranspose-konjugatkan matriks  $C$  maka diperoleh :

$$\begin{aligned} C^T &= \begin{bmatrix} 2y_{11}i & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & 2y_{22}i & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{n2} & \dots & 2y_{nn}i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2y_{11}i & \dots & (x_{n1} - x_{1n}) + (y_{n1} + y_{1n})i \\ (x_{12} - x_{21}) + (y_{12} + y_{21})i & \dots & (x_{n2} - x_{2n}) + (y_{n2} + y_{2n})i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{1n} - x_{n1}) + (y_{1n} + y_{n1})i & \dots & 2y_{nn}i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{2y_{11}i} & \dots & \overline{(x_{n1} - x_{1n}) + (y_{n1} + y_{1n})i} \\ \overline{(x_{12} - x_{21}) + (y_{12} + y_{21})i} & \dots & \overline{(x_{n2} - x_{2n}) + (y_{n2} + y_{2n})i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{(x_{1n} - x_{n1}) + (y_{1n} + y_{n1})i} & \dots & \overline{2y_{nn}i} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{2y_{11}i} & \dots & \overline{(x_{n1} - x_{1n}) + (y_{n1} + y_{1n})i} \\ \overline{(x_{12} - x_{21}) + (y_{12} + y_{21})i} & \dots & \overline{(x_{n2} - x_{2n}) + (y_{n2} + y_{2n})i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{(x_{1n} - x_{n1}) + (y_{1n} + y_{n1})i} & \dots & \overline{2y_{nn}i} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2y_{11}i & \dots & (x_{n1} - x_{1n}) - (y_{n1} + y_{1n})i \\ (x_{12} - x_{21}) - (y_{12} + y_{21})i & \dots & (x_{n2} - x_{2n}) - (y_{n2} + y_{2n})i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{1n} - x_{n1}) - (y_{1n} + y_{n1})i & \dots & -2y_{nn}i \end{bmatrix} \\ \overline{C^T} &= C^* \\ &= \begin{bmatrix} -2y_{11}i & \dots & (-x_{1n} + x_{n1}) - (y_{1n} + y_{n1})i \\ (-x_{21} + x_{12}) - (y_{21} + y_{12})i & \dots & (-x_{2n} + x_{n2}) - (y_{2n} + y_{n2})i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (-x_{n1} + x_{1n}) - (y_{n1} + y_{1n})i & \dots & -2y_{nn}i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$C^* = \begin{bmatrix} -2y_{11}i & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & -2y_{22}i & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & -2y_{nn}i \end{bmatrix} = -C$$

Dengan,

$$\begin{aligned} c_{12} &= (-x_{12} + x_{21}) - (y_{12} + y_{21})i & \dots & \quad c_{1n} = (-x_{1n} + x_{n1}) - (y_{1n} + y_{n1})i \\ c_{21} &= (-x_{21} + x_{12}) - (y_{21} + y_{12})i & \dots & \quad c_{2n} = (-x_{2n} + x_{n2}) - (y_{2n} + y_{n2})i \\ & \vdots & & \quad \vdots \\ c_{n1} &= (-x_{n1} + x_{1n}) - (y_{n1} + y_{1n})i & \quad c_{n2} &= (-x_{n2} + x_{2n}) - (y_{n2} + y_{2n})i \end{aligned}$$

Terlihat bahwa  $-C = C^*$ . Karna  $-C = C^*$ , maka  $A - A^* = C$  adalah Skew Hermitian.

**Sifat 2**

Suatu matriks  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , dapat dituliskan sebagai jumlah dari matriks Hermitian dan matriks Skew Hermitian

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*)$$

Bukti :

Dari sifat 1 diketahui bahwa

$$A + A^* \in H_n, \text{ dan } A - A^* \in SH_n$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*) &= \frac{1}{2}((A + A^*) + (A - A^*)) \\ &= \frac{1}{2}((A + A) + (A^* - A^*)) \\ &= \frac{1}{2}(2A) \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)A \\ &= A \blacksquare \end{aligned}$$

**Sifat 3**

A adalah Hermitian jika dan hanya jika  $iA$  adalah Skew Hermitian

Bukti :

( $\Leftarrow$ )Diketahui  $iA$  Skew Hermitian.

Akan ditunjukkan A adalah Hermitian.

Ambil sebarang  $A \in \mathcal{SH}_n$

$$A = \begin{bmatrix} y_{11}i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & y_{22}i & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & y_{nn}i \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} iA &= i \begin{bmatrix} y_{11}i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & y_{22}i & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & y_{nn}i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_{11}i^2 & a_{12}i & \dots & a_{1n}i \\ a_{21}i & y_{22}i^2 & \dots & a_{2n}i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}i & a_{n2}i & \dots & y_{nn}i^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dimisalkan  $iA = B$  maka,

$$iA = B = \begin{bmatrix} -y_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & -y_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & -y_{nn} \end{bmatrix}$$

Untuk membuktikan bahwa  $iA = B$  adalah Hermitian cukup ditunjukkan bahwa  $B = B^*$ ,  $b_{kl} = \overline{b_{lk}}$ ,  $b_{kk} \in Re(z)$

Dengan mentranspose-konjugatkan matriks B maka diperoleh :

$$\begin{aligned} B^T &= \begin{bmatrix} -y_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & -y_{22} & \dots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & -y_{nn} \end{bmatrix} \\ \overline{B^T} &= \begin{bmatrix} \overline{-y_{11}} & \overline{b_{21}} & \dots & \overline{b_{n1}} \\ \overline{b_{12}} & \overline{-y_{22}} & \dots & \overline{b_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{b_{1n}} & \overline{b_{2n}} & \dots & \overline{-y_{nn}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{-y_{11}} & \overline{b_{21}} & \dots & \overline{b_{n1}} \\ \overline{b_{12}} & \overline{-y_{22}} & \dots & \overline{b_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{b_{1n}} & \overline{b_{2n}} & \dots & \overline{-y_{nn}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -\overline{y_{11}} & \overline{b_{21}} & \dots & \overline{b_{n1}} \\ \overline{b_{12}} & -\overline{y_{22}} & \dots & \overline{b_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{b_{1n}} & \overline{b_{2n}} & \dots & -\overline{y_{nn}} \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa  $b_{kk} \in Re(z)$ , dan karena  $b_{kl} = \overline{b_{lk}}$ , maka matriks  $B^*$  dapat ditulis menjadi

$$B^* = \begin{bmatrix} -y_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & -y_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & -y_{nn} \end{bmatrix} = B$$

Karena  $B = B^*$  maka B adalah Hermitian.

( $\Rightarrow$ )Diketahui A Hermitian .

Akan ditunjukkan bahwa  $iA$  adalah Skew Hermitian.

Ambil sebarang  $A \in \mathcal{H}_n$

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & x_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} iA &= i \begin{bmatrix} x_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & x_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_{11}i & a_{12}i & \dots & a_{1n}i \\ a_{21}i & x_{22}i & \dots & a_{2n}i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}i & a_{n2}i & \dots & x_{nn}i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dimisalkan  $iA = C$  maka,

$$iA = C = \begin{bmatrix} y_{11}i & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & y_{22}i & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & y_{nn}i \end{bmatrix}$$

Untuk membuktikan bahwa  $iA = C$  adalah Skew hermitian cukup ditunjukkan bahwa  $C = -C^*$ ,  $c_{kl} = -\overline{c_{lk}}$ ,  $c_{kk} \in Im(z)$

Untuk matriks C, dengan mentranspose-konjugatkan matriks C maka diperoleh :

$$C^T = \begin{bmatrix} y_{11}i & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & y_{22}i & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & y_{nn}i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overline{C^T} &= \begin{bmatrix} \overline{y_{11}i} & \overline{c_{21}} & \dots & \overline{c_{n1}} \\ \overline{c_{12}} & \overline{y_{22}i} & \dots & \overline{c_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{c_{1n}} & \overline{c_{2n}} & \dots & \overline{y_{nn}i} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{y_{11}i} & \overline{c_{21}} & \dots & \overline{c_{n1}} \\ \overline{c_{12}} & \overline{y_{22}i} & \dots & \overline{c_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{c_{1n}} & \overline{c_{2n}} & \dots & \overline{y_{nn}i} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -\overline{y_{11}i} & \overline{c_{21}} & \dots & \overline{c_{n1}} \\ \overline{c_{12}} & -\overline{y_{22}i} & \dots & \overline{c_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{c_{1n}} & \overline{c_{2n}} & \dots & -\overline{y_{nn}i} \end{bmatrix}$$

$$-C^* = \begin{bmatrix} y_{11}i & -\overline{c_{21}} & \dots & -\overline{c_{n1}} \\ -\overline{c_{12}} & y_{22}i & \dots & -\overline{c_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\overline{c_{1n}} & -\overline{c_{2n}} & \dots & y_{nn}i \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa  $c_{kk} \in Im(z)$ , dan karena  $c_{kl} = -\bar{c}_{lk}$ , maka matriks  $-C^*$  dapat ditulis menjadi

$$-C^* = \begin{bmatrix} \gamma_{11}i & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \gamma_{22}i & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & \gamma_{nn}i \end{bmatrix} = C$$

Karena  $C = -C^*$ , maka  $C$  adalah Skew hermitian. Dari ( $\Leftarrow$ ) dan ( $\Rightarrow$ ) maka sifat 3 terbukti.

**Sifat 4**

Diberikan  $A, B$  matriks Skew Hermitian

- a)  $A + B$  adalah Skew Hermitian
- b) Jika  $AB = BA$  (berlaku sifat komutatif) maka  $AB$  adalah Skew Hermitian
- c) Jika  $c \in \mathcal{R}$ , maka  $cA$  adalah Skew Hermitian

Bukti :

Diketahui  $A, B$  adalah matriks Skew Hermitian.

Akan ditunjukkan:

- a)  $A + B$  adalah matriks Skew Hermitian

Ambil sebarang matriks  $A, B \in SH_n$

Dengan,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}i & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta_{11}i & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \beta_{22}i & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & \beta_{nn}i \end{bmatrix}$$

Maka

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}i & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11}i & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \beta_{22}i & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & \beta_{nn}i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}i + \beta_{11}i & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22}i + \beta_{22}i & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nn}i + \beta_{nn}i \end{bmatrix}$$

Dimisalkan  $A + B = C$  maka,

$$C = \begin{bmatrix} \gamma_{11}i & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \gamma_{22}i & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & \gamma_{nn}i \end{bmatrix}$$

Untuk membuktikan bahwa  $A + B = C$  adalah Skew Hermitian, cukup ditunjukkan bahwa  $C = -C^*$

Dengan mentranspose-konjugatkan matriks  $C$  diperoleh:

$$C^T = \begin{bmatrix} \gamma_{11}i & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{12} & \gamma_{22}i & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & \gamma_{nn}i \end{bmatrix}$$

$$\overline{C^T} = \begin{bmatrix} \overline{\gamma_{11}i} & \overline{c_{12}} & \dots & \overline{c_{1n}} \\ \overline{c_{12}} & \overline{\gamma_{22}i} & \dots & \overline{c_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{c_{1n}} & \overline{c_{2n}} & \dots & \overline{\gamma_{nn}i} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{\gamma_{11}i} & \overline{c_{12}} & \dots & \overline{c_{1n}} \\ \overline{c_{12}} & \overline{\gamma_{22}i} & \dots & \overline{c_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{c_{1n}} & \overline{c_{2n}} & \dots & \overline{\gamma_{nn}i} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\overline{\gamma_{11}i} & \overline{c_{21}} & \dots & \overline{c_{n1}} \\ \overline{c_{12}} & -\overline{\gamma_{22}i} & \dots & \overline{c_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{c_{1n}} & \overline{c_{2n}} & \dots & -\overline{\gamma_{nn}i} \end{bmatrix}$$

$$-C^* = \begin{bmatrix} \gamma_{11}i & -\overline{c_{21}} & \dots & -\overline{c_{n1}} \\ -\overline{c_{12}} & \gamma_{22}i & \dots & -\overline{c_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\overline{c_{1n}} & -\overline{c_{2n}} & \dots & \gamma_{nn}i \end{bmatrix}$$

Karena  $c_{kl} = -\overline{c}_{lk}, c_{kk} \in Im(z)$  maka matriks  $-C^*$  dapat ditulis menjadi

$$-C^* = \begin{bmatrix} \gamma_{11}i & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \gamma_{22}i & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & \gamma_{nn}i \end{bmatrix} = C$$

Karna  $C = -C^*$ , maka  $A + B = C$  adalah Skew Hermitian

- b) Jika  $AB = BA$  (berlaku sifat komutatif) maka  $AB$  adalah Skew Hermitian.

Ambil sebarang  $A, B \in SH_n$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11}i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \alpha_{22}i & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \alpha_{nn}i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta_{11}i & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \beta_{22}i & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & \beta_{nn}i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_{11}i & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \beta_{22}i & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & \beta_{nn}i \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \alpha_{11}i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \alpha_{22}i & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \alpha_{nn}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11}i & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \beta_{22}i & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & \beta_{nn}i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11}i\beta_{11}i + \dots + a_{1n}b_{n1} & \dots & \alpha_{11}ib_{1n} + \dots + a_{1n}\beta_{nn}i \\ a_{21}\beta_{11}i + \dots + a_{2n}b_{n1} & \dots & a_{21}b_{1n} + \dots + a_{2n}\beta_{nn}i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}\beta_{11}i + \dots + \alpha_{nn}ib_{n1} & \dots & a_{n1}b_{1n} + \dots + \alpha_{nn}i\beta_{nn}i \end{bmatrix}$$

Jika hasil kali  $ABn \times n$  matriks  $C$ , maka

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad i = 1, 2, \dots, nj = 1, 2, \dots, n$$

Sehingga  $\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \in \mathbb{C}$  (sifat tertutup terhadap pergandaan pada bilangan kompleks).

Dengan cara yang sama diperoleh:

$$BA = \begin{bmatrix} \beta_{11}i & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \beta_{22}i & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & \beta_{nn}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11}i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \gamma_{22}i & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \gamma_{nn}i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_{11}i\alpha_{11}i + \dots + b_{1n}a_{n1} & \dots & \beta_{11}ia_{1n} + \dots + b_{1n}\alpha_{nn}i \\ b_{21}\alpha_{11}i + \dots + b_{2n}a_{n1} & \dots & b_{21}a_{1n} + \dots + b_{2n}\alpha_{nn}i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1}\alpha_{11}i + \dots + \beta_{nn}ia_{n1} & \dots & b_{n1}a_{1n} + \dots + \beta_{nn}i\alpha_{nn}i \end{bmatrix}$$

Jika hasil kali  $BAn \times n$  matriks  $D$ , maka

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad i = 1, 2, \dots, nj = 1, 2, \dots, n$$

Sehingga

$$\sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj} \in \mathbb{C}$$

(sifat tertutup terhadap pergandaan pada bilangan kompleks).

Dari kedua hasil kali matriks di atas, elemen-elemen penyusunnya haruslah merupakan bilangan kompleks dengan negatif transpose konjugatnya. Untuk sebarang  $a_{ik} b_{kj} \in \mathbb{C}$  berlaku:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} \\ &= -a_{i1} b_{1j} - a_{i2} b_{2j} - \dots - a_{in} b_{nj} \\ &= -\bar{a}_{1i} \bar{b}_{j1} - \bar{a}_{2i} \bar{b}_{j2} - \dots - \bar{a}_{ni} \bar{b}_{jn} \\ &= -\bar{b}_{j1} \bar{a}_{1i} - \bar{b}_{j2} \bar{a}_{2i} - \dots - \bar{b}_{jn} \bar{a}_{ni} \\ &= (-1)(\bar{b}_{j1} \bar{a}_{1i} + \bar{b}_{j2} \bar{a}_{2i} + \dots + \bar{b}_{jn} \bar{a}_{ni}) \\ &= (-1) \sum_{k=1}^n \bar{b}_{jk} \bar{a}_{ki} \end{aligned}$$

Karena  $AB = BA$ , diperoleh:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = D_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj} \\ &= (-1) \sum_{k=1}^n \bar{b}_{jk} \bar{a}_{ki} = (-1) \sum_{k=1}^n \bar{a}_{jk} \bar{b}_{ki} \end{aligned}$$

dari kedua persamaan diatas diperoleh:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} &= \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj} = (-1) \sum_{k=1}^n \bar{b}_{jk} \bar{a}_{ki} \\ &= (-1) \sum_{k=1}^n \bar{a}_{jk} \bar{b}_{ki} \end{aligned}$$

Karena elemen-elemen penyusunnya merupakan bilangan kompleks dengan negatif transpose konjugatnya, maka  $AB = BA$  juga merupakan matriks Skew Hermitian.

c) Ambil sebarang  $A \in \mathcal{SH}_n$ . dan  $c$  skalar

$$\begin{aligned} cA &= c \begin{bmatrix} y_{11}i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & y_{22}i & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & y_{nn}i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cy_{11}i & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & cy_{22}i & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \dots & cy_{nn}i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

diperoleh  $ca_{ij} \in \mathbb{C}$  (sifat tertutup terhadap pergandaan pada bilangan kompleks). Ambil sebarang  $ca_{ij} \in \mathbb{C}$  karena  $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$  maka  $ca_{ij} = -\overline{ca_{ji}}$ . Sesuai definisi 1 maka  $cA \in \mathcal{SH}_n$ . ■

**Sifat 5**

Jika  $A \in \mathcal{SH}_n$  maka  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$  untuk setiap  $x, y \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ .

Bukti :

Ambil sebarang  $A \in \mathcal{SH}_n$  dan  $x, y \in \mathbb{C}^{n \times 1}$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11}i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \alpha_{22}i & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \alpha_{nn}i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} \alpha_{11}i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \alpha_{22}i & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \alpha_{nn}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} \alpha_{11}ix_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \alpha_{22}ix_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}ix_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= (\alpha_{11}ix_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)y_1 \\ &\quad + (a_{21}x_1 + \alpha_{22}ix_2 + \dots + a_{2n}x_n)y_2 + (a_{n1}x_1 \\ &\quad + a_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}ix_n)y_n \\ &= \alpha_{11}ix_1y_1 + a_{12}x_2y_1 + \dots + a_{1n}x_ny_1 \\ &\quad + a_{21}x_1y_2 + \alpha_{22}ix_2y_2 + \dots \\ &\quad + a_{2n}x_ny_2 + a_{n1}x_1y_n \\ &\quad + a_{n2}x_2y_n + \dots + \alpha_{nn}ix_ny_n \\ &= \alpha_{11}ix_1y_1 + a_{21}x_1y_2 + \dots + a_{n1}x_1y_n \\ &\quad + a_{12}x_2y_1 + \alpha_{22}ix_2y_2 + \dots \\ &\quad + a_{n2}x_2y_n + \dots + a_{1n}x_ny_1 \\ &\quad + a_{2n}x_ny_2 + \dots + \alpha_{nn}ix_ny_n \\ &= x_1(\alpha_{11}iy_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{n1}y_n) \\ &\quad + x_2(a_{12}y_1 + \alpha_{22}iy_2 + \dots \\ &\quad + a_{n2}y_n) + \dots + x_n(a_{1n}y_1 \\ &\quad + a_{2n}y_2 + \dots + \alpha_{nn}iy_n) \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_{11}i & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & \alpha_{22}i & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & \alpha_{nn}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \langle x, A^T y \rangle \blacksquare \end{aligned}$$

**KESIMPULAN**

Dari hasil pembahasan dan uraian pada bab-bab sebelumnya maka dapat diambil beberapa kesimpulan antara lain :

1. Sebuah matriks bujur sangkar merupakan matriks Skew Hermitian jika setiap elemen-elemen penyusunnya merupakan bilangan kompleks beserta transpose konjugatnya dan matriks tersebut identik dengan negatif matriks transpose konjugatnya.
2. Beberapa sifat-sifat aljabar matriks yang berlaku pada matriks Skew Hermitian adalah sebagai berikut:
  - (i). Pengurangan suatu matriks kompleks dengan konjugatnya adalah matriks Skew Hermitian.
  - (ii). Suatu matriks kompleks merupakan jumlahan dari matriks Hermitian dan matriks Skew Hermitian.
  - (iii). Sebarang matriks Hermitian  $A$  jika dan hanya jika  $iA$  adalah Skew Hermitian.
  - (iv). Berlaku sifat tertutup terhadap penjumlahan 2 matriks Skew Hermitian dan terhadap pergandaan skalar.



- (v). Jika berlaku sifat komutatif pada pergandaan matriks ( $AB = BA$ ) maka  $AB$  adalah matriks Skew Hermitian.
- (vi). Himpunan matriks Skew Hermitian merupakan ruang vektor  $\mathbb{R}$ .
- (vii). Untuk sebarang matriks Skew Hermitian berlaku  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$  untuk semua  $x, y \in C^{n \times 1}$ .

#### DAFTAR PUSTAKA

- Hadley, G, 1983, Aljabar Linear, Edisi Revisi, Penerbit Erlangga, Jakarta.
- Hogben, Leslie, 2007, Handbook of Linear Algebra.
- Dalam. Barret, Wayne, (1973), *Hermitian and Positive Definite Matrices*, Taylor & Francis, Group, USA: 130-131.
- Michael, E, O'Sullivan, (2013), *Lecture Notes for Math 623 Matrix Analysis*.
- Paliouras, John D, 1975, Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur, Penerbit Erlangga, Jakarta.
- Spiegel, Murray R, Teori dan Soal-soal Peubah Kompleks, Seri Buku Schaum, Penerbit Erlangga, Jakarta.
- Wolfram, 1999, Hermitian Matrix - from Wolfram MathWorld

## KARAKTERISTIK RELASI KONGRUENSI PADA SEMIGRUP *Characterization of Congruence Relation on Semigroup*

ELVINUS RICHARD PERSULESSY

Staf Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, poka-Ambon  
e-mail: richardelvinus@yahoo.com

### ABSTRAK

Diberikan semigrup  $S$  dan  $R$  adalah suatu relasi ekuivalensi pada  $S$ . Relasi ekuivalensi  $R$  disebut relasi kongruensi pada  $S$  jika  $R$  kompatibel. Penelitian ini akan menjelaskan beberapa karakteristik yang dimiliki oleh relasi kongruensi  $R$  pada semigrup  $S$ .

**Keywords:** *Kompatibel, Relasi Ekuivalensi, Kongruensi.*

### PENDAHULUAN

Himpunan  $S \neq \emptyset$  yang dilengkapi dengan operasi biner " $\cdot$ ", ditulis  $(S, \cdot)$  atau disingkat  $S$ , disebut semigrup jika terhadap operasi biner yang sama  $S$  memenuhi sifat asosiatif.

Jika pada  $S$  didefinisikan suatu relasi ekuivalensi  $R$  yang memenuhi sifat kompatibel kiri dan kompatibel kanan, maka relasi ekuivalensi  $R$  menjadi relasi kongruensi pada  $S$ .

Karena relasi kongruensi juga merupakan relasi ekuivalensi, maka  $S$  akan terpartisi menjadi kelas-kelas yang saling asing. Himpunan  $xR = \{y \in S \mid (x, y) \in R\}$  adalah kelas ekuivalensi yang memuat  $x$ . Himpunan kelas-kelas ekuivalensi yang saling asing ini, selanjutnya disebut himpunan kuosen dari  $S$  dan dinotasikan dengan  $S/R$ .

Penelitian ini akan menjelaskan secara detail beberapa karakteristik relasi kongruensi pada semigrup  $S$ .

### TINJAUAN PUSTAKA

Untuk menjelaskan karakteristik relasi kongruensi pada semigrup diperlukan beberapa konsep dasar tentang homomorfisma, kompatibilitas, dan kekongruenan yang dikaji dari Howie [1] dan Thierrin (1995). Selanjutnya, dalam buku *An Introduction to Semigroup Theory*, J. M Howie memberikan landasan teori tentang karakteristik relasi kongruensi pada semigrup yang dilengkapi oleh Spitznagel (1997) lewat

tulisannya *Structure in Semigroup II*. [2] Berikut ini adalah beberapa definisi dan teorema yang melandasi penelitian ini.

#### Definisi 1.

Diberikan himpunan  $S \neq \emptyset$  yang dilengkapi dengan operasi biner " $\cdot$ ".

$(S, \cdot)$ , selanjutnya ditulis  $S$ , disebut semigrup terhadap operasi biner  $(S, \cdot)$  jika  $S$  memenuhi sifat asosiatif

$$(\forall s_1, s_2 \in S) [(s_1 \cdot s_2) \cdot s_3 = s_1 \cdot (s_2 \cdot s_3)]$$

#### Definisi 2.

Misalkan  $(S, \cdot)$  dan  $(S', *)$  adalah dua semigrup.

- a. Fungsi  $\alpha : S \rightarrow S'$  dinamakan homomorfisma jika

$$(\forall x, y \in S) [\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) * \alpha(y)]$$

- b. Jika  $\alpha$  homomorfisma yang surjektif, maka  $\alpha$  disebut epimorfisma.  
c. Jika  $\alpha$  homomorfisma yang injektif, maka  $\alpha$  disebut monomorfisma.  
d. Jika  $\alpha$  homomorfisma yang surjektif dan injektif, maka  $\alpha$  disebut isomorfisma.

#### Definisi 3.

Suatu relasi  $R$  pada semigrup  $S$  disebut

- i. Kompatibel kiri, jika

$$(\forall s, t, a \in S) [(s, t) \in R \Rightarrow (as, at) \in R].$$

- ii. Kompatibel kanan, jika

$$(\forall s, t, a \in S) [(s, t) \in R \Rightarrow (sa, ta) \in R].$$

iii. Kompatibel, jika  $(\forall s, t, s', t' \in S)$

$$[(s, s') \in R \ \& \ (t, t') \in R \Rightarrow (st, s't') \in R].$$

Relasi ekuivalensi yang kompatibel kiri disebut relasi kongruensi kiri.

Relasi ekuivalensi yang kompatibel kanan disebut relasi kongruensi kanan.

Relasi ekuivalensi yang kompatibel disebut relasi kongruensi.

**Teorema 1**

Relasi  $R$  pada semigrup  $S$  merupakan relasi kongruensi jika dan hanya jika  $R$  merupakan relasi kongruensi kiri dan relasi kongruensi kanan.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

**Teorema 2**

Diberikan  $S$  dan  $T$  semigrup.

Jika  $\beta : S \rightarrow T$  adalah homomorfisma, maka  $\beta \circ \beta^{-1}$  adalah relasi kongruensi pada  $S$ . Selanjutnya,  $\beta \circ \beta^{-1} = \ker \beta$ .

Bukti :

Karena  $\beta : S \rightarrow T$ , maka  $\beta \circ \beta^{-1} : S \rightarrow S$ . Akibatnya

$$\beta \circ \beta^{-1} = \{(x, y) \in S \times S \mid (\exists z \in T), (x, z) \in \beta \ \& \ (z, y) \in \beta^{-1}\}$$

$$= \{(x, y) \in S \times S \mid (\exists z \in T), (x, z) \in \beta \ \& \ (y, z) \in \beta\}$$

$$= \{(x, y) \in S \times S \mid x\beta = y\beta\}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan  $\beta \circ \beta^{-1}$  adalah relasi kongruensi.

i). Ambil sebarang  $x \in S$ . Karena  $x\beta = y\beta$ , maka jelas  $(x, x) \in \beta \circ \beta^{-1}$ . Jadi  $\beta \circ \beta^{-1}$  refleksif.

ii). Ambil sebarang  $x, y \in S$  dengan  $(x, y) \in \beta \circ \beta^{-1}$ .

Akan ditunjukkan  $(y, x) \in \beta \circ \beta^{-1}$ .

Karena  $(x, y) \in \beta \circ \beta^{-1}$ , maka  $x\beta = y\beta$  atau  $y\beta = x\beta$ .

Ini berarti  $(y, x) \in \beta \circ \beta^{-1}$ . Jadi  $\beta \circ \beta^{-1}$  simetris.

iii). Ambil  $x, y, z \in S$  dengan  $(x, y), (y, z) \in \beta \circ \beta^{-1}$ .

Akan ditunjukkan  $(x, z) \in \beta \circ \beta^{-1}$ .

Karena  $(x, y), (y, z) \in \beta \circ \beta^{-1}$ , maka  $x\beta = y\beta$  dan  $y\beta = z\beta$ . Akibatnya  $x\beta = z\beta$  atau  $(x, z) \in \beta \circ \beta^{-1}$ .

Jadi  $\beta \circ \beta^{-1}$  transitif.

iv). Ambil sebarang  $x, y, z, t \in S$  dengan  $(x, y), (z, t) \in \beta \circ \beta^{-1}$ .

Karena  $(x, y), (z, t) \in \beta \circ \beta^{-1}$ , maka  $x\beta = y\beta$  dan  $z\beta = t\beta$ .

Karena  $\beta$  homomorfisma, maka

$$(xz)\beta = (x\beta)(z\beta)$$

$$= (y\beta)(t\beta)$$

$$= (yt)\beta$$

Akibatnya  $(xz, yt) \in \beta \circ \beta^{-1}$ .

Dibentuk himpunan  $S/\alpha$  dengan  $\alpha$  adalah relasi kongruen pada semigrup  $S$ . Jika didefinisikan operasi biner "\*" pada  $S/\alpha$  dengan aturan  $(a\alpha)*(b\alpha) = (ab)\alpha$ , untuk setiap  $a\alpha, b\alpha \in S/\alpha$ , diperoleh teorema berikut.

**Teorema 3**

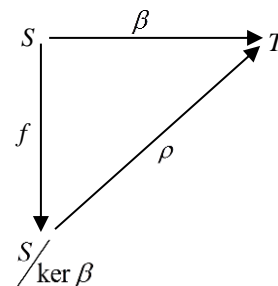
a.  $(S/\alpha, *)$  adalah semigrup.

b. Fungsi  $\gamma : S \rightarrow S/\alpha$  dengan aturan

$$(\forall a \in S) [\gamma(a) = a\alpha]$$

merupakan homomorfisma.

c. Jika  $S$  dan  $T$  semigrup, dengan  $\beta : S \rightarrow T$  homomorfisma, maka  $\ker \beta = \beta \circ \beta^{-1}$  adalah relasi kongruensi pada  $S$  dan  $\rho : S/\ker \beta \rightarrow T$  monomorfisma serta diagram berikut komutatif.



Bukti :

a. (i). Akan ditunjukkan  $S/\alpha$  well-defined.

Ambil sebarang  $a\alpha, b\alpha, a'\alpha, b'\alpha \in S/\alpha$

dengan  $a\alpha = a'\alpha$  dan  $b\alpha = b'\alpha$ .

Karena  $a\alpha = a'\alpha$  dan  $b\alpha = b'\alpha$ , maka  $(a, a') \in \alpha$  dan  $(b, b') \in \alpha$ .

Karena  $a, b, a', b' \in S$  dan  $\alpha$  relasi kongruensi, maka  $(ab, a'b') \in \alpha$ .

Akibatnya  $(ab)\alpha = (a'b')\alpha$  atau  $S/\alpha$ .

(ii). Ambil sebarang  $a\alpha, b\alpha, c\alpha \in S/\alpha$ .

Akibatnya

$$((a\alpha)*(b\alpha))*(c\alpha) = (ab)\alpha*(c\alpha)$$

$$= (abc)\alpha$$

$$= (a\alpha)*(bc)\alpha$$

$$= (a\alpha)*((b\alpha)*(c\alpha))$$

Berlaku sifat asosiatif.

b. Akan ditunjukkan  $\gamma : S \rightarrow S/\alpha$  adalah homomorfisma.

Ambil sebarang  $a, b \in S$ .

Diperoleh,

$$\begin{aligned} \gamma(ab) &= (ab)\alpha \\ &= (a\alpha)*(b\alpha) \\ &= \gamma(a)*\gamma(b) \end{aligned}$$

Jadi  $\gamma$  adalah homomorfisma.

c. Definisikan  $\rho : S/\ker \beta \rightarrow T$  dengan aturan perkawanan  $(\forall s \in S) \rho(a \ker \beta) = a\beta$ .

c.1. Akan dibuktikan  $\rho : S/\ker \beta \rightarrow T$  monomorfisma.

(i). Ambil sebarang  $a \ker \beta, b \ker \beta \in S/\ker \beta$  dengan

$$a \ker \beta = b \ker \beta.$$

Karena  $a \ker \beta = b \ker \beta$ , maka  $(a, b) \in \ker \beta$  atau  $a\beta = b\beta$  atau  $\rho(a \ker \beta) = \rho(b \ker \beta)$ .

Jadi  $\rho$  well-defined.

(ii). Ambil sebarang  $a \ker \beta, b \ker \beta \in S/\ker \beta$ .

$$\begin{aligned} \rho(a \ker \beta \ b \ker \beta) &= \rho(ab) \ker \beta \\ &= (ab)\beta \\ &= (a\beta)(b\beta) \\ &= \rho(a \ker \beta) \rho(b \ker \beta) \end{aligned}$$

Jadi  $\rho$  homomorfisma.

(iii). Ambil sebarang  $a \ker \beta, b \ker \beta \in S/\ker \beta$

$$\text{dengan } \rho(a \ker \beta) = \rho(b \ker \beta).$$

Karena  $\rho(a \ker \beta) = \rho(b \ker \beta)$ , maka  $a\beta = b\beta$  atau  $(a, b) \in \ker \beta$  atau  $a \ker \beta = b \ker \beta$ .

Jadi  $\rho$  injektif.

Berdasarkan (i) – (iii) terbukti  $\rho$  monomorfisma.

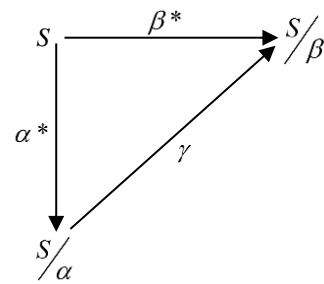
c.2. Ambil sebarang  $a \in S$ . Diperoleh

$$\begin{aligned} (\rho \circ f)(a) &= \rho(f(a)) \\ &= \rho(a \ker \beta) \\ &= a\beta \end{aligned}$$

Terbukti diagram komutatif.

#### Teorema 4

Jika  $\alpha$  dan  $\beta$  adalah relasi-relasi kongruensi pada semigrup  $S$  dan  $\alpha \subseteq \beta$ , maka terdapat homomorfisma  $\gamma : S/\alpha \rightarrow S/\beta$  sehingga diagram berikut komutatif.



Bukti

i). Didefinisikan  $\gamma : S/\alpha \rightarrow S/\beta$  dengan aturan perkawanan  $\gamma(a\alpha) = a\beta$ .

Akan ditunjukkan  $\gamma$  well-defined.

Ambil sebarang  $a\alpha, b\alpha \in S/\alpha$  dengan  $a\alpha = b\alpha$

Karena  $a\alpha = b\alpha$ , maka  $(a, b) \in \beta$  atau  $a\beta = b\beta$  atau  $\gamma(a\alpha) = \gamma(b\alpha)$ .

Terbukti  $\gamma$  well-defined.

ii). Ambil sebarang  $a\alpha, b\alpha \in S/\alpha$ .

Berdasarkan  $\gamma(a\alpha) = a\beta$  dan Teorema 3, diperoleh

$$\begin{aligned} \gamma((ab)\alpha) &= (ab)\beta \\ &= (a\beta)*(b\beta) \\ &= \gamma(a\alpha)*\gamma(b\alpha) \end{aligned}$$

Jadi terbukti  $\gamma : S/\alpha \rightarrow S/\beta$  adalah homomorfisma.

iii). Ambil sebarang  $a \in S$ .

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \alpha^*)(a) &= \gamma(\alpha^*(a)) \\ &= \gamma(a\alpha) \\ &= a\beta \\ &= \beta^*(a) \end{aligned}$$

Terbukti diagram komutatif.

#### Teorema 5

Jika  $\rho_i, i \in I$  adalah relasi kongruensi pada semigrup  $S$ , maka  $\cap \{\rho_i \mid i \in I\}$  juga merupakan relasi kongruensi pada  $S$ .

Bukti

Ambil sebarang  $s, t, s', t' \in S$  dengan  $(s, t) \in \cap_{i \in I} \rho_i$  dan  $(s', t') \in \cap_{i \in I} \rho_i$ .

Akibatnya  $(s, t) \in \rho_i$  dan  $(s', t') \in \rho_i$  untuk setiap  $i \in I$ .

Karena  $\rho_i$  relasi kongruensi pada semigrup  $S$ , maka  $(ss', tt') \in \rho_i$ .

Akibatnya  $(ss', tt') \in \cap_{i \in I} \rho_i$ .

Terbukti  $\cap \{\rho_i \mid i \in I\}$  merupakan relasi kongruensi pada  $S$ .

### KESIMPULAN

1. Relasi kongruensi pada semigrup  $S$  akan membentuk struktur yang sama dengan subgrup normal pada grup dan ideal di ring.
2. Irisan relasi-relasi kongruensi pada semigrup  $S$  juga membentuk relasi kongruensi.

### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Howie, J. M. (1976) *Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press. London.
- [2] Spitznagel, C. R. (1997) *Strucutre in Semigroup II*. Seminar Notes.
- [3] Spitznagel, C. R. (2000) *Congruence Lattices*. <http://www.jcu.edu/math.pdf>

**ANALISIS KORELASI SOMERS'D PADA DATA TINGKAT KENYAMANAN  
SISWA-SISWI SMP PLUS MELATI SAMARINDA**  
*Somers'd Correlate Analysis on The Data Comfortable Level of  
Students in Plus Melati Samarinda Junior High School*

**PRASTIKA KRIESNIATI<sup>1</sup>, DESI YUNIARTI<sup>2</sup>, DARNAH A. NOHE<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Mahasiswa Program Studi Statistika Fakultas MIPA Universitas Mulawarman*

<sup>2,3</sup>*Dosen Program Studi Statistika Fakultas MIPA Universitas Mulawarman*

Jl. Barang Tongkok Kampus Gn. Kelua Samarinda-Kalimantan Timur

E-mail: prastikakriesniati@gmail.com<sup>1</sup>, desi\_yunt@yahoo.com<sup>2</sup>, darnah.98@gmail.com<sup>3</sup>

**ABSTRACT**

Somers'd correlation is a analysis of correlate is used for data with ordinal scale and formed in a contingency table. Somers'd correlation can be used for symmetric and asymmetric relationships. In this case, will be explained about Somers'd asymmetric correlation. Somers'd  $d_{YX}$  correlation for asymmetrical association applied to data from questionnaires about their comfortable level of Students live in dorms of Melati formed into 2 contingency table, the contingency table for boarding facilities with the comfortable level of students and the quality of the food with the comfortable level of students. Based on the analysis of correlation Somers'd  $d_{YX}$ , it can be seen that there is relationship between boarding facility with comfortable level of students and quality of food with comfortable level of students, and then correlation coefficient from 2 contingency table is 0,330 and 0,345 respectively.

**Keywords:** *Asymmetrical, correlation coefficient, ordinal, Somers'd  $d_{YX}$ .*

**PENDAHULUAN**

Teknik analisis yang termasuk dalam salah satu teknik pengukuran derajat keeratan hubungan sering dikenal dengan analisis korelasi. Pengukuran derajat keeratan hubungan merupakan istilah umum yang mengacu pada sekelompok teknik dalam analisis *bivariate* yang digunakan untuk mengukur kekuatan hubungan antar dua variabel. (Nugroho, Akbar, Vusvitasari, 2008).

Korelasi bermanfaat untuk mengukur kekuatan hubungan antara dua variabel dengan skala-skala tertentu, misalnya pada statistika parametrik terdapat korelasi Pearson yang memiliki syarat bahwa data harus berskala interval atau rasio, sedangkan pada statistika non parametrik terdapat korelasi Cramer, Lambda, Phi, dan Tetrachronic yang digunakan untuk skala data nominal dan korelasi Spearman, Kendall's Tau, Gamma, dan Somers'd untuk skala data ordinal. Untuk skala data ordinal korelasi yang sering digunakan adalah korelasi Kendall's Tau dan Spearman, akan tetapi apabila data ditampilkan dalam bentuk tabel kontingensi, maka penggunaan korelasi Spearman dan Kendall's Tau akan kurang efektif. Dengan demikian untuk data pasangan pengamatan yang kedua variabelnya bertipe ordinal dan

ditampilkan dalam bentuk tabel kontingensi, korelasi yang tepat digunakan korelasi Somers'd (Yamin, Rachmach, Kurniawan, 2010).

Jika dilihat berdasarkan jenis hubungannya, korelasi Somers'd dapat digunakan pada dua variabel yang memiliki hubungan simetris dan asimetris. Hubungan simetris merupakan bentuk hubungan dimana dalam bentuk hubungan ini tidak ditemukan adanya variabel independen dan variabel dependen, sedangkan pada hubungan asimetris sudah ditemukan secara pasti adanya variabel dependen dan variabel independen. Perhitungan pada korelasi Somers'd didasarkan pada banyaknya pasangan konkordan dan diskordan. Selain itu juga, korelasi Somers'd memperhatikan banyaknya *ties* (banyaknya data kembar pada dua variabel, dimana selisih dari kedua variabel tersebut adalah nol) pada perhitungan untuk mencari nilai koefisien korelasinya (Nugroho, Akbar, Vusvitasari, 2008).

Suatu permasalahan yang sering terjadi pada suatu sekolah berasrama (*boarding school*) yaitu berkaitan dengan kenyamanan siswa-siswi untuk tinggal di asrama tersebut. Banyak hal yang dapat berhubungan dengan tingkat kenyamanan siswa untuk tinggal di asrama, beberapa contohnya adalah kelengkapan fasilitas yang

terdapat dalam asrama, keamanan asrama, kualitas makanan yang disediakan oleh pihak asrama dan masih banyak faktor lain yang dapat berhubungan dengan tingkat kenyamanan siswa-siswi berada di asrama tersebut.

Berdasarkan uraian tersebut, maka penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul “Analisis Korelasi Somers’d pada Data Tingkat Kenyamanan Siswa-siswi SMP Plus Melati Samarinda”. Adapun korelasi Somers’d yang digunakan pada penelitian ini adalah korelasi Somers  $d_{YX}$ .

## TINJAUAN PUSTAKA

### 1. Statistika Non Parametrik

Metode statistika nonparametrik merupakan suatu metode analisis data tanpa memperhatikan bentuk distribusinya sehingga statistika ini sering juga disebut metode bebas sebaran (*distribution free methods*), karena model uji statistiknya tidak menetapkan syarat-syarat tertentu tentang bentuk distribusi parameter populasinya. Artinya bahwa metode statistika nonparametrik ini tidak menetapkan syarat bahwa observasi-observasinya harus ditarik dari populasi yang berdistribusi normal dan tidak menetapkan syarat homoskedastisitas (*homoscedasticity*) (Nugroho, Akbar, Vusvitasari, 2008).

### 2. Analisis Korelasi

Analisis Korelasi adalah bentuk analisis variabel (data) penelitian untuk mengetahui derajat atau kekuatan hubungan, bentuk atau arah hubungan di antara variabel-variabel dan besarnya hubungan antara variabel yang satu (variabel bebas/independen) terhadap variabel lainnya (variabel terikat/dependen). Dalam analisis korelasi ini, hubungan antar variabel dapat berbentuk sebagai berikut (Hasan, 2006):

#### 1. Hubungan Simetris

Hubungan simetris merupakan bentuk hubungan di mana dua variabel atau lebih muncul secara bersamaan. Dalam bentuk hubungan ini tidak ditemukan secara pasti adanya variabel bebas dan variabel terikat.

#### 2. Hubungan Kausal

Hubungan kausal merupakan bentuk hubungan yang sifatnya sebab-akibat, artinya keadaan satu variabel disebabkan atau ditentukan oleh keadaan satu atau lebih variabel lain.

#### 3. Hubungan Timbal Balik (Asimetris)

Hubungan timbal balik atau hubungan interaktif atau hubungan resiprokal merupakan bentuk hubungan di mana dua variabel atau lebih saling mempengaruhi. Dalam bentuk hubungan ini, sudah ditemukan secara pasti adanya variabel terikat dan variabel bebas, namun kedua variabel ini dapat bergantian kedudukannya, artinya variabel terikat dapat bertindak sebagai variabel bebas. Demikian pula sebaliknya, variabel bebas dapat bertindak sebagai variabel terikat (Hasan, 2006).

Korelasi yang terjadi antara dua variabel dapat berupa (Furqon, 2002):

#### 1. Korelasi Positif

Korelasi positif adalah korelasi dari dua variabel, yaitu apabila variabel yang satu ( $X$ ) meningkat maka variabel lainnya ( $Y$ ) cenderung untuk meningkat juga dan begitupun sebaliknya. Hubungan ini dapat dikatakan sebagai hubungan searah.

#### 2. Korelasi Negatif

Korelasi negatif adalah korelasi dari dua variabel, yaitu apabila variabel yang satu ( $X$ ) meningkat maka variabel lainnya ( $Y$ ) menurun dan begitupun sebaliknya. Hubungan ini dapat dikatakan sebagai hubungan tidak searah atau berlawanan.

#### 3. Tidak ada korelasi

Tidak ada korelasi terjadi apabila kedua variabel ( $X$  dan  $Y$ ) tidak menunjukkan adanya hubungan.

#### 4. Korelasi Sempurna

Korelasi sempurna adalah korelasi dari dua variabel, yaitu apabila kenaikan atau penurunan variabel yang satu (variabel  $X$ ) berbanding dengan kenaikan atau penurunan variabel lainnya (variabel  $Y$ ). Untuk korelasi sempurna ini nilai koefisien korelasinya adalah  $\pm 1$ .

#### a) Koefisien Korelasi

Koefisien korelasi ialah pengukuran statistik kovarian atau asosiasi antara dua variabel. Koefisien korelasi menunjukkan kekuatan (*strength*) hubungan linear dan arah hubungan dua variabel acak. Secara umum koefisien korelasi dilambangkan dengan “ $r$ ”. Untuk menentukan keeratan hubungan atau korelasi antar variabel, maka diberikan nilai-nilai dari koefisien korelasi ( $r$ ) pada Tabel 1 (Hasan, 2006):

Tabel 1. Interval Nilai Koefisien Korelasi dan Kekuatan Hubungan

No	Interval Nilai	Kekuatan Hubungan
1	$ r  = 0$	Tidak terdapat korelasi
2	$0,00 <  r  \leq 0,20$	Sangat rendah atau lemah sekali
3	$0,20 <  r  \leq 0,40$	Rendah atau lemah tapi pasti
4	$0,40 <  r  \leq 0,70$	Cukup berarti atau sedang
5	$0,70 <  r  \leq 0,90$	Tinggi atau Kuat
6	$0,90 <  r  \leq 1,00$	Sangat tinggi atau kuat sekali
7	$ r  = 1,00$	Sempurna

#### b) Analisis Korelasi Bivariate

Analisis korelasi *bivariate* adalah analisis hubungan antara dua variabel yaitu erat atau tidaknya suatu hubungan, arah hubungan, dan berarti atau tidaknya hubungan. Beberapa macam korelasi *bivariate* yaitu, korelasi *Product Moment* (Pearson), korelasi Kendall’s Tau, Korelasi Spearman, Korelasi Gamma, Korelasi Somers, Korelasi Eta dan sebagainya (Priyatno, 2009).



**3. Korelasi Somers'd**

Korelasi Somers'd merupakan korelasi non parametrik yang tepat digunakan untuk menganalisis suatu hubungan di antara dua variabel yang memiliki skala data ordinal. Korelasi Somers'd terdiri dari dua variabel yang dimisalkan dengan variabel X dan variabel Y. Korelasi Somers'd dapat digunakan untuk hubungan simetris dan asimetris. Jika dimisalkan suatu variabel X memiliki kategori  $X_1, X_2, \dots, X_k$  dengan skala data ordinal dan diasumsikan bahwa variabel tersebut memiliki kategori besar  $X_1 < X_2 < \dots < X_k$  serta dapat dikatakan sebagai variabel independen (bebas). Selanjutnya, untuk variabel Y memiliki kategori  $Y_1, Y_2, \dots, Y_r$  dengan skala data ordinal dan diasumsikan bahwa besar kategori  $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_r$ , serta dapat dikatakan bahwa variabel Y tersebut merupakan variabel dependen (terikat). Jika variabel X dapat dikatakan sebagai variabel independen dan variabel Y dikatakan sebagai variabel dependen, maka  $\Delta_{YX}$  merupakan suatu parameter populasi diantara kedua variabel tersebut. Jika peranan antara kedua variabel tersebut dibalik atau jika dimisalkan bahwa variabel X termasuk ke dalam variabel dependen dan variabel Y termasuk ke dalam variabel independen, maka parameter populasinya dinotasikan dengan  $\Delta_{XY}$ . Pada suatu sampel, lambang untuk koefisien korelasinya dinotasikan dengan  $d_{YX}$  dan  $d_{XY}$  secara berturut-turut (Siegel dan Castellan, 1988).

Untuk menghitung koefisien korelasi Somers'd dari dua variabel berskala ordinal, yaitu variabel X yang memiliki kategori  $X_1, X_2, \dots, X_k$  dan variabel Y yang memiliki kategori  $Y_1, Y_2, \dots, Y_r$  maka data pengamatan disusun menjadi sebuah tabel kontingensi seperti pada Tabel 2.

Tabel 2. Tabel Kontingensi

	$X_1$	$X_2$	...	$X_k$	Jumlah
$Y_1$	$n_{11}$	$n_{12}$	...	$n_{1k}$	$R_1$
$Y_2$	$n_{21}$	$n_{22}$	...	$n_{2k}$	$R_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$Y_r$	$n_{r1}$	$n_{r2}$	...	$n_{rk}$	$R_r$
Jumlah	$C_1$	$C_2$	...	$C_k$	$N$

Langkah awal yang harus dilakukan untuk menghitung koefisien korelasi Somers'd adalah menghitung banyaknya nilai konkordan (pasangan yang searah/agreements) dan nilai diskordan (pasangan yang tidak searah/disagreements) diantara sepasang variabel tersebut. Untuk menghitung banyaknya nilai konkordan maka dapat menggunakan persamaan (1) (Siegel dan Castellan, 1988).

$$K = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{k-1} n_{ij} \sum_{p=i+1}^r \sum_{q=j+1}^k n_{pq} \tag{1}$$

Jika dimisalkan  $N_{ij}^+ = \sum_{p=i+1}^r \sum_{q=j+1}^k n_{pq}$ , maka dapat diketahui bahwa banyaknya nilai konkordan adalah sebagai berikut:

$$K = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{k-1} n_{ij} N_{ij}^+ \tag{2}$$

dengan  $i = 1, 2, \dots, r - 1$  dan  $j = 1, 2, \dots, k - 1$ .

Sedangkan, untuk menghitung banyaknya nilai diskordan, maka dapat menggunakan persamaan (3).

$$D = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=2}^k n_{ij} \sum_{p=i+1}^r \sum_{q=1}^{j-1} n_{pq} \tag{3}$$

Jika dimisalkan  $N_{ij}^- = \sum_{p=i+1}^r \sum_{q=1}^{j-1} n_{pq}$ , sehingga dapat

diketahui bahwa banyaknya nilai diskordan adalah sebagai berikut:

$$D = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=2}^k n_{ij} N_{ij}^- \tag{4}$$

dengan  $i = 1, 2, \dots, r - 1$  dan  $j = 2, \dots, k$ .

Pada korelasi Somers'd  $d_{YX}$ , banyaknya ties pada variabel X harus dihilangkan sehingga untuk menghitung koefisien korelasi Somers'd  $d_{YX}$ , dapat menggunakan persamaan (5).

$$d_{YX} = \frac{2[K - D]}{n^2 - \sum_{j=1}^k C_j^2} \tag{5}$$

dimana:

- $K$  : Banyaknya pasangan konkordan
- $D$  : Banyaknya pasangan diskordan
- $n$  : Banyaknya data pengamatan
- $C_j$  : Frekuensi marginal ke-j dari variabel X.

Jika variabel X berperan sebagai variabel dependen (terikat) dan variabel Y berperan sebagai variabel independen (bebas), maka rumus perhitungan untuk mencari koefisien korelasi Somers'd  $d_{XY}$  dapat menggunakan persamaan (6).

$$d_{XY} = \frac{2[K - D]}{n^2 - \sum_{i=1}^r R_i^2} \tag{6}$$

dimana:

- $K$  : Banyaknya pasangan konkordan
- $D$  : Banyaknya pasangan diskordan
- $n$  : Banyaknya data pengamatan
- $R_i$  : Frekuensi marginal ke-i dari variabel Y.

Jika variabel X dan variabel Y tidak dapat dikatakan sebagai variabel independen dan variabel dependen, maka dapat menggunakan korelasi Somers'd simetris untuk menghitung besar koefisien korelasi dari kedua variabel tersebut. Secara sederhana, koefisien korelasi Somers'd dapat dihitung dengan merata-ratakan koefisien korelasi Somers'd  $d_{YX}$  dan  $d_{XY}$ . Jika dimisalkan:

$$D_c = n^2 - \sum_{j=1}^k C_j^2 \tag{7}$$

$$D_r = n^2 - \sum_{i=1}^r R_i^2 \tag{8}$$

maka persamaan (5) dan (6) dapat dituliskan sebagai berikut (Goktas dan Isci, 2011):

$$d_{YX} = \frac{2[K - D]}{D_c} \tag{9}$$

$$d_{XY} = \frac{2[K - D]}{D_r} \tag{10}$$

Sehingga, rumus perhitungan untuk koefisien korelasi Somers'd simetris dapat dituliskan pada persamaan (11).

$$\begin{aligned}
 d_{sym} &= \frac{d_{YX} + d_{XY}}{2} \\
 &= \frac{\left[ \frac{2(K-D)}{D_c} \right] + \left[ \frac{2(K-D)}{D_r} \right]}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \left[ \frac{2(K-D)}{D_c} \right] + \left[ \frac{2(K-D)}{D_r} \right] \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2D_r(K-D) + 2D_c(K-D)}{D_c D_r} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2(K-D)(D_r + D_c)}{D_c D_r} \right] \\
 &= \frac{(K-D)(D_r + D_c)}{D_c D_r}
 \end{aligned} \tag{11}$$

#### 4. Pengujian Signifikansi dari Statistik $d_{YX}$ , $d_{XY}$ dan $d_{sym}$

Sebelum melakukan pengujian signifikansi dari analisis korelasi Somers'd maka perlu dicari terlebih dahulu nilai variansinya. Untuk menghitung variansi dari korelasi Somers'd, maka diperlukan frekuensi diatas sel  $ij$  sampai ke kiri sel  $ij$  yang dilambangkan dengan  $M_{ij}^+$  dan frekuensi yang diatas sel  $ij$  sampai kekanan sel  $ij$  yang dilambangkan dengan  $M_{ij}^-$ . Kedua variabel tersebut dapat didefinisikan dengan menggunakan persamaan (12) dan (13):

$$M_{ij}^+ = \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{q=1}^{j-1} n_{pq} \tag{12}$$

Dimana  $p = 1, 2, \dots, i-1$  dan  $q = 1, 2, \dots, j-1$

$$M_{ij}^- = \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{q=j+1}^k n_{pq} \tag{13}$$

Dimana  $p = 1, 2, \dots, i-1$  dan  $q = j+1, \dots, k$

Dengan menggunakan persamaan (12) dan (13), bersama dengan nilai  $N_{ij}^+$  dan  $N_{ij}^-$  serta melakukan pembobotan dengan frekuensi pada sel  $ij$ , maka nilai variansi untuk  $d_{YX}$  dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (14) (Siegel dan Castellan, 1988).

$$\text{Var}(d_{YX}) = \frac{4 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k n_{ij} (N_{ij}^+ + M_{ij}^+ - N_{ij}^- - M_{ij}^-)^2}{\left[ n^2 - \sum_{j=1}^k C_j^2 \right]^2} \tag{14}$$

Untuk melakukan pengujian hipotesis dimana diketahui bahwa  $H_0 : \Delta_{YX} = 0$ , baik untuk pengujian satu sisi ataupun dua sisi, maka dapat menggunakan statistik uji pada persamaan (15).

$$z = \frac{d_{YX}}{\sqrt{\text{var}(d_{YX})}} \tag{15}$$

Jika peneliti ingin melakukan pengujian hipotesis untuk parameter  $\Delta_{XY}$ , maka perlu dihitung terlebih dahulu nilai  $\text{var}(d_{XY})$  dengan menggunakan persamaan (16).

$$\text{Var}(d_{XY}) = \frac{4 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k n_{ij} (N_{ij}^+ + M_{ij}^+ - N_{ij}^- - M_{ij}^-)^2}{\left[ n^2 - \sum_{i=1}^r R_i^2 \right]^2} \tag{16}$$

Untuk melakukan pengujian hipotesis dimana diketahui bahwa  $H_0 : \Delta_{XY} = 0$ , baik untuk pengujian satu sisi ataupun dua sisi, maka dapat menggunakan statistik uji pada persamaan (17).

$$z = \frac{d_{XY}}{\sqrt{\text{var}(d_{XY})}} \tag{17}$$

Untuk melakukan pengujian signifikansi pada korelasi Somers'd simetris, maka perlu dilakukan perhitungan untuk mencari nilai standar *error* terlebih dahulu. Untuk mencari nilai standar *error* dapat menggunakan persamaan (18) (Goktas dan Isci, 2011).

$$SE = \frac{4}{(D_c + D_r)} \sqrt{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k n_{ij} (N_{ij}^+ + M_{ij}^+ - N_{ij}^- - M_{ij}^-)^2 - \frac{1}{n} (K-D)^2} \tag{18}$$

Untuk melakukan pengujian hipotesis dimana diketahui bahwa  $H_0 : \Delta_{sym} = 0$ , baik untuk pengujian satu sisi ataupun dua sisi, maka dapat menggunakan statistik uji pada persamaan (19).

$$z = \frac{d_{sym}}{SE} \tag{19}$$

## METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian ini dilaksanakan pada bulan April sampai Mei 2013. Adapun pengambilan data dilakukan di SMP Plus Melati Samarinda yang berlokasi di Jl. H. A. M. M Rifaddin RT. 25 Harapan Baru Samarinda Seberang dan pengolahan data dilaksanakan di Laboratorium Statistika Komputasi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Mulawarman, Samarinda Provinsi Kalimantan Timur. Penelitian ini dilakukan dengan mengambil jawaban responden (siswa/siswi SMP Plus Melati Samarinda). Rancangan penelitian ini merupakan penelitian observasional analitik.

