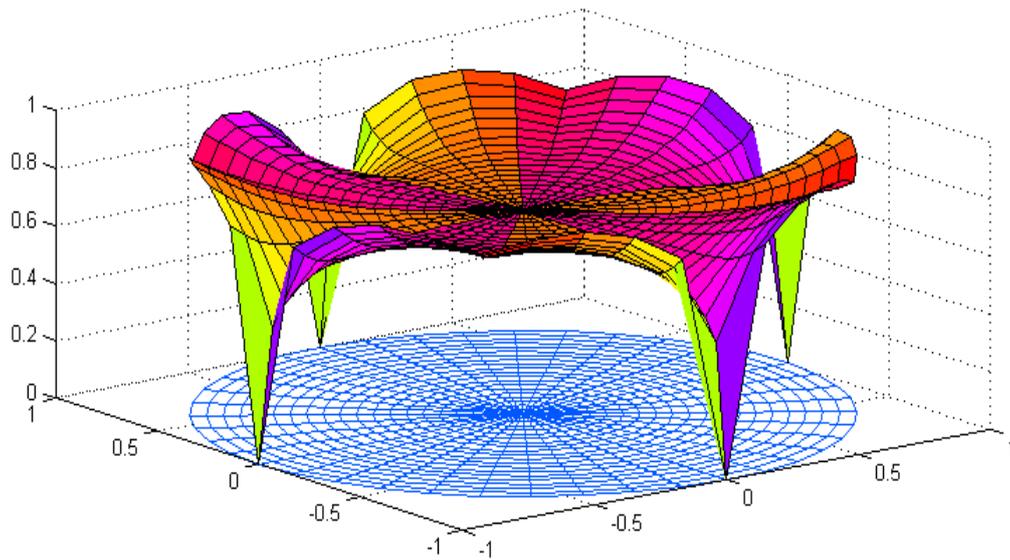


Barekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan

ISSN 1978-7227





jurnal ilmu matematika dan terapan

ISSN 1978-7227

Volume 8 Nomor 1 | Maret 2014

PENANGGUNG JAWAB

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA - Universitas Pattimura

KETUA DEWAN REDAKSI

H. J. Wattimanela, S.Si, M.Si

PENYUNTING AHLI

Prof. Drs. Subanar, Ph.D (UGM Yogyakarta)
Prof. Dr. Edi Baskoro (ITB Bandung)
Dr. Siswadi (IPB Bogor)
Dr. Basuki Widodo, M.Sc (ITS Surabaya)
Prof. Dr. Thomas Pentury, M.Si (UNPATTI Ambon)
Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (UNPATTI Ambon)

PENYUNTING PELAKSANA

M. W. Talakua, S.Pd, M.Si
F. Y. Rumlawang, S.Si, M.Si
E. R. Persulesy, S.Si, M.Si
L. J. Sinay, S.Si, M.Sc
D. L. Rahakbauw, S.Si, M.Si
V. Y. I. Ilwaru, S.Si, M.Si

SEKRETARIAT

Y. A. Lesnussa, S.Si, M.Si

PENERBIT (PUBLISHER)

Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Pattimura Ambon

ALAMAT EDITOR (EDITORIAL ADDRESS)

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pattimura
Alamat:
Kampus FMIPA UNPATTI
Jl. Ir. M. Putuhena, Poka 97233
Ambon - Maluku



PENELITIAN

- | | | |
|---|---|----------------|
| <p>ANALISIS ENTROPI DARI TRANSFORMASI MENGAWETKAN UKURAN DAN SIFAT-SIFATNYA
<i>Analysis of Entropi of a Measure-Preserving Transformation and Properties</i></p> | <p>Dorteus Lodewyik Rahakbauw
Henry J. Wattimanela</p> | <p>1 – 6</p> |
| <p>STRUKTUR KOALJABAR UNIVERSAL DALAM SISTEM STATE-BASED
<i>Universal CoAlgebra Structures in State-Based System</i></p> | <p>Henry W. M. Patty</p> | <p>7 – 16</p> |
| <p>ANALISIS LQ DAN ANALISIS SHIFT- SHARE DALAM PEMANFAATAN EKONOMI SEKTORAL KABUPATEN MALUKU TENGAH TAHUN 2008 – 2010
<i>LQ and Shift-Share Analysis in Sectoral Economic Utilization of Central Moluccas Regency at the 2008 - 2010</i></p> | <p>Jefri Tipka</p> | <p>17 – 24</p> |
| <p>ANALISIS PERBANDINGAN KOMULAN TERHADAP BEBERAPA JENIS DISTRIBUSI KHUSUS
<i>Comulans Comparative Analysis on Some Types of Special Distribution</i></p> | <p>Abraham Zacaria Wattimena
Victor Lekatompessy</p> | <p>25 – 30</p> |
| <p>MODEL REGRESI RIDGE UNTUK MENGATASI MODEL REGRESI LINIER BERGANDA YANG MENGANDUNG MULTIKOLINIERITAS (Studi Kasus: Data Pertumbuhan Bayi di Kelurahan Namaelo RT 001, Kota Masohi)
<i>Ridge Regression Model to Overcome Multiple Linear Regression with Multicollinearity (Case Study: Growth of Infants Data in Sub Namaelo, RT. 001, Masohi City)</i></p> | <p>T. L. Wasilaine
M. W. Talakua
Y. A. Lesnussa</p> | <p>31 – 37</p> |
| <p>APLIKASI METODE RUNGE KUTTA ORDE EMPAT PADA PENYELESAIAN RANGKAIAN LISTRIK RLC
<i>Application of Fourth Order Runge Kutta methods on Completion of the Electrical Circuit RLC</i></p> | <p>Samsul B. Loklomin
Francis Y. Rumlawang</p> | <p>39 – 43</p> |
| <p>ANALISIS SISTEM ANTRIAN PADA BANK MANDIRI CABANG AMBON
<i>Analysis of Queue System on the Bank Mandiri Branch Ambon</i></p> | <p>Salmon Notje Aulele</p> | <p>45 – 49</p> |
| <p>APLIKASI ALGORITMA ANT COLONY SYSTEM DALAM PENENTUAN RUTE OPTIMUM DISTRIBUSI BBM PADA PT. BURUNG LAUT
<i>Ant Colony System Algorithm Application to Determining Optimum Distribution Routes of Fuel on PT. Burung Laut</i></p> | <p>F. S. Tutupary
M. W. Talakua
Y. A. Lesnussa</p> | <p>51 – 59</p> |



merupakan Jurnal Ilmu Matematika dan Terapannya sebagai suatu wahana informasi ilmiah yang menyajikan artikel (naskah) hasil penelitian meliputi bidang-bidang sebagai berikut: matematika analisis, aljabar, matematika terapan, statistika, pendidikan matematika dan ilmu komputer. Jurnal ini diterbitkan dua kali dalam setahun yaitu pada bulan Maret dan bulan Desember. Artikel atau naskah-naskah di dalam jurnal ini merupakan hasil-hasil penelitian pribadi ataupun kelompok yang belum pernah diterbitkan di jurnal-jurnal atau majalah ilmiah lainnya.

Diterbitkan oleh:

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Pattimura

Ambon

2014

Copyright © Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI 2014

**ANALISIS ENTROPI DARI TRANSFORMASI
MENGAWETKAN UKURAN DAN SIFAT-SIFATNYA**
Analysis of Entropy of a Measure-Preserving Transformation and Properties

DORTEUS LODEWYIK RAHAKBAUW¹, HENRY J. WATTIMANELA²
^{1,2} Staf Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
E-mail: ¹lodewyik@gmail.com

ABSTRAK

Transformasi $T : X_1 \rightarrow X_2$ merupakan transformasi terinvers yang mengawetkan ukuran jika T mengawetkan ukuran, bijektif, and T^{-1} juga menawetkan ukuran. Transformasi yang mengawetkan ukuran merupakan pemetaan yang mengawetkan struktur antara ruang ukuran. Pada sisi lain, $T : X \rightarrow X$ merupakan transformasi yang mengawetkan ukuran dari ruang probabilitas (X, \mathcal{B}, m) . Jika \mathcal{A} adalah aljabar bagian berhingga σ dari \mathcal{B} maka

$h(T, \xi(\mathcal{A})) = h(T, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A} \right)$ disebut entropi dari T terhadap \mathcal{A} . Jika

$T : X \rightarrow X$ merupakan transformasi yang mengawetkan ukuran dari ruang probabilitas (X, \mathcal{B}, m) maka $h(T) = \sup h(T, \mathcal{A})$ dimana supremum diambil atas semua aljabar bagian berhingga \mathcal{A} dari \mathcal{B} disebut entropi dari T . Dalam penelitian ini akan ditunjukkan bahwa limit di atas selalu ada dan menjelaskan mengenai beberapa sifat dari $h(T, \mathcal{A})$ dan $h(T)$.

Kata kunci: Transformasi, entropi, mengawetkan ukuran, ruang probabilitas

PENDAHULUAN

Perkataan entropi sebagai konsep ilmiah pertama kali digunakan dalam termodinamika (Clausius, 1850). Interpretasinya Dalam konteks mekanika statis dikemukakan oleh Boltzman 1877, tetapi hubungan eksplisit antara entropi dan probabilitas dicatat beberapa tahun kemudian (Planck, 1906). Shannon dalam makalahnya pada tahun 1948, menggunakan konsep entropi untuk memberikan diskripsi ekonomis sifat-sifat barisan simbol yang panjang, dan menggunakan hasilnya pada sejumlah persoalan dasar dalam teori sandi dan pengiriman data. Sumbangannya yang luar biasa ini membentuk dasar teori informasi modern. Jaynes pada tahun 1957 melihat kembali metode entropi maksimum dan menggunakannya untuk berbagai persoalan yang menyangkut penentuan parameter tak diketahui dari data tak lengkap. Pada tahun 1958 oleh Kolmogorov, ia memperkenalkan konsep entropi melalui teori Ergodik. Secara umum Teori Ergodik merupakan teori yang digunakan untuk menjelaskan kejadian dalam ruang ukuran (*measure space*), bahkan teori ini merupakan

invarian tersukses sampai saat ini. Misalnya, pada tahun 1943 diketahui bahwa pergeseran dua sisi $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dan tiga sisi $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ merupakan spektrum Lebesgue terbilang dan itu merupakan spektrum isomorfik, namun tidak diketahui apakah merupakan konjugasi. Hal ini dipecahkan tahun 1958 ketika Kolmogorov menunjukkan bahwa keduanya memiliki entropi $\log 2$ dan $\log 3$, sebaliknya, bukan merupakan konjugat. Gagasan entropi yang saat ini digunakan hanya berbeda tipis dari yang digunakan oleh Kolmogorov, perbaikannya dibuat Sinai pada tahun 1959.

Kata Ergodik dikemukakan oleh Boltzman untuk menggambarkan tentang kejadian dari $\{T_t | t \in \mathbb{R}\}$ pada permukaan energi $H^{-1}(e)$ dimana Hamiltonian H adalah model yang timbul dari statistika mekanik. Boltzman mengharapkan bahwa masing-masing orbit $\{T_t(x) | x \in \mathbb{R}\}$ akan sama dengan seluruh permukaan $H^{-1}(e)$, pernyataan ini disebut hipotesis Ergodik. Kata Ergodik

berasal dari bahasa Yunani yaitu *ergon* (kerja) dan *odos* (lintasan).

Secara umum teori Ergodik digunakan hanya untuk memberi gambaran studi kualitatif kejadian dari grup/kelompok dalam ruang ukuran. Kejadian pada ruang topologi dan bermacam-macam perataan seringkali disebut topologi dinamik dan diferensial dinamik. Studi teori ukuran ini dimulai sebelum tahun 1930 dan teorema Ergodik Birkhoff dan Von Neumann yang dibuktikan pada waktu itu. Selanjutnya kemajuan yang lebih besar, yaitu penemuan konsep entropi oleh Kolmogorov pada tahun 1958. Pembuktiannya oleh Ornstein pada tahun 1969, berupa entropi lengkap untuk pergeseran Bernoulli yang timbul lagi dalam masalah isomorfis. Tahun belakangan ini Teori Ergodik memiliki beberapa kegunaan yang memberikan hasil penting dalam berbagai cabang matematika.

Berdasarkan hal ini maka peneliti tertarik untuk mendalami, menganalisis, dan membahas secara mendetil mengenai konsep entropi yaitu entropi dari transformasi mengawetkan ukuran dan sifat-sifatnya.

TINJAUAN PUSTAKA

Persamaan $S = -k \sum_{i=1}^N (P_i \log P_i)$ merupakan

persamaan generalisasi terhadap definisi entropi dalam statistika mekanik dimana persamaan dimaksud pertama kali dikemukakan oleh Boltzman pada tahun 1800-an (Tolman, 2001). Pada Tahun 1958 Kolmogorov memperkenalkan suatu konsep entropi dalam Teori Ergodik yang juga merupakan entropi dalam statistika mekanik dengan menggunakan gagasan teori ruang ukuran sebagai konsep dasar (Weisstein, 1999). Selanjutnya dalam perkembangan analisis abstrak dan perluasannya dalam statistika, entropi menjadi objek yang menarik untuk dipelajari dan dikembangkan sebab pengambilan pendefinisian partisi dan aljabar dalam ruang probabilitas dapat dibentuk suatu bilangan yang disebut entropi partisi (Walters, 1975), dimana secara teoritis pendefinisian ruang probabilitas sendiri merupakan generalisasi dari definisi ruang ukuran (Kingman dan Taylor, 1966) dan entropi partisi sendiri merupakan generalisasi dari persamaan di atas. Dalam bukunya yang berjudul *An Introduction to Ergodic Theory with 8 Illustrations*, Walters (1975) mencoba menyusun suatu konsep entropi dengan langkah awal mendefinisikan terlebih dahulu ruang probabilitas yang menghasilkan transformasi dalam ruang probabilitas sehingga dapat dibentuk definisi entropi dari transformasi mengawetkan ukuran.

Definisi 1.

Andaikan $T: X \rightarrow X$ adalah transformasi yang mengawetkan ukuran dari ruang probabilitas (X, \mathcal{B}, m) , dan jika \mathcal{A} adalah aljabar bagian- σ berhingga dari \mathcal{B} maka $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A} \right)$ selalu ada, dan

$$h(T, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A} \right)$$

Teorema A.

Diberikan (X, \mathcal{B}, m) ruang probabilitas dan \mathcal{A}, \mathcal{F} merupakan aljabar bagian- σ atas \mathcal{B} dengan \mathcal{A} berhingga maka

- $H(\mathcal{A} | \mathcal{F}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{F}$
- $H(\mathcal{A} | \mathcal{F}) = H(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$ dan \mathcal{F} independen

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 1.

Andaikan \mathcal{A}, \mathcal{C} adalah sub-aljabar berhingga dari \mathcal{B} dan T adalah transformasi mengawetkan ukuran dari ruang probabilitas (X, \mathcal{B}, m) , maka

- $h(T, \mathcal{A}) \leq H(\mathcal{A})$.
- $h(T, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leq h(T, \mathcal{A}) + h(T, \mathcal{B})$
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow h(T, \mathcal{A}) \leq h(T, \mathcal{B})$
- $h(T, \mathcal{A}) \leq h(T, \mathcal{B}) + h(\mathcal{A} | \mathcal{B})$
- $h(T, T^{-1} \mathcal{A}) = h(T, \mathcal{A})$.
- Jika $k \geq 1, h(T, \mathcal{A}) = h(T, \bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i} \mathcal{A})$.
- Jika T terinvers dan $k \geq 1$ maka

$$h(T, \mathcal{A}) = h \left(T, \bigvee_{i=k}^k T^{-i} \mathcal{A} \right)$$

Bukti:

- Akan ditunjukkan $h(T, \mathcal{A}) \leq H(\mathcal{A})$

Bukti:

dari definisi 1 diketahui

$$h(T, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A} \right)$$

berarti

$$H \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A} \right) = H \left(\mathcal{A} \vee T^{-1} \mathcal{A} \vee \dots \vee T^{-(n-1)} \mathcal{A} \right)$$

karena

$$H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leq H(\mathcal{A}) + H(\mathcal{B}),$$

maka

$$\begin{aligned} H \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A} \right) &= H(\mathcal{A}) + H(T^{-1} \mathcal{A}) + \dots + H(T^{-(n-1)} \mathcal{A}) \\ &\leq H(\mathcal{A}) + H(\mathcal{A}) + \dots + H(\mathcal{A}) \\ &\leq nH(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

Berarti

$$\frac{1}{n} H \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A} \right) \leq \frac{1}{n} nH(\mathcal{A}) = H(\mathcal{A})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} H(\mathcal{A})$$

$$h(T, \mathcal{A}) \leq H(\mathcal{A}) \quad \blacksquare$$

maka

$$\begin{aligned} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A}\right) &= H\left(\mathcal{A} \vee T^{-1} \mathcal{A} \vee T^{-2} \mathcal{A} \vee \dots \vee T^{-(n-1)} \mathcal{A}\right) \\ &= H\left(T^{-1}\left(\mathcal{A} \vee T^{-1} \mathcal{A} \vee T^{-2} \mathcal{A} \vee \dots \vee T^{-(n-1)} \mathcal{A}\right)\right) \\ &= H\left(T^{-1} \mathcal{A} \vee T^{-2} \mathcal{A} \vee T^{-3} \mathcal{A} \vee \dots \vee T^{-n} \mathcal{A}\right) \\ H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A}\right) &= H\left(\bigvee_{i=1}^n T^{-i} \mathcal{A}\right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=1}^n T^{-i} \mathcal{A}\right) \\ h(T, \mathcal{A}) &= h(T, T^{-1} \mathcal{A}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

vi. Akan ditunjukkan bahwa

$$h(T, \mathcal{A}) = h\left(T, \bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i} \mathcal{A}\right), k \geq 1$$

Bukti :

$$\begin{aligned} h\left(T, \bigvee_{i=0}^k T^{-i} \mathcal{A}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j} \left(\bigvee_{i=0}^k T^{-i} \mathcal{A}\right)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{k+n-1} T^{-i} \mathcal{A}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{k+n-1}{n}\right) H\left(\bigvee_{i=0}^{k+n-1} T^{-i} \mathcal{A}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k+n-1}{n}\right) \frac{1}{k+n-1} H\left(\bigvee_{i=0}^{k+n-1} T^{-i} \mathcal{A}\right) \\ &= h(T, \mathcal{A}) \\ h(T, \mathcal{A}) &= h\left(T, \bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i} \mathcal{A}\right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

vii. Akan dibuktikan bahwa

$$h(T, \mathcal{A}) = h\left(T, \bigvee_{i=k}^k T^{-i} \mathcal{A}\right) \text{ jika } T \text{ terinvers dan } k \geq 1$$

Bukti :

$$\begin{aligned} h\left(T, \bigvee_{i=k}^k T^{-i} \mathcal{A}\right) &= h\left(T, T^{-1} \bigvee_{i=k}^k T^{-i} \mathcal{A}\right) \\ &= h\left(T, \bigvee_{i=k}^k T^{-i} \mathcal{A}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j} \left(\bigvee_{i=k}^k T^{-i} \mathcal{A}\right)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=k}^{2k+n-1} T^{-i} \mathcal{A}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2k+n-1}{n}\right) \left(\frac{1}{2k+n-1}\right) \cdot \left(\bigvee_{i=k}^{2k+n-1} T^{-i} \mathcal{A}\right) \\ &= h(T, \mathcal{A}) \end{aligned}$$

Terbukti $h(T, \mathcal{A}) = h\left(T, \bigvee_{i=k}^k T^{-i} \mathcal{A}\right)$

Akibat 1.

Jika \mathcal{A}, \mathcal{B} adalah sub-aljabar dari B maka $|h(T, \mathcal{A}) - h(T, \mathcal{B})| \leq d(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, dengan demikian $h(T, \bullet)$

adalah fungsi bernilai real yang kontinu pada ruang metrik (∇, d) .

Bukti:

Berdasarkan teorema sebelumnya diketahui bahwa

$$h(T, \mathcal{A}) \leq h(T, \mathcal{B}) \leq H(\mathcal{A} | \mathcal{B})$$

atau

$$h(T, \mathcal{A}) - h(T, \mathcal{B}) \leq H(\mathcal{A} | \mathcal{B}) \quad (3)$$

Selanjutnya dinamakan (3) sedangkan

$$h(T, \mathcal{B}) \leq h(T, \mathcal{A}) + H(\mathcal{B} | \mathcal{A})$$

$$h(T, \mathcal{A}) - h(T, \mathcal{B}) \geq -H(\mathcal{B} | \mathcal{A}) \quad (4)$$

selanjutnya dinamakan (4)

Berdasarkan (3) dan (4) diperoleh

$$\begin{aligned} |h(T, \mathcal{A}) - h(T, \mathcal{B})| &\leq \max\{H(\mathcal{A} | \mathcal{B}), H(\mathcal{B} | \mathcal{A})\} \\ &\leq H(\mathcal{A} | \mathcal{B}), H(\mathcal{B} | \mathcal{A}) \\ &= d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Terbukti

$$h(T, \mathcal{A}) \leq h(T, \mathcal{B}) \leq H(\mathcal{A} | \mathcal{B})$$

Teorema 2.

Andaikan T merupakan transformasi mengawetkan ukuran atas ruang probabilitas (X, \mathcal{B}, m) .

i. $h(T^k) = kh(T)$, untuk $k > 0$

ii. Jika T dapat dibalikkan atau terinvers maka

$$h(T^k) = |k|h(T), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Bukti :

i. Akan ditunjukkan bahwa

$$h(T^k) = kh(T) \text{ untuk } k > 0.$$

Bukti:

Langkah pertama harus ditunjukkan bahwa

$$kh(T) \leq h(T^k)$$

diketahui bahwa

$$h(T^k) = \sup h\left(T^k, \bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i} \mathcal{A}\right)$$

sehingga untuk $k > 0$,

$$\begin{aligned} h\left(T^k, \bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i} \mathcal{A}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-k} \left(\bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i} \mathcal{A}\right)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{k}{k} H\left(\bigvee_{i=0}^{nk-1} T^{-i} \mathcal{A}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{nk} H\left(\bigvee_{i=0}^{nk-1} T^{-i} \mathcal{A}\right) \\ &= kh(T, \mathcal{A}) \\ &= kh(T) \end{aligned}$$

hal ini berarti

$$\begin{aligned} kh(T) &= k \sup h(T, \mathcal{A}), \mathcal{A} \text{ berhingga} \\ &= \sup h\left(T^k \bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i} \mathcal{A}\right) \\ &\leq \sup h(T^k, \mathcal{B}) = h(T^k) \end{aligned}$$

dengan kata lain

$$kh(T) \leq h(T^k) \tag{5}$$

Selanjutnya dinamakan (5), sedangkan

$$\begin{aligned} h(T^k, \mathcal{A}) &\leq h\left(T^k \bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i} \mathcal{A}\right) \\ &= kh(T, \mathcal{A}) \\ \sup h(T^k, \mathcal{A}) &\leq \sup kh(T, \mathcal{A}) \\ &= k \sup h(T, \mathcal{A}) \end{aligned}$$

dengan kata lain

$$h(T^k) \leq kh(T) \tag{6}$$

selanjutnya dinamakan (6), berdasarkan (5) dan (6),

$$h(T^k) = kh(T), \text{ untuk } k > 0$$

ii. Akan ditunjukkan jika T terinvers maka

$$h(T^k) = |k|h(T), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Bukti:

Cukup ditunjukkan bahwa

$$h(T^{-1}) = h(T), \text{ karena } H(T^{-1}, \mathcal{A}) = H(\mathcal{A})$$

berarti

$$\begin{aligned} h\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i \mathcal{A}\right) &= H\left(T^{-(n-1)} \bigvee_{i=0}^{n-1} T^i \mathcal{A}\right) \\ &= H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j} \mathcal{A}\right) \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} (T^{-1})^{-i} \mathcal{A}\right) &= H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j} \mathcal{A}\right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} (T^{-1})^{-i} \mathcal{A}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j} \mathcal{A}\right) \\ h(T^{-1}, \mathcal{A}) &= h(T, \mathcal{A}) \\ \sup h(T^{-1}, \mathcal{A}) &= \sup h(T, \mathcal{A}) \\ h(T^{-1}) &= h(T) \end{aligned}$$

$$\therefore h(T^k) = |k|h(T), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Terbukti jika T terinvers maka

$$h(T^k) = |k|h(T), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Teorema 3.

Jika \mathcal{A} sub-aljabar berhingga dari \mathcal{B} dan T adalah transformasi mengawakan ukuran dari (X, \mathcal{B}, m) maka

$$h(T, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} H\left(\mathcal{A} \left| \bigvee_{i=1}^n T^{-i} \mathcal{A} \right.\right) = H\left(\mathcal{A} \left| \bigvee_{i=1}^{\infty} T^{-i} \mathcal{A} \right.\right)$$

Bukti :

$$\begin{aligned} h(T, \mathcal{A}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A}\right) \\ H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A}\right) &= H(\mathcal{A}) + \sum_{j=1}^{n-1} H\left(\mathcal{A} \left| \bigvee_{i=1}^j T^{-i} \mathcal{A} \right.\right) \\ &= H(\mathcal{A}) + H\left(\mathcal{A} \left| \bigvee_{i=1}^1 T^{-i} \mathcal{A} \right.\right) + H\left(\mathcal{A} \left| \bigvee_{i=1}^2 T^{-i} \mathcal{A} \right.\right) + \\ &\quad \dots + H\left(\mathcal{A} \left| \bigvee_{i=1}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A} \right.\right) \\ &= nH\left(\mathcal{A} \left| \bigvee_{i=1}^n T^{-i} \mathcal{A} \right.\right) \end{aligned}$$

Selanjutnya dipenuhi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\mathcal{A} \left| \bigvee_{i=1}^n T^{-i} \mathcal{A} \right.\right) \\ h(T, \mathcal{A}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} H\left(\mathcal{A} \left| \bigvee_{i=1}^n T^{-i} \mathcal{A} \right.\right) \\ &= H\left(\mathcal{A} \left| \bigvee_{i=1}^{\infty} T^{-i} \mathcal{A} \right.\right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Akibat 2.

Diberikan T adalah transformasi mengawakan ukuran atas ruang probabilitas (X, \mathcal{B}, m) . Diberikan \mathcal{A} sub-aljabar yang berhingga pada \mathcal{B} , maka $h(T, \mathcal{A}) = 0$ untuk setiap $\mathcal{A} \subset \overset{\circ}{\bigvee}_{i=1}^{\infty} T^{-i} \mathcal{A}$.

Bukti :

Diketahui dari Teorema 4.

- i. $H(\mathcal{A} | \mathcal{F}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{F}$
- ii. $H(\mathcal{A} | \mathcal{F}) = H(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$ dan \mathcal{F} independen

Dan berdasarkan Teorema 3. diperoleh

$$\begin{aligned} h(T, \mathcal{A}) = 0 &\Leftrightarrow H\left(\mathcal{A} \left| \bigvee_{i=1}^{\infty} T^{-i} \mathcal{A} \right.\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \subset \bigvee_{i=1}^{\infty} T^{-i} \mathcal{A} \end{aligned}$$

Dengan kata lain

$$h(T, \mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} \subset \bigvee_{i=1}^{\infty} T^{-i} \mathcal{A} \quad \blacksquare$$

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dapat disimpulkan bahwa konsep entropi dari transformasi mengawakan ukuran menghasilkan beberapa sifat-sifat entropi transformasi mengawakan ukuran. Adapun beberapa kesimpulan yang dapat diambil berupa :

1. Transformasi mengawakan ukuran T dimana $T : (X_1, \mathcal{A}_1, m_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{A}_2, m_2)$ dan $(X_1, \mathcal{A}_1, m_1), (X_2, \mathcal{A}_2, m_2)$ merupakan ruang probabilitas maka sifat mengawakan ukuran bergantung pada setiap \mathcal{B} dan setiap m .
2. Diberikan T adalah transformasi mengawakan ukuran atas ruang probabilitas (X, \mathcal{B}, m) . Diberikan

\mathcal{A} sub-aljabar yang berhingga pada \mathcal{B} , maka $h(T, \mathcal{A}) = 0$ untuk setiap $\mathcal{A} \subset \bigvee_{i=1}^{\infty} T^{-i} \mathcal{A}$.

3. Jika \mathcal{A}, \mathcal{B} adalah sub-aljabar dari \mathcal{B} maka $|h(T, \mathcal{A}) - h(T, \mathcal{B})| \leq d(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, jadi $h(T, \mathcal{A})$ adalah fungsi bernilai real yang kontinu pada ruang metrik (∇, d) .

DAFTAR PUSTAKA

- Bartle, R. G & Sherbert, D.R, 1994. Introduction to real analysis. Second Edition. John Wiley & Sons. Inc, New York.
- Papoulis, A, 1984. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, Second Edition. Polytechnic Institute Of New York.
- Soemantri, R, 1988. Analisis Real I. Penerbit Karunika, Universitas Terbuka, Jakarta.
- Tolman, R. C, 2001. The Principles of Statistical Mechanics, 19 Oktober 2006, <http://www.tim-thompson.com/entropy1.html#stat>, Pkl 14:34.
- Walters, P, 1981. An Introduction to Ergodic Theory, Mathematics Institute University of Warwick, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin.
- Weisstein, E. W, 1999. Ergodic Theory, 19 Oktober 2006, <http://mathworld.wolfram.com/ErgodicTheory.html>, Pkl 14:25

STRUKTUR KOALJABAR UNIVERSAL DALAM SISTEM STATE-BASED *Universal CoAlgebra Structures in State-Based System*

HENRY W. M. PATTY

Staf Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
E-mail: henrywmpaty81@gmail.com

ABSTRAK

Konsep koaljabar universal yang merupakan dualitas dari aljabar dapat dipandang sebagai suatu teori dalam sistem *state based*. Dalam kotak hitam (*black boxes*), automata dan struktur Kripke yang merupakan contoh sistem *state-based*, struktur koaljabar merupakan penggabungan dua pemetaan yang membawa suatu *state s* ke pasangan elemen dari hasil kali tensor dua himpunan.

Kata kunci : koaljabar, sistem *state-based*, kotak hitam, automata, penerima

PENDAHULUAN

Matematika merupakan struktur formal yang mendasari suatu perhitungan, pengukuran, transformasi, dan lain-lain sebagainya. Dalam matematika khususnya aljabar dikembangkan ide-ide dasar diantaranya sistem bilangan, grup dan ruang vektor dimana struktur dan sifat-sifatnya mendasari ilmu-ilmu yang lain. Misalnya sistem dinamik yang struktur bahasanya adalah aljabar atau yang lebih dikenal sebagai mesin Turing. Mesin Turing (model komputasi secara teoritis yang ditemukan oleh Alan Mattison Turing pada tahun 1935) merupakan model ideal untuk melakukan perhitungan matematis. Dengan kata lain mesin Turing menentukan apakah suatu fungsi dapat diselesaikan dengan komputer atau tidak. Mesin ini masih berupa konsep, sampai kemudian diwujudkan dalam bentuk nyata beberapa tahun kemudian. Secara teori, setiap mesin memiliki *state* yang dapat berubah dari suatu *state* ke *state* yang lain. Dimana para pengguna komputer dapat melihat sebagian *state* lewat layar komputer (printer) dan bahkan dapat merubah *state* komputer dengan menginput perintah dan selanjutnya komputer akan menampilkan perilaku *state* tersebut. Namun dalam kenyataannya merupakan suatu sistem yang cukup rumit dideskripsikan secara formal.

Ahli matematika dan computer seperti Rutten [4], Kursz [5] dan Jacobs [6] memperkenalkan beberapa struktur dari sistem *state-based* yaitu automata, sistem transisi, jaring petri (*petri net*), dan struktur-struktur lainnya. Dari beberapa struktur tersebut diabstraksikan konsep koaljabar yang merupakan dual dari aljabar. Hal

ini disebabkan karena aljabar universal tidak dapat digunakan dalam memodelkan semua struktur aljabar sehingga dibutuhkan koaljabar universal yang dapat memodelkan sistem *state-based* [1]. Sistem *state-based* ini dapat dipandang sebagai cikal bakal bahasa pemrograman dalam ilmu komputer.

Tipe data dalam bahasa pemrograman komputer tergolong aljabar sedangkan kelas datanya merupakan suatu koaljabar. Suatu tipe data secara lengkap dapat dibedakan lewat pembangunnya, yaitu melalui suatu fungsi aljabar universal dalam bentuk $F(S) \rightarrow S$ dengan *state S*. Tipe data ini dapat diabstraksikan dengan fungsi aljabar namun kelas data $S \rightarrow F(S)$ tidak dapat diabstraksikan dengan fungsi aljabar, dibutuhkan dualitas dari aljabar yang disebut koaljabar. Untuk mendefinisikan koaljabar ini membutuhkan teori kategori. Misalkan C adalah objek atau kategori dan misalkan $F : C \rightarrow C$ adalah funktor (endofunctor). Selanjutnya F -koaljabar atas kategori C didefinisikan sebagai objek S dari C yang dilengkapi dengan morfisma $\gamma_S : S \rightarrow F(S)$ dan dinotasikan (S, γ) dimana S merupakan sebarang himpunan dan γ_S merupakan pemetaan.

TINJAUAN PUSTAKA

Suatu koaljabar universal dapat dipandang sebagai teori dari sistem *state-based*. Menurut Hansen & Rutten

[7] koaljabar diperlukan karena (i) dapat mengungkapkan struktur sistem yang kompleks, (ii) sebagai cara pandang baru dari penelitian yang sudah ada sebelumnya, (iii) hasil yang baru atau generalisasi lewat cara pandang secara umum, (iv) dibutuhkan untuk membuktikan teorema teori sistem dan (v) sebagai alat dalam matematika yaitu: morfisma, bisimulasi, ekuivalensi dan model logika.

Sebelum didefinisikan secara formal apa yang dimaksudkan dengan koaljabar, akan diberikan beberapa contoh sistem *state-based* dan morfisma diantara sistem tersebut. Selanjutnya dengan koaljabar serta homomorfisma koaljabar akan diungkapkan sifat-sifat abstrak dan contoh-contohnya.

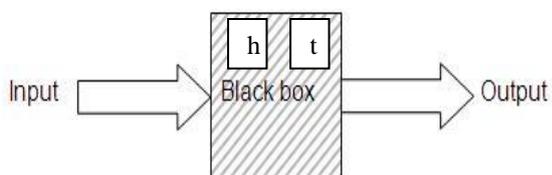
Setiap sistem *state-based* mempunyai *input*, *output* dan *inner state* (keadaan dari dalam sistem tersebut). Perilaku (*behaviour*) beberapa sistem tidak hanya bergantung dari *input* saja tapi juga dari *inner state* nya dalam pengertian suatu *output* dapat berbeda dengan *input* karena dipegaruhi *inner state* sistem tersebut. Secara umum suatu sistem *state-based* memiliki beberapa karakteristik:(i) perilaku sistem yang tergantung pada *inner state* dimana *state* ini tidak tampak oleh pengguna sistem, (ii) sistem dapat dipengaruhi oleh keadaan disekitarnya, (iii) perilaku sistem berdasarkan operasinya.

Secara khusus, suatu sistem *state-based* membahas tentang perilaku *input-output state* yang diperoleh dan aplikasinya. Suatu sistem juga dapat diterapkan untuk meminimalkan *inner-state* dengan jalan membuang setiap *state* yang tidak diperlukan, sehingga *state* yang ditunjukkan tidak berbeda dengan perilaku *input-output* nya. Pengurangan perbedaan ini dikenal dengan nama bisimulasi (bisimilaritas). Dua *inner-state* s dan s' disebut bisimilar ditulis $s \sim s'$, jika s dan s' tidak dapat dibedakan dari perilaku *input-output* nya dengan anggapan relasi \sim adalah refleksif dan simetris.

Dalam tulisan ini akan diberikan beberapa contoh sistem *state-based* yaitu kotak hitam (*black-boxes*), tipe data (*data stream*), automata dan struktur Kripke dalam sistem yang selanjutnya akan dilihat sebagai koaljabar universal. Sebagian besar teori dalam tulisan ini mengacu pada *Universal Algebra and Coalgebra* yang ditulis Klaus Denecke dan Shelly L. Wismath [1]

1. Kotak-Hitam (Black-Boxes)

Kotak-hitam merupakan suatu kelas khusus dalam sistem *state-based* yang mempunyai layar dan tombol h dan t dimana saat tombol h ditekan maka layar akan menunjukkan suatu elemen data $d \in D$ dengan D =himpunan data. Sedangkan tombol t akan merubah *inner-state* sehingga ketika tombol h ditekan (setelah terlebih dulu di tekan tombol t) maka kotak-hitam akan menampilkan elemen $d' \in D$.



Gambar 1. Kotak Hitam

Misalkan S adalah himpunan *inner-state* dari suatu kotak hitam, maka diperoleh pasangan pemetaan:

$$h : S \rightarrow D$$

$$t : S \rightarrow S$$

Definisi 1:

Misalkan D adalah himpunan elemen data. Suatu kotak-hitam atas himpunan elemen data D adalah tripel $(S; h, t)$ dimana S adalah himpunan elemen yang disebut *state* dan $h : S \rightarrow D$, $t : S \rightarrow S$ adalah pemetaan.

Jika diberikan *inner-state* s dari suatu kotak-hitam, maka akan diperoleh urutan elemen data tak berhingga

$$((h(s), h(t(s)), h(t(t(s))), \dots)$$

Karena itulah kotak-hitam sering disebut urutan automata (*stream automata*). Selanjutnya mengenai automata akan dijelaskan namun untuk membahas prinsip *black-boxes* sebagai struktur koaljabar perlu dijelaskan tentang hasil kali tensor (*tensor product*) yang dirujuk pada [1]

Definisi 2:

Misalkan $\alpha : D \rightarrow E$, $\beta : D \rightarrow F$ dimana D , E dan F suatu himpunan data pada sistem *state-based*. Suatu pemetaan $\alpha \otimes \beta : D \rightarrow E \times F$ disebut hasil kali tensor dari α dan β jika dipenuhi $(\alpha \otimes \beta)(d) := (\alpha(d), \beta(d))$, $\forall d \in D$

Definisi 3:

Misalkan $p_1 : A \times B \rightarrow A$, $p_2 : A \times B \rightarrow B$ adalah pemetaan proyektif pada hasil kali $A \times B$ maka untuk setiap fungsi $h : A \rightarrow B$ dan $k : C \rightarrow D$ didefinisikan $h \times k : (h \circ p_1) \otimes (k \circ p_2) : A \times C \rightarrow B \times D$ yang memenuhi $(h \times k)(a, c) := (h(a), k(c))$ untuk setiap $(a, c) \in A \times C$.

Suatu pemetaan $\alpha \otimes \beta$ memiliki sifat ketunggalan yang merupakan sifat universal dari produk, yaitu jika pemetaan $\alpha : D \rightarrow E$, $\beta : D \rightarrow F$ maka terdapat suatu pemetaan tunggal yang memenuhi $p_1 \circ (\alpha \otimes \beta) = \alpha$ dan $p_2 \circ (\alpha \otimes \beta) = \beta$.

Dua *state* dalam suatu kotak hitam dapat dibedakan jika dari barisan input yang identik akan memberikan *output* yang berbeda. Oleh karena itu $s \sim s'$ akan berarti $h(s) = h(s')$ dan $t(s) \sim t(s')$, secara ringkasnya disajikan dalam definisi berikut

Definisi 4:

Suatu relasi \sim pada kotak-hitam $(S : h \otimes t)$ adalah relasi $\sim \subseteq S \times S$ yang memenuhi aturan $s \sim s' := h(s) = h(s')$ dan $t(s) \sim t(s')$

Suatu bisimulasi terjadi pada kotak hitam $(S : h \otimes t)$ jika setiap relasinya memenuhi Definisi 4 di atas.

Contoh 1.

Misalkan suatu kotak hitam dengan delapan elemen yaitu s_1, \dots, s_8 . Jika diberikan suatu aksi pada kotak hitam tersebut, berupa suatu pemetaan transisi maka akan diperoleh bahwa setiap *state* s_j akan memiliki *output* ($h(s_j)$) dan anak panah dari s_j ke s_k artinya $t(s_j) = s_k$. Misalkan : $s_1 = s_6 = 33, s_2 = s_4 = s_8 = 17, s_3 = s_5 = s_7 = 42$

$$(33) \rightarrow (17) \leftrightarrow (42) \leftarrow (17) \leftarrow (42) \leftarrow (33) \quad (42) \leftrightarrow (17)$$

Dari diagram di atas terlihat bahwa dua *state* yang sama dapat dibedakan, misalkan *state* 33. Saat tombol t kemudian h ditekan akan memberikan angka 17 pada satu sisi dan 42 pada sisi yang lain. Dimulai dari *state* $s_1 = 33$ diperoleh barisan data 33, 17, 42, 17, 42, 33, dari *state* $s_6 = 33$ diperoleh barisan data 33, 42, 17, 42, 17, 33. Terlihat bahwa *state* s_1 dan s_6 dapat dibedakan karena barisan datanya berbeda. Sedangkan *state* $s_3 = s_5 = s_7 = 42$ akan menghasilkan barisan data yang sama 42, 17, 42, 17, . . . sehingga ketiga *state* ini tidak dapat dibedakan.

2. Urutan Data (Data Stream)

Suatu urutan data adalah barisan tak berhingga dimana elemen pertamanya akan disebut kepala (*head*) dan elemen terakhirnya disebut ekor (*tail*). Urutan data dalam kaitannya dengan kotak hitam merupakan barisan tak berhingga dari suatu himpunan data D yang dilengkapi dengan pemetaan $\tau : \omega \rightarrow D$ dimana $\omega =$ himpunan terurut bilangan asli dan $\tau(k)$ elemen ke- k dari urutan untuk setiap $k \in \omega$

Definisi 5:

Urutan data adalah urutan elemen suatu himpunan D yang dilengkapi dengan dua pemetaan hd dan tl dimana $hd : D^\omega \rightarrow D$ dan $tl : D^\omega \rightarrow D^\omega$ dimana D^ω diartikan sebagai semua pemetaan dari ω ke D maka untuk $\tau \in D^\omega$ berlaku $h(\tau) := hd(\tau) := \tau(0)$ dan $t(\tau) := tl(\tau)$ dimana $tl(\tau)(k) := \tau(k+1)$

Jika ditulis $(\tau(0), \tau(1), \dots)$ berarti $hd(\tau) = \tau(0)$ adalah kepala dan $tl(\tau) = (\tau(1), \tau(2), \dots)$ sebagai ekor. Urutan tersebut dapat dipandang sebagai sistem $(D, D^\omega : hd \otimes tl)$ dimana $hd \otimes tl : D^\omega \rightarrow D \times D^\omega$ dengan sifat bahwa setiap dua *state* yang berbeda dapat dibedakan $s \sim s' := s = s'$.