Variabel yang digunakan pada penelitian ini terbagi menjadi 2 variabel, yaitu variabel dependen dan independen. Untuk variabel dependen (Y) pada penelitian ini adalah tingkat kenyamanan siswa-siswi SMP Plus Melati Samarinda yang dibagi menjadi 4 kategori, yaitu tidak nyaman ( $Y_{(1)}$ ), kurang nyaman ( $Y_{(2)}$ ), nyaman ( $Y_{(3)}$ ) dan sangat nyaman ( $Y_{(4)}$ ). Sedangkan untuk variabel independen (X), yaitu fasilitas asrama ( $X_1$ ) yang terbagi menjadi 4 kategori yaitu tidak memadai ( $X_{1(1)}$ ), kurang memadai ( $X_{1(2)}$ ), memadai ( $X_{1(3)}$ ) dan sangat memadai ( $X_{1(4)}$ ) serta kualitas makanan ( $X_2$ ) yang terbagi menjadi 4

kategori, yaitu tidak baik ( $X_{2(1)}$ ), kurang baik ( $X_{2(2)}$ ), baik ( $X_{2(3)}$ ) dan sangat baik ( $X_{2(4)}$ ).

Teknik sampling yang digunakan pada penelitian ini adalah *proportionate stratified random sampling* atau sampling acak berstrata secara proporsional. Sedangkan untuk teknik analisis data pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Uji Validitas menggunakan analisis korelasi Spearman
2. Uji Reliabilitas menggunakan formula Spearman-Brown
3. Analisis statistika deskriptif menggunakan diagram batang dan tabel kontingensi
4. Analisis korelasi Somers'd  $d_{yx}$ .

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### a) Uji Validitas

Berikut adalah pengujian validitas untuk butir-butir pertanyaan dari variabel tingkat kenyamanan, fasilitas asrama dan kualitas makanan.

Hipotesis:

Pada penelitian ini hipotesis yang digunakan untuk pengujian validitas adalah sebagai berikut:

$H_0$  : Pertanyaan tidak mengukur aspek yang diinginkan (tidak valid)

$H_1$  : Pertanyaan mengukur aspek yang diinginkan (valid)

Tabel 3. Pengujian Validitas Untuk Variabel Tingkat Kenyamanan Siswa-siswi

Butir-butir Pertanyaan	$\rho_s$	$z_{hitung}$	$z_{tabel}$	Keputusan
Kebersihan lingkungan asrama	0,713	7,236	1,96	$H_0$ ditolak
Hubungan siswa/siswi dengan pengasuh asrama	0,426	4,323	1,96	$H_0$ ditolak
Letak lokasi asrama	0,774	7,855	1,96	$H_0$ ditolak
Tingkat pengawasan asrama	0,673	6,830	1,96	$H_0$ ditolak
Kedisiplinan yang diterapkan oleh asrama	0,718	7,287	1,96	$H_0$ ditolak

Taraf Signifikansi:

Taraf signifikansi ( $\alpha$ ) yang digunakan pada pengujian ini adalah sebesar 5% atau sama dengan 0,05.

Statistik Uji:

Statistik uji yang digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut (Sugiyono, 2010):

$$z_{hitung} = \frac{\rho_s}{\frac{1}{\sqrt{n-1}}}$$

Daerah Kritis:

Daerah kritis pada pengujian ini adalah menolak  $H_0$  apabila  $z_{hitung} > z_{tabel}$ .

Dimana:

$$z_{tabel} = z\left(\frac{\alpha}{2}\right) = z\left(\frac{0,05}{2}\right) = 1,96$$

Keputusan:

Berdasarkan hasil *output* pengujian validitas dengan menggunakan *software* SPSS 20, maka diperoleh keputusan pada Tabel 3, Tabel 4 dan Tabel 5.

Tabel 4. Pengujian Validitas Untuk Variabel Fasilitas Asrama

Butir-butir Pertanyaan	$\rho_s$	$z_{hitung}$	$z_{tabel}$	Keputusan
Fasilitas kamar mandi	0,765	7,764	1,96	$H_0$ ditolak
Kondisi sarana olahraga	0,655	6,648	1,96	$H_0$ ditolak
Kondisi kamar asrama	0,594	6,028	1,96	$H_0$ ditolak
Kondisi gedung asrama	0,587	5,957	1,96	$H_0$ ditolak
Kebersihan fasilitas Ruang Makan	0,771	7,825	1,96	$H_0$ ditolak

Tabel 5. Pengujian Validitas untuk Variabel Kualitas Makanan

Butir-butir Pertanyaan	$\rho_s$	$z_{hitung}$	$z_{tabel}$	Keputusan
Penyajian makanan	0,833	8,454	1,96	$H_0$ ditolak
Menu makanan yang disajikan	0,551	5,592	1,96	$H_0$ ditolak
Frekuensi membeli makanan di luar asrama	0,727	7,378	1,96	$H_0$ ditolak
Gizi yang terkandung dalam makanan	0,764	7,754	1,96	$H_0$ ditolak
Kebersihan alat-alat makan	0,848	8,606	1,96	$H_0$ ditolak

Kesimpulan:

Setelah pengambilan keputusan, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa butir-butir pertanyaan untuk variabel tingkat kenyamanan siswa-siswi, fasilitas asrama dan kualitas makanan yang diberikan oleh pihak asrama dapat mengukur aspek yang diinginkan (valid).

### b) Uji Reliabilitas

Adapun hasil pengujian reliabilitas dari seluruh variabel adalah sebagai berikut:

Hipotesis:

Hipotesis yang digunakan untuk pengujian reliabilitas pada penelitian ini, yaitu:

$H_0$  : Pertanyaan tidak menghasilkan pengukuran yang konsisten (tidak reliabel)

$H_1$  : Pertanyaan menghasilkan pengukuran yang konsisten (reliabel)

Taraf Signifikansi:

Taraf signifikansi ( $\alpha$ ) yang digunakan pada pengujian reliabilitas ini adalah sebesar 5% atau sama dengan 0,05.

Statistik Uji:

Pada penelitian ini, untuk pengujian reliabilitas digunakan teknik formula Spearman-Brown sebagai berikut (Azwar, 2012):

$$R_{xx'} = \frac{2(R_{y_1y_2})}{1 + R_{y_1y_2}}$$

dimana:

$R_{xx'}$  : Koefisien reliabilitas Spearman-Brown

$R_{y_1y_2}$  : Koefisien korelasi antara skor kedua belahan

Daerah Kritis:

Daerah kritis untuk pengujian ini adalah menolak  $H_0$  apabila  $R_{xx'} > R_{tabel}$

dimana:

$$\begin{aligned} R_{tabel} &= R_{(\alpha;n-2)} \\ &= R_{(0,05;138)} \\ &= 0,167 \end{aligned}$$

Keputusan:

Berdasarkan hasil *output* pengujian reliabilitas dengan menggunakan *software* SPSS 20, maka dapat diperoleh hasil keputusan yang disajikan pada Tabel 6.

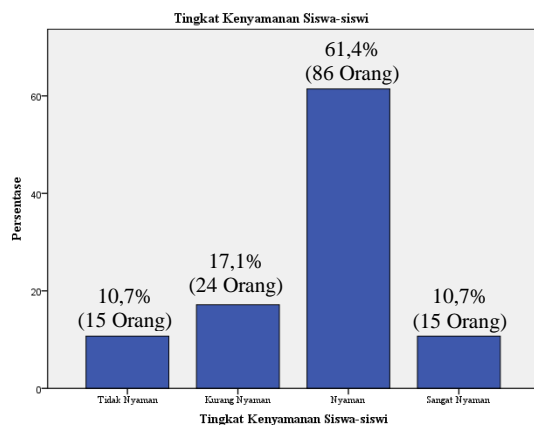
Tabel 6. Hasil Pengujian Reliabilitas Beserta Keputusan

Variabel	$R_{xx'}$	$R_{tabel}$	Keputusan
Tingkat Kenyamanan Siswa-siswi	0,720	0,167	$H_0$ ditolak
Fasilitas Asrama	0,699	0,167	$H_0$ ditolak
Kualitas Makanan	0,818	0,167	$H_0$ ditolak

Kesimpulan:

Berdasarkan hasil keputusan, maka dapat disimpulkan bahwa butir-butir pertanyaan pada variabel tingkat kenyamanan siswa-siswi, fasilitas asrama dan kualitas makanan yang diberikan oleh pihak asrama menghasilkan pengukuran yang konsisten (reliabel).

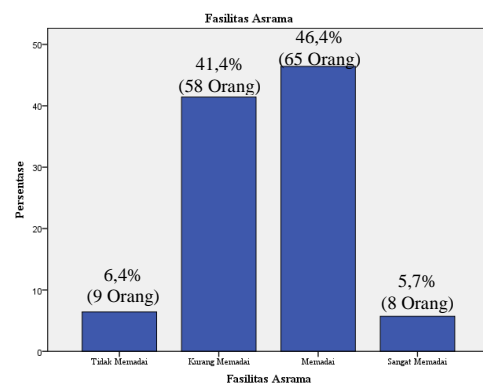
c) Analisis Statistika Deskriptif



Gambar 1. Diagram Batang untuk Variabel Tingkat Kenyamanan Siswa

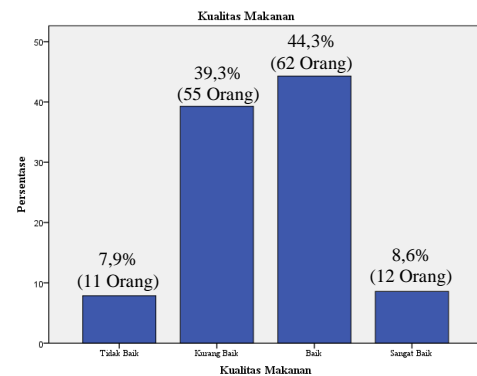
Analisis statistika deskriptif yang digunakan pada penelitian ini, dilakukan dengan membuat diagram batang dan tabel kontingensi untuk setiap variabel. Diagram batang untuk variabel tingkat kenyamanan, fasilitas asrama dan kualitas makanan berturut-turut ditunjukkan oleh Gambar 1, Gambar 2 dan Gambar 3.

Berdasarkan Gambar 1 dapat diketahui bahwa mayoritas siswa-siswi SMP Plus Melati Samarinda merasa nyaman tinggal di asrama. Hal itu dapat diketahui berdasarkan tingginya frekuensi siswa-siswi SMP plus Melati Samarinda yang memilih kategori nyaman, yaitu sebesar 61,4% atau sebanyak 86 orang.



Gambar 2. Diagram Batang untuk Variabel Fasilitas Asrama

Gambar 2 menunjukkan diagram batang untuk variabel fasilitas asrama. Dari diagram batang tersebut dapat diketahui bahwa mayoritas siswa-siswi SMP Plus Melati Samarinda beranggapan bahwa fasilitas asrama sudah memadai, yaitu sebanyak 46,4% atau sebanyak 65 orang.



Gambar 3. Diagram Batang untuk Variabel Kualitas Makanan

Berdasarkan diagram batang untuk variabel kualitas makanan yang ditunjukkan pada Gambar 3 dapat diketahui bahwa mayoritas siswa-siswi SMP Plus Melati Samarinda beranggapan bahwa kualitas makanan yang diberikan oleh asrama sudah baik. Hal itu dapat dilihat berdasarkan persentase siswa-siswi yang memilih kategori baik adalah sebesar 44,3% atau sebanyak 62 orang.

Setelah membuat diagram batang, maka langkah selanjutnya adalah membuat tabel kontingensi. Berikut adalah tabel kontingensi untuk variabel fasilitas asrama dengan tingkat kenyamanan siswa-siswi dan variabel kualitas makana dengan tingkat kenyamanan siswa-siswi.

Tabel 7. Tabel Kontingensi untuk Variabel Fasilitas Asrama dengan Tingkat Kenyamanan Siswa-siswi.

Y	X <sub>1</sub>				Total
	(1)	(2)	(3)	(4)	
(1)	4	7	4	0	15
(2)	1	14	9	0	24
(3)	3	36	45	2	86
(4)	1	1	7	6	15
<b>Total</b>	9	58	65	8	140

Tabel 8. Tabel Kontingensi untuk Variabel Kualitas Makanan dengan Tingkat Kenyamanan Siswa-siswi

Y	X <sub>2</sub>				Total
	(1)	(2)	(3)	(4)	
(1)	5	7	2	1	15
(2)	2	13	9	0	24
(3)	3	35	42	6	86
(4)	1	0	9	5	15
<b>Total</b>	11	55	62	12	140

**d) Analisis Korelasi Somers'd  $d_{YX}$  untuk Variabel Fasilitas Asrama dengan Tingkat Kenyamanan Siswa-siswi**

Untuk melakukan analisis korelasi Somers'd  $d_{YX}$ , maka data yang telah diperoleh dibentuk menjadi suatu tabel kontingensi yang terdapat pada Tabel 7. Sebelum dilakukan perhitungan untuk mencari koefisien korelasi Somers'd  $d_{YX}$  maka perlu dicari nilai konkordan dan diskordan terlebih dahulu. Berikut adalah perhitungan untuk mencari nilai konkordan.

$$\begin{aligned}
 K &= \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{k-1} n_{ij} \sum_{p=i+1}^r \sum_{q=j+1}^k n_{pq} \\
 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 n_{ij} N_{ij}^+ \\
 &= n_{11}N_{ij}^+ + n_{12}N_{ij}^+ + n_{13}N_{ij}^+ + n_{21}N_{ij}^+ + n_{22}N_{ij}^+ \\
 &\quad + n_{23}N_{ij}^+ + n_{31}N_{ij}^+ + n_{32}N_{ij}^+ + n_{33}N_{ij}^+
 \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan maka dapat diketahui:

$$\begin{aligned}
 n_{11}N_{ij}^+ &= n_{11} \sum_{p=i+1}^4 \sum_{q=j+1}^4 n_{pq} \\
 &= n_{11} \sum_{p=2}^4 \sum_{q=2}^4 n_{pq} \\
 &= n_{11}(n_{22} + n_{23} + n_{24} + n_{32} + n_{33} + n_{34} + n_{42} \\
 &\quad + n_{43} + n_{44}) \\
 &= 4(14 + 9 + 0 + 36 + 45 + 2 + 1 + 7 + 6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 480 \\
 n_{12}N_{ij}^+ &= 483 & n_{22}N_{ij}^+ &= 840 & n_{32}N_{ij}^+ &= 468 \\
 n_{13}N_{ij}^+ &= 32 & n_{23}N_{ij}^+ &= 72 & n_{33}N_{ij}^+ &= 270 \\
 n_{21}N_{ij}^+ &= 97 & n_{31}N_{ij}^+ &= 42
 \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
 K &= 480 + 483 + 32 + 97 + 840 + 72 + 42 + 468 + 270 \\
 &= 2784
 \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya adalah menghitung nilai diskordan. Untuk menghitung nilai diskordan dapat menggunakan persamaan (3) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 D &= \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=2}^k n_{ij} \sum_{p=i+1}^r \sum_{q=1}^{j-1} n_{pq} \\
 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^4 n_{ij} N_{ij}^- \\
 &= n_{12}N_{ij}^- + n_{13}N_{ij}^- + n_{14}N_{ij}^- + n_{22}N_{ij}^- + n_{23}N_{ij}^- \\
 &\quad + n_{24}N_{ij}^- + n_{32}N_{ij}^- + n_{33}N_{ij}^- + n_{34}N_{ij}^-
 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil perhitungan maka dapat diketahui:

$$\begin{aligned}
 n_{12}N_{ij}^- &= n_{12} \sum_{p=i+1}^r \sum_{q=1}^{j-1} n_{pq} \\
 &= n_{12} \sum_{p=2}^4 \sum_{q=1}^1 n_{pq} \\
 &= n_{12}(n_{21} + n_{31} + n_{41})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_{12}N_{ij}^- &= 7(1 + 3 + 1) \\
 &= 35
 \end{aligned}$$

$$n_{13}N_{ij}^- = 224 \quad n_{23}N_{ij}^- = 369 \quad n_{33}N_{ij}^- = 90$$

$$n_{14}N_{ij}^- = 0 \quad n_{24}N_{ij}^- = 0 \quad n_{34}N_{ij}^- = 18$$

$$n_{22}N_{ij}^- = 56 \quad n_{32}N_{ij}^- = 36$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
 D &= 35 + 224 + 0 + 56 + 369 + 0 + 36 + 90 + 18 \\
 &= 828
 \end{aligned}$$

langkah selanjutnya adalah menghitung nilai koefisien korelasi Somers'd  $d_{YX}$  dengan menggunakan persamaan (5).

$$\begin{aligned}
 d_{YX} &= \frac{2[K - D]}{n^2 - \sum_{j=1}^k C_j^2} \\
 &= \frac{2[2784 - 828]}{140^2 - (9^2 + 58^2 + 65^2 + 8^2)} \\
 &= 0,330
 \end{aligned}$$



### Interpretasi Koefisien Korelasi

Dari hasil perhitungan koefisien korelasi yang telah dilakukan, dapat diketahui bahwa besar korelasi yang terjadi pada variabel fasilitas asrama dengan variabel tingkat kenyamanan siswa-siswi tinggal di asrama adalah sebesar 0,330. Berdasarkan nilai koefisien korelasi tersebut dapat disimpulkan bahwa hubungan antara variabel fasilitas asrama dengan variabel tingkat kenyamanan siswa-siswi tinggal di asrama rendah atau lemah tapi pasti. Jenis korelasinya adalah korelasi positif dan memiliki hubungan yang searah atau berbanding lurus. Sehingga dapat disimpulkan bahwa semakin memadai fasilitas yang terdapat dalam asrama, maka siswa-siswi akan merasa semakin nyaman untuk tinggal di asrama.