3. Automata

Automata adalah mesin abstrak yang dapat mengenali (*recognize*), menerima (*accept*) atau membangkitkan (*generate*) sebuah kalimat dalam bahasa tertentu. Automata berasal dari bahasa Yunani *automatos*

yang berarti sesuatu yang bekerja secara otomatis (mesin). Pengertian mesin bukan hanya bersifat elektronis/mekanis saja melainkan segala sesuatu (termasuk perangkat lunak) yang memenuhi ketiga ciri di atas. Aplikasi automata pada perangkat lunak terutama pada pembuatan kompilator bahasa pemrograman komputer. Istilah *automaton* sebagai bentuk tunggal dan automata sebagai bentuk jamak. Teori automata adalah teori tentang mesin abstrak yang : (i) bekerja sekuensial, (ii) menerima input, (iii) mengeluarkan output

Automaton tanpa *output* disebut penerima (*acceptor*) atau *recognizer*. Dinotasikan dengan $\mathcal{H} = (I, S; \delta)$ dimana $I = \text{input}$, $\varphi \neq S = \text{state}$, $\delta : S \times I \rightarrow S$ dengan δ suatu pemetaan transisi. Sedangkan automaton dengan *output* disebut *quintuple* $\mathcal{A} = (I, S, O; \delta, \gamma)$ dimana $(I, S, \delta) = \text{penerima}$, $O/D = \text{output}$, $\gamma : S \times I \rightarrow O = \text{pemetaan output}$. Jadi untuk setiap $s \in S$ dan $e \in I$ nilai $\delta(s, e) = s'$ dan $\gamma(s, e) = \text{output}$ yang dihasilkan saat *input* e dibaca dan mesin akan menyatakan s . Jika semua himpunan I, S, O adalah berhingga maka automaton akan berhingga dan sebaliknya. Suatu I, S, O yang berhingga dinyatakan dengan I_n, S_n, O_n yang artinya I, S, O memuat n elemen. Jika δ dan ϕ adalah pemetaan maka hanya ada satu bayangan (*image*) untuk setiap pasangan *state* (s, e) maka perilaku automata dapat dibedakan (*deterministic*). Selain itu automata disebut *non-deterministic*.

Ada dua tipe automata yang berbeda bergantung pada *output* dan fungsi γ . Didefinisikan (i) *Mealy* automata jika $\gamma : S \times I \rightarrow O$ adalah fungsi biner dan (ii) *Moore* automata jika $\gamma : S \rightarrow O$ adalah fungsi *unary*. Dalam beberapa kasus *output* tidak bergantung dari elemen *input* saja tapi juga bergantung pada *state*. Jika $s_0 \in I$, dimana s_0 adalah *state* awal dan ditulis

$$(I, S; \delta, s_0) \text{ atau } (I, S, O; \delta, \gamma, s_0)$$

Jika elemennya berhingga, automata dapat disajikan dalam table untuk δ dan γ atau ditampilkan dalam suatu graph berarah. Titik dari graph menunjukkan *state* dan sisi (*edge*) diberi simbol $e_j; d_k$ dari titik s_2 ke titik s_1 dimana

$$\delta(s_2, e_j) = s_1 \text{ dan } \gamma(s_2, e_j) = d_k$$

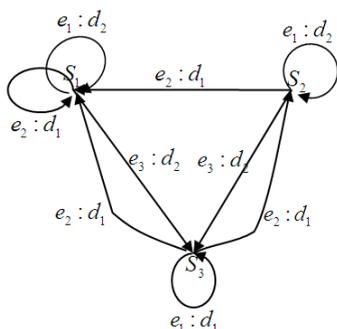
Misalkan

$$S = \{s_1, s_2, s_3\}, I = \{e_1, e_2, e_3\}, O = \{d_1, d_2\}$$

ditunjukkan dengan tabel berikut :

δ	e_1	e_2	e_3
s_1	s_1	s_1	s_3
s_2	s_2	s_1	s_3
s_2	s_2	s_1	s_3

γ	e_1	e_2	e_3
s_1	d_2	d_1	d_2
s_2	d_2	d_1	d_2
s_2	d_1	d_1	d_2



Gambar 2. Graph dari Automata

Misalkan s_0 adalah *state* awal dan e_1, e_2, \dots, e_n adalah barisan *input* maka barisan yang sesuai dengan *state* yang diperoleh adalah $s_0, s_1 = \delta(s_0, e_1), s_2 = \delta(\delta(s_0, e_1), e_2) \dots, s_n = \delta(s_{n-1}, e_n)$.

Contoh sebelumnya telah menunjukkan bahwa ada elemen-elemen yang sama dalam barisan dan barisan elemen output adalah $d_1 = \gamma(s_0, e_1), \dots,$

$d_n = \gamma(s_{n-1}, e_n)$. Jelaslah bahwa dua *state* s dan s' dalam automaton tidak dapat dibedakan jika kedua *state* ini menghasilkan *output* yang sama dan *state* yang sama untuk setiap input sehingga didefinisikan suatu bisimulasi untuk automata.

Definisi 6:

Bisimulasi dalam automata adalah relasi $\sim \subseteq S \times S$ yang memenuhi aturan

$$s \sim s' := (\gamma(s, e) = \gamma(s', e), \delta(s, e) \sim \delta(s', e), \forall s \in I$$

Automata yang *finite* (berhingga) digunakan untuk membedakan *bahasa* atau suatu himpunan kata. Dimana bahasa terdiri atas simbol-simbol satuan yang jika dikombinasikan akan mempunyai arti yang berbeda-beda.. Simbol-simbol yang biasa digunakan dalam sebuah bahasa terbatas jumlahnya, yang membentuk sebuah himpunan dan disebut sebagai abjad (*alphabet*). Kadangkala digunakan istilah karakter yang maknanya sama dengan simbol. Deretan karakter membentuk *string*. Bahasa (*language*) didefinisikan sebagai himpunan semua *string* yang dapat dibentuk dari suatu abjad. Kaidah/aturan pembentukan kata/kalimat disebut tata bahasa (*grammar*). Misalkan terdapat suatu himpunan berhingga $I_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ merupakan suatu abjad berhingga dengan $n \geq 1$. Dinotasikan I_n^* adalah himpunan semesta dari monoid bebas yang dibangun oleh I_n . Setiap bentuk monoid dari I_n^* dapat menggambarkan kata yang disusun dari huruf-huruf dalam I_n dengan anggapan bahwa huruf-hurufnya dapat diulang. Contoh $e_1e_2, e_2e_1e_1$ dan $e_1e_2e_3e_3$ adalah kata dari abjad $I_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$. Secara umum setiap kata (*word*) dapat

diwakili dengan $w = e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}$ untuk suatu $m \geq 0$ dan $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m} \in I_n$. Notasi m adalah panjang kata w dan disimbolkan $|w|$. Jika $m=0$ berarti merupakan suatu kata kosong (*empty word*) disimbolkan dengan ϵ . Himpunan I_n^+ didefinisikan sebagai himpunan semua huruf yang tidak kosong pada abjad I_n . Maka I_n^+ merupakan suatu semigrup dari monoid I_n^* dengan operasi biner.

Diketahui bahasa adalah himpunan kata, secara khusus bahasa atas abjad I_n adalah subset dari semesta monoid I_n^* . Ada beberapa operasi yang didefinisikan sebagai himpunan bahasa, salah satunya adalah operasi gabungan dalam teori himpunan. Sementara hasil kali dari dua bahasa, katakanlah U dan V didefinisikan sebagai

$$UV := \{uv \mid u \in U, v \in V\}.$$

Maka akan berlaku

$$U(VW) = (UV)W$$

untuk setiap bahasa U, V , dan W pada I_n , dimana $U\phi = \phi U = \phi$ dan $U\{\epsilon\} = \{\epsilon\}U = U$.

Definisi 7:

Hasil kali dari operasi ini dapat diperluas secara induktif menjadi himpunan kuasa dari bahasa (*power of language*). Untuk setiap bahasa U didefinisikan U^m untuk semua $m \geq 0$ sebagai : (i) $U^0 = \{\epsilon\}$ dan (ii) $U^m = U^{m-1}U, \forall m \geq 0$

Maka dapat didefinisikan $U^* = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U^m$ dan $U^+ = \bigcup_{m \geq 1} U^m$. Suatu kata $w \in I_n^*$ akan berada dalam U^* jika dan hanya jika w adalah kata kosong, dengan demikian w dapat dinyatakan dengan u_1u_2, \dots, u_m untuk suatu $m \geq 1$. Jadi I_n^m adalah himpunan semua kata dengan dengan panjang m pada abjad I_n dan $I_n^* = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_n^m$. Operasi unary yang mengambil bahasa U menjadi bahasa U^* disebut iterasi.

Definisi 8:

Suatu himpunan *Reg* I_n merupakan himpunan semua bahasa beraturan atas abjad I_n adalah himpunan terkecil R sedemikian hingga (i) $\phi \in R$ dan $\{x\} \in R, \forall x \in I_n$ dan (ii) untuk setiap U dan V dalam $R, U \cup V, UV$ dan $U^* \in R$

Dari definisi di atas maka setiap bahasa yang berhingga adalah beraturan. Didefinisikan suatu himpunan *Reg* I_n sebagai himpunan terkecil dari bahasa

atas I_n yang memuat semua bahasa berhingga dan tertutup terhadap tiga operasi bahasa beraturan. Dimana tiga operasi tersebut adalah operasi gabungan, pergandaan dan iterasi. Digunakan simbol biner (+) untuk operasi gabungan, simbol biner (\circ) untuk operasi pergandaan dan simbol unary * untuk operasi iterasi. Selain itu dinotasikan operasi nullary untuk \emptyset dan kata kosong ε . Jika diberikan tipe aljabar (2, 2, 1, 0, 0), maka tipe ini disebut ekspresi regular atas abjad I_n .

Definisi 9:

Suatu automaton atau acceptor $\mathcal{A} = (I, S, O; \delta, \gamma)$, dengan pemetaan output unary $\gamma: S \rightarrow O$, dan pemetaan transisi $\delta^*: S \times I_n^* \rightarrow S$ akan memenuhi :

- (i) $\delta^*(s, \varepsilon) = s, \forall s \in S$ dan
- (ii) $\delta^*(s, ew) = \delta^*(\delta(s, e), w), \forall w \in I^*, e \in I_n$.

Maka bisimulasi dari automata dapat didefinisikan dengan aturan sebagai berikut: $s \sim s' := \gamma(s) = \gamma(s'), \forall e \in I_n$ ($\delta(s, e) \sim \delta(s', e)$)

Diperkenalkan suatu kongruensi baru yang didefinisikan pada setiap automata, dimana akan dibahas karakteristik dari bisimulasi yang terbesar pada automaton.

Definisi 10:

Misalkan $\mathcal{A} = (I, S, O; \delta, \gamma)$ adalah automaton. Suatu Nerode atau kongruensi sintatic pada \mathcal{A} , adalah relasi \sim_N yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (\forall s, s' \in S) s \sim_N s' &\Leftrightarrow \forall w \in I^*, (\gamma(\delta^*(s, w)) \\ &= \gamma(\delta^*(s', w))) \\ &\Leftrightarrow \forall w \in I^* ((\delta^*(s, w), \delta^*(s', w)) \in \text{Ker } \gamma \\ &\Leftrightarrow \forall w \in I^* ((s, w), (s', w)) \in \text{Ker}(\gamma \circ \delta^*) \end{aligned}$$

Proposisi 1:

Misalkan $\mathcal{A} = (I, S, O; \delta, \gamma)$ adalah suatu many-sorted aljabar yang mewakili suatu automata. Kongruensi Nerode adalah bisimulasi terbesar dan kongruensi terbesar φ pada \mathcal{A} yang memenuhi $\varphi \subseteq \text{Ker } \gamma$

Bukti

Jelas berdasarkan definisi \sim_N adalah relasi ekuivalensi pada S. Untuk melihat bahwa \sim_N adalah relasi kongruensi, dimisalkan state s dan s' maka $s \sim_N s'$, dan $\forall e \in I, w \in I^*$ diperoleh :

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \gamma(\delta^*(s, \varepsilon)) \\ &= \gamma(\delta^*(s', \varepsilon)) \\ &= \gamma(s') \end{aligned}$$

Maka $\forall e \in I, w \in I^*$ diperoleh :

$$\begin{aligned} \gamma(\delta^*(\delta(s, e), w)) &= \gamma(\delta^*(s, ew)) \\ &= \gamma(\delta^*(\delta(s', e), w)) \end{aligned}$$

$$\therefore \delta(s, e) \sim_N \delta(s', e)$$

Misalkan \sim bisimulasi pada S, akan ditunjukkan $\sim \subseteq \sim_N$

Akan dibuktikan bahwa untuk setiap kata $w \in I^*$ dan untuk semua state $s, s' \in S$ berlaku

$$s \sim s' \Rightarrow \gamma(\delta^*(s, w)) = \gamma(\delta^*(s', w))$$

Dengan induksi :

Untuk $w = \varepsilon$, jelas dipenuhi karena langsung dari definisi bisimulasi

Untuk $w = ev$, untuk suatu huruf e dan untuk kata v dimana :

$$\begin{aligned} \gamma(\delta^*(s, v)) &= \gamma(\delta^*(s', v)) \Rightarrow \\ \gamma(\delta^*(s, ev)) &= \gamma(\delta^*(\delta(s, e), v)) \\ &= \gamma(\delta^*(\delta(s', e), v)) \\ &= \gamma(\delta^*(s', ev)) \end{aligned}$$

$$\therefore \sim \subseteq \sim_N$$

Untuk setiap bisimulasi \sim dipunyai $\sim \subseteq \text{Ker } \gamma$, maka akan ditunjukkan bahwa $\theta \subseteq \text{Ker } \gamma$ adalah kongruensi dari many-sorted aljabar $A = (I, S, O; \delta, \gamma)$

Misalkan (s, s') adalah pasangan dalam θ . Jika θ adalah kongruensi maka $\gamma(s) = \gamma(s')$ dan $\delta^*(s, \varepsilon) = \delta^*(s', \varepsilon)$. Anggaplah $w = eu$ untuk suatu huruf e dan kata u dimana $\delta^*(s, u) = \delta^*(s', u)$ maka

$$(\delta(s, e), \delta(s', e)) \in \theta$$

dan

$$\delta^*(\delta(s, e), u) = \delta^*(\delta(s', e), u)$$

diperoleh :

$$\begin{aligned} \delta^*(s, eu) &= \delta^*(\delta(s, e), u) \\ &= \delta^*(\delta(s', e), u) \\ &= \delta^*(s', eu) \end{aligned}$$

$$\therefore \theta \subseteq \sim_N \quad \square$$

Diberikan suatu himpunan state S sebagai himpunan automata berhingga yang deterministic, dengan state s_0 adalah state awal dan himpunan $F \subseteq S$ adalah akhir (final)/himpunan state yang diterima. Suatu kata (word) dikatakan dapat diterima oleh automaton jika $\delta^*(s_0, w) \in F$. Misalkan $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ adalah himpunan bahasa yang dapat diterima oleh \mathcal{A} . Suatu bahasa \mathcal{L} dikatakan dapat dikenali jika terdapat automata berhingga yang deterministic atau penerima \mathcal{A} sedemikian hingga $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Teorema Kleene mengatakan bahwa suatu bahasa dapat dikenali jika dan hanya jika bahasa tersebut regular.

Definisi 11:

Misalkan L adalah bahasa atas abjad I maka $\forall e \in I$ didefinisikan:

$$L_e := \{ w \in I^* \mid ew \in L \} = \gamma(\delta^*(s', ew))$$

Dapat diterapkan setiap state s dari automaton (penerima) A yang memuat semua kata yang berasal dari s ke dalam suatu state yang diterima

$$L(A, s) := \{ w \in I^* \mid \delta^*(s, w) \in F \}$$

Proposisi 2:

Misalkan S adalah himpunan state dari suatu automaton A atas abjad I dan misalkan $F \subseteq S$ adalah state akhir dari A . $(\forall s, s' \in S)(\forall e \in I)$ berlaku :

$$\delta(s, e) = s' \Leftrightarrow L(A, s)_e = L(A, s')$$

Bukti

(\Rightarrow) Diketahui : $\delta(s, e) = s'$

Akan dibuktikan : $L(A, s)_e = L(A, s')$

$$\begin{aligned} L(A, s)_e &= \{ w \in I^* \mid ew \in L(A, s) \} \\ &= \{ w \in I^* \mid \delta^*(s, ew) \in F \} \\ &= \{ w \in I^* \mid \delta^*(\delta(s, e), w) \in F \} \\ &= \{ w \in I^* \mid \delta^*(s', w) \in F \} \\ &= L(A, s') \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Diketahui : $L(A, s)_e = L(A, s')$

Akan dibuktikan : $\delta(s, e) = s'$

$$\begin{aligned} L(A, s)_e = L(A, s) &\Leftrightarrow \{ w \in I^* \mid \delta^*(\delta(s, e), w) \in F \} \\ &= \{ w \in I^* \mid \delta^*(s', w) \in F \} \end{aligned}$$

$\therefore \delta(s, e) = s' \quad \square$

4. Struktur Kripke

Banyak informasi dalam sistem *state-based* yang terdiri dari beberapa komponen berupa kumpulan program yang berhubungan satu sama lain dan saling bekerja sama. Namun beberapa operasi/interaksinya tidak dapat dibedakan dan bahkan dibutuhkan suatu pemetaan untuk menentukan *state* yang berubah dan *ouputnya* sebagai himpunan batasan. Batasan yang diberikan berupa suatu relasi R tidak tunggal dari sisi kanan. Suatu relasi R yang tidak tunggal dari sisi kanan berupa relasi antara pasangan (a, b) dan (a, c) dengan $b \neq c$. Struktur yang dimodelkan lewat automata yang tidak dapat dibedakan tersebut dikenal dalam ilmu komputer sebagai struktur Kripke. Suatu sifat utama dari struktur Kripke adalah relasi transisi dan bukan fungsi transisi seperti pada automata.

Definisi 12:

Misalkan Φ suatu himpunan tak kosong. Struktur Kripke atas Φ adalah tripel $(S; R; \nu)$ dengan S himpunan state, R relasi biner dalam S ($R \subseteq S \times S$) dan fungsi $\nu: \Phi \rightarrow P(S)$ dimana $P(S)$ adalah himpunan kuasa dari S . Selanjutnya pasangan $(S; R)$ disebut bingkai Kripke.

Suatu perubahan dari *state* s ke *state* s' dalam suatu struktur Kripke dinyatakan dalam bentuk pasangan dalam relasi R . Hal ini disebut relasi transisi (dinotasikan

$s \xrightarrow{R} s'$). Untuk menyatakan struktur Kripke dalam suatu operasi tunggal pada S dapat dikombinasikan relasi transisi $R \subseteq S \times S$ dan suatu fungsi valuasi $\nu: \Phi \rightarrow P(S)$ ke dalam suatu pemetaan dengan domain S . Langkah pertama, dapat dibawa informasi dalam relasi R ke dalam bentuk pemetaan.

Misalkan $R \subseteq A \times B$ adalah sebarang relasi. Selanjutnya didefinisikan suatu pemetaan parsial $f: A \rightarrow P(B)$ dengan $x \sim y \wedge x \rightarrow x' := (\exists y') y \rightarrow y' \wedge x' \sim y'$ dimana $C := \{ c \in B \mid (a, c) \in R \}$ hal ini berarti setiap elemen a dalam himpunan semua elemen saling berelasi dengan relasi R . Sebaliknya setiap pemetaan $f: A \rightarrow P(B)$ dalam relasi $R_f: A \times B$ sebagai

$R_f := \{ (a, c) \mid c \in C \exists f(a) = C \}$. Hal ini berakibat ada korespondensi satu-satu antara relasi $R \subseteq A \times B$ dan pemetaan parsial $f: A \rightarrow P(B)$.

Dalam kaitannya dengan struktur Kripke dapat dibawa (diubah) relasi transisi $R \subseteq S \times S$ ke dalam suatu fungsi induksi $next: S \rightarrow P(S)$. Selanjutnya dengan penambahan suatu pemetaan $prop: S \rightarrow P(\Phi)$ yang didefinisikan sebagai $s \rightarrow \{ a \in \Phi \mid s \in \nu(a) \}$. Karena kedua pemetaan tersebut memiliki domain yang sama S maka dapat digunakan hasil kali tensor $next \otimes prop: S \rightarrow P(S) \times P(\Phi)$. Sehingga struktur Kripke dari $(S; R; \nu)$ dapat dinyatakan sebagai pasangan $(S; next \otimes prop)$.

Untuk mendefinisikan bisimulasi dalam struktur Kripke dibutuhkan dua *state*. Untuk dua *state* yang dapat dibedakan katakanlah x dan y , bisimulasinya adalah $x \sim y := \nu(x) = \nu(y)$. Hal ini berarti kedua *state* tersebut menyatakan dua proposisi yang berbeda dan sah (*well defined*). Sedngkan untuk dua *state* yang tidak dapat dibedakan, harus dikondisikan bahwa untuk setiap transisi yang dimulai dari x harus ada transisi yang dimulai dari y . Didefinisikan bisimulasi dari x dan y sebagai berikut:

$$x \sim y \wedge x \rightarrow x' := (\exists y') y \rightarrow y' \wedge x' \sim y'$$

dan

$$x \sim y \wedge y \rightarrow y' := (\exists x') x \rightarrow x' \wedge x' \sim y'$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bagian ini akan dibahas prinsip-prinsip koaljabar dalam sistem *state-based*. Konsep koaljabar dalam sistem *state-based* dapat dilihat dari beberapa contoh berikut ini.

a. Kotak Hitam (*Black boxes*)

Kotak-hitam dapat dipandang sebagai suatu struktur aljabar. Untuk suatu himpunan data D dan himpunan *state* S yang dilengkapi dengan pemetaan

$$h: S \rightarrow D, t: S \rightarrow S$$

maka dapat dibentuk $(S, D; h, t)$. Selanjutnya kotak hitam dapat dipandang juga sebagai suatu koaljabar

dengan menggabungkan dua pemetaan h dan t ke dalam satu pemetaan $\alpha: S \rightarrow N \times S$ dengan definisi

$$\alpha(s) := (h \otimes t)(s) = (a, s')$$

- b. Rekening Bank (*Bank Account*)
 Dalam sistem program rekening bank, ada dua pemetaan yang bisa dibentuk
 $show: S \rightarrow Z; trans: S \times Z \rightarrow S$
 dimana keduanya dapat digabungkan menjadi suatu pemetaan

$$\alpha: S \rightarrow Z \times S^Z.$$

Pemetaan ini membawa setiap *state* $s \in S$ menjadi pasangan: bilangan bulat dan suatu pemetaan dari Z ke S

- c. Automaton
 Untuk suatu automata berhingga (tipe Moore Automata) dua pemetaan

$$\gamma: S \rightarrow D, \delta: S \times I \rightarrow S$$

dapat digabungkan menjadi suatu pemetaan

$$\alpha: S \rightarrow D \times S^I.$$

Pemetaan α memetakan setiap *state* s ke pasangan: elemen *output* dan pemetaan dari setiap himpunan *input* I ke *state* S .

- d. Penerima (*Acceptor*)
 Untuk sebuah penerima dengan himpunan $F \subseteq S$, dimana F adalah *state* akhir (*final state*) dapat digabungkan dua pemetaan: F dan pemetaan

$$\delta: S \times I \rightarrow S, \alpha: S \rightarrow \{0,1\} \times S^I.$$

Pemetaan α membawa setiap *state* s ke pasangan: $\{0,1\}$ (dimana 0:=tidak diterima, 1:=diterima) dan pemetaan dari I ke S .

- e. Struktur Kripke
 Telah dijelaskan sebelumnya dalam suatu struktur Kripke $(S; R; \nu)$, relasi $R \subseteq S \times S$ dapat digantikan dengan suatu pemetaan

$$next: S \rightarrow P(S)$$

Untuk memperoleh setiap pemetaan *next* dianggap bahwa setiap relasi R menggunakan setiap *state* S sebagai komponen pertama. Selanjutnya dengan kombinasi pemetaan

$$prop: S \rightarrow P(\Phi)$$

dapat dipandang struktur Kripke $(S; R; \nu)$ sebagai

$$(S; next \otimes prop)$$

dimana

$$next \otimes prop: S \rightarrow P(S) \times P(\Phi)$$

Dari beberapa contoh yang telah dikemukakan di atas diperoleh suatu struktur koaljabar $(A; \alpha_A)$ dimana $\alpha_A: A \rightarrow F(A)$ merupakan suatu fungsi dari sebarang

himpunan A ke suatu functor $F(A)$. Hal ini dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 12:

Suatu F -koaljabar atau biasa disingkat koaljabar adalah suatu sistem $(A; \alpha_A)$ memuat himpunan A dan pemetaan $\alpha_A: A \rightarrow F(A)$ untuk konstruksi teori himpunan $F(A)$.

Homomorfisma Sistem State-based

Definisi 13:

Misalkan (S, hd, tl) dan (S', hd', tl') adalah kotak hitam. Suatu pemetaan $f: S \rightarrow S'$ disebut homomorfisma dari kotak hitam jika untuk setiap $s \in S$ berlaku:

- (i) $hd(s) = (hd' \circ f)(s) = hd'(f(s))$ dan
- (ii) $f(tl(s)) = (tl' \circ f)(s) = tl'(f(s))$

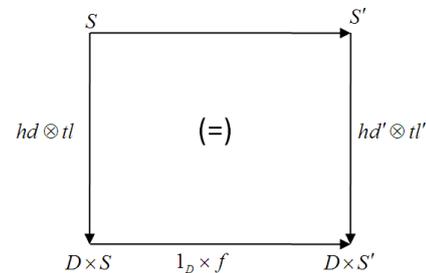
Dalam hal ini yang dimaksudkan dengan representasi koaljabar dari suatu kotak hitam, yaitu jika kondisi (i) dan (ii) terpenuhi. Maka untuk setiap $s \in S$ berlaku:

$$(hd(s), (f \circ tl(s))) = ((hd' \circ f)(s), (tl' \circ f)(s))$$

atau dapat ditulis dalam bentuk

$$(1_D \times f) \circ (hd \otimes tl) = (hd' \otimes tl') \circ f \quad (*)$$

Dimana $1_D: D \rightarrow D$ adalah pemetaan identitas pada D . Persamaan (*) dapat dilihat dari diagram komutatif berikut ini:



Gambar 3. Homomorfisma kotak hitam

Proposisi 3:

Suatu pemetaan $f: S \rightarrow S'$ adalah homomorfisma dari kotak hitam jika dan hanya jika $(1_D \times f) \circ (hd \otimes tl) = (hd' \otimes tl') \circ f$

Bukti

- (\Rightarrow) Jelas berdasarkan definisi homomorfisma suatu kotak hitam/setiap homomorfisma f dari kotak hitam akan memenuhi kondisi (*)
- (\Leftarrow) Dengan menggunakan sifat umum dari suatu produk kartesian bahwa untuk setiap pemetaan $f: C \rightarrow A$ dan $g: C \rightarrow B$ maka terdapat suatu pemetaan tunggal $f \otimes g: C \rightarrow A \times B$ yang memenuhi: $p_1 \circ (f \otimes g) = f$ dan $p_2 \circ (f \otimes g) = g$ dimana p_1 dan p_2 adalah suatu pemetaan proyeksi/kanonik.

Anggaplah kondisi (*) terpenuhi maka dengan suatu pemetaan f maka untuk $\forall s \in S$ berlaku :
 Dari ruas kiri diperoleh :

$$\begin{aligned} (1_D \times f) \circ (hd \otimes tl)(s) &= (1_D \times f)(hd(s), tl(s)) \\ &= (1_D \circ hd)(s), (f \circ tl)(s) \\ &= (1_D(hd(s)), f(tl(s))) \\ &= (hd(s), f(tl(s))) \end{aligned}$$

Dari ruas kanan diperoleh :

$$\begin{aligned} ((hd' \otimes tl') \circ f)(s) &= hd'(f(s)) \otimes tl'(f(s)) \\ &= (hd'(f(s)), tl'(f(s))) \end{aligned}$$

Jadi kondisi (*) terpenuhi jika dan hanya jika $\forall s \in S$ diperoleh $(hd(s), f(tl(s))) = (hd'(f(s)), tl'(f(s)))$. Dengan kata lain $hd(s) = hd'(f(s))$ dan $f(tl(s)) = tl'(f(s))$ yang tidak lain merupakan definisi dari homomorfisma suatu kotak hitam. \square

Secara umum untuk suatu operasi $f : A \rightarrow A$ himpunan kuasa f^n secara induktif didefinisikan sebagai $f^0 = id_A$, $f^n = f \circ f^{n-1}$ untuk $n > 0$. Setiap kotak hitam dapat menghasilkan suatu barisan $(hd(s), (hd \circ tl)(s), (hd \circ tl^2)(s), (hd \circ tl^3)(s), \dots) \forall s \in S$

Proposisi 4:

Misalkan $(S;hd,tl)$ dan $(S';hd',tl')$ adalah kotak hitam dan $f : S \rightarrow S'$ adalah suatu homomorfisma, maka untuk setiap $s \in S$ berlaku $(hd \circ tl^n)(s) = (hd' \circ (tl')^n)(f(s))$

Bukti

Akan ditunjukkan dengan suatu induksi pada n bahwa $f \circ tl^n = (tl')^n \circ f$ dimana $f : S \rightarrow S'$ adalah homomorfisma suatu kotak hitam.

Untuk $n = 0$ jelas berlaku. Untuk $n = 1$ memenuhi kondisi (ii) homomorfisma kotak hitam

Untuk $n > 1$ dan misalkan $s \in S$ maka diperoleh :

Dari ruas kiri diperoleh :

$$\begin{aligned} (f \circ tl^n)(s) &= (f \circ tl \circ tl^{n-1})(s) \\ &= (tl' \circ f \circ tl^{n-1})(s) \\ &= (tl' \circ (tl')^{n-1} \circ f)(s) \\ &= ((tl')^n \circ f)(s) \end{aligned}$$

Dari ruas kanan diperoleh :

$$\begin{aligned} (hd' \circ (tl')^n)(f(s)) &= (hd' \circ (tl')^n \circ f)(s) \\ &= (hd' \circ f \circ tl^n)(s) \\ &= (hd \circ tl^n)(s) \quad \square \end{aligned}$$

Suatu Automata yang ditetapkan dengan input abjad I, output abjad D maka dapat dibentuk suatu automata berhingga yang deterministik berupa triple $(S; \delta, \gamma)$ dimana

- (i) $\delta : S \times I \rightarrow S$ adalah pemetaan transisi
- (ii) $\gamma : S \times I \rightarrow D$ adalah pemetaan output.

Definisi 14:

Misalkan $(S; \delta, \gamma)$ dan $(S'; \delta', \gamma')$ adalah automata. Suatu pemetaan $f : S \rightarrow S'$ adalah homomorfisma automata jika untuk setiap $s \in S$ dan setiap $e \in I$ berlaku: (i) $\gamma(s, e) = \gamma'(f(s), e)$ dan (ii) $(f \circ \delta)(s, e) = \delta'(f(s), e)$

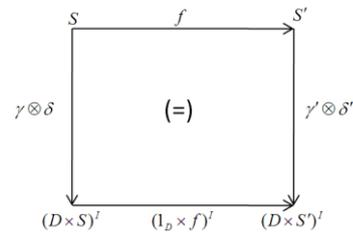
Kondisi (i) dari definisi di atas mempunyai arti bahwa state s dan $f(s)$ mempunyai output yang sama untuk setiap input e . Jika $\gamma(s, e) \in D$ dan $f : S \rightarrow S'$ maka fungsi f terjadi hanya pada satu bagian saja, hal ini membuat definisi fungsi f berbeda dengan definisi homomorfisma secara umum.

Kondisi (ii) dari definisi di atas mempunyai arti bahwa f kompatibel dengan pemetaan δ dan δ'

Misalkan $f : A \rightarrow B$ adalah pemetaan dan misalkan C adalah sebarang himpunan, maka A^C menotasikan setiap pemetaan dari C ke A . $f^C : A^C \rightarrow B^C$ adalah pemetaan yang membawa setiap $h \in A^C$, sehingga $f^C(h) := f \circ h \in B^C$

Proposisi 5:

Misalkan $(S; \delta, \gamma)$ dan $(S'; \delta', \gamma')$ adalah automata berhingga yang deterministik. Suatu pemetaan $f : S \rightarrow S'$ adalah homomorfisma automata jika dan hanya jika diagram di bawah ini komutatif



Gambar.4. Homomorfisma automata

Bukti

Diketahui :

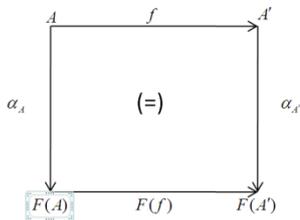
$$\begin{aligned} ((1_D \times f)^I \circ (\gamma \otimes \delta))(s) &= (1_D \times f)^I \circ ((\gamma \otimes \delta)(s)) \\ &= ((1_D \times f) \circ (\gamma \otimes \delta))(s) \text{ untuk setiap state } s \text{ dan input } e \\ &\Leftrightarrow (\gamma(s, e), (f \circ \delta)(s, e)) = ((\gamma'(f(s), e), \delta'(f(s), e))) \\ &\Leftrightarrow ((1_D \times f) \circ (\gamma \otimes \delta))(s, e) = (\gamma' \otimes \delta')(f(s), e) \\ &\Leftrightarrow (1_D \times f)((\gamma \otimes \delta)(s)(e)) = ((\gamma' \otimes \delta') \circ f)(s)(e) \\ &\Leftrightarrow ((1_D \times f)^I \circ (\gamma \otimes \delta))(s)(e) = ((\gamma' \otimes \delta') \circ f)(s)(e) \quad \square \end{aligned}$$

Diantara struktur homomorfisma automata dengan homomorfisma suatu kotak hitam ada hubungannya. Suatu kotak hitam adalah koaljabar dengan suatu pemetaan $\alpha_S : S \rightarrow F(S)$, dimana F adalah pemetaan

suatu nilai fungsi (set-value) dengan $F(X) = D \times X$ untuk setiap himpunan X . Sedangkan suatu homomorfisma automata dipandang sebagai suatu koaljabar dengan pemetaan $\alpha_S : S \rightarrow T(S)$, dimana pemetaan nilai fungsi T diartikan sebagai $T(X) = (D \times X)^I$ untuk setiap state X . Kedua pemetaan F dan T dapat dikenakan pemetaan berikut ini:

Misalkan $f : S \rightarrow S'$ maka $F(f) = 1_D \times f : D \times S \rightarrow D \times S'$; $T(f) = (1_D \times f)^I : (D \times S)^I \rightarrow (D \times S')^I$, maka $(S; \alpha_S)$ dan $(S'; \alpha_{S'})$ adalah representasi dari kotak hitam dan automata.

Suatu pemetaan $f : S \rightarrow S'$ adalah homomorfisma jika dan hanya jika $F(f) \circ \alpha_S = \alpha_{S'} \circ f$. Dapat dilihat dari diagram dibawah ini yang komutatif.



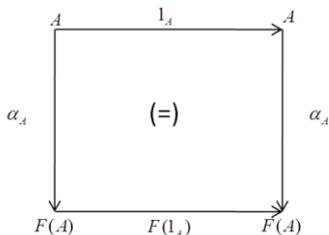
Gambar 5. Homomorfisma F-koaljabar

Hal ini menunjukkan bahwa jika homomorfisma adalah pemetaan yang mengawetkan suatu struktur maka minimal ada dua sifat yang harus dipertahankan :

- (i) Pemetaan identitas adalah suatu homomorfisma
- (ii) komposisi dua homomorfisma adalah homomorfisma juga

Dalam koaljabar, jika $f : A \rightarrow B$ maka selalu terdapat $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$. Berdasarkan sifat tersebut maka akan dilihat apakah dapat diperoleh sifat yang lain jika dua sifat homomorfisma di atas juga dipenuhi.

Untuk setiap $(A; \alpha_A)$, suatu pemetaan 1_A adalah homomorfisma jika diagram berikut ini komutatif.

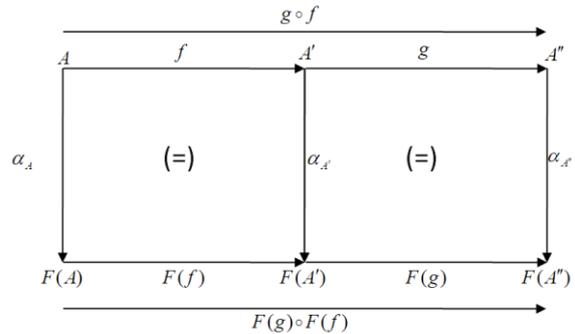


Gambar 6. Homomorfisma Identitas

Dari diagram terlihat bahwa $\alpha_A \circ 1_A = F(1_A) \circ \alpha_A$, hal ini menunjukkan bahwa F mengawetkan suatu pemetaan identitas

$$1_A, F(1_A) = 1_{F(A)}$$

Misalkan $(A; \alpha_A)$, $(A'; \alpha_{A'})$ dan $(A''; \alpha_{A''})$ adalah F -koaljabar dan misalkan $f : (A; \alpha_A) \rightarrow (A'; \alpha_{A'})$ dan $g : (A'; \alpha_{A'}) \rightarrow (A''; \alpha_{A''})$ adalah homomorfisma. Jika f dan g adalah homomorfisma maka dua persegi yang kecil dari diagram berikut ini akan komutatif



Gambar 7. Komposisi homomorfisma

Suatu pemetaan $g \circ f$ adalah homomorfisma jika persegi yang paling besar dari diagram diatas komutatif sedemikian hingga $\alpha_{A''} \circ (g \circ f) = F(g \circ f) \circ \alpha_A$ dengan anggapan bahwa $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

Definisi 15:

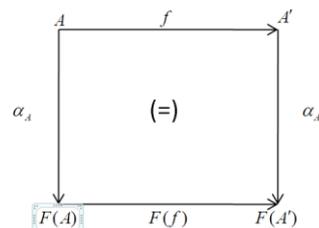
Fungtor pada himpunan adalah suatu operasi F pada himpunan tersebut dan pemetaan yang memenuhi :

- (i) Jika A adalah himpunan maka F(A) juga himpunan.
- (ii) Jika f adalah pemetaan maka F(f) juga pemetaan dengan sifat :

- a. Jika $f : A \rightarrow B$ maka $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$
- b. $F(1_A) = 1_{F(A)}$
- c. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ adalah komposisi dimana $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$.

Definisi 16:

Misalkan $F : Set \rightarrow Set$ adalah functor dan $(A; \alpha_A)$ dan $(A'; \alpha_{A'})$ adalah F -koaljabar. Suatu pemetaan $f : A \rightarrow A'$ adalah homomorfisma koaljabar dari $(A; \alpha_A)$ ke $(A'; \alpha_{A'})$ jika $F(f) \circ \alpha_A = \alpha_{A'} \circ f$ dan diagram berikut ini komutatif.



Gambar 8. Homomorfisma koaljabar

Proposisi 6:

Misalkan $F : Set \rightarrow Set$ adalah functor maka untuk setiap

koaljabar $(A; \alpha_A)$, $(A'; \alpha_{A'})$ $(A''; \alpha_{A''})$ berlaku :

- (i) $1_A : (A; \alpha_A) \rightarrow (A; \alpha_A)$ adalah homomorfisma koaljabar
- (ii) Jika $f : (A; \alpha_A) \rightarrow (A'; \alpha_{A'})$ dan $g : (A'; \alpha_{A'}) \rightarrow (A''; \alpha_{A''})$ adalah homomorfisma koaljabar maka $g \circ f : (A; \alpha_A) \rightarrow (A''; \alpha_{A''})$

[6] Hasuo, L., Jacobs, B., and Sokolova, A., 2007, *Generic Trace Semantic via Coinduction*, Logical Methods in Computer Science 3, Issue A, pp 1-36

[7] Hansen, H.,H., and Rutten, J., 2014, *Stream and Coalgebra*, Radbound University Nijmegen & CWI Amsterdam

KESIMPULAN

1. Koaljabar dalam sistem *state-based* merupakan kombinasi beberapa pemetaan dari sistem *state-based* menjadi suatu pemetaan.
2. Kotak hitam dalam sistem *state-based* menggunakan prinsip koaljabar dengan menggabungkan pemetaan $\alpha : D \rightarrow E$, $\beta : D \rightarrow F$ menjadi $\alpha \otimes \beta : D \rightarrow E \times F$ yang merupakan hasil kali tensor dari α dan β sehingga dapat ditulis $(S, \alpha \otimes \beta)$.
3. Automata dalam sistem *state-based* menggunakan prinsip koaljabar dengan menggabungkan pemetaan $\alpha : S \times I \rightarrow S$ dan $\gamma : S \times I \rightarrow O$ menjadi suatu pemetaan yaitu $\alpha_S : S \rightarrow O \times S^I$ dan $\alpha_S : S \rightarrow (O \times S)^I$.
4. Struktur Kripke dalam sistem *state-based* menggunakan prinsip koaljabar dengan menggabungkan pemetaan $next : S \rightarrow P(S)$ dan $prop : S \rightarrow P(\Phi)$ sehingga struktur Kripke $(S; R; \nu)$ dapat dipandang sebagai $(S; next \otimes prop)$ dimana $next \otimes prop : S \rightarrow P(S) \times P(\Phi)$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Denecke K., Wismath, S.L., 2009, *Universal Algebra and Coalgebra*, World Scientific. New York
- [2] Gumm, H.P., 2009, *Universal Coalgebras and Their Logics*, The Arabian Journal for Science and Engineering (AJSE), Volume I, p. 105-130
- [3] Jacobs, B., 2005, *Introduction to Coalgebra Towards Mathematics of States and Observations*, Institute for Computing and Information Sciences, Radbound University Nijmegen, Netherlands
- [4] Rutten, J., 2000, *Universal Coalgebra A Theory of System Theoretical Computing Science*, p 249, Elsevier
- [5] Kupke, C., Kurz, A., and Pattinson, D., 2004, *Algebraic Semantic for Coalgebraic Model Logic*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science, p 106, Elsevier

ANALISIS LQ DAN ANALISIS SHIFT- SHARE DALAM PEMANFAATAN EKONOMI SEKTORAL KABUPATEN MALUKU TENGAH TAHUN 2008 – 2010

*LQ and Shift-Share Analysis in Sectoral Economic Utilization of Central Moluccas Regency
at the 2008 - 2010*

JEFRI TIPKA

Badan Pusat Statistik Kabupaten Maluku Tengah
Jl. R. A. Kartini No. 15 Kelurahan Namaelo, Masohi 97511
E-mail : jefri.tipka@bps.go.id

ABSTRAK

PDRB merupakan Indikator Ekonomi Makro yang dapat diturunkan untuk menghitung indikator-indikator penting lainnya seperti Pertumbuhan Ekonomi, PDRB Per Kapita, Pendapatan Per Kapita dan sebagainya. Selain itu, PDRB dapat digunakan untuk berbagai analisis. Analisis terhadap PDRB sangat penting salah satunya untuk melihat potensi dan keunggulan apa saja yang dimiliki oleh Kecamatan tertentu. Sektor apa yang dapat menyumbangkan nilai tambah yang besar terhadap perekonomian. Selain melihat potensi ekonomi analisis terhadap PDRB juga dapat dilihat untuk melihat ketimpangan Ekonomi antar daerah/Kecamatan.