Setelah melakukan perhitungan untuk mencari nilai koefisien korelasi Somers'd  $d_{YX}$ , maka perlu dilakukan pengujian korelasi Somers'd. Akan tetapi, sebelum dilakukan pengujian maka perlu mencari nilai variansi dari  $d_{YX}$  dengan menggunakan persamaan (14) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Var}(d_{YX}) &= \frac{4 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k n_{ij} (N_{ij}^+ + M_{ij}^+ - N_{ij}^- - M_{ij}^-)^2}{\left[ n^2 - \sum_{j=1}^k C_j^2 \right]^2} \\ &= \frac{4(333362)}{\left[ 140^2 - (9^2 + 58^2 + 65^2 + 8^2) \right]^2} \\ &= 0,0095 \end{aligned}$$

Setelah dilakukan perhitungan untuk mencari nilai variansi dari  $d_{YX}$ , maka dapat dilanjutkan dengan melakukan pengujian korelasi Somers'd  $d_{YX}$  untuk mengetahui apakah secara statistik hubungan yang terjadi antara kedua variabel bermakna atau tidak. Berikut adalah pengujian signifikansi dari korelasi Somers'd.

Hipotesis:

Pada penelitian ini, hipotesis yang digunakan untuk pengujian korelasi Somers'd adalah:

$$H_0 : \Delta_{YX} = 0$$

(Tidak terdapat hubungan antara fasilitas asrama dengan tingkat kenyamanan siswa-siswi tinggal di asrama)

$$H_1 : \Delta_{YX} \neq 0$$

(Terdapat hubungan antara fasilitas asrama dengan tingkat kenyamanan siswa-siswi tinggal di asrama)

Taraf Signifikansi:

Taraf signifikansi ( $\alpha$ ) yang digunakan pada pengujian ini adalah sebesar 5% atau sama dengan 0,05.

Statistik Uji:

Statistik uji pada pengujian analisis korelasi Somers'd ini menggunakan persamaan (15) sebagai berikut:

$$z = \frac{d_{YX}}{\sqrt{\text{var}(d_{YX})}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{0,330}{\sqrt{0,0095}} \\ &= 3,386 \end{aligned}$$

Daerah Kritis:

Daerah kritis pada pengujian ini adalah menolak  $H_0$  apabila  $z_{hitung} > z_{tabel}$ .

Dimana:

$$\begin{aligned} z_{tabel} &= z\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= z\left(\frac{0,05}{2}\right) = 1,96 \end{aligned}$$

Keputusan:

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan, dapat diketahui bahwa nilai  $z_{hitung}$  yang diperoleh sebesar 3,386 dan lebih besar dari  $z_{tabel}$  yaitu 1,96. Sehingga dapat diputuskan untuk menolak  $H_0$ .

Kesimpulan:

Setelah pengambilan keputusan, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa terdapat hubungan antara fasilitas asrama dengan tingkat kenyamanan siswa-siswi tinggal di asrama.

### e) Analisis Korelasi Somers'd $d_{YX}$ untuk Variabel Kualitas Makanan dengan Tingkat Kenyamanan Siswa-siswi

Dalam melakukan analisis korelasi Somers'd, maka data yang telah diperoleh dibentuk menjadi suatu tabel kontingensi yang terdapat pada Tabel 8. Sebelum dilakukan perhitungan untuk mencari koefisien korelasi Somers'd  $d_{YX}$ , maka perlu melakukan perhitungan untuk mencari nilai konkordan dan diskordan. Untuk mencari nilai konkordan dapat menggunakan persamaan (1) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{k-1} n_{ij} \sum_{p=i+1}^r \sum_{q=j+1}^k n_{pq} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 n_{ij} N_{ij}^+ \\ &= n_{11}N_{ij}^+ + n_{12}N_{ij}^+ + n_{13}N_{ij}^+ + n_{21}N_{ij}^+ + n_{22}N_{ij}^+ \\ &\quad + n_{23}N_{ij}^+ + n_{31}N_{ij}^+ + n_{32}N_{ij}^+ + n_{33}N_{ij}^+ \\ &= 595 + 497 + 22 + 194 + 806 + 99 + 42 + 490 + 210 \\ &= 2955 \end{aligned}$$

Setelah dilakukan perhitungan untuk mencari nilai konkordan, maka langkah selanjutnya mencari nilai diskordan. Untuk mencari nilai diskordan dapat menggunakan persamaan (3) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=2}^k n_{ij} \sum_{p=i+1}^r \sum_{q=1}^{j-1} n_{pq} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^4 n_{ij} N_{ij}^- \\ &= n_{12}N_{ij}^- + n_{13}N_{ij}^- + n_{14}N_{ij}^- + n_{22}N_{ij}^- + n_{23}N_{ij}^- \\ &\quad + n_{24}N_{ij}^- + n_{32}N_{ij}^- + n_{33}N_{ij}^- + n_{34}N_{ij}^- \end{aligned}$$



$$= 42 + 108 + 114 + 52 + 351 + 0 + 35 + 42 + 60$$

$$= 804$$

Langkah selanjutnya adalah menghitung nilai koefisien korelasi Somers'd  $d_{YX}$  dengan menggunakan persamaan (5).

$$d_{YX} = \frac{2[K - D]}{n^2 - \sum_{j=1}^k C_j^2}$$

$$= \frac{2[2955 - 804]}{140^2 - (11^2 + 55^2 + 62^2 + 12^2)}$$

$$= 0,345$$

### Interpretasi Koefisien Korelasi

Berdasarkan hasil perhitungan koefisien korelasi yang telah dilakukan dapat diketahui bahwa besar korelasi yang terjadi pada variabel kualitas makanan yang diberikan oleh pihak asrama dengan variabel tingkat kenyamanan siswa-siswi tinggal diasrama adalah sebesar 0,345. Berdasarkan nilai koefisien korelasi tersebut dapat disimpulkan bahwa hubungan antara variabel kualitas makanan yang diberikan oleh pihak asrama dengan variabel tingkat kenyamanan siswa-siswi tinggal di asrama rendah tapi pasti. Jenis korelasinya adalah korelasi positif dan memiliki hubungan yang searah atau berbanding lurus. Sehingga dapat disimpulkan bahwa semakin baik kualitas makanan yang diberikan oleh asrama, maka siswa-siswi akan merasa semakin nyaman untuk tinggal di asrama.

Setelah melakukan perhitungan untuk mencari nilai koefisien korelasi Somers'd, maka perlu dilakukan pengujian korelasi Somers'd untuk mengetahui apakah secara statistik hubungan antara kedua variabel tersebut bermakna atau tidak. Akan tetapi, sebelum dilakukan pengujian perlu dicari nilai variansi dari  $d_{YX}$  terlebih dahulu dengan menggunakan persamaan (14) sebagai berikut:

$$Var(d_{YX}) = \frac{4 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k n_{ij} (N_{ij}^+ + M_{ij}^+ - N_{ij}^- - M_{ij}^-)^2}{\left[ n^2 - \sum_{j=1}^k C_j^2 \right]^2}$$

$$= \frac{4(339874)}{\left[ 140^2 - (11^2 + 55^2 + 62^2 + 12^2) \right]^2}$$

$$= 0,0087$$

Langkah selanjutnya adalah melakukan pengujian korelasi Somers'd  $d_{YX}$  sebagai berikut:

Hipotesis:

Pada penelitian ini, hipotesis yang digunakan untuk pengujian adalah sebagai berikut:

$$H_0 : \Delta_{YX} = 0$$

(Tidak terdapat hubungan antara kualitas makanan yang diberikan oleh pihak asrama dengan tingkat kenyamanan siswa-siswi tinggal di asrama)

$$H_1 : \Delta_{YX} \neq 0$$

(Terdapat hubungan antara kualitas makanan yang diberikan oleh pihak asrama dengan tingkat kenyamanan siswa-siswi tinggal di asrama)

Taraf Signifikansi:

Taraf signifikansi ( $\alpha$ ) yang digunakan pada pengujian ini adalah sebesar 5% atau sama dengan 0,05.

Statistik Uji:

Statistik uji pada pengujian korelasi Somers'd ini menggunakan persamaan (15) sebagai berikut:

$$z = \frac{d_{YX}}{\sqrt{\text{var}(d_{YX})}}$$

$$= \frac{0,345}{\sqrt{0,0087}} = 3,699$$

Daerah Kritis:

Pada pengujian korelasi Somers'd ini memiliki daerah kritis yaitu menolak  $H_0$  apabila  $z_{hitung} > z_{tabel}$ .

Dimana:

$$z_{tabel} = z\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= z\left(\frac{0,05}{2}\right)$$

$$= 1,96$$

Keputusan:

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan, dapat diketahui bahwa nilai  $z_{hitung}$  yang diperoleh sebesar 3,699 dan lebih besar dari  $z_{tabel}$  yaitu 1,96. Sehingga dapat diputuskan untuk menolak  $H_0$ .

Kesimpulan:

Setelah pengambilan keputusan, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa terdapat hubungan antara kualitas makanan dengan tingkat kenyamanan siswa tinggal di asrama.

## KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa Dari hasil pengujian signifikansi korelasi Somers'd  $d_{YX}$  dapat diketahui bahwa terdapat hubungan antara fasilitas asrama dengan tingkat kenyamanan siswa-siswi serta terdapat hubungan antara kualitas makanan dengan tingkat kenyamanan siswa-siswi. Untuk hubungan antara fasilitas asrama dengan tingkat kenyamanan siswa-siswi dan kualitas makanan dengan tingkat kenyamanan siswa-siswi diperoleh nilai koefisien korelasi Somers'd berturut-turut sebesar 0,330 dan 0,345. Berdasarkan nilai koefisien korelasi tersebut dapat disimpulkan bahwa hubungan antara fasilitas asrama dengan tingkat kenyamanan siswa-siswi dan kualitas makanan dengan tingkat kenyamanan siswa-siswi rendah tapi pasti. Jenis korelasi dari kedua analisis tersebut adalah korelasi positif dan memiliki hubungan yang searah atau berbanding lurus.

## DAFTAR PUSTAKA

Azwar, Saufuddin. 1997. *Reliabilitas dan Validitas*, Edisi 3. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

- Furqon. 2002. *Statistika Terapan untuk Penelitian*. Bandung: Alfabeta.
- Goktas, Atila dan Isci Oznur. 2011. *A Comparison of the Most Commonly Used Measures of Association for Doubly Ordered Square Contingency Tables Via Simulation*. Metodoloski zvezki Faculty Sciences University of Mugla, Vol. 8, No.1 17-37.
- Hasan, Iqbal. 2006. *Analisis Data Penelitian dengan Statistik*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Nugroho, Sigit, Akbar, Syahrul dan Vusvitasari, Resi. 2008. *Kajian Hubungan Koefisien Korelasi Pearson ( $r$ ), Spearman-rho ( $\rho$ ), Kendall-Tau ( $\tau$ ), Gamma ( $G$ ) dan Somers ( $d_{YX}$ )*. Jurnal Gradien Vol. 4 No. 2: 372-381.
- Priyatno, Duwi. 2009. *SPSS untuk Analisis Korelasi, Regresi dan Multivariate*. Yogyakarta: Gaya Media.
- Siegel, Sidney dan J, Castellan Jr. 1988. *Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences*. Singapura: McGraw-Hill International Edition.
- Sugiyono. 2010. *Statistika untuk Penelitian*. Bandung: Alfabeta.

**IDENTIFIKASI STRUKTUR DASAR SMARANDACHE NEAR-RING**  
*Identification of Basic Structure on Smarandache Near-Ring*

**YOHANA YUNET BAKARBESSY<sup>1</sup>, HENRY W. M. PATTY<sup>2</sup>, ELVINUS R. PERSULESSY<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

<sup>2,3</sup>Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Maluku  
e-mail: henrywmpatty81@gmail.com

**ABSTRAK**

Penelitian ini membahas identifikasi struktur-struktur tersebut melalui definisi dan teorema dengan tahapan sebagai berikut : mengidentifikasi struktur ring dan perkembangannya seperti lapangan, near-ring dan near-field, mengidentifikasi struktur dasar Smarandache near-ring yang dibangun oleh near-ring dengan himpunan bagian sejatinya near-field, mengidentifikasi struktur dasar Smarandache near-ring lainnya berdasarkan perkembangan struktur dasar Smarandache near-ring. Hasil penelitian menunjukkan bahwa struktur Smarandache near-ring dapat juga teridentifikasi lewat himpunan yang merupakan Grup near-ring atas near-field  $Z_2$  atau  $Z_p$  lainnya.

**Kata kunci:** *near-field, near-ring, Smarandache near-ring.*

**PENDAHULUAN**

Dalam salah satu klasifikasi aljabar yaitu aljabar abstrak, dipelajari struktur aljabar seperti grup dan ring yang didefinisikan dan diajarkan secara aksiomatis. Seiring berjalannya waktu, struktur grup maupun struktur ring terus mengalami perkembangan. Terlihat ketika aksioma-aksioma lain ditambahkan atau bahkan dilepas dari aksioma pembentukan struktur grup maupun ring maka muncul struktur aljabar baru. Misalnya dari grup, dikembangkan menjadi semigrup, sedangkan dari ring dikembangkan menjadi semiring juga lapangan (*field*).

Selain semiring dan lapangan, jika sifat komutatif terhadap  $+$  dan sifat distributif kiri dilepas dari syarat terbentuknya ring, maka akan muncul struktur baru yang disebut "*Near-ring*". Hal ini membuat ada beberapa perbedaan sifat antara *near-ring* dan ring, sehingga kajian tentang *near-ring* tetap menjadi topik yang menarik untuk diteliti.

Dalam perkembangannya, studi tentang *near-ring* tidak terlepas dari *near-field*, karena *near-field* dibentuk dari penambahan sifat identitas dan invers pada operasi pergandaan di *near-ring* sehingga *near-ring* dan *near-field* masing-masing memiliki karakteristik yang khusus.

Selanjutnya, jika dipunyai suatu *near-ring* dengan himpunan bagiannya yang *near-field* akan membuat

struktur *near-ring* tersebut memiliki sifat atau karakteristik yang dikenal dengan nama *Smarandache near-ring*. Jadi, secara aljabar suatu himpunan  $N$  merupakan *Smarandache near-ring* jika memenuhi  $(N, +, \cdot)$  *near-ring* dan  $A \subset N$ , dengan  $(A, +, \cdot)$  *near-field*.

Berdasarkan uraian di atas, maka peneliti merasa tertarik untuk mempelajari dan membahas lebih dalam struktur dasar dari *Smarandache near-ring*.

**TINJAUAN PUSTAKA**

Dalam perkembangan aljabar abstrak, Florentin Smarandache menyusun konsep struktur aljabar khusus, yaitu suatu himpunan yang memiliki himpunan bagian sejati dengan struktur yang diperluas. Seperti konsep semigrup khusus yang membicarakan tentang semigrup dengan himpunan bagian sejatinya grup, konsep ring khusus yang membicarakan tentang ring dengan himpunan bagian sejatinya lapangan (Florentin Smarandache, 2000).

Oleh Padilla (1998) beberapa konsep ini diikuti dan diperkenalkan dengan nama struktur aljabar Smarandache, yang juga membicarakan konsep semigrup khusus yang kemudian diperkenalkan dengan nama

Smarandache semigrup, juga konsep ring khusus yang diperkenalkan dengan nama Smarandache ring.

Setelah menggabungkan konsep Smarandache ring dengan konsep ring, Vasantha Kandasamy kemudian memperkenalkan beberapa konsep baru dalam Smarandache ring yang sama sekali tidak dibahas oleh Padilla, dan menuangkannya dalam buku yang berjudul "Smarandache Ring" (W.B.V.Kandasamy, 2002).

Di tahun yang sama, Kandasamy kemudian menyusun lagi konsep *Smarandache near-ring* yang idenya berasal dari konsep Smarandache ring. Konsep ini berisi *near-ring* dengan himpunan bagian sejatinya *near-field*. *Near-ring* dan *near-field* masing-masing adalah salah satu perkembangan struktur ring dan lapangan. Oleh Kandasamy, konsep *Smarandache near-ring* diuraikan melalui beberapa definisi dan contoh.

Berdasarkan sumber tersebut dan didukung beberapa literatur lainnya, peneliti mencoba menyusun penelitian tentang identifikasi struktur dasar *Smarandache near-ring*.

#### Definisi 1 (*Near-ring*)

Diberikan himpunan  $N \neq \emptyset$ . Pada  $N$  didefinisikan operasi-operasi biner "+" dan ".". Himpunan  $N$  disebut *near-ring* terhadap kedua operasi biner tersebut, jika memenuhi :

- i)  $(N, +)$  adalah grup.
- ii)  $(N, \cdot)$  adalah semigrup.
- iii) Distributif Kanan

$$(\forall a, b, c \in N)(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Himpunan  $N$  terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan padanya disebut *near-ring* dan dinotasikan dengan  $(N, +, \cdot)$ .

#### Contoh 1

Diberikan  $(G, +)$  grup. Pada  $G$  didefinisikan operasi "." sebagai berikut

$$(\forall a, b \in G) a \cdot b = a$$

Dapat ditunjukkan bahwa  $(G, +, \cdot)$  merupakan *near-ring*.