Hal ini bisa digunakan sebagai salah satu evaluasi dalam kebijakan yang telah dilakukan dan sebagai pertimbangan untuk mengambil kebijakan yang paling tepat dimasa yang akan datang. Salah satu metode yang populer untuk menganalisis potensi ekonomi suatu daerah/Kecamatan adalah metode *Location Quotient* (LQ). Sedangkan untuk melihat/mengukur ketimpangan pembangunan antar daerah secara sederhana dapat dilakukan dengan menggunakan analisis *shift-share*.

Kata kunci: *Location Quotient (LQ), Shift-share, PDRB*

PENDAHULUAN

Pengertian Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) dapat ditinjau pada 3 (tiga) segi, yaitu Pendekatan Produksi, Pendapatan dan Pengeluaran. Jika ditinjau dengan pendekatan produksi, maka Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) merupakan jumlah nilai produk barang dan jasa akhir yang dihasilkan oleh unit produksi didalam suatu daerah/region dalam jangka waktu tertentu (biasanya 1 tahun).

Unit produksi atau yang lebih dikenal dengan lapangan usaha/sektor ekonomi dalam penyajiannya dikelompokkan kedalam 9 (sembilan) lapangan usaha/sektor ekonomi yaitu :

1. Sektor Pertanian
Sektor ini mencakup Sub Sektor Tanaman Bahan Makanan, Perkebunan, Peternakan dan hasil-hasilnya, kehutanan dan Perikanan.
2. Sektor Pertambangan dan Penggalian
3. Sektor Industri Pengolahan
4. Sektor Listrik, Gas dan Air Bersih
5. Sektor Bangunan

6. Sektor Perdagangan, Hotel dan Restoran
7. Sektor Pengangkutan & Komunikasi
8. Sektor Keuangan, Persewaan, dan Jasa Perusahaan
9. Sektor Jasa-jasa

Dengan menggunakan pendekatan Pendapatan, maka Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) dapat diartikan sebagai jumlah/total balas jasa yang diterima oleh faktor-faktor produksi yang ikut serta dalam proses produksi disuatu daerah/region dalam jangka waktu tertentu (biasanya 1 tahun).

Dengan pendekatan pengeluaran Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) diartikan sebagai jumlah/total pengeluaran/penggunaan yang mencakup Konsumsi Rumah Tangga, Konsumsi Lembaga Swasta tidak mencari keuntungan (Lembaga Nirlaba), Konsumsi Pemerintah/*Governant Expenditure*, Pembentukan Modal Tetap Bruto (PMTB), Ekspor Netto (Ekspor dikurangi Impor) dan perubahan stok didalam suatu daerah/region dalam jangka waktu tertentu (biasanya selama satu tahun).

PDRB merupakan Indikator Ekonomi Makro yang dapat diturunkan untuk menghitung indikator-indikator penting lainnya seperti Pertumbuhan Ekonomi, PDRB Per

Kapita, Pendapatan Per Kapita dan sebagainya. Selain itu dapat digunakan untuk berbagai analisis.

Analisis terhadap PDRB sangat penting salah satunya untuk melihat potensi dan keunggulan apa saja yang dimiliki oleh kabupaten/kota tertentu. Sektor apa yang dapat menyumbangkan nilai tambah yang besar terhadap perekonomian. Selain melihat potensi ekonomi analisis terhadap PDRB juga dapat dilihat untuk melihat ketimpangan Ekonomi antar daerah/kabupaten. Hal ini bisa digunakan sebagai salah satu evaluasi dalam kebijakan yang telah dilakukan dan sebagai pertimbangan untuk mengambil kebijakan yang paling tepat dimasa yang akan datang. Salah satu metode yang populaer untuk menganalisis potensi ekonomi suatu daerah/kabupaten adalah metode *Location Quotient* (LQ). Sedangkan untuk melihat/mengukur ketimpangan pembangunan antar daerah secara sederhana dapat dilakukan dengan menggunakan analisis shift-share.

Data PDRB Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah dapat diperoleh dari Publikasi Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) Kabupaten Maluku Tengah yang diterbitkan tahunan. Dalam tulisan ini data yang digunakan adalah data PDRB Kecamatan di Maluku Tengah dengan periode waktu tahun 2008-2010.

METODE PENELITIAN

1. Analisis *Location Quotient* (LQ)

Analisis *Location Quotient* (LQ) adalah salah satu analisis yang dapat digunakan untuk menganalisis potensi suatu daerah secara sektoral. Dari Analisis ini dapat diketahui sektor unggulan suatu daerah tertentu. Rumus untuk menghitung nilai *Location Quotient* (LQ) untuk sektor I di region r (dimana r adalah bagian dari n) adalah sebagai berikut :

sektor I di region r (dimana r adalah bagian dari n) adalah sebagai berikut :

$$LQ_i = \frac{(X_i^r / X_r)}{(X_i^n / X_n)} \quad (1)$$

X_i^r = Nilai tambah sektor I di region r

X_r = Nilai tambah total di region r

X_i^n = Nilai tambah sektor I di region n

X_n = Nilai tambah total di region n

- ✓ Jika nilai $LQ < 1$, maka dapat dikatakan bahwa sektor tersebut secara relatif kurang memiliki keunggulan komparatif.
- ✓ Jika nilai $LQ = 1$, maka dapat dikatakan bahwa daerah yang bersangkutan tidak terspesialisasi secara berlebihan ataupun kurang pada aktivitas ekonomi yang dimaksud.
- ✓ Jika nilai $LQ > 1$, maka dapat dikatakan bahwa daerah tersebut relatif terspesialisasi secara berlebihan (*overspecialized*) pada aktivitas ekonomi (sektor) yang bersangkutan.

2. Analisis Shift-Share

Analisis shift-share adalah salah satu analisis yang sederhana dengan menggunakan konsep proporsi dan pertumbuhan dimana kita dapat melihat sektor-sektor apa saja disuatu daerah yang lebih unggul dibandingkan daerah yang lain.

Dengan menggunakan perhitungan shift-share akan memungkinkan dihasilkannya perhitungan antar waktu (pertumbuhan) yang melibatkan daerah/negara lain (dengan penghitungan yang sederhana). Penghitungan dengan menggunakan analisis shift share mengasumsikan bahwa perekonomian daerah (semisal Kota Ambon) dipengaruhi oleh perekonomian Maluku dan kabupaten lain (keterkaitan antar daerah dan pengaruh kebijakan ekonomi provinsi).

Pertumbuhan kegiatan disuatu daerah pada dasarnya ditentukan oleh 3 (tiga) hal :

1. *National Share/National Growth Effect* (N)
National Share/National Growth Effect (N) merupakan pertumbuhan daerah dibandingkan dengan pertumbuhan provinsi dari provinsi tertentu.
 - ✓ Jika sektor tertentu pada provinsi tersebut memiliki pertumbuhan yang positif maka Nilai N untuk daerah objek yang dianalisis akan positif.
 - ✓ Jika sektor tertentu negara tersebut memiliki pertumbuhan negatif maka nilai N untuk daerah objek yang dianalisis akan negatif juga.
2. *Proportional Shift/Sectoral Mix Effect/Composition Shift* (M)
Proportional Shift/Sectoral Mix Effect/Composition Shift (M) adalah merupakan efek dari perbedaan pertumbuhan sektoral yang diamati pada suatu provinsi pembanding terhadap pertumbuhan total provinsi tersebut.
 - ✓ Jika sektor yang dibandingkan tumbuh lebih tinggi daripada pertumbuhan total pertumbuhan di provinsi pembanding maka hasilnya akan positif sehingga nilai M untuk sektor tersebut di daerah objek yang diteliti akan menjadi positif.
 - ✓ Jika sektor yang dibandingkan tumbuh lebih rendah daripada pertumbuhan total pertumbuhan di provinsi pembanding maka hasilnya akan negatif sehingga nilai M untuk sektor tersebut di daerah objek yang diteliti akan menjadi negatif.
3. *Regional Share/Competitive Effect* (R)
Regional Share/Competitive Effect (R) menggambarkan bagaimana jika sektor di daerah objek tersebut tumbuh seperti pola pertumbuhan sektor yang sama di provinsi pembanding.
 - ✓ Jika hasil R adalah positif dan lebih kecil dari pertumbuhan aktual sektor tersebut di daerah objek yang diteliti maka secara relatif provinsi pembanding lebih unggul dari daerah objek yang bersangkutan.
 - ✓ Jika hasil R adalah positif dan lebih besar dari pertumbuhan aktual sektor tersebut di daerah objek yang diteliti maka secara relatif daerah objek yang diteliti/bersangkutan lebih baik daripada provinsi pembanding.
 - ✓ Jika hasil R adalah negatif maka dapat dikatakan provinsi pembanding adalah lebih unggul secara

absolut pada sektor yang bersangkutan dibandingkan dengan daerah objek yang diamati.

Secara kuantitatif, perumusan shift-share harus memiliki keteraturan penghitungan sebagai berikut :

$$G = R + N + M \quad (2)$$

(formula ini dapat digunakan untuk mengecek kebenaran dari perhitungan analisis shift-share).

Dimana $G = Normal Growth$

$R = Regional Share/Competitive Effect$

$N = National Share/National Growth Effect$

$M = Proportional Shift/Sectoral Mix Effect/Composition Shift$

Normal Growth (G) adalah pertumbuhan disetiap sektor yang dinyatakan dalam angka nominal dan bukan persentase. *Normal Growth* bisa bernilai positif dan bernilai negatif. Jika hasilnya positif maka sektor tersebut tumbuh, sedangkan jika nilainya negatif maka sektor tersebut dapat dikatakan tidak tumbuh.

Adapun rumus untuk melakukan penghitungan R , N , M secara matematik adalah sebagai berikut :

$$R = \left[X_{irt} - \left(\frac{X_{int}}{X_{ino}} \right) \cdot X_{iro} \right] \quad (3)$$

$$N = \left[X_{iro} \left(\frac{X_{nt}}{X_{no}} \right) - X_{iro} \right] \quad (4)$$

$$M = \left[\left(\frac{X_{int}}{X_{ino}} \right) - \left(\frac{X_{nt}}{X_{no}} \right) \right] \cdot X_{iro} \quad (5)$$

Dimana :

X = Data statistik yang digunakan berupa tenaga kerja, input ataupun output

n = Nasional

r = Regional

i = Sektor

t = Menunjukkan tahun akhir

o = Menunjukkan tahun awal

Apabila perhitungan shift-share benar maka nilai $R+N+M=G$ untuk setiap sektor, dimana G adalah selisih nilai tambah sektor tertentu pada waktu $t1-t0$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

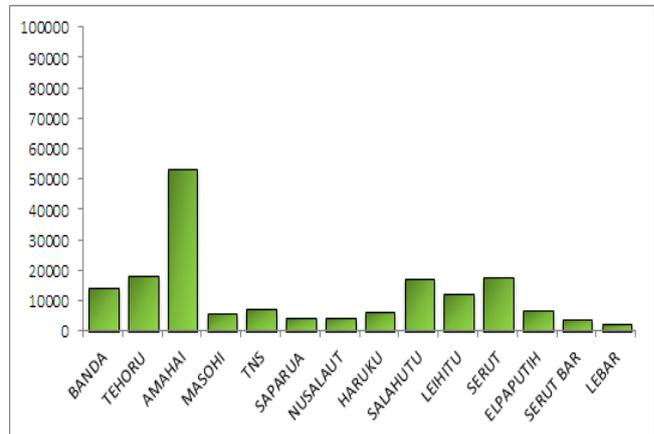
A. Analisis Location Quotient (LQ)

LQ Sektor Pertanian

Grafik 1 menunjukkan Nilai Tambah Sektor Pertanian menurut Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah. Sektor Pertanian merupakan sektor yang mendominasi perekonomian Kabupaten Maluku Tengah karena pada tahun 2008-2010 kurang lebih 30% perekonomian Kabupaten Maluku Tengah disumbang oleh sektor ini.

Ditinjau dari nilai LQ dapat dilihat bahwa nilai LQ tahun 2008-2010 tidak jauh berubah (Lihat Tabel 1). Sembilan dari empat belas kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah memiliki nilai LQ sektor pertanian lebih besar dari 1, sedangkan 5 kecamatan yakni kecamatan

kota masohi, kecamatan saparua, kecamatan salahutu, kecamatan leihitu dan kecamatan leihitu barat memiliki nilai LQ yang lebih kecil dari 1. Ini dapat diartikan bahwa sektor pertanian merupakan salah satu sektor unggulan di Kabupaten Maluku Tengah karena mayoritas kecamatan memiliki nilai LQ lebih dari 1.



Sumber : BPS Kabupaten Maluku Tengah, 2011

Gambar 1. Nilai Tambah Sektor Pertanian Menurut Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah Tahun 2010 (Juta Rupiah)

Tabel 1. Nilai LQ Sektor Pertanian Menurut Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah Tahun 2008 – 2010

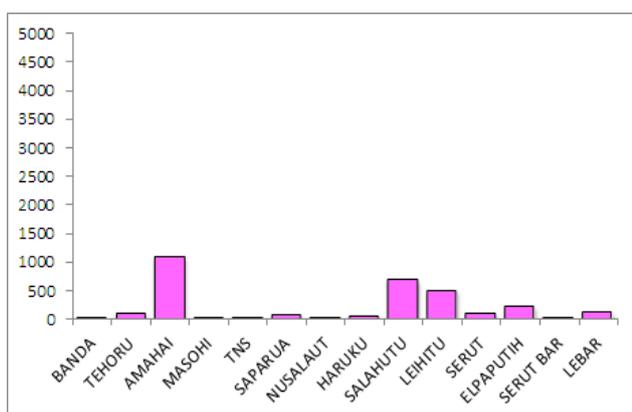
Kecamatan	2008	2009	2010
Banda	1,41	1,42	1,40
Tehoru	1,66	1,67	1,69
Amahai	1,65	1,70	1,69
Kota Masohi	0,14	0,14	0,14
TNS	1,71	1,72	1,73
Saparua	0,45	0,44	0,44
Nusalaut	1,67	1,68	1,71
Pulau Haruku	1,05	1,07	1,09
Salahutu	0,80	0,78	0,79
Leihitu	0,89	0,89	0,93
Seram Utara	1,41	1,41	1,40
Teluk Elpapatih	1,29	1,30	1,33
Seram Utara Barat	1,45	1,48	1,55
Leihitu Barat	0,93	0,94	0,97

Sumber : Data BPS Diolah

Nilai LQ tertinggi pada tahun 2010 adalah Kecamatan TNS, kemudian Kecamatan Nusalaut selanjutnya disusul oleh Kecamatan Tehoru dan Kecamatan Amahai. Jika dilihat dari tabel pergeseran nilai LQ mulai terjadi pada tahun 2010 dimana Kecamatan Amahai memiliki nilai LQ lebih besar dari Kecamatan Nusalaut di tahun sebelumnya berubah sebaliknya di tahun 2010. Kecamatan Kota Masohi memiliki nilai LQ yang terendah selama periode 2008-2010.

LQ Sektor Pertambangan dan Penggalian

Gambar 2 Nilai Tambah Bruto Sektor Pertambangan dan Penggalian Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah menunjukkan bahwa sektor ini didominasi oleh Kecamatan Amahai, Kecamatan Leihitu, dan Kecamatan Leihitu Barat. Sedangkan Kecamatan lain hanya memiliki Nilai Tambah Bruto Sektor Pertambangan dan Penggalian jauh dibawah ketiga Kecamatan tersebut. Ini disebabkan karena kegiatan/subsektor penggalian banyak tersebar di Kecamatan tersebut.



Sumber : BPS Kabupaten Maluku Tengah, 2011

Gambar 2. Nilai Tambah Sektor Pertambangan dan Penggalian Menurut Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah Tahun 2010 (Juta Rupiah)

Tabel 2. Nilai LQ Sektor Pertambangan & Penggalian Menurut Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah Tahun 2008 – 2010

Kecamatan	2008	2009	2010
Banda	0,17	0,16	0,17
Tehoru	0,61	0,61	0,60
Amahai	1,78	1,88	1,96
Kota Masohi	0,00	0,00	0,01
TNS	0,26	0,26	0,26
Saparua	0,47	0,45	0,43
Nusalaut	0,11	0,11	0,11
Pulau Haruku	0,60	0,61	0,62
Salahutu	1,92	1,86	1,81
Leihitu	2,23	2,18	2,20
Seram Utara	0,46	0,47	0,47
Teluk Elpaputih	1,55	1,49	1,45
Seram Utara Barat	0,53	0,54	0,55
Leihitu Barat	2,50	2,51	2,54

Sumber : Data BPS Diolah

Dari tabel LQ sektor Pertambangan dan Penggalian terlihat dengan jelas bahwa terdapat 5 Kecamatan yang memiliki nilai LQ > 1; diantaranya Kecamatan Amahai, Kecamatan Salahutu, Kecamatan Leihitu, Kecamatan Teluk Elpaputih, dan Kecamatan Leihitu Barat. Nilai LQ dari Kecamatan-Kecamatan relatif tidak konsisten dari tahun 2008-2010, dapat dilihat pada Kecamatan Leihitu

Nilai LQ pada tahun 2008 sebesar 2,23 mengalami penurunan di tahun 2009 menjadi 2,18 selanjutnya pada tahun 2010 mengalami kenaikan menjadi 2,20; kondisi serupa juga terjadi pada beberapa kecamatan yang lain.

Hal lain yang menarik adalah hampir 64,28 persen Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah memiliki nilai LQ < 1, sehingga dapat dikatakan bahwa Kabupaten Maluku Tengah tidak terspesialisasi secara berlebihan ataupun kurang pada Sektor Pertambangan dan Penggalian.

LQ Sektor Industri Pengolahan

Sektor Industri Pengolahan merupakan sektor sekunder dalam suatu perekonomian. Dari Grafik Nilai Tambah Bruto Sektor Industri Pengolahan dapat diketahui bahwa sektor ini relatif ada pada sebagian besar Kecamatan. Nilai Tambah terbesar dari sektor ini disumbangkan dari Kecamatan Leihitu, sedangkan Nilai Tambah yang terkecil disumbangkan dari Kecamatan Seram Utara Barat. Secara Keseluruhan Sektor Industri Pengolahan Menyumbangkan 10,64 persen pada total PDRB Kabupaten Maluku Tengah tahun 2010.

Nilai LQ Sektor Industri Pengolahan pada Kecamatan-Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah cenderung berfluktuasi dari tahun ke tahun. Hampir 50 persen Kecamatan yang ada di kabupaten Maluku Tengah memiliki nilai LQ > 1, diantaranya : Kecamatan Banda, Kecamatan TNS, Kecamatan Saparua, Kecamatan Nusalaut, Kecamatan Pulau Haruku, Kecamatan Salahutu dan Kecamatan Leihitu.

Nilai LQ Sektor Industri Pengolahan 7 Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah berada diatas satu dan sisanya sebaliknya, sehingga dapat dikatakan bahwa Sektor Industri Pengolahan merupakan salah satu sektor unggulan di Kabupaten Maluku Tengah.

Tabel 3. Nilai LQ Sektor Industri Pengolahan Menurut Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah Tahun 2008 – 2010

Kecamatan	2008	2009	2010
Banda	1,63	1,55	1,45
Tehoru	0,66	0,64	0,63
Amahai	0,93	0,87	0,82
Kota Masohi	0,44	0,48	0,53
TNS	1,07	1,03	1,08
Saparua	1,90	1,88	1,88
Nusalaut	1,54	1,51	1,50
Pulau Haruku	1,62	1,54	1,49
Salahutu	0,82	0,93	1,06
Leihitu	2,63	2,64	2,57
Seram Utara	0,90	0,90	0,89
Teluk Elpaputih	0,11	0,11	0,10
Seram Utara Barat	0,04	0,04	0,04
Leihitu Barat	0,23	0,23	0,22

Sumber : Data BPS Diolah

Sedangkan Kecamatan yang memiliki nilai LQ < 1, diantaranya Kecamatan Tehoru, Kecamatan Amahai,

Kecamatan Kota Masohi, Kecamatan Seram Utara, Kecamatan Teluk Elpaputih, Kecamatan Seram Utara Barat dan Kecamatan Leihitu Barat. Kecamatan yang memiliki nilai LQ yang terendah pada Sektor Industri Pengolahan adalah Kecamatan Seram Utara Barat dan Kecamatan Leihitu barat yang berturut-turut sebesar 0,04 dan 0,22.