#### Definisi 2 (*near-ring* abelian)

Suatu *near-ring*  $N$  dikatakan *near-ring* abelian jika  $N$  memenuhi sifat komutatif terhadap operasi "+", yaitu

$$(\forall a, b \in N) a + b = b + a$$

#### Contoh 2

Telah diketahui  $M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$  terhadap operasi penjumlahan matriks biasa merupakan grup abelian dan  $(M_{2 \times 2}, +, \cdot)$  memenuhi aksioma pembentukan *near-ring*, maka diperoleh  $(M_{2 \times 2}, +, \cdot)$  merupakan *near-ring* abelian.

#### Definisi 3 (*near-ring* distributif)

Suatu *near-ring*  $N$  dikatakan *near-ring* distributif jika  $N$  memenuhi sifat distributif kiri, yaitu

$$(\forall a, b, c \in N) a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

#### Contoh 3

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  merupakan *near-ring* distributif dengan "+" dan "." adalah operasi penjumlahan dan pergandaan pada himpunan  $\mathbb{Z}$ .

#### Definisi 4 (*near-ring* komutatif)

Suatu *near-ring*  $N$  dikatakan *near-ring* komutatif jika  $N$  memenuhi sifat komutatif terhadap operasi ".", yaitu

$$(\forall a, b \in N) a \cdot b = b \cdot a$$

#### Contoh 4

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  merupakan *near-ring* komutatif dengan "+" dan "." berturut-turut adalah operasi penjumlahan dan pergandaan pada himpunan  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ , dan  $\mathbb{C}$ .

#### Definisi 5

Diberikan  $(N, +, \cdot)$  *near-ring*.

- i) Elemen  $e \in N$  disebut elemen satuan kiri terhadap operasi pergandaan jika

$$(\forall a \in N) ea = a$$

- ii) Elemen  $e \in N$  disebut elemen satuan kanan terhadap operasi pergandaan jika

$$(\forall a \in N) ae = a$$

- iii) Elemen  $e \in N$  disebut elemen satuan terhadap operasi pergandaan jika

$$(\forall a \in N) ea = ae = a$$

#### Definisi 6 (*near-ring* dengan elemen satuan)

Suatu *near-ring*  $N$  dikatakan *near-ring* dengan elemen satuan jika  $N$  memuat elemen satuan terhadap operasi pergandaan, yaitu

$$(\exists e \in N) (\forall a \in N) ae = ea = a$$

#### Contoh 5

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  merupakan *near-ring* dengan elemen satuan 1.

#### Definisi 7

Misalkan  $(N, +, \cdot)$  *near-ring* dengan elemen satuan  $e$  dan  $a \in N$ .

- i) Elemen  $s \in N$  disebut invers kiri dari  $a$  terhadap operasi pergandaan jika

$$sa = e$$

- ii) Elemen  $s \in N$  disebut invers kanan dari  $a$  terhadap operasi pergandaan jika

$$as = e$$

- iii) Elemen  $s \in N$  disebut invers dari  $a$  terhadap operasi pergandaan jika

$$sa = as = e$$

Invers dari  $a$  terhadap operasi pergandaan dinotasikan dengan  $a^{-1}$ .

#### Definisi 8 (*near-field*)

*Near-ring*  $(M, +, \cdot)$  disebut *near-field*, jika

- i)  $(M, +, \cdot)$  adalah *near-ring* dengan elemen satuan
- ii) Setiap elemen tak nol di  $M$  mempunyai invers terhadap pergandaan di  $M$

$$(\forall a \in M) [a \neq 0 \Rightarrow (\exists a^{-1} \in M) aa^{-1} = a^{-1}a = e]$$

#### Contoh 6

Diberikan  $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  merupakan *near-field* terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan untuk setiap  $a, b \in \mathbb{R}^2$  sebagai berikut :

$$i) (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$ii) (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)$$

**Definisi 9 (subnear-ring)**

Diberikan  $(N, +, \cdot)$  near-ring dan  $(S, +)$  adalah subgrup dari  $N$ .  $S$  disebut subnear-ring jika memenuhi  $S \cdot S \subseteq S$  atau  $(\forall a, b \in S) a \cdot b \in S$

**Contoh 7**

Diberikan  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  near-ring.  $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$  merupakan subnear-ring dari  $\mathbb{Z}$ .

**Definisi 10**

Diberikan  $(N, +, \cdot)$  near-ring dan  $I$  adalah subgrup normal dari  $N$ .

- i)  $I$  disebut ideal kanan dari  $N$  jika memenuhi  $I \cdot N \subseteq I$  atau  $(\forall i \in I) (\forall a \in N) i \cdot a \in I$
- ii)  $I$  disebut ideal kiri dari  $N$  jika memenuhi  $(\forall a, b \in N) (\forall i \in I) a(b + i) - ab \in I$
- iii)  $I$  disebut ideal dari  $N$  jika  $I$  merupakan ideal kanan dan ideal kiri dari  $N$ .

**Definisi 11**

Diberikan  $(G, \cdot)$  grup dan himpunan  $N \neq \emptyset$ . Dengan himpunan  $N$  adalah near-ring dengan elemen satuan dan komutatif atau himpunan  $N$  adalah near-field.  $NG$  adalah Grup near-ring dengan semua penjumlahan biasa yang berhingga dengan bentuk  $\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i$  dengan  $\alpha_i \in N$  dan  $g_i \in G$  jika memenuhi :

- i)  $\sum \alpha_i g_i = \sum \beta_i g_i \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i$ , dengan  $\alpha_i, \beta_i \in N$
- ii)  $\sum \alpha_i g_i + \sum \beta_i g_i = \sum (\alpha_i + \beta_i) g_i$
- iii)  $\alpha_i g_i = g_i \alpha_i$
- iv)  $(\sum \alpha_i g_i)(\sum \beta_j h_j) = \sum [(\sum \alpha_i \beta_j) g_i h_j]$

Diasumsikan  $1 \cdot g = g, \forall g \in G$

**Contoh 8**

Diberikan  $Z_2 = \{0, 1\}$  near-field dan  $G = \langle g | g^2 = 1 \rangle$ .  $Z_2 G$  adalah grup near-ring dari grup  $G$  atas near-field  $Z_2$ .

**Definisi 12**

Diberikan  $\{N_i\}$  adalah keluarga near-ring ( $i \in I, I = \{1, 2, \dots, r\}$ ).  $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_r = \times N_i$  yang didefinisikan terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan disebut direct product atas near-ring  $N_i$ .

**Contoh 9**

Diberikan  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  merupakan ring.  $N = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(z, z) | z \in \mathbb{Z}\}$  terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan merupakan near-ring. Maka  $N$  direct product atas near-ring  $\mathbb{Z}$ .

**Penyelesaian:**

Karena  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  merupakan ring, jelas  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  juga merupakan near-ring sehingga  $N = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(z, z) | z \in \mathbb{Z}\}$  merupakan near-ring. Maka  $N$  direct product atas near-ring  $\mathbb{Z}$ .

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

**Smarandache Near-ring**

**Definisi 13**

Diberikan himpunan  $N \neq \emptyset$  dengan  $A$  himpunan bagian sejati dari  $N$  atau  $(A \subset N$  dan  $A \neq N)$ . Pada  $N$  didefinisikan operasi-operasi biner "+" dan "·".

Himpunan  $N$  disebut Smarandache near-ring ( $S$ -near-ring) terhadap kedua operasi biner tersebut, jika memenuhi :

- i)  $(N, +, \cdot)$  adalah near-ring.
  - a.  $(N, +)$  adalah grup.
  - b.  $(N, \cdot)$  adalah semigrup.
  - c. Distributif Kanan  $(\forall a, b, c \in N)(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- ii)  $(A, +, \cdot)$  adalah near-field.
  - a.  $(A, +)$  adalah grup.
  - b.  $(A \setminus \{0\}, \cdot)$  adalah grup.
  - c. Distributif Kanan  $(\forall a, b, c \in A)(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

**Contoh 10**

Diberikan  $(Z_n, +, \cdot)$  ring dan  $(Z_2, +, \cdot)$  near-field terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan modulo  $n$ . Himpunan  $Z_n$  dengan  $n > 2$  merupakan  $S$ -near-ring dengan  $Z_2$  merupakan himpunan bagian sejati dari  $Z_n$  atau  $(Z_2 \subset Z_n$  dan  $Z_2 \neq Z_n)$ .

**Penyelesaian:**

Jelas  $Z_2 \subset Z_n$  dan  $Z_2 \neq Z_n$ , dengan  $n > 2$ .

i)  $(Z_n, +, \cdot)$  near-ring  
 Karena  $(Z_n, +, \cdot)$  ring, maka  $(Z_n, +, \cdot)$  juga near-ring sehingga  $Z_n$  dengan  $n > 2$  merupakan near-ring.

ii)  $(Z_2, +, \cdot)$  near-field

I.  $(Z_2, +)$  grup

Tabel 1  $(Z_2, +)$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Berdasarkan Tabel 1 terlihat bahwa  $(Z_2, +)$  memenuhi semua aksioma grup dengan elemen netral 0.

II.  $(Z_2 \setminus \{0\}, \cdot)$  grup

Tabel 2  $(Z_2 \setminus \{0\}, \cdot)$

·	1
1	1

Berdasarkan Tabel 2 terlihat bahwa  $(Z_2 \setminus \{0\}, \cdot)$  memenuhi semua aksioma grup dengan elemen satuan 1.

III. Distributif kanan

Ambil sebarang  $a, b, c \in Z_2$

Akan ditunjukkan  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Untuk sebarang  $a, b, c \in Z_2$ , semua kemungkinan yang muncul adalah :

- $a = 0; b = 0; c = 0$        $a = 1; b = 0; c = 0$
- $a = 0; b = 0; c = 1$        $a = 1; b = 1; c = 0$
- $a = 0; b = 1; c = 0$        $a = 1; b = 0; c = 1$
- $a = 0; b = 1; c = 1$        $a = 1; b = 1; c = 1$

- i. Ambil  $a = 0; b = 0; c = 0$   
 $(a + b) \cdot c = (0 + 0) \cdot 0$   
 $= 0 \cdot 0$   
 $= 0$   
 $= 0 + 0$   
 $= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0$   
 $= a \cdot c + b \cdot c$
- ii. Ambil  $a = 0; b = 0; c = 1$   
 $(a + b) \cdot c = (0 + 0) \cdot 1$   
 $= 0 \cdot 1$   
 $= 0$   
 $= 0 + 0$   
 $= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1$   
 $= a \cdot c + b \cdot c$
- iii. Ambil  $a = 0; b = 1; c = 0$   
 $(a + b) \cdot c = (0 + 1) \cdot 0$   
 $= 1 \cdot 0$   
 $= 0$   
 $= 0 + 0$   
 $= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0$   
 $= a \cdot c + b \cdot c$
- iv. Ambil  $a = 0; b = 1; c = 1$   
 $(a + b) \cdot c = (0 + 1) \cdot 1$   
 $= 1 \cdot 1$   
 $= 1$   
 $= 0 + 1$   
 $= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1$   
 $= a \cdot c + b \cdot c$
- v. Ambil  $a = 1; b = 0; c = 0$   
 $(a + b) \cdot c = (1 + 0) \cdot 0$   
 $= 1 \cdot 0$   
 $= 0$   
 $= 0 + 0$   
 $= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0$   
 $= a \cdot c + b \cdot c$
- vi. Ambil  $a = 1; b = 1; c = 0$   
 $(a + b) \cdot c = (1 + 1) \cdot 0$   
 $= 0 \cdot 0$   
 $= 0$   
 $= 0 + 0$   
 $= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0$   
 $= a \cdot c + b \cdot c$
- vii. Ambil  $a = 1; b = 0; c = 1$   
 $(a + b) \cdot c = (1 + 0) \cdot 1$   
 $= 1 \cdot 1$   
 $= 1$   
 $= 1 + 0$   
 $= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1$   
 $= a \cdot c + b \cdot c$
- viii. Ambil  $a = 1; b = 1; c = 1$   
 $(a + b) \cdot c = (1 + 1) \cdot 1$   
 $= 0 \cdot 1$   
 $= 0$   
 $= 1 + 1$   
 $= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$   
 $= a \cdot c + b \cdot c$

Berdasarkan I, II, III terbukti  $(Z_2, +, \cdot)$  near field. Berdasarkan i) dan ii), terbukti  $(Z_n, +, \cdot)$  dengan  $n > 2$  merupakan  $S$ -near-ring.

### Smarandache subnear-ring

#### Definisi 14

Diberikan  $(N, +, \cdot)$   $S$ -near-ring. Himpunan  $T \neq \emptyset$  dan  $T$  adalah himpunan bagian sejati dari  $N$ . Himpunan  $T$  disebut Smarandache subnear-ring ( $S$ -subnear-ring) dari  $N$  jika memenuhi:

$(T, +, \cdot)$   $S$ -near-ring, yaitu:

- i)  $(T, +, \cdot)$  adalah near-ring
  - a.  $(T, +)$  adalah grup.
  - b.  $(T, \cdot)$  adalah semigrup.
  - c. Distributif Kanan  
 $(\forall a, b, c \in T)(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- ii)  $S$  himpunan bagian sejati dari  $T$  atau  $(S \subset T$  dan  $S \neq T)$ ,  $S$  near-field.
  - a.  $(S, +)$  adalah grup.
  - b.  $(S \setminus \{0\}, \cdot)$  adalah grup.
  - c. Distributif Kanan  
 $(\forall a, b, c \in S)(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

#### Contoh 11

Diberikan  $Z_2$  near-field,  $S_n$  adalah grup simetrik atas bilangan berhingga  $n$  dan  $H = S_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$  dengan

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \mu_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \rho_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \mu_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \rho_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \mu_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dan  $\rho$  dan  $\mu$  adalah permutasi-permutasi untuk himpunan  $A = \{1, 2, 3\}$ .  $Z_2 S_n$  adalah grup near-ring atas near-field  $Z_2$ . Grup near-ring  $Z_2 S_n$  juga merupakan  $S$ -near ring dan  $Z_2 H$  adalah  $S$ -subnear-ring dengan  $H \subset S_n$  dan  $H \neq S_n$ , serta  $Z_2 \subset Z_2 H$  dan  $Z_2 \neq Z_2 H$ .

#### Penyelesaian:

Jelas  $H \subset S_n$  dan  $H \neq S_n$ .

i)  $(Z_2 S_n, +, \circ)$   $S$ -near ring

Karena  $S_n$  merupakan grup semua permutasi untuk himpunan berhingga  $A$  maka  $S_n$  merupakan grup terhadap pergandaan permutasi. Sehingga berdasarkan contoh 4.1.2. maka  $Z_2 S_n$  merupakan grup near-ring sekaligus  $S$ -near-ring dengan himpunan bagian sejatinya  $Z_2$  yang merupakan near-field.

ii)  $(Z_2 H, +, \circ)$   $S$ -near ring dengan  $Z_2 H \subset Z_2 S_n$

Sebelum dibuktikan  $(Z_2 H, +, \circ)$   $S$ -near ring akan dibuktikan  $H$  merupakan grup terhadap pergandaan permutasi.

I.  $(H, \circ)$  grup

Diberikan himpunan  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $\rho$  dan  $\mu$  adalah permutasi-permutasi untuk himpunan  $A$ .

$H = S_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$  dengan

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \mu_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \rho_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \mu_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \rho_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \mu_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Tabel 3 (H, °)

°	$\rho_0$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
$\rho_0$	$\rho_0$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
$\rho_1$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_0$	$\mu_3$	$\mu_1$	$\mu_2$
$\rho_2$	$\rho_2$	$\rho_0$	$\rho_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_1$
$\mu_1$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\rho_0$	$\rho_1$	$\rho_2$
$\mu_2$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_1$	$\rho_2$	$\rho_0$	$\rho_1$
$\mu_3$	$\mu_3$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_0$

Berdasarkan Tabel 3 terlihat bahwa (H, °) memenuhi semua aksioma grup dengan elemen satuan  $\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

II.  $(Z_2H, +, °)$  S-near-ring

Karena himpunan H merupakan grup terhadap pergandaan permutasi  $\rho$  dan  $\mu$  untuk himpunan  $A = \{1,2,3\}$  maka berdasarkan contoh 4.1.2. maka  $Z_2H$  merupakan grup near-ring sekaligus S-near-ring dengan himpunan bagian sejatinya  $Z_2$  yang merupakan near-field.

Berdasarkan i) dan ii) maka  $Z_2H$  merupakan S-subnear-ring dengan  $Z_2 \subset Z_2H$  dan  $Z_2 \neq Z_2H$ .

Selanjutnya akan dibahas struktur dasar S-near-ring lainnya yaitu Smarandache ideal pada near-ring.

**Smarandache Ideal Pada Near-Ring**

**Definisi 15**

Diberikan  $(N, +, \cdot)$  S-near ring, I adalah subgrup normal dari N dan X near-field pada N.

- a. I disebut Smarandache ideal kanan (S-ideal kanan) dari N jika memenuhi  $I \cdot X \subset I$  atau  $(\forall i \in I)(\forall x \in X) i \cdot x \in I$
- b. I disebut Smarandache ideal kiri (S-ideal kiri) dari N jika memenuhi  $(\forall x, y \in X)(\forall i \in I) x(y + i) - xy \in I$
- c. I disebut Smarandache ideal (S-ideal) dari N jika I merupakan ideal kanan dan ideal kiri dari N.

**Contoh 12**

Diberikan  $Z_2$  near-field,  $M = Z_2 \times Z_9 \times Z_5 = \{(a, b, c) | a \in Z_2, b \in Z_9, c \in Z_5\}$  merupakan S-near-ring dengan operasi penjumlahan dan pergandaan didefinisikan untuk setiap  $a \in Z_2, b \in Z_9, c \in Z_5$  sebagai berikut:

- i.  $(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$
  - ii.  $(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2, c_1 \cdot c_2)$
- dan  $N = Z_2 \times Z_2 \times Z_2 = \{(x, y, z) | x, y, z \in Z_2\}$  near field dengan operasi penjumlahan dan pergandaan didefinisikan untuk setiap  $x, y, z \in Z_2$  sebagai berikut:

- i.  $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
  - ii.  $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2, z_1 \cdot z_2)$
- Dengan  $N \subset M$ .

$O = Z_2 \times Z_2 \times \{0\} = \{(a, b, 0) | a, b \in Z_2\}$  merupakan S-ideal dari M dengan near-field N dengan operasi penjumlahan dan pergandaan didefinisikan untuk setiap  $a, b \in Z_2$  sebagai berikut :

- i.  $(a_1, b_1, 0) + (a_2, b_2, 0) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, 0)$
- ii.  $(a_1, b_1, 0) \cdot (a_2, b_2, 0) = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2, 0)$

**Penyelesaian:**

i)  $(M, +, \cdot)$  S-near-ring

Berdasarkan contoh 4.1.1 maka  $Z_9, Z_5$  merupakan near-ring dengan near-field  $Z_2$  sehingga berdasarkan definisi 4.2.1 maka  $M = Z_2 \times Z_9 \times Z_5$  merupakan S-direct product yang juga adalah S-near-ring terhadap operasi penjumlahan "+" dan pergandaan "·" yang didefinisikan padanya.

ii)  $(N, +, \cdot)$  near-field

I.  $(N, +)$  grup

$N = Z_2 \times Z_2 \times Z_2 = \{(0,1) \times (0,1) \times (0,1)\} = \{(0,0,0), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,1)\}$   
 Berdasarkan perhitungan tabel klasik  $N = Z_2 \times Z_2 \times Z_2$  terhadap operasi penjumlahan terlihat bahwa  $(N, +)$  memenuhi semua aksioma grup dengan elemen netral  $(0,0,0)$ .

II.  $(N \setminus \{0\}, \cdot)$  grup

Tabel 4.  $(N \setminus \{0\}, \cdot)$

$(1,1,1)$	$(1,1,1)$
-----------	-----------

Berdasarkan Tabel 4 terlihat bahwa  $(N \setminus \{0\}, \cdot)$  memenuhi semua aksioma grup dengan elemen satuan  $(1,1,1)$ .

III. Distributif kanan

Karena  $N = Z_2 \times Z_2 \times Z_2$  dengan  $Z_2$  merupakan near-field maka berdasarkan sifat 4.2.1 sifat distributif kanan berlaku pada himpunan N.

iii) O subgrup normal dari N

I. O subgrup N

Karena  $O = Z_2 \times Z_2 \times \{0\}$  dan  $N = Z_2 \times Z_2 \times Z_2$  maka  $O \subset N$ .

Selanjutnya akan dibuktikan himpunan O subgrup N. Ambil sebarang  $a, b \in O$ . Akan ditunjukkan  $a + b^* \in O$ . Karena  $a, b \in O$  maka

$a = (a_1, a_2, 0)$ , dengan  $a_1, a_2 \in Z_2$

$b = (b_1, b_2, 0)$ , dengan  $b_1, b_2 \in Z_2$

Karena  $O = Z_2 \times Z_2 \times \{0\}$  dengan  $Z_2$  merupakan near-field yang jelas juga merupakan near-ring maka berdasarkan pembuktian teorema 4.2.1 i) himpunan O juga merupakan near-ring sehingga himpunan O memiliki invers terhadap operasi "+". Selanjutnya,  $b \in O$  maka b memiliki invers. Misalkan  $b^*$  merupakan invers b sehingga  $b^* \in O$  maka  $b^* = (b^*_1, b^*_2, 0)$ , dengan  $b^*_1, b^*_2 \in Z_2$

Selanjutnya,

$a + b^* = (a_1, a_2, 0) + (b^*_1, b^*_2, 0)$

$= (a_1 + b^*_1, a_2 + b^*_2, 0)$

$= (c_1, c_2, 0) \in O$

dengan  $c_1 = a_1 + b^*_1$  dan  $c_2 = a_2 + b^*_2$ .

II. O subgrup normal dari N

Ambil sebarang  $a \in O$  dan  $b \in N$  Akan ditunjukkan  $b + a + b^* \in O$ .

Karena  $a \in O$  dan  $b \in N$  maka

$a = (a_1, a_2, 0)$ , dengan  $a_1, a_2 \in Z_2$

$b = (b_1, b_2, b_3)$ , dengan  $b_1, b_2, b_3 \in Z_2$

Karena  $b \in N$  dan N merupakan near-field maka b memiliki invers. Misalkan  $b^*$  merupakan invers b

sehingga

$b^* \in N$  maka  $b^* = (b^*_1, b^*_2, b^*_3)$ , dengan  $b^*_1, b^*_2, b^*_3 \in Z_2$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} b + a + b^* &= (b_1, b_2, b_3) + (a_1, a_2, 0) + (b^*_1, b^*_2, b^*_3) \\ &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + 0) + (b^*_1, b^*_2, b^*_3) \\ &= (b_1 + a_1 + b^*_1, b_2 + a_2 + b^*_2, b_3 + b^*_3) \quad (i) \\ &= (b_1 + b^*_1 + a_1, b_2 + b^*_2 + a_2, b_3 + b^*_3) \quad (ii) \\ &= (0 + a_1, 0 + a_2, 0) \\ &= (a_1, a_2, 0) \in O \end{aligned}$$

Karena  $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b^*_1, b^*_2, b^*_3 \in Z_2$  dan  $Z_2$  merupakan *near-field* maka berlaku sifat asosiatif terhadap penjumlahan sehingga berlaku (i) ke (ii).

iv)  $O$   $S$ -ideal kanan dan juga  $S$ -ideal kiri

I.  $O$   $S$ -ideal kanan

$$(\forall a \in O)(\forall b \in N) a \cdot b \in O$$

Ambil sebarang  $a \in O$  dan  $b \in N$ .

Akan ditunjukkan  $a \cdot b \in O$

Karena  $a \in O$  dan  $b \in N$  maka

$$a = (a_1, a_2, 0), \text{ dengan } a_1, a_2 \in Z_2$$

$$b = (b_1, b_2, b_3), \text{ dengan } b_1, b_2, b_3 \in Z_2$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_1, a_2, 0) \cdot (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 b_1, a_2 b_2, 0) \in O \end{aligned}$$

II.  $O$   $S$ -ideal kiri

$$(\forall a, b \in N)(\forall c \in O) a \cdot (b + c) - a \cdot b \in O$$

Ambil sebarang  $a, b \in N$  dan  $c \in O$ .

Akan ditunjukkan  $a \cdot (b + c) - a \cdot b \in O$

Karena  $a, b \in N$  dan  $c \in O$  maka

$$a = (a_1, a_2, a_3), \text{ dengan } a_1, a_2, a_3 \in Z_2$$

$$b = (b_1, b_2, b_3), \text{ dengan } b_1, b_2, b_3 \in Z_2$$

$$c = (c_1, c_2, 0), \text{ dengan } c_1, c_2 \in Z_2$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) - a \cdot b &= (a_1, a_2, a_3) \cdot [(b_1, b_2, b_3) + (c_1, c_2, 0)] \\ &\quad - (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + 0) - (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3) \\ &= (a_1(b_1 + c_1), a_2(b_2 + c_2), a_3 b_3) - (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3) \\ &= (a_1 b_1 + a_1 c_1, a_2 b_2 + a_2 c_2, a_3 b_3) - (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3) \\ &= (a_1 b_1 + a_1 c_1 - a_1 b_1, a_2 b_2 + a_2 c_2 - a_2 b_2, a_3 b_3 - a_3 b_3) \\ &= (a_1 b_1 - a_1 b_1 + a_1 c_1, a_2 b_2 - a_2 b_2 + a_2 c_2, a_3 b_3 - a_3 b_3) \\ &= (0 + a_1 c_1, 0 + a_2 c_2, 0) \\ &= (a_1 c_1, a_2 c_2, 0) \in O \end{aligned}$$

Berdasarkan **i), ii), iii), iv)** maka terbukti  $O = Z_2 \times Z_2 \times \{0\}$  merupakan  $S$ -ideal dari  $M$  dengan *near-field*

## KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan dan uraian pada bab-bab sebelumnya maka diperoleh beberapa kesimpulan antara lain :

1. Suatu struktur *Smarandache near-ring* tidak hanya teridentifikasi oleh suatu himpunan yang *near-ring* dengan himpunan bagian sejatinya yang *near-field* tetapi juga melalui suatu himpunan yang merupakan grup *near-ring* atas *near-field*  $Z_2$  atau  $Z_p$  yang lainnya.
2. Suatu struktur *Smarandache subnear-ring* teridentifikasi oleh bukan hanya himpunan bagian tapi himpunan bagian sejati dari suatu himpunan yang merupakan *Smarandache near-ring* dengan himpunan

bagian sejati tersebut juga teridentifikasi sebagai struktur *Smarandache near-ring*

3. Untuk mengidentifikasi struktur *Smarandache ideal* pada *near-ring* diperlukan himpunan yang merupakan *S-near-ring* dengan himpunan bagiannya yang bukan hanya merupakan subgrup normal tapi juga *near-field* dan memenuhi aksioma pembentukan *Smarandache Ideal*.

## DAFTAR PUSTAKA

- Dummit, D. S., R. M. Foote. 1999. *Abstract Algreba*, Second Edition, Jhon Wiliam. Inc, N. Y.p
- Kandasamy, W. B. V. 2002. *Smarandache Near-rings*. American Research Press. Rehoboth.
- Kandasamy, W. B. V. 2002. *Smarandache Rings*. American Research Press.Rehoboth.
- Padilla, R. 1998. *The Smarandache Algebraic Structures*. Bulletin of Pure and Applied Sciences. Delhi.
- Smarandache, F. 2000. *Special Algebraic Structures*. Collected papers. Abaddaba. Oradea.

**PENGUNAAN METODE ANALISIS DISKRIMINAN, REGRESI LOGISTIK,  
NEURAL NETWORK, DAN MARS UNTUK ANALISIS PERMASALAHAN  
KLASIFIKASI DATA HBAT DAN DATA IRIS**

*The Applications of Discriminant Analysis, Logistic Regression, Neural Network, and MARS  
to analyze data classification of HBAT and IRIS*

**FERRY KONDO LEMBANG<sup>1</sup>, DORTEUS LODEWYIK RAHAKBAUW<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup> Staf Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

e-mail: ferrykondolembang@gmail.com<sup>1</sup>, lodewyik@gmail.com<sup>2</sup>

**ABSTRAK**

Masalah mendasar dalam permasalahan klasifikasi umumnya berkaitan dengan ketidakstabilan performansi atau kebaikan model mencakup aspek interpretasi model yang didapat dikaitkan dengan hubungan antara prediktor (*input*) dan respon (*output*), serta aspek ketepatan klasifikasi terutama pada objek baru yang tidak dimasukkan dalam pembentukan model (data *testing*). Analisis Diskriminan dan Regresi Logistik merupakan dua model klasik dari beberapa metode statistika yang digunakan untuk mengatasi masalah tersebut. Prinsip dasar kedua model klasik dalam permasalahan klasifikasi adalah adanya asumsi yang harus dipenuhi berkaitan dengan skala pengukuran prediktor, keterkaitan antara prediktor, dan distribusi bersama dari prediktor. Agar asumsi dari model klasik ini tidak menjadi syarat utama dalam masalah klasifikasi maka dikembangkan metode klasifikasi modern yaitu *Neural Network* (NN) dan MARS. Data HBAT dan data IRIS akan digunakan dalam penelitian ini untuk menilai kekonsistenan dan performansi model klasifikasi klasik dan model klasifikasi modern. Hasil empirik menunjukkan bahwa kekonsistenan performansi model klasifikasi klasik lebih baik daripada model klasifikasi modern.

**Keywords:** Analisis Diskriminan, Regresi Logistik, MARS, *Neural Network* Performansi, ketepatan klasifikasi.

**PENDAHULUAN**

Secara umum permasalahan utama dalam penelitian metode statistika dengan pendekatan regresi adalah mendapatkan model terbaik. Permasalahan klasifikasi dalam statistika juga memiliki permasalahan yang sama. Namun dalam masalah klasifikasi bukan hanya bagaimana mendapatkan model terbaik, tetapi juga menilai performansi atau kebaikan model mencakup interpretasi model yang didapat dikaitkan dengan hubungan antara variabel prediktor (*input*) dan respon (*output*), serta aspek ketepatan klasifikasi terutama pada objek baru yang tidak dimasukkan dalam pembentukan model (data *testing*). Ada beberapa metode statistika yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan klasifikasi, antara lain Analisis Diskriminan dan Regresi Logistik. Pada Analisis Diskriminan akan diperoleh suatu fungsi linear atau kuadrat yang dikenal dengan fungsi diskriminan yang dapat digunakan untuk

mengelompokkan obyek. Sedangkan pada Regresi Logistik akan diperoleh suatu model logistik yang digunakan untuk menjelaskan hubungan antara variabel prediktor dan variabel respon yang bersifat dikotomis, serta untuk mengelompokkan obyek ke dalam salah satu dari dua kategori respon. Kedua metode statistika ini dalam beberapa *literature* klasifikasi sering disebut sebagai model klasik. Metode-metode ini mempunyai beberapa asumsi yang harus dipenuhi berkaitan dengan skala pengukuran prediktor, keterkaitan antara prediktor, dan distribusi bersama dari prediktor.

Salah satu metode klasifikasi yang berkembang dari kelompok *machine learning* adalah *Neural Network* (NN), Model ini tidak mensyaratkan skala pengukuran dan distribusi tertentu dari prediktor atau input dalam terminologi NN. Secara umum, ada dua kelompok besar dalam NN dikaitkan dengan ada tidaknya respon, yaitu *supervised* dan *unsupervised* NN. Dalam kasus analisis klasifikasi ini, NN yang digunakan termasuk dalam

kelompok *supervised NN*, karena proses pembelajarannya (optimasi fungsi) terawasi oleh suatu respon (output klasifikasi). Metode klasifikasi lain yang dikembangkan dari pendekatan nonparametrik, khususnya spline adalah MARS (*Multivariate Adaptive Regression Spline*). Dalam beberapa *literature* klasifikasi, kedua model ini seringkali disebut sebagai bagian dari model klasifikasi modern. Pada penelitian Mulyono (2004) model ANN dan MARS mampu menghilangkan misklasifikasi dan meminimalkan kesalahan pengklasifikasian dan kemudian membandingkan Analisis Diskriminan dengan metode ANN dan MARS.

Tertarik dengan penelitian diatas maka tujuan dari paper ini adalah menerapkan dan membandingkan Analisis Diskriminan, Regresi Logistik, NN dan MARS pada dua data, yaitu data HBT dan data IRIS dengan melihat performansi keempat metode untuk pengklasifikasian. Keempat metode tersebut akan diaplikasikan dengan menggunakan paket statistika yang menyediakan fasilitas untuk analisis data dengan metode-metode tersebut, khususnya R dan SPSS.

Beberapa metode statistika yang akan dipakai dalam penelitian ini akan dijelaskan secara singkat dalam bagian ini.

### 1.1 Analisis Diskriminan

Analisis Diskriminan atau *discriminant analysis* adalah bagian dari analisis multivariat yang bertujuan untuk memisahkan beberapa kelompok data yang sudah terkelompokkan dengan cara membentuk fungsi diskriminan. Analisis Diskriminan merupakan suatu alat dalam analisis data, jika variabel tak bebas merupakan kategori (nominal atau ordinal, bersifat kualitatif) sedangkan variabel bebas sebagai prediktor merupakan metrik (interval atau rasio, bersifat kuantitatif) (Supranto, 2004). Fungsi ini selanjutnya dapat juga digunakan untuk memprediksi group dari suatu objek baru yang diamati (Hair, 1996).

### 1.2 Regresi Logistik

Regresi logistik merupakan metode yang dipergunakan untuk menganalisis hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor. Variabel prediktor yang dipergunakan berupa data kategori atau kontinu dan variabel responnya berupa data data dengan skala nominal atau ordinal (Agresti, 1990). Regresi logistik ini dapat dipergunakan untuk pengklasifikasian sejumlah obyek ke dalam beberapa kelompok Variabel respon  $Y$  yang bersifat random dan dikotomus, yakni bernilai 1 dengan probabilitas  $\pi$  dan bernilai 0 dengan probabilitas  $1 - \pi$ , disebut sebagai *point-binomial* (Lee, 1998).

Model regresi logistik yang dinyatakan sebagai fungsi  $x$  adalah (Hosmer and Lemeshow, 1989) :

$$\pi(x) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x)}$$

Model regresi logistik dengan lebih dari satu variabel prediktor disebut juga model multivariat (Hosmer and Lemeshow, 1989).

Model regresi logistik dengan  $k$  variabel prediktor adalah (Le, 1998) :

$$\pi(x) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k)}$$

### 1.3 MARS

MARS merupakan sebuah pendekatan untuk memodelkan regresi nonparametrik multivariat yang dicetuskan pertama kali oleh Friedman (1991). Model MARS digunakan untuk mengatasi kelemahan RPR yaitu menghasilkan model yang kontinu pada knots. Penentuan knots secara otomatis pada MARS menggunakan algoritma *forward stepwise* dan *backward stepwise* yang didasarkan pada nilai GCV minimum. Model MARS dapat ditulis seperti pada persamaan (1) berikut (Friedman, 1991).

$$\hat{f}(x) = a_0 + \sum_{m=1}^M a_m \prod_{k=1}^{K_m} [s_{km}(x_{v(k,m)} - t_{km})]$$

dimana

- $a_0$  = parameter fungsi basis induk
- $a_m$  = parameter dari fungsi basis ke- $m$
- $M$  = jumlah fungsi basis
- $K_m$  = derajat interaksi
- $s_{km}$  = nilainya  $\pm 1$
- $x_{v(k,m)}$  = variabel prediktor
- $t_{km}$  = nilai knots dari variabel prediktor  $x_{v(k,m)}$

### 1.4 Neural Network (NN)

*Jaringan syaraf tiruan (Neural Network)* adalah suatu sistem komputasi dengan arsitektur dan operasinya diilhami oleh pengetahuan tentang sel syaraf biologis di dalam otak. Arsitektur ini merupakan salah satu representasi buatan dari otak manusia yang selalu mencoba menstimulasi proses pembelajaran pada otak manusia tersebut. *Neural Network* dapat digambarkan sebagai model matematika dan komputasi untuk fungsi aproksimasi *non-linier*, klasifikasi data *cluster* dan regresi nonparametrik atau sebuah simulasi dari koleksi model Syaraf biologis (Hermawan, 2006).