LQ Sektor Listrik dan Air Bersih

Dari Tabel 4 dapat dilihat bahwa Kecamatan yang relatif memiliki keunggulan pada sektor ini hanya 3 Kecamatan diantaranya Kecamatan Amahai, Kecamatan Kota Masohi dan Kecamatan Salahutu. Sedangkan Kecamatan lainnya tidak memiliki keunggulan karena nilai LQnya berada di bawah 1.

Nilai LQ tertinggi pada Sektor Listrik dan Air Bersih dari tahun 2008 – 2010 adalah Kecamatan Kota Masohi berturut-turut sebesar 1,71; 1,70 dan 1,66. Ini dikarenakan Kecamatan Kota Masohi merupakan daerah Perkotaan sekaligus merupakan Ibu Kota Kabupaten Maluku Tengah, dengan kata lain Kecamatan Kota Masohi terspesialisasi secara lebih pada sektor ini.

Tabel 4. Nilai LQ Sektor Listrik dan Air Bersih Menurut Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah Tahun 2008 – 2010

Kecamatan	2008	2009	2010
Banda	0,28	0,26	0,27
Tehoru	0,34	0,33	0,34
Amahai	1,14	1,15	1,15
Kota Masohi	1,71	1,70	1,66
TNS	0,64	0,61	0,62
Saparua	0,93	0,94	0,94
Nusalaut	0,43	0,42	0,42
Pulau Haruku	0,62	0,62	0,65
Salahutu	1,18	1,19	1,19
Leihitu	0,91	0,89	0,91
Seram Utara	0,61	0,59	0,58
Teluk Elpaputih	0,07	0,06	0,06
Seram Utara Barat	0,30	0,28	0,26
Leihitu Barat	0,71	0,71	0,72

Sumber : Data BPS Diolah

LQ Sektor Bangunan

Ditinjau dari besarnya nilai LQ Sektor Bangunan maka Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah terbagi atas tiga kelompok yaitu :

- Kelompok yang memiliki nilai $LQ < 1$, Kecamatan yang termasuk dalam kelompok ini adalah Kecamatan Banda, Kecamatan Tehoru, Kecamatan Amahai, Kecamatan TNS, Kecamatan Saparua, Kecamatan Saparua, Kecamatan Nusalaut, Kecamatan Pulau Haruku, Kecamatan Salahutu, Kecamatan Leihitu, Kecamatan Seram Utara, Kecamatan Teluk Elpaputih, Kecamatan Seram Utara Barat dan Kecamatan Leihitu Barat (Pada tahun 2008-2010). Ini berarti bahwa Kecamatan tersebut relatif tidak memiliki nilai

komparatif/keunggulan komparatif pada Sektor Bangunan.

- Kelompok yang memiliki nilai $LQ = 1$. Jika nilai LQ suatu daerah sebesar 1 maka dapat dikatakan bahwa daerah yang bersangkutan tidak terspesialisasi secara berlebihan ataupun kurang pada aktivitas ekonomi yang dimaksud. Selama tahun 2008-2010 tidak ada satu pun Kecamatan yang termasuk dalam kelompok ini.
- Kelompok yang memiliki nilai $LQ > 1$. Kecamatan yang memiliki nilai $LQ > 1$ adalah Kecamatan Kota Masohi. Kecamatan yang termasuk dalam kategori ini dapat dikatakan bahwa Kecamatan tersebut adalah Kecamatan yang relatif terspesialisasi secara berlebihan (*overspecialized*) pada aktivitas ekonomi (sektor) yang bersangkutan. Atau dapat juga dikatakan bahwa daerah tersebut memiliki keunggulan pada Sektor Bangunan.

Tabel 5. Nilai LQ Sektor Bangunan Menurut Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah Tahun 2008 – 2010

Kecamatan	2008	2009	2010
Banda	0,67	0,64	0,65
Tehoru	0,62	0,62	0,60
Amahai	0,84	0,87	0,85
Kota Masohi	2,27	2,28	2,31
TNS	0,38	0,36	0,35
Saparua	0,83	0,78	0,74
Nusalaut	0,45	0,44	0,42
Pulau Haruku	0,78	0,74	0,71
Salahutu	0,45	0,42	0,40
Leihitu	0,50	0,46	0,44
Seram Utara	0,92	0,87	0,80
Teluk Elpaputih	0,05	0,05	0,04
Seram Utara Barat	0,02	0,02	0,03
Leihitu Barat	0,04	0,04	0,04

Sumber : Data BPS Diolah

LQ Sektor Perdagangan, Hotel dan Restoran

Jika dilihat dari nilai LQ dapat diketahui bahwa meskipun Sektor Perdagangan, Hotel dan Restoran didominasi Kecamatan Kota Masohi dan Kecamatan Salahutu, ternyata tidak berarti bahwa Kecamatan Kota Masohi dan Kecamatan Salahutu hanya sendiri yang memiliki Keunggulan Komparatif atau terspesialisasi secara berlebihan pada sektor ini, juga terdapat beberapa Kecamatan Lain. Hal ini dapat dilihat dengan nilai LQ dari beberapa Kecamatan lain yang lebih besar dari 1, diantaranya : Kecamatan saparua Kecamatan Pulau Haruku, Kecamatan Leihitu, Kecamatan Seram Utara, Kecamatan Teluk Elpaputih, Kecamatan Seram Utara Barat dan Kecamatan Leihitu Barat.

Jika dilihat dari Tabel 6 nilai LQ yang berada diatas 1 pada tahun 2008-2010 terdapat 9 Kecamatan yang memiliki nilai $LQ > 1$ atau sekitar 64,29 persen dari total Kecamatan, ini berarti bahwa Kabupaten Maluku Tengah terspesialisasi secara lebih pada sektor ini. Sedangkan 5 Kecamatan lain yang memiliki nilai $LQ < 1$, diantaranya

Kecamatan Banda, Kecamatan Tehoru, Kecamatan TNS, Kecamatan Amahai dan Kecamatan Nusalaut.

Tabel 6. Nilai LQ Sektor Perdagangan, Hotel dan Restoran Menurut Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah Tahun 2008 – 2010

Kecamatan	2008	2009	2010
Banda	0,77	0,80	0,88
Tehoru	0,90	0,91	0,92
Amahai	0,46	0,45	0,47
Kota Masohi	1,39	1,39	1,36
TNS	0,57	0,57	0,58
Saparua	1,08	1,08	1,08
Nusalaut	0,48	0,47	0,46
Pulau Haruku	1,25	1,24	1,22
Salahutu	1,10	1,07	1,04
Leihitu	1,03	1,03	1,00
Seram Utara	1,03	1,03	1,08
Teluk Elpaputih	1,18	1,18	1,19
Seram Utara Barat	1,15	1,13	1,11
Leihitu Barat	1,56	1,53	1,51

Sumber : Data BPS Diolah

LQ Sektor Pengangkutan dan Komunikasi

Tabel 7. Nilai LQ Sektor Pengangkutan dan Komunikasi Menurut Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah Tahun 2008 – 2010

Kecamatan	2008	2009	2010
Banda	1,41	1,39	1,35
Tehoru	0,72	0,72	0,74
Amahai	0,70	0,70	0,70
Kota Masohi	0,94	0,91	0,89
TNS	1,33	1,33	1,34
Saparua	1,06	1,05	1,06
Nusalaut	0,60	0,61	0,63
Pulau Haruku	1,06	1,06	1,10
Salahutu	1,85	1,92	1,92
Leihitu	0,71	0,70	0,71
Seram Utara	0,68	0,68	0,67
Teluk Elpaputih	1,61	1,62	1,65
Seram Utara Barat	0,76	0,75	0,76
Leihitu Barat	1,31	1,32	1,37

Sumber : Data BPS Diolah

Jika dilihat dari nilai LQ dapat diketahui bahwa meskipun Sektor Pengangkutan dan Komunikasi didominasi oleh Kecamatan Salahutu, Kecamatan Amahai dan Kecamatan Kota Masohi tidak berarti bahwa ketiga Kecamatan ini memiliki Keunggulan Komparatif atau terspesialisasi secara berlebihan pada sektor ini. Hal ini dapat dilihat dari nilai LQ Kecamatan Kota Masohi dan Kecamatan Amahai yang kurang dari 1. Tepatnya nilai

LQ sektor Pengangkutan dan Komunikasi berturut-turut sebesar 0,89 dan 0,70.

Jika dilihat dari tabel 7, Nilai LQ > 1 pada tahun 2008-2010 terdapat pada 7 kecamatan, diantaranya : Kecamatan Banda, Kecamatan Saparua, Kecamatan Pulau Haruku, Kecamatan Salahutu, Kecamatan TNS, Kecamatan Teluk Elpaputih dan Kecamatan Leihitu Barat. Nilai LQ yang terbesar pada Kecamatan Salahutu ini menandakan bahwa Kecamatan Salahutu memiliki spesialisasi berlebih pada sektor ini, sehingga dapat dikatakan bahwa Kecamatan Salahutu memiliki Keunggulan pada sektor Pengangkutan dan Komunikasi. Sedangkan yang memiliki nilai LQ yang terkecil adalah pada Kecamatan Nusalaut 0,63 diikuti dengan Kecamatan Seram Utara sebesar 0,67.

LQ Sektor Keuangan, Persewaan dan Jasa Perusahaan

Tabel 8. Nilai LQ Sektor Keuangan, Persewaan dan Jasa Perusahaan Menurut Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah Tahun 2008 – 2010

Kecamatan	2008	2009	2010
Banda	0,41	0,41	0,39
Tehoru	0,62	0,64	0,62
Amahai	0,90	0,91	0,89
Kota Masohi	2,25	2,20	2,19
TNS	0,23	0,24	0,24
Saparua	0,46	0,46	0,45
Nusalaut	0,21	0,22	0,22
Pulau Haruku	0,15	0,15	0,15
Salahutu	0,86	0,86	0,86
Leihitu	0,33	0,33	0,33
Seram Utara	0,22	0,22	0,21
Teluk Elpaputih	0,32	0,34	0,33
Seram Utara Barat	0,26	0,26	0,26
Leihitu Barat	0,66	0,68	0,68

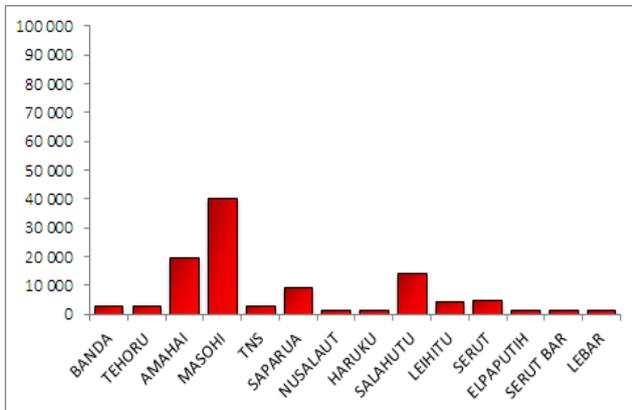
Sumber : Data BPS Diolah

Kecamatan Kota Masohi merupakan satu-satunya Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah yang memiliki nilai LQ yang lebih besar dari 1. Ini menandakan bahwa Kecamatan Kota Masohi memiliki spesialisasi berlebihan pada sektor ini. Sedangkan 13 Kecamatan Lainnya nilai LQ berada di bawah 1. Jadi dapat dikatakan bahwa hanya Kecamatan Kota Masohi yang memiliki keunggulan pada sektor ini.

LQ Sektor Jasa-jasa

Tidak jauh berbeda dengan dengan sektor tersier lainnya, sektor jasa-jasa juga didominasi oleh Kecamatan Kota Masohi, Kecamatan Amahai dan Kecamatan Salahutu dimana Nilai Tambah yang diberikan dari ketiga sektor ini hampir mencapai 70 persen. Nilai Tambah dari Kecamatan Kota Masohi merupakan yang terbesar sebagai kontributor pada sektor Jasa-Jasa sebesar 36,81 persen; diikuti dengan Kecamatan Amahai dengan

kontribusi sebesar 17,91 persen dan Kecamatan Salahutu dengan kontribusi sebesar 13,01 persen. Sedangkan Kontribusi yang paling kecil diberikan oleh Kecamatan Leihitu Barat sebesar 1,21 persen.



Sumber : BPS Kabupaten Maluku Tengah, 2011

Gambar 3. Nilai Tambah Sektor Jasa-jasa menurut Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah Tahun 2010 (Juta Rupiah)

Tabel 9. Nilai LQ Sektor Jasa-jasa Menurut Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah Tahun 2008 – 2010

Kecamatan	2008	2009	2010
Banda	0,45	0,46	0,45
Tehoru	0,42	0,43	0,44
Amahai	0,94	0,95	1,00
Kota Masohi	1,63	1,59	1,55
TNS	1,01	1,04	1,04
Saparua	1,45	1,45	1,44
Nusalaut	0,88	0,91	0,93
Pulau Haruku	0,44	0,46	0,46
Salahutu	1,08	1,08	1,05
Leihitu	0,53	0,53	0,54
Seram Utara	0,67	0,67	0,65
Teluk Elpaputih	0,53	0,54	0,54
Seram Utara Barat	0,97	0,98	0,97
Leihitu Barat	0,73	0,75	0,76

Sumber : Data BPS Diolah

Ditinjau dari besarnya nilai LQ Sektor Jasa – Jasa maka Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah terbagi atas tiga kelompok yaitu :

- Kelompok yang memiliki nilai $LQ < 1$, Kecamatan yang termasuk dalam kelompok ini adalah Kecamatan Banda, Kecamatan Tehoru, Kecamatan Nusalaut, Kecamatan Pulau Haruku, Kecamatan Leihitu, Kecamatan Seram Utara, Kecamatan Teluk Elpaputih, Kecamatan Seram Utara Barat dan Kecamatan Leihitu Barat (2010). Ini berarti bahwa Kecamatan tersebut relatif tidak memiliki nilai komparatif/keunggulan komparatif pada Sektor Jasa-Jasa.

- Kelompok yang memiliki nilai $LQ = 1$. Jika nilai LQ suatu daerah sebesar 1 maka dapat dikatakan bahwa daerah yang bersangkutan tidak terspesialisasi secara berlebihan ataupun kurang pada aktivitas ekonomi yang dimaksud. Pada tahun 2010 terdapat Kecamatan Amahai yang masuk dalam kelompok ini.
- Kelompok yang memiliki nilai $LQ > 1$. Kecamatan yang memiliki nilai $LQ > 1$ adalah Kecamatan Kota Masohi, Kecamatan TNS, Kecamatan Saparua dan Kecamatan Salahutu. Kecamatan yang termasuk dalam kategori ini dapat dikatakan bahwa Kecamatan tersebut adalah Kecamatan yang relatif terspesialisasi secara berlebihan (*overspecialized*) pada aktivitas ekonomi (sektor) yang bersangkutan. Atau dapat juga dikatakan bahwa daerah tersebut memiliki keunggulan pada Sektor Jasa-Jasa.

B. Analisis Shift-Share

Tabel 10. Nilai Regional Share Menurut Sektor dan Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah Tahun 2008 – 2010

Kecamatan	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Banda	187	2	-519	-1	-1	1.383	-47	-20	58
Tehoru	-420	-7	-243	-2	-63	-259	-25	-58	-19
Amahai	699	93	-1.321	3	2	223	-37	-110	944
Kota Masohi	166	4	1.673	24	637	1.778	-69	333	23
TNS	-454	-2	-109	-5	-26	-119	-7	-5	-107
Saparua	-84	-8	-141	-12	-108	-74	-18	-17	-135
Nusalaut	-223	-1	-154	-2	-18	-157	-7	-4	-40
Pulau Haruku	-181	-3	-517	-2	-77	-723	-46	-5	-52
Salahutu	-123	-41	1.903	6	-107	-1.262	336	-19	-404
Leihitu	318	-17	-532	-3	-86	-781	-12	-33	-13
Seram Utara	89	2	17	-4	-149	838	-27	-13	-107
T. Elpaputih	-90	-18	-24	-1	-4	-227	-15	-35	-49
SUB	168	0	-4	-2	0	-197	-12	-3	-58
Leihitu Barat	-53	-6	-29	1	-1	-423	-15	-11	-41

Sumber : Data BPS Diolah

Tabel 11. Nilai National Share Menurut Sektor dan Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah Tahun 2008 – 2010

Kecamatan	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Banda	1.417	3	536	5	53	757	266	66	274
Tehoru	1.921	11	252	7	57	1.018	156	171	294
Amahai	5.331	89	980	68	214	1.448	422	468	1.832
Kota Masohi	571	0	578	128	719	5.453	712	1.456	3.940
TNS	801	2	164	6	14	258	29	17	284
Saparua	467	8	650	19	68	1.099	207	77	908
Nusalaut	483	0	147	2	10	137	32	10	154
Pulau Haruku	671	6	340	7	39	782	128	15	171
Salahutu	1.751	66	594	48	78	2.372	765	306	1.433
Leihitu	1.218	47	1.177	23	53	1.376	180	73	438
Seram Utara	1.785	9	374	14	92	1.277	163	45	513
T. Elpaputih	700	21	20	1	2	625	163	115	174
SUB	401	2	4	2	1	311	40	11	163
Leihitu Barat	282	12	23	0	1	460	74	32	133

Sumber : Data BPS Diolah

Regional Share/Competitive Effect (R) menggambarkan bagaimana jika sektor di daerah objek tersebut tumbuh seperti pola pertumbuhan sektor yang sama di Kabupaten pembandingan.

- Jika hasil R adalah positif dan lebih kecil dari pertumbuhan aktual sektor tersebut di daerah objek yang diteliti maka secara relatif Kabupaten pembandingan lebih unggul dari daerah objek yang bersangkutan.
- Jika hasil R adalah positif dan lebih besar dari pertumbuhan aktual sektor tersebut di daerah objek

yang diteliti maka secara relatif daerah objek yang diteliti/bersangkutan lebih baik dari pada Kabupaten pembandingan.

- Jika hasil R adalah negatif maka dapat dikatakan provinsi pembandingan adalah lebih unggul secara absolut pada sektor yang bersangkutan dibandingkan dengan daerah objek yang diamati.

National Share/National Growth Effect (N) merupakan pertumbuhan daerah dibandingkan dengan pertumbuhan Kabupaten dari Kabupaten tertentu.

- Jika sektor tertentu pada Kabupaten tersebut memiliki pertumbuhan yang positif maka Nilai N untuk daerah objek yang dianalisis akan positif.
- Jika sektor tertentu Kabupaten tersebut memiliki pertumbuhan negatif maka nilai N untuk daerah objek yang dianalisis akan negatif juga.

Tabel 12. Nilai Propotional Shift Menurut Sektor dan Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah Tahun 2008 – 2010

Kecamatan	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Banda	-649	2	256	-5	161	116	33	-20	-26
Tehoru	-879	9	120	-6	172	156	19	-52	-28
Amahai	-2 441	73	467	-60	650	222	52	-143	-175
Kota Masohi	-261	0	276	-113	2.183	835	88	-445	-376
TNS	-367	2	78	-5	42	40	4	-5	-27
Saparua	-214	6	310	-17	207	168	26	-23	-87
Nusalaut	-221	0	70	-2	31	21	4	-3	-15
Pulau Haruku	-307	5	162	-7	119	120	16	-5	-16
Salahutu	-802	54	283	-43	237	363	95	-93	-137
Leihitu	-558	39	562	-21	162	211	22	-22	-42
Seram Utara	-817	8	178	-13	280	195	20	-14	-49
T. Elpaputih	-320	18	10	-1	6	96	20	-35	-17
SUB	-184	2	2	-1	2	48	5	-3	-16
Leihitu Barat	-129	10	11	0	3	70	9	-10	-13

Sumber : Data BPS Diolah

Tabel 13. Nilai Perubahan Total Dalam Output Daerah Menurut Sektor dan Kecamatan di Kabupaten Maluku Tengah Tahun 2008 – 2010

Kecamatan	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Banda	955	6	273	0	213	2.256	251	26	306
Tehoru	622	13	128	-1	166	915	150	60	246
Amahai	3.590	255	126	10	866	1.892	437	215	2.601
Kota Masohi	476	4	2.528	38	3.539	8.066	732	1.344	3.586
TNS	20	2	134	4	30	179	26	7	150
Saparua	169	6	819	10	167	1.193	215	36	686
Nusalaut	39	0	63	2	23	0	30	3	99
Pulau Haruku	183	8	-14	1	82	179	98	5	102
Salahutu	827	79	2.780	11	208	1.473	1.196	193	892
Leihitu	978	69	1.207	1	129	805	191	18	383
Seram Utara	1.057	18	569	2	223	2.311	156	19	357
T. Elpaputih	290	21	5	1	5	494	168	44	108
SUB	386	5	1	2	2	162	32	5	89
Leihitu Barat	100	16	5	1	2	108	69	11	80

Sumber : Data BPS Diolah

Proportional Shift/Sectoral Mix Effect/Composition Shift (M) adalah merupakan efek dari perbedaan pertumbuhan sektoral yang diamati pada suatu Kabupaten pembandingan terhadap pertumbuhan total Kabupaten tersebut.

- Jika sektor yang dibandingkan tumbuh lebih tinggi daripada pertumbuhan total pertumbuhan di

Kabupaten pembandingan maka hasilnya akan positif sehingga nilai M untuk sektor tersebut di daerah objek yang diteliti akan menjadi positif.

- Jika sektor yang dibandingkan tumbuh lebih rendah daripada pertumbuhan total pertumbuhan di Kabupaten pembandingan maka hasilnya akan negatif sehingga nilai M untuk sektor tersebut di daerah objek yang diteliti akan menjadi negatif.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan sebelumnya dapat disimpulkan beberapa hal yang berkaitan dengan Analisis Pemanfaatan Potensi Daerah Di Kabupaten Maluku Tengah antara lain:

1. Kecamatan Banda Relatif memiliki spesialisasi secara berlebihan (*overspecialized*) pada aktivitas ekonomi : Sektor Pertanian dan Sektor Perdagangan, Hotel dan Restoran (2008-2010).
2. Kecamatan Tehoru dan Kecamatan Seram Utara memiliki Spesialisasi berlebihan pada sektor primer (sektor pertanian) pada tahun 2008-2010 dan Kecamatan ini merupakan Kecamatan tua.
3. Kecamatan Kota Masohi memiliki spesialisasi secara berlebihan (*overspecialized*) (Niali LQ > 1) pada aktifitas ekonomi (sektor) sebagai berikut : Listrik dan Air Bersih; Bangunan; Perdagangan, Hotel dan Restoran; Keuangan, Persewaan dan Jasa Perusahaan; dan Sektor Jasa-Jasa. Dari sini dapat dikatakan bahwa Kecamatan Kota Masohi terspesialisasi terutama pada sektor-sektor sekunder dan tersier.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Badan Pusat Statistik Kabupaten Maluku Tengah. *Pendapatan Domestik Regional Bruto Kabupaten Maluku Tengah 2008*. Masohi. 2009.
- [2] Badan Pusat Statistik Kabupaten Maluku Tengah. *Pendapatan Domestik Regional Bruto Kabupaten Maluku Tengah 2009*. Masohi. 2010.
- [3] Badan Pusat Statistik Kabupaten Maluku Tengah. *Pendapatan Domestik Regional Bruto Kabupaten Maluku Tengah 2010*. Masohi. 2011.
- [4] Badan Pusat Statistik Provinsi Maluku. *Analisis Pemanfaatan Potensi Daerah Di Provinsi Maluku Tahun 2006-2008*. Ambon. 2009.
- [5] Kuncoro, Mudrajad. *Metode Kuantitatif, Teori dan Aplikasi Untuk Bisnis dan Ekonomi*. UPP STIM YKPN. Yogyakarta. 2007.
- [6] Urai, Nursinah A. 1999. *Kesenjangan Pemanfaatan Potensi Daerah*. BPS. Jakarta.

ANALISIS PERBANDINGAN KOMULAN TERHADAP BEBERAPA JENIS DISTRIBUSI KHUSUS *Analysis of Comulans Comparative on some Types of Special Distribution*

ABRAHAM ZACARIA WATTIMENA¹, VICTOR LEKA TOMPESSY²

¹ Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Maluku

² Karyawan BRI Cabang Ambon

Jl. Diponegoro Ambon, Maluku

e-mail: ¹ampiwattimena@rocketmail.com

ABSTRAK

Dalam penelitian ini adalah berbicara tentang Distribusi, khususnya distribusi Kontinu. Dimana akan dicari komulan dari distribusi kontinu khususnya distribusi normal dan distribusi uniform, kemudian setelah mendapat komulan dari masing-masing distribusi, kemudian komulan dari kedua distribusi akan dibandingkan.

Kata kunci: *Distribusi, Distribusi Kontinu, Distribusi Normal, Distribusi Uniform, Komulan.*

PENDAHULUAN

Peluang (probabilitas) berawal dari sebuah perjudian yang dilakukan oleh matematikawan dan fisikawan Italy, yaitu Girolamo Cardan (1501 – 1576) yang ditulis dalam bukunya yang berjudul *Liber de Ludo Aleae* (Book On Games Of Changes) pada tahun 1565 yang banyak membahas tentang masalah perjudian. Peluang kemudian dibahas oleh para ahli hingga sekarang.

Distribusi normal adalah karya dari Abraham de Moivre yang diperkenalkan pertama kali pada tahun 1737, kemudian ditulis ulang pada tahun 1738 dengan judul *The Doctrime Of Chances* yang membahas tentang pendekatan distribusi binomial untuk n yang besar, kemudian dilanjutkan oleh Laplace dalam bukunya yang berjudul *Analytical Theory Of Probability* pada tahun 1812, yang sekarang dikenal dengan Teorema *De Moivre-Laplace*.

Berbeda dengan peluang yang berawal dari perjudian, statistika sendiri berawal dari kegiatan pengumpulan data yang dilakukan oleh John Grannt di Eropa pada tahun 1662, hal ini merupakan awal munculnya Statistika Deskriptif. Pada awal abad ke-19 diperkenalkan arti dari Statistika yakni ilmu mengenai pengumpulan dan klasifikasi data. Nama dan arti Statistika pertama kali diperkenalkan dalam bahasa Inggris oleh Sir John Sinclair, yang kemudian muncullah jenis-jenis distribusi yang lain yang salah satunya adalah

distribusi uniform yang merupakan salah satu distribusi dengan bentuk distribusi diskrit maupun kontinu.

Dalam statistik, distribusi chi square termasuk dalam statistik nonparametrik. Distribusi nonparametrik adalah distribusi dimana besaran-besaran populasi tidak diketahui. Distribusi ini sangat bermanfaat dalam melakukan analisis statistik jika kita tidak memiliki informasi tentang populasi atau jika asumsi-asumsi yang dipersyaratkan untuk penggunaan statistik parametrik tidak terpenuhi. Sedangkan distribusi Normal adalah distribusi probabilitas yang paling banyak digunakan dalam berbagai analisis statistika, distribusi ini juga dijuluki kurva lonceng.

Distribusi normal dan distribusi uniform kerap digunakan dalam aplikasi-aplikasi statistik di dalam kehidupan sehari-hari. Dalam aplikasinya harus memenuhi ketentuan-ketentuan tertentu untuk menentukan jenis distribusi yang dipakai. Perbedaan antara distribusi normal dan distribusi uniform membuat tertarik peneliti untuk mengangkat masalah ini dalam penelitian dengan judul “Analisis Perbandingan Komulan Terhadap beberapa Distribusi Kontinu”.

TINJAUAN PUSTAKA

Istilah statistika awalnya berarti sekumpulan bilangan. Dewasa ini statistika merupakan istilah yang luas, yang keluasannya akan sulit dibayangkan oleh para

perumus istilah. Kumpulan bilangan yang asli sekarang disebut data dan statistika berarti ilmu pengambilan keputusan (Dudewicz 1995).

Dalam ilmu statistika matematika, teori peluang (*probability theory*) merupakan dasar dan pengantar untuk penyusunan statistika lebih jauh, dimana dipakai pada penentuan selang untuk distribusi peluang yang terbagi atas distribusi peluang diskrit dan distribusi peluang kontinu (Bain 1991).

Dalam penelitian ini lebih ditekankan pada distribusi peluang kontinu khususnya pada distribusi normal dan distribusi *Chi Square*.

1. Deret Taylor

Bentuk umum:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!}(z - z_0)^3 + \dots$$

2. Deret McLaurin

Deret McLaurin merupakan deret Taylor dengan $z_0 = 0$.

Bentuk umum deret McLaurin:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)z + \frac{f''(z_0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!}z^3 + \dots$$

3. Fungsi Distribusi

Definisi 1

Jika himpunan semua kemungkinan nilai peubah acak x adalah himpunan hingga x_1, x_2, \dots, x_n atau tak hingga x_1, x_2, \dots maka x , disebut peubah acak deret, fungsi $f(x) = P(X = x)$, $x = x_1, x_2, x_3, \dots$ yang dianggap peluang untuk setiap himpunan nilai X , yang akan disebut fungsi distribusi peluang.

Teorema 1

Suatu fungsi $P(X)$ adalah suatu fungsi peluang jika dan hanya jika memenuhi sifat-sifat berikut :

- $0 \leq P(X) \leq 1$, untuk semua $x \in X$
- $\sum_{i=1}^{\infty} P(X_i) = 1$, $P(X) = 0$, jika $\forall x \notin (x_1, x_2, \dots)$

Definisi 2

Bila X suatu peubah acak, fungsi distribusinya didefinisikan sebagai :

$$F(x) = P(X \leq x), \text{ untuk semua } x.$$

Teorema 2

Bila X suatu peubah acak, maka fungsi distribusi khususnya $F(x)$, mempunyai sifat sebagai berikut :

- $F(x)$ tidak turun yaitu $F(x) \leq F(y)$, bila $x \leq y$
- $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ dan $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

karena $P(X < \infty) = 1$ jadi $P(X < \infty) = 1$

- $F(x)$ kontinu dari kanan yaitu:

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(x+h) = F(x), \forall x$$

3.1. Distribusi Normal

Distribusi normal sering disebut juga dengan distribusi Gauss, inilah distribusi peluang kontinu yang terpenting dan paling banyak digunakan. Grafiknya disebut kurva normal, berbentuk seperti lonceng. Pada tahun 1733, De Moivre menemukan persamaan matematika untuk kurva normal yang menjadi dasar dalam banyak teori statistika induktif.

Definisi 3

Suatu peubah acak x berdistribusi normal z dengan rata-rata μ dan variansi σ^2 mempunyai fungsi densitas:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

dimana $-\infty < X < \infty$

Distribusi normal dilambangkan dengan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dimana nilai dari distribusi normal z ditentukan oleh:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$$

Dengan mentransformasikan fungsi densitas terhadap z diperoleh fungsi densitas yang berbentuk:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z^2)}$$

Untuk z dalam daerah $-\infty < z < \infty$

Berkaitan dengan sifat yang berlaku untuk sebuah fungsi densitas, dalam distribusi normal berlaku pula:

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1$
- $P(a < X < b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$

3.2. Distribusi Uniform

Definisi 4

Jika x peubah acak yang berdistribusi uniform, jika hanya jika x mempunyai fungsi densitas sebagai berikut:

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{untuk } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Dimana $-\infty < X < \infty$

Distribusi uniform dilambangkan dengan $X \sim UNIF(a, b)$

4. Mean Dan Variansi

Definisi 5

Jika X peubah acak kontinu dengan fungsi distribusi $F(x)$, maka nilai harapan (mean) dari X diperoleh :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x P(X) dx$$

Teorema 3

Jika X peubah acak dengan fungsi distribusi $P(X)$ dan $g(x)$ adalah fungsi bernilai real, maka

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) P(X) dx$$

Definisi 6

Misalkan X peubah acak kontinu dengan fungsi distribusi $P(X)$ maka momen ke- k dari X didefinisikan sebagai,

$$M_k' = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k P(X) dx$$

Definisi 7

Misalkan X peubah acak kontinu dengan fungsi distribusi $P(X)$ maka momen pusat ke- k dari X didefinisikan sebagai :

$$M_k = E(X - E(X))^k = \int_{-\infty}^{\infty} (X - E(X))^k P(X) dx$$

Teorema 4

Jika c suatu konstanta dan $g(x)$ dan $h(x)$ nilai harapannya ada maka

1. $E(c) = c$
2. $E(cg(x)) = cE(g(x))$
3. $E(g(x) + h(x)) = E(g(x)) + E(h(x))$

Definisi 8

Variansi dari peubah acak X didefinisikan sebagai

$$Var(X) = E(X - E(X))^2$$

Teorema 5

Jika X peubah acak dan nilai harapannya ada maka

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Teorema 6

Jika a, b konstanta-konstanta, maka

1. $Var(a) = 0$
2. $Var(aX) = a^2 Var(X)$
3. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

5. Fungsi Pembangkit Momen**Definisi 9**

Jika X peubah acak diskrit maka momen ke- t

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} P(x) dx$$

disebut fungsi pembangkit momen dari X , jika nilai harapannya ada untuk semua nilai t pada interval $-h < t < h$ dan $h > 0$.

Teorema 7

Jika fungsi pembangkit momen $M_x(t)$ dari peubah acak X ada untuk $|t| < h$ dan $h > 0$, maka

$$E(X^k) \text{ ada}$$

Dan

$$E(X^k) = \left. \frac{dM_x(t)}{dt^k} \right|_{t=0}$$

Teorema 8

Jika a, b sebagai konstanta dan $Y = aX + b$, maka

$$M_y(t) = e^{bt} M_x(at)$$

6. Fungsi Karakteristik**Definisi 10**

Fungsi karakteristik dari peubah acak disebut X dan didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \phi_x(t) &= E(e^{itx}) \\ &= E(\cos tX) + i E(\sin tX) \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx P(X) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin tx P(X) dx$$

untuk semua t

Teorema 9

1. Fungsi konstanta peubah acak X selalu ada
2. $\phi_x(0) = 1$, $\phi_x(t) = \overline{\phi_x(-t)}$
3. $|\phi_x(t)| \leq 1$, untuk semua t

Teorema 10

Untuk sembarang konstanta a dan b berlaku

$$\phi_{(ax+b)}(t) = e^{ibt} \phi_x(at)$$

7. Komulan**Definisi 11**

Untuk suatu peubah acak X dengan fungsi ϕ_x , maka komulan ke- j ditulis K_j dan X , didefinisikan sebagai

koefisien dari $\frac{(it)^j}{j!}$ dengan ekspansi Taylor dari deret pangkat

$$\log(\phi_x(t))$$

dimana

$$\phi_x(t) = \exp\left(K_1(it) + \frac{K_2(it)^2}{2!} + \dots + \frac{K_j(it)^j}{j!} + \dots\right)$$

$$\log(\phi_x(t)) = \sum_{j>0} \frac{K_j(it)^j}{j!}$$

dengan menggunakan deret pangkat $\exp(x)$ dimana :

$$x = itX$$

maka didapatkan

$$\begin{aligned} \phi_x(t) &= E(\exp(itX)) \\ &= E\left(1 + itX + \frac{(itX)^2}{2!} + \dots\right) \\ &= 1 + E(X)it + \frac{E(X^2)(it)^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

$$\phi_x(t) = 1 + \sum_{j>0} \frac{E(X^j)(it)^j}{j!}$$

Jadi didapat

$$\log(\phi_x(t)) = \log\left(1 + \sum_{j>0} \frac{E(X^j)(it)^j}{j!}\right)$$

dengan menggunakan persamaan Taylor, maka deret

$$\log(1 + X),$$

yaitu:

$$\log(1 + X) = \sum_{k>0} \frac{1}{k} (-1)^{k+1} X^k$$

maka dengan mengambil

$$x = \sum_{j>0} \frac{E(X^j)(it)^j}{j!}$$

didapatkan kesamaan

$$\log(\phi_x(t)) = \sum_{k>0} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\sum_{j>0} \frac{E(X^j)(it)^j}{j!} \right)^k$$

Dari Definisi 11, maka komulan dapat diturunkan dengan menyatakan koefisien persamaan berikut masing-masing untuk $j = 1, 2, \dots$ dan $t = 0$

$$\sum_{j>0} \frac{K_j(it)^j}{j!} = \sum_{k>0} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left\{ \sum_{j>0} \frac{E(X^j)(it)^j}{j!} \right\}^k$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hubungan Antara Komulan dan Momen Suatu Fungsi Distribusi

Komulan dari suatu peubah acak x pada suatu fungsi distribusi memiliki hubungan dengan momen dari fungsi distribusi tersebut. Hubungan ini dapat dilihat pada Lemma 1. dan Lemma 2.

Lemma 1

- 1) $K_1 = E(X)$
- 2) $K_2 = E(X^2) - (E(X))^2$
- 3) $K_3 = E(X^3) - 3E(X)E(X^2) + 2(E(X))^3$
- 4) $K_4 = E(X^4) - 4E(X)E(X^3) - 3(E(X^2))^2 + 12E(X^2)(E(X))^2 - 6E(X^4)$

Bukti

Dengan menggunakan Definisi 10 dan dengan menggunakan koefisien persamaan komulan, masing-masing $j = 1, 2, 3, \dots$ dan $t = 0$, diperoleh:

$$\sum_{j>0} \frac{k_j(it)^j}{j!} = \sum_{k>0} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left\{ \sum_{j>0} \frac{E(X^j)(it)^j}{j!} \right\}^k$$

Untuk $j = 1$

$$K_1(it) = \sum_{k>0} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \{E(X)it\}^k = E(X)(it) - \frac{1}{2}(E(X)it)^2 + \dots$$

$$K_1 = E(X) - \frac{1}{2}(E(X)^2 it) + \dots$$

$$K_1 = E(X) \blacksquare, \text{ untuk } t = 0$$

Untuk $j = 2$

$$K_2 \frac{1}{2!}(it)^2 = \sum_{k>0} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left\{ E(X)it + \frac{E(X^2)(it)^2}{2!} \right\}^k = \left(E(X)it + \frac{E(X^2)(it)^2}{2!} \right) - \frac{1}{2} \left(E(X)it + \frac{E(X^2)(it)^2}{2!} \right)^2 + \dots$$

$$= \left(E(X)it + E \frac{E(X^2)(it)^2}{2!} \right) - \frac{1}{2} \left((E(X))^2(it)^2 + E(X)E(X^2)(it)^2 + \left(\frac{E(X^2)(it)^2}{2!} \right)^2 \right) + \dots$$

$$K_2 = E(X^2) - (E(X))^2 \blacksquare, \text{ untuk } t = 0$$

Untuk $j = 3$

$$K_3 \frac{1}{3!}(it)^3 = \sum_{k>0} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left\{ E(X)it + \frac{E(X^2)(it)^2}{2!} + \frac{E(X^3)(it)^3}{3!} \right\}^k = E(X)it + \frac{E(X^2)(it)^2}{2!} + \frac{E(X^3)(it)^3}{3!} - \frac{1}{2} \left\{ E(X)it + \frac{E(X^2)(it)^2}{2!} + \frac{E(X^3)(it)^3}{3!} \right\}^2 + \frac{1}{3} \left\{ E(X)it + \frac{E(X^2)(it)^2}{2!} + \frac{E(X^3)(it)^3}{3!} \right\}^3 + \dots$$

$$K_3 = E(X^3) - 3E(X)E(X^2) + 2(E(X))^3 \blacksquare,$$

untuk $t = 0$

Dengan cara yang sama diperoleh $k = 4$ dan seterusnya.

Lemma 2

1. $E(X) = K_1$
2. $E(X^2) = K_2 + K_1^2$
3. $E(X^3) = K_3 + 3K_1K_2 + K_1^3$
4. $E(X^4) = K_4 + K_2^2 + 4K_1K_3 + 6K_1^2K_2 + K_1^4$

Bukti

1. $E(X) = K_1$ (pembuktiannya jelas);
2. $E(X^2) = K_2 + K_1^2$ (pembuktiannya jelas);
3. $E(X^2) = K_2 + K_1^2$
 $E(X^3) = K_3 + 3E(X)E(X^2) - 2[E(X)]^3$
 $= K_3 + 3K_1(K_2 + K_1^2) - 2K_1^3$
 $E(X^3) = K_3 + 3K_1K_2 + K_1^3$
4. Dengan cara yang sama pada bagian sebelumnya maka dapat dibuktikan bagian 4. ■

Dari Lemma 1 dan Lemma 2, maka diperoleh hubungan antara komulan dan momen sebagai berikut :

$$E(X^k) = M_k' = \sum_{j=i}^k \binom{k-1}{j-1} M_{k-j} K_j$$

4.2. Komulan dari Distribusi Normal

Untuk menentukan komulan ke- n dari distribusi normal, terlebih dahulu harus dihitung setiap momen $E(X^j)$ distribusi tersebut untuk $j = 1, 2, \dots$. Berikut akan dihitung komulan dari distribusi normal untuk $j = 1$ dan $j = 2$ berlaku seterusnya untuk setiap j .

Diberikan peubah acak x dengan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ berdasarkan Definisi 3 diperoleh fungsi densitas

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

untuk x dalam daerah $-\infty < x < \infty$. Untuk nilai distribusi normal z

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

dapat dibentuk suatu fungsi karakteristik

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \text{ dan } -\infty < z < \infty.$$

Dapat dilihat fungsi karakteristik $\phi(z)$ merupakan fungsi genap dengan

$$\phi(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-z)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \phi(z)$$

berdasarkan bentuk ini diperoleh

$$\begin{aligned} \phi'(z) &= -z\phi(z) \\ \phi''(z) &= (z^2 - 1)\phi(z) \end{aligned}$$

Selanjutnya dapat dihitung nilai $E(Z)$ dan $E(Z^2)$ untuk kemudian dapat memudahkan dalam perhitungan momen distribusi normal.

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} z\phi(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -(-z\phi(z)) dz \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} (-z\phi(z)) dz \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(z) dz \\ &= -\phi(z)|_{-\infty}^{\infty} \\ &= -\phi(\infty) - (-\phi(-\infty)) \\ &= -\phi(\infty) - (-\phi(\infty)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} z^2\phi(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ((z^2 - 1) + 1)\phi(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (z^2 - 1)\phi(z) dz + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi''(z) dz + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) dz \\ &= \phi'(z)|_{-\infty}^{\infty} + 1 \\ &= 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Untuk $j = 1, 2$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

dengan mentransformasikan nilai z terhadap x diperoleh

$$x = \sigma z + \mu$$

dan

$$dx = \sigma dz$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + \mu)\phi(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma z\phi(z) dz + \int_{-\infty}^{\infty} \mu\phi(z) dz \\ &= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} z\phi(z) dz + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) dz \\ &= \sigma \cdot 0 + \mu \cdot 1 \\ &= 0 + \mu \\ &= \mu \\ E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + \mu)^2\phi(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma^2 z^2 + 2\sigma\mu z + \mu^2)\phi(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 z^2\phi(z) dz + \int_{-\infty}^{\infty} 2\sigma\mu z\phi(z) dz \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2\phi(z) dz \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} z^2\phi(z) dz + 2\sigma\mu \int_{-\infty}^{\infty} z\phi(z) dz \\ &\quad + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) dz \\ &= \sigma^2 \cdot 1 + 2\sigma\mu \cdot 0 + \mu^2 \cdot 1 \\ &= \sigma^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

Berdasarkan Lemma 1 maka:

Untuk $j = 1$

$$\mathbf{K}_1 = E(X) = \mu$$

Untuk $j = 2$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2 &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= (\mu^2 + \sigma^2) - (\mu)^2 \\ &= \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

4.3. Komulan dari Distribusi Uniform

Untuk menentukan komulan ke- n dari distribusi uniform, terlebih dahulu harus dihitung setiap momen $E(X^j)$ distribusi tersebut untuk $j = 1, 2, \dots$. Berikut akan dihitung komulan dari distribusi uniform untuk $j = 1$ dan $j = 2$ berlaku seterusnya untuk setiap j .

Diberikan peubah acak x dengan $X \sim UNIF(a, b)$ berdasarkan Definisi 4 diperoleh fungsi densitas

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{untuk } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Untuk $j = 1, 2$

$$E(X) = \int_a^b x \left(\frac{1}{b-a}\right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{b-a} \right) \frac{x^2}{2} \Big|_a^b \\
&= \left(\frac{1}{b-a} \right) \frac{(b^2 - a^2)}{2} \\
&= \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} \\
&= \frac{a+b}{2} \\
E(X^2) &= \int_a^b x^2 \left(\frac{1}{b-a} \right) dx \\
&= \left(\frac{1}{b-a} \right) \frac{x^3}{3} \Big|_a^b \\
&= \left(\frac{1}{b-a} \right) \frac{(b^3 - a^3)}{3} \\
&= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} \\
&= \frac{(b^2 + ab + a^2)(b-a)}{3(b-a)} \\
&= \frac{(b^2 + ab + a^2)}{3}
\end{aligned}$$

Berdasarkan Lemma 1 maka:

Untuk $j = 1$

$$K_1 = E(X) = \frac{(a+b)}{2}$$

Untuk $j = 2$

$$\begin{aligned}
K_2 &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= \left(\frac{(b^2 + ab + a^2)}{3} \right) - \left(\frac{(a+b)}{2} \right)^2 \\
&= \frac{(b^2 + ab + a^2)}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \\
&= \frac{4(b^2 + ab + a^2) - 3(a+b)^2}{12} \\
&= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} \\
&= \frac{b^2 - 2ab - a^2}{12} \\
&= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}$$

4.4. Perbandingan Komulan dari Distribusi Normal dan Distribusi Uniform

Berdasarkan hasil perhitungan komulan dari distribusi normal pada subbab 4.2. dan hasil perhitungan komulan distribusi uniform pada subbab 4.3. diperoleh masing-masing nilai K_1 dan K_2 untuk kedua distribusi sebagai berikut:

Distribusi Normal

$$K_1 = \mu \text{ dan } K_2 = \sigma^2$$

dimana nilai K_1 merupakan nilai rata-rata pada distribusi normal dan nilai K_2 merupakan nilai variansi pada distribusi normal.

Distribusi Uniform

$$K_1 = \frac{a+b}{2} \text{ dan } K_2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

dimana nilai K_1 merupakan nilai rata-rata pada distribusi uniform dan nilai K_2 merupakan nilai variansi pada distribusi uniform.

Jadi nilai K_1 pada kedua distribusi tersebut pada dasarnya adalah sama yaitu merupakan nilai rata-rata pada kedua distribusi, sedangkan yang membedakan hasil akhirnya berdasarkan perbedaan fungsi densitas masing-masing jenis distribusi. Demikian pula hal yang sama berlaku pada nilai K_2 yang sama-sama merupakan nilai variansi dari kedua distribusi tersebut, perbedaan yang timbul merupakan akibat dari perbedaan fungsi densitas masing-masing jenis distribusi. Dan berlaku seterusnya pada nilai-nilai komulan yang lain untuk setiap j dengan $j = 1, 2, \dots$

Perbedaan yang mendasar pada fungsi densitas kedua distribusi tersebut juga menentukan keefektifan perhitungan analisis komulan pada kedua distribusi. Pada distribusi normal dengan fungsi densitas lebih rumit mengharuskan mentransformasikan fungsi densitas x terhadap z membuat proses perhitungan komulan yang lebih panjang, sebaliknya jika dibandingkan dengan fungsi uniform yang fungsi densitasnya sederhana mengakibatkan perhitungan komulan pada fungsi uniform menjadi lebih singkat.

KESIMPULAN

Berdasarkan analisis komulan terhadap distribusi normal dan distribusi uniform yang telah dibahas pada bab sebelumnya, ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Nilai komulan ke- j untuk $j = 1, 2, \dots$ berbeda untuk setiap distribusi, hal ini dikarenakan adanya perbedaan pada fungsi densitas masing-masing distribusi.
2. Untuk distribusi dengan fungsi densitas yang sederhana membuat proses perhitungan komulan menjadi lebih singkat, sebaliknya untuk distribusi dengan fungsi densitas yang rumit membuat proses perhitungan komulan menjadi panjang dan tidak efisien.
3. Berdasarkan hubungan komulan dengan momen pada distribusi, maka momen ke- n dari suatu distribusi dapat dihitung jika telah terlebih dahulu diketahui nilai setiap komulan ke- j untuk $j = 1, 2, \dots, n$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bain Lee J, Max Engelhardt.(1991), "Introduction To Probability And Mathematical Statistics" The Duxbury Advanced Series In Statistics And Decision Sciences.
- [2] Dudewicz Edward J. Satya N. Misra, (1995), "Statistika Matematika Modern", Penerbit ITB Bandung.
- [3] Kreyszig, E. (1993), *Matematika telah lanjutan (Statistik lanjutan)* edisi ke-6. penerbit PT Gramedia pustaka, Jakarta
- [4] Pursell Edwin J. Dale Varberg, (1992), "Kalkulus Dan Geometri Analisis". Edisi Kelima, Penerbit Erlangga.

MODEL REGRESI RIDGE UNTUK MENGATASI MODEL REGRESI LINIER BERGANDA YANG MENGANDUNG MULTIKOLINIERITAS

(Studi Kasus: Data Pertumbuhan Bayi di Kelurahan Namaelo RT 001, Kota Masohi)

Ridge Regression Model to Overcome Multiple Linear Regression with Multicollinearity

(Case Study: Growth of Infants Data in Sub Namaelo, RT. 001, Masohi City)

T. L. WASILAINÉ¹, M. W. TALAKUA², Y. A. LESNUSSA³

¹Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura

^{2,3}Staf Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

E-mail: ²ocat_talakua@yahoo.com; ³yopi_a_lesnussa@yahoo.com

ABSTRAK

Model Regresi Linier Berganda merupakan sebuah model yang digunakan untuk menganalisis hubungan antar variabel. Hubungan tersebut dapat diekspresikan dalam bentuk persamaan yang menghubungkan variabel terikat (Y) dengan beberapa variabel bebas (X). Jika adanya hubungan linier yang sempurna atau pasti diantara beberapa atau semua variabel bebas dari model Regresi Berganda disebut Multikolinieritas. Jika korelasi antara dua atau lebih variabel bebas dalam suatu persamaan regresi linier berganda ini terjadi maka taksiran koefisien dari variabel yang bersangkutan tidak lagi tunggal melainkan tidak terhingga banyaknya sehingga tidak mungkin lagi menduganya. Dalam kasus ini peneliti akan melihat hubungan antara variabel-variabelnya. Apabila terdapat hubungan antara variabel-variabel bebasnya. Maka akan diterapkan metode Regresi Ridge untuk menstabilkan nilai koefisien regresi karena adanya Multikolinieritas. Regresi Ridge merupakan metode estimasi koefisien regresi yang diperoleh melalui penambahan konstanta bias c pada diagonal $X^T X$. Sehingga diperoleh persamaan regresi linier yang baru dan tidak mengandung multikolinieritas.

Kata kunci: *Regresi Linier Berganda, Multikolinieritas, Regresi Ridge*

PENDAHULUAN

Analisis regresi adalah suatu analisis yang dilakukan terhadap dua variabel yaitu variabel independen (prediktor) dan variabel dependen (respon) untuk mengetahui apakah ada pengaruh variabel prediktor terhadap variabel respon sehingga variabel respon dapat diduga berdasarkan variabel prediktornya. Berdasarkan jumlah variabel independennya, analisis regresi linier dibagi menjadi dua macam yaitu, analisis regresi linier sederhana dan analisis regresi linier ganda. Pada, analisis regresi linier sederhana, jumlah variabel independen yang digunakan sebagai penduga variabel dependen adalah satu. Sedangkan pada analisis regresi linier ganda, jumlah variabel independen yang digunakan sebagai penduga variabel dependen adalah lebih dari satu.

Saat ini, analisis regresi yang lebih sering digunakan adalah analisis regresi linier ganda. Dapat dilihat dari

berbagai kejadian yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari yaitu suatu peristiwa dapat disebabkan oleh berbagai faktor yang mempengaruhinya. Contohnya, tinggi bayi sekarang yang dipengaruhi oleh usia bayi, panjang bayi waktu lahir, berat bayi waktu lahir, dan ukuran dada bayi waktu lahir.

Regresi sendiri memiliki sejarah dan terus dikembangkan. Serangkaian studi yang dikembangkan oleh para statistisi berhasil menunjukkan bahwa dalam banyak kasus, regresi menggunakan teknik kuadrat terkecil (khususnya teknik *Ordinary Least Square/OLS*) sering memberikan hasil yang kurang tepat. Oleh sebab itu, banyak bermunculan teknik “Regresi Modern”, yaitu regresi yang digunakan pada kondisi dimana asumsi-asumsi klasik tidak terpenuhi.

Ada beberapa asumsi klasik salah satunya yaitu tidak terjadi multikolinieritas. Multikolinieritas dapat

menyebabkan analisis regresi menggunakan metode kuadrat terkecil kurang valid.

Cara menangani penyimpangan asumsi ini adalah dengan menggunakan analisis Regresi Ridge. Metode Regresi Ridge merupakan penyelesaian yang paling baik, karena mengingat tujuan Regresi Ridge adalah untuk memperkecil variansi estimator koefisien regresi. Berdasarkan latar belakang inilah peneliti memberi judul “Model Regresi Ridge untuk Mengatasi Model Regresi Linier Berganda yang Mengandung Multikolinieritas (Studi Kasus : Data Pertumbuhan Bayi pada Kelurahan Namaelo RT 001, Kota Masohi)”.

Tujuan dari penelitian ini adalah bagaimana menggunakan Regresi Ridge untuk mengatasi masalah Multikolinieritas dalam variabel-variabel bebas sehingga diperoleh persamaan regresi linier berganda yang lebih baik pada Data Pertumbuhan Bayi pada Kelurahan Namaelo RT 001, Kota Masohi.

TINJAUAN PUSTAKA

Regresi Ridge adalah suatu teknik yang dikembangkan untuk menstabilkan nilai koefisien regresi karena adanya Multikolinieritas. Metode Regresi Ridge pertama kali dikemukakan oleh A. E. Hoerl pada tahun 1962. Metode ini ditujukan untuk mengatasi kondisi buruk yang diakibatkan oleh korelasi yang tinggi antara beberapa peubah bebas didalam model regresi, sehingga menyebabkan matriks XX^T nya hampir singular yang pada gilirannya menghasilkan nilai dugaan parameter model regresi yang tidak stabil (Draper dan Smith, 1981).

Regresi Ridge merupakan modifikasi dari Metode Kuadrat Terkecil yang menghasilkan penduga bias dari koefisien regresi (Kutner, et al, 2005). Regresi Ridge mengurangi dampak Multikolinieritas dengan menentukan penduga yang bias tetapi mempunyai variansi yang lebih kecil dari variansi penduga Regresi Linear Berganda.

Istilah Multikolinieritas pertama kali diperkenalkan oleh Ragnar Frisch pada tahun 1934, yang menyatakan Multikolinieritas terjadi jika adanya hubungan linier yang sempurna atau pasti diantara beberapa atau semua peubah bebas dari model Regresi Berganda (Rahardiantoro, 2008). Jadi dalam Regresi Linier Berganda Multikolinieritas merupakan masalah yang sering terjadi dua atau lebih variabel bebas saling berkorelasi satu sama lain. Jika korelasi antara dua atau lebih variabel bebas dalam suatu persamaan regresi linier berganda ini terjadi maka taksiran koefisien dari peubah yang bersangkutan tidak lagi tunggal melainkan tidak terhingga banyaknya sehingga tidak mungkin lagi menduganya, hal ini disebabkan XX^T (Sembiring, 1995). Menurut Montgomery dan Hines (1990) dalam Rahardiantoro (2008), Multikolinieritas dapat menyebabkan koefisien Regresi yang dihasilkan oleh Analisis Regresi berganda menjadi sangat lemah atau tidak dapat menghasilkan hasil analisis yang mewakili sifat atau pengaruh dari peubah bebas yang bersangkutan. Hal ini disebabkan oleh penduga yang dihasilkan oleh metode kuadrat terkecil tidak lagi bersifat BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*).

Multikolinieritas

Multikolinieritas yakni situasi dimana terdapat korelasi atau hubungan linier antara variabel-variabel bebas diantara satu dengan yang lainnya sehingga variabel-variabel bebas tersebut tidak bersifat orthogonal. Variabel-variabel bebas yang bersifat orthogonal adalah variabel bebas yang memiliki nilai korelasi diantara sesamanya sama dengan nol.

Penyebab dan Akibat Multikolinieritas

Hal-hal utama yang sering menyebabkan terjadinya Multikolinieritas pada model regresi antara lain :

- Kesalahan teoritis dalam pembentukan model fungsi regresi yang dipergunakan.
- Terlampau kecilnya jumlah pengamatan yang akan dianalisis dengan model regresi.

Jika terjadi multikolinieritas sempurna maka koefisien regresi dari variabel X tidak dapat ditentukan dan *standard error*nya tak berhingga. Jika terjadi Multikolinieritas kurang sempurna maka akan timbul akibat sebagai berikut:

- Meskipun koefisien regresi dari variabel X dapat ditentukan tetapi nilai *standard error*nya akan cenderung membesar sehingga tingkat kolinieritas antara variabel bebas juga meningkat.
- Nilai *standard error* dari koefisien regresi besar maka interval keyakinan untuk parameter dari populasi juga cenderung melebar.
- Tingginya tingkat kolinieritas, probabilitas untuk menerima hipotesis, padahal hipotesis itu salah menjadi membesar nilainya.
- Bila multikolinieritas tinggi, akan memperoleh nilai R^2 yang tinggi tetapi tidak ada atau sedikit sekali koefisien regresi yang signifikan secara statistik.

Pendeteksian Multikolinieritas

Ada beberapa cara untuk mengetahui ada tidaknya multikolinieritas

Diantaranya adalah :

- Faktor Variansi Inflasi
Adalah merupakan elemen diagonal utama dari invers matriks korelasi. Faktor variansi inflasi yang kecil maka multikolinieritas lebih sederhana. Faktor inflasi yang melebihi 10 maka multikolinieritas dikatakan ada.
- Nilai Determinan
Nilai determinan terletak antara 0 dan 1. Bila nilai determinan satu, kolom matriks X adalah orthogonal dan bila nilainya 0 disanaada sebuah ketergantungan linier yang nyata antara kolom X. nilai yang lebih kecil determinannya aka tingkat multikolinieritasnya lebih besar.
- Kadang-kadang pemeriksaan masing-masing elemen matriks korelasi dapat menolong dalam mendapatkan multikolinieritas. Jika elemen [rij] mendekati satu, maka X_i dan X_j mungkin benar-benar ada masalah multikolinieritas.
Karena bila lebih dari dua variabel bebas yang dicakup dalam sebuah multikolinieritas tidak selalu memungkinkan kita untuk mendapatkan keberadaan multikolinieritas.

Regresi Ridge

Regresi Ridge dapat digunakan untuk mengatasi korelasi yang tinggi antara beberapa variabel bebas. Multikolinieritas yang terdapat dalam regresi linier berganda yang mengakibatkan matriks $X^T X$ -nya hampir singular yang pada gilirannya menghasilkan nilai estimasi parameter yang tidak stabil. Regresi Ridge merupakan metode estimasi koefisien regresi yang diperoleh melalui penambahan konstanta bias c pada diagonal $X^T X$. Nilai c untuk koefisien regresi ridge diantara 0 hingga 1.

Dalam bentuknya yang sederhana adalah sebagai berikut :

$$\hat{\beta}(c) = (X^T X + cI)^{-1} X^T Y$$

Umumnya sifat dari penafsiran ridge ini memiliki variansi yang minimum sehingga diperoleh nilai VIF-nya yang merupakan diagonal utama dari matriks

$$(X^T X + cI)^{-1} X^T X (X^T X + cI)^{-1}$$

Pada dasarnya Regresi Ridge merupakan metode kuadrat terkecil. Perbedaannya adalah bahwa pada metode regresi ridge, nilai variabel bebasnya ditransformasikan dahulu melalui prosedur centering dan rescaling.

Ridge Trace

Ridge Trace adalah plot dari estimator regresi ridge secara bersama dengan berbagai kemungkinan tetapan bias c , konstanta c mencerminkan jumlah bias dalam estimator $\hat{\beta}(c)$. Bila $c = 0$ maka estimator $\hat{\beta}(c)$ sama dengan kuadrat terkecil β , tetapi cenderung lebih stabil.

Suatu acuan yang biasa digunakan untuk memilih besarnya c adalah dengan melihat VIF dan melihat pola kecenderungan Ridge Trace. Bila terdapat korelasi yang tinggi antara variabel bebas, maka nilai VIF akan besar. VIF memiliki nilai mendekati 1 jika variabel bebas X tidak saling berkorelasi dengan variabel bebas lainnya.

Pengujian Hipotesis

Pengujian untuk uji keberartian regresi sebagai berikut :

1. Menentukan uji Hipotesis

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_k = 0$ (tidak ada hubungan linier antara variabel-variabel bebas dengan variabel terikat)

$H_1: \exists \beta_j \neq 0, j = 1, 2, 3, \dots, k$ (ada hubungan linear antara variabel-variabel bebas dengan variabel terikat)

2. Menentukan tingkat signifikansi (α)

3. Kriteria pengambilan keputusan untuk F_{hitung} .

Terima H_0 jika $F_{hitung} \leq F_{tabel}$ dan Tolak H_0 jika $F_{hitung} > F_{tabel}$.

$$\text{Dengan } F_{hitung} = \frac{JKR/k}{JKR/(n-k-1)}$$

Untuk mengetahui koefisien yang diperoleh berarti atau tidak. Dilakukan pengujian sebagai berikut :

Hipotesis

$H_0: \beta_i = 0$ (koefisien regresi tidak signifikan)

$H_1: \beta_i \neq 0$ (koefisien regresi signifikan)

1. Menentukan tingkat signifikansi (α)

2. Uji Statistik yang digunakan, dalam hal ini uji statistik yang digunakan adalah uji-t

$$t = \frac{b_i}{s_{b_i}}$$

b_i = Koefisien regresi variabel $-i$

s_{b_i} = Standar error variabel $-i$

3. Kriteria Keputusan

H_0 diterima jika

$$|t_{hitung}| \leq t_{(\frac{\alpha}{2}, n-k-1)}$$

H_0 ditolak jika

$$|t_{hitung}| > t_{(\frac{\alpha}{2}, n-k-1)}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian pembahasan dibahas cara mendeteksi multikolinieritas pada data, penerapan regresi ridge dalam menyelesaikan multikolinieritas pada data, dan pengujian keberartian regresi pada data pertumbuhan bayi.

Data Pertumbuhan Bayi

Bayi merupakan anak-anak kecil yang berusia 0-1 tahun. Pertumbuhan bayi pun menjadi pusat perhatian para orang tua. Pertumbuhan seorang bayi dipengaruhi oleh berbagai macam aspek. Tinggi seorang bayi pun menjadi perhatian yang sangat penting bagi orang tua. Tinggi bayi juga dipengaruhi oleh beberapa faktor-faktor misalnya berat bayi waktu lahir, usia bayi dan lain-lain. Dan yang akan peneliti teliti yaitu Tinggi bayi sekarang (Y) yang dipengaruhi oleh Usia Bayi (X1), Tinggi bayi waktu lahir (X2), Berat bayi waktu lahir (X3), dan Ukuran dada bayi waktu lahir. Untuk mendapatkan Data