### 1.5 Stepwise pada pengklasifikasian

Metode stepwise merupakan salah satu solusi menyelesaikan masalah pengklasifikasian untuk variabel prediktor yang saling berkorelasi. Tidak semua variabel prediktor yang diduga memiliki pengaruh terhadap variabel respon. Salah satu variabel kadang berkorelasi atau berhubungan dengan variabel prediktor yang lain. Oleh karena itu, cukup memasukkan salah satu variabel ke dalam model karena variabel tersebut dianggap sudah mewakili variabel lainnya. Pemilihan variabel yang akan dimasukkan ke dalam model tentu berdasarkan kriteria-kriteria tertentu, misalnya variabel prediktor yang memiliki korelasi parsial paling besar dengan variabel responnya (Iriawan, 2006). Prosedur stepwise dibuat agar menghasilkan model terbaik. Dalam metode stepwise,

variabel dibuang dan ditambahkan ke model untuk membuat model terbaik

## METODOLOGI

Di dalam penelitian ini digunakan dua data sekunder antara lain, Data HBAAT dan Data IRIS. Pada data HBAAT dipilih variabel prediktor persepsi pelanggan HBAAT pada kualitas produk ( $X_6$ ), aktifitas E-Commerce ( $X_7$ ), *technical support* ( $X_8$ ), *Complaint resolution* ( $X_9$ ), *advertising* ( $X_{10}$ ), *product line* ( $X_{11}$ ), *salesforce image* ( $X_{12}$ ), kompetisi harga ( $X_{13}$ ), Garansi dan klaim ( $X_{14}$ ), produk baru ( $X_{15}$ ), pemesanan dan penagihan ( $X_{16}$ ), fleksibilitas harga ( $X_{17}$ ) serta kecepatan pengiriman ( $X_{18}$ ) dan variabel responnya yaitu *customer intention* yang menjelaskan kemauan pelanggan HBAAT meneruskan kerjasama pada waktu yang akan datang ( $X_{23}$ ). Sedangkan untuk data IRIS terdiri dari empat variabel prediktor, antara lain panjang dan lebar dari PETAL dan SEPAL bunga IRIS, serta kelompok bunga SETOSA, VERSICOLOR, dan VIRGINICA sebagai variabel responnya.

Analisis yang akan dilakukan pada data penelitian ini adalah dilakukan pemodelan dengan menggunakan teknik analisis data antara lain, analisis diskriminan, regresi logistik, MARS dan NN. Dua cara pemodelan yang dilakukan adalah pemodelan dengan semua prediktor (*input*) dan pemodelan dengan prediktor terbaik menggunakan teknik-teknik analisis pada setiap metode. Performansi atau kebaikan mencakup aspek interpretasi model yang didapat dikaitkan dengan hubungan antara prediktor (*input*) dan respon (*output*), serta aspek ketepatan klasifikasi terutama pada objek baru yang tidak dimasukkan dalam pembentukan model (*data testing*). Sebagai langkah awal sebelum dilakukan pemodelan, data dikelompokkan menjadi dua bagian antara lain data untuk pemodelan (*training*) dan evaluasi (*testing*) dengan deskripsi perbandingan data *training* dan *testing* adalah 50:50, 60:40, 70:30, 80:20, dan 40:60.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Analisis data pada paper ini dilakukan dengan metode analisis diskriminan, regresi logistik, MARS dan NN menggunakan software SPSS, Minitab, Mars 2,0, dan OSR.

### 1.6 Analisis data HBAAT

Tabel 1. Hasil ketepatan klasifikasi perbandingan training dan testing data HBAAT

Konsep yang dianalisis	Data (80:20)							
	AD		Regresi Logistik		MARS		NN	
	Training	Testing	Training	Testing	Training	Testing	Training	Testing
Ketepatan	78,8%	85%	80%	80%	75%	80%	80%	80%
Data (70:30)								
Ketepatan	85,7%	70 %	85,7%	66,67%	75%	70%	87,14%	66,67%
Data (60:40)								
Ketepatan	86,7%	62,50%	85%	67,50%	86,67%	70%	88,33%	67,5%
Data (50:50)								
Ketepatan	88%	62%	90%	66%	88%	72%	88%	66%
Data (40:60)								
Ketepatan	85%	68,33%	87,5%	68,33%	82,50%	71,67%	87,5%	71,67%

Secara umum dalam analisis permasalahan klasifikasi biasanya sebagai langkah awal adalah data sekunder yang dipakai perlu dirandom dan kemudian dibagi dalam dua bagian yaitu untuk data training dan testing dengan deskripsi perbandingan yang telah ditentukan. Analisis permasalahan klasifikasi untuk data HBAAT yang telah dirandom menggunakan software SPSS, Minitab, Mars 2,0, dan OSR diperoleh perbandingan training dan testing untuk Analisis Diskriminan (AD), Regresi Logistik, MARS, dan *Neural Network* (NN) pada tabel 1.

### Interpretasi Hasil :

Dari tabel diatas dapat dianalisis data HBAAT untuk masalah klasifikasi perbandingan training dan testing setelah melalui tahap Kriteria pemilihan model terbaik *stepwise* bahwa konsistensi perbandingan data training lebih besar daripada data testing digunakan pendekatan regresi logistik dan NN artinya untuk pembentukan model lebih bagus menggunakan pendekatan regresi logistik dan NN , namun untuk validasi model kedua metode ini kurang baik. Untuk metode Analisis Diskriminan dan MARS tidak memiliki konsistensi, namun terkhusus untuk perbandingan data terbesar pada perbandingan data (80:20) validasi model dengan menggunakan kedua metode ini sangat baik.

Hasil Ketepatan klasifikasi perbandingan data training dan testing diatas didapat dari model terbaik dengan menggunakan kriteria pemilihan model terbaik *stepwise*. Dari metode *stepwise* untuk data random didapat variabel prediktor yang mempengaruhi adalah *Complaint resolution* ( $X_9$ ) dan *salesforce image* ( $X_{12}$ ). Data random yang biasanya dipilih sebagai data acuan untuk perbandingan data yang lain adalah data yang memiliki perbandingan data training terbesar daripada data testing, dalam hal ini adalah perbandingan data (80:20).

### 1.7 Analisis data IRIS

Dengan analisis yang sama dengan data HBAAT, permasalahan klasifikasi untuk data IRIS menggunakan Analisis Diskriminan, Regresi Logistik, MARS, dan *Neural Network* (NN) dengan perbandingan data training dan data testing yang telah di-random. Adapun variabel prediktor yang mempengaruhi untuk perbandingan data training dan testing dianalisis menggunakan kriteria pemilihan model terbaik *stepwise* sama halnya dengan data HBAAT. Dari hasil analisis menggunakan software SPSS, MINITAB, MARS 2.0, dan OSR didapat hasil ketepatan klasifikasi data training dan data testing yang ditunjukkan pada tabel 2 dibawah ini :

Tabel 2. Hasil ketepatan klasifikasi perbandingan training dan testing data IRIS

Konsep yang dianalisis	Data (80:20) n1 = 120, n2 = 30							
	AD		Regresi Logistik		MARS		NN	
	Training	Testing	Training	Testing	Training	Testing	Training	Testing
Ketepatan	99,2%	96,67%	100%	error	95,83%	90%	99,17%	96,67%
Data (70:30) n1 = 105, n2 = 45								
Ketepatan	99%	95,5 %	100%	91,11%	100%	91,1%	98,09%	91,11%
Data (60:40) n1 = 90, n2 = 60								
Ketepatan	98,9%	98,3%	100%	93,33%	96,67%	95%	97,78%	91,67%
Data (50:50) n1 = 75, n2 = 75								
Ketepatan	98,7%	98,67%	100%	94,67%	100%	93,33%	97,33%	97,33%
Data (40:60) n1 = 60, n2 = 90								
Ketepatan	96,7%	95,56%	100%	95,55%	96,67%	95,56%	96,67%	93,33%



### Interpretasi Hasil :

Dari tabel diatas dapat dianalisis data IRIS untuk masalah klasifikasi perbandingan training dan testing setelah melalui tahap Kriteria pemilihan model terbaik *stepwise* bahwa konsistensi perbandingan data training lebih besar daripada data testing dapat disimpulkan baik Analisis Diskriminan, Regresi Logistik, MARS, dan NN memenuhi syarat tersebut. Berarti bisa disimpulkan bahwa model yang didapat dapat dikategorikan sebagai model yang paling baik, diperkuat juga dengan rata-rata nilai training dari masing-masing metode yang didapat lebih besar dari 80 %. Hal ini disebabkan oleh karena dari hasil pemilihan model terbaik yang dilakukan dengan menggunakan metode *stepwise* didapat bahwa semua variabel prediktor dari data IRIS merupakan variabel yang signifikan atau mempengaruhi. Khusus untuk metode regresi logistik nilai ketepatan untuk data training semuanya mencapai 100%. Sehingga apabila dibandingkan keempat metode tersebut berarti metode yang sangat baik dalam menghasilkan model terbaik adalah dengan pendekatan regresi logistik.

Untuk data testing atau validasi model dari keempat metode yang dianalisis bisa disimpulkan juga sangat baik, dengan mengesampingkan data testing untuk metode regresi logistik dimana dari analisis dengan software Minitab diperoleh error. Hal ini disebabkan pada model logit yang didapat baik itu intersep maupun koefisien variabel prediktor menghasilkan nilai yang sangat besar. Perbandingan metode yang paling baik dalam menghasilkan validasi model, dapat terlihat bahwa pendekatan Analisis Diskriminan menjadi pilihan terbaik untuk data IRIS. Dapat diinterpretasikan juga bahwa dari hasil ketepatan klasifikasi data testing pada regresi logistik diperoleh konsistensi linier antara jumlah sampel (nilai n) dengan nilai testing tanpa menyertakan hasil ketepatan data testing pada data (80:20). Artinya semakin besar jumlah sampel yang ada, maka semakin besar pula juga keakuratan validasi model yang didapat. Untuk metode yang lain tidak ditemukan konsistensi linier antara jumlah sampel dengan nilai validasi model yang didapat.

Setelah melakukan analisis dengan menggunakan software SPSS, Minitab, Mars 2,0, dan OSR untuk metode Analisis Diskriminan, Regresi Logistik, MARS, dan *Neural Network* (NN), dari sudut pandang konsistensi terhadap ketepatan klasifikasi untuk data training dan data testing maka terlihat bahwa teknik analisis data dengan menggunakan metode regresi logistik merupakan pendekatan yang paling baik dibandingkan ketiga metode yang lain.

Tabel 3. Pengelompokan Kekonsistensian Metode untuk data HBAT dan data IRIS

Teknik Analisis Data	Data HBAT	Data IRIS
	Kekonsistenan	Kekonsistenan
Analisis Diskriminan	Tidak konsisten	Konsisten
Regresi Logistik	Konsisten	Konsisten
MARS	Tidak Konsisten	Konsisten
<i>Neural Network</i>	Konsisten	Konsisten

Pengelompokan ketepatan klasifikasi untuk dua kategori konsisten dan tidak konsisten pada data HBAT dan data IRIS menggunakan teknik analisis data antara lain Analisis Diskriminan, Regresi Logistik, MARS, dan *Neural Network* (NN) dapat disimpulkan pada Tabel 3.

Interpretasi hasil:

Dari hasil yang didapat dan dikelompokkan kedalam table 3 diatas terlihat bahwa regresi logistik dan *Neural Network* (NN) memiliki konsistensi performansi dalam mendapatkan ketepatan klasifikasi training untuk data HBAT dan data IRIS. Artinya model yang dihasilkan dikatakan model terbaik. Ketepatan klasifikasi untuk kedua metode ini dikatakan baik karena nilai yang didapat melebihi kriteria yang ditentukan yaitu diatas 80 %. Bahkan berdasarkan analisa software SPSS, metode regresi logistik pada data IRIS mencapai 100% untuk keseluruhan perbandingan training dan testing yang ditentukan. Model Analisis Diskriminan dan MARS tidak memiliki kestabilan performansi pada data HBAT, namun untuk data IRIS kestabilan performansi model disimpulkan stabil karena ketepatan klasifikasi training pada seluruh perbandingan yang telah ditentukan lebih besar daripada testing. Berarti dikatakan bahwa model yang didapat baik.

### KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa untuk permasalahan ketepatan klasifikasi untuk pembentukan model (*training*) dan evaluasi atau validasi (*testing*) menggunakan metode Analisis Diskriminan, Regresi Logistik, MARS, dan *Neural Network* (NN) pada data HBAT dan data IRIS disimpulkan bahwa dengan pendekatan regresi logistik dan *Neural Network* (NN) memiliki kekonsistenan dalam pembentukan model dan evaluasi model dimana pada data IRIS nilai training regresi logistic mencapai 100%. Disamping itu metode regresi logistik memiliki konsistensi linier antara jumlah sampel (n buah) dengan nilai testing yang diperoleh, dimana semakin banyak n pada data testing maka semakin besar pula nilai ketepatan klasifikasi testing atau evaluasi model. Untuk ketiga metode yang lain, masing-masing memiliki variasi kekonsistenan ketepatan model pada data sekunder HBAT dan IRIS.

### DAFTAR PUSTAKA

- Agresti, A., 1990, *Categorical Data Analysis*, John Wiley and Sons, Inc, New York, USA
- Friedman, J.H., 1991, *Multivariate Adaptive Regression Splines, Tech Report 102 Rev*, Department of Statistics Stanford University Stanford, California.
- Hair, J.F., Anderson, R.E, Black, W.C., Babin, B.J., and Tatham,R.L, 2006, *Multivariate Data Analysis*, Sixth edition, Prentice Hall International, UK.
- Hermawan, A., 2006, *Jaringan Syaraf Tiruan Teori dan Aplikasi*. ANDI Yogyakarta.



- Le, C. T., 1998, *Applied Categorical Data Analysis*, John Wiley and Sons, Inc, New York. USA
- Mulyono, A., 2004, *Analisis Diskriminan dengan Metode Fisher, Metode Artificial Neural Networks (ANN) dan Metode Multivariate Adaptive Regression Spline (MARS)*, <http://adln.lib.unair.ac.id/go.php?id=jiptunair-gdl-s2-2004-mulyonoagu-1279>, Rabu, 28 Oktober 2009, pukul 20.43 WIB.
- Supranto, J., 2004, *Analisis Multivariat Arti dan Interpretasi*, Rineka Cipta, Jakarta.

*Barekeng* terbit dua kali dalam setahun yaitu Bulan Maret dan Desember. *Barekeng* menerima naskah dalam bentuk hasil penelitian, catatan penelitian (*note*) atau artikel ulas balik (*review/ minireview*) dan ulasan (*feature*) baik dalam bahasa Indonesia maupun dalam bahasa Inggris yang berkaitan dengan bidang Matematika dan Terapannya. Naskah yang dikirimkan merupakan naskah asli yang belum pernah diterbitkan di media manapun.

### PENGIRIMAN NASKAH

Naskah dikirimkan kepada:

**Redaksi *Barekeng***

**Jurusan Matematika**

**Fakultas MIPA**

**Universitas Pattimura**

**Jl. Ir. M. Putuhena, Poka-Ambon**

Email: [jurnalbarekeng@gmail.com](mailto:jurnalbarekeng@gmail.com)

Naskah yang dikirimkan harus dalam bentuk naskah cetak (*hard copy*) dan naskah lunak (*soft copy*), disertai dengan alamat korespondensi lengkap dan alamat *email* yang dapat dihubungi.

#### **Naskah cetak (*hard copy*):**

Naskah cetak dikirim sebanyak satu eksemplar dengan format pengetikan menggunakan *Microsoft Word* seperti berikut:

- Naskah diketik 1 spasi pada kertas HVS Ukuran A4 dengan batas tepi 2 cm dan berbentuk 2 kolom dengan jarak antar kolom 0.5 cm. Tipe huruf *Times New Roman* berukuran 10 point.
- Jumlah halaman maksimum 12 halaman termasuk Lampiran (Gambar dan Tabel). Setiap halaman diberi nomor secara berurutan pada tepi kanan atas. Untuk keterangan Lampiran: Tipe huruf *Times New Roman* berukuran 9 point.
- Persamaan matematika (*equations*) dapat diketik dengan menggunakan *MS Equations* atau *MathType* dengan tipe huruf *Cambria* atau *Times New Roman* berukuran 10 point.

#### **Naskah lunak (*soft copy*):**

Naskah lunak harus dalam format *Microsoft Word* dan dikirimkan dalam bentuk disk (CD, DVD), *flashdisk*, atau *attachment email*.

### SUSUNAN NASKAH

- a. Judul dalam Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris untuk artikel berbahasa Indonesia dan Judul dalam Bahasa Inggris untuk artikel berbahasa Inggris.
- b. Nama Lengkap Penulis (tanpa gelar).
- c. Nama Lembaga atau Institusi, disertai Alamat Lengkap dengan nomor kode pos. Untuk korespondensi dilengkapi No. Telp., fax dan *email*.
- d. Judul Ringkas (*Running Title*) (jika diperlukan).

- e. Abstrak (*Abstract*) dalam Bahasa Inggris atau Bahasa Indonesia.
- f. Kata Kunci (*Keywords*) dalam Bahasa Inggris atau Bahasa Indonesia.
- g. Pendahuluan (*Introduction*) meliputi latar belakang, masalah dan tujuan penelitian.
- h. Tinjauan Pustaka meliputi ulasan (*review*) penelitian dari beberapa literatur serta teori-teori dasar yang mendukung penelitian.
- i. Metode Penelitian (*Methods and Materials*) meliputi bahan, cara, dan analisis dalam penelitian (jika ada).
- j. Hasil dan Pembahasan (*Results and Discussion*) ditulis secara berkesinambungan dalam satu rangkaian naskah penulisan.
- k. Kesimpulan (*Conclusion*)
- l. Ucapan Terima Kasih (*Acknowledgements*) (Jika diperlukan)
- m. Daftar Pustaka ditulis memakai sistem nama dan disusun menurut abjad. Di bawah ini beberapa contoh penulisan sumber acuan:

#### **Jurnal :**

Efron, B. 1983. *Estimating the Error Rate of Prediction Rule: Improvement on Cross-Validation*. J. Amer. Statist. Assoc., 78:316-331.

#### **Buku :**

Dennis, G. Z., 1986, *Differential Equations with Boundary Value Problems*. Ed ke-2. Boston: Massachusetts. PWS Publishers.

#### **Skripsi/Tesis/Disertasi :**

Mochamad Apri., *Model Biaya Total Jaringan Pipa Transmisi Gas dan Optimasinya*, Departemen Matematika ITB Bandung, Tugas Akhir, 2002.

#### **Informasi dari Internet :**

Mallat, Stephane, 1999, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Second Edition, Academic Press 24-28 Oval Road, London NW1 7DX UK, <http://www.hbuk.co.uk/ap/>

- n. Lampiran meliputi Gambar dan Tabel beserta keterangannya (jika diperlukan).

### CATATAN (NOTE)

- Naskah harus dikirimkan ke redaksi selambat-lambatnya 2 (dua) bulan sebelum bulan penerbitan jurnal (Maret dan Desember).
- Naskah akan dinilai oleh tim penilai yang relevan sebelum diterbitkan dan tim redaksi berhak merubah struktur naskah tanpa merubah isi naskah.
- Naskah dapat diterima atau ditolak. Naskah ditolak, jika tidak memenuhi kriteria penulisan, pelanggaran hak cipta, kualitas rendah, dan tidak menanggapi korespondensi redaksi. Pengumuman naskah ditolak atau diterima paling lambat 1 (satu) bulan setelah naskah terkirim.
- Penulis atau penulis pertama yang akan mendapat 1 (satu) eksemplar jurnal yang sudah diterbitkan.

# **B**arekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan



© Jurusan Matematika FMIPA Unpatti 2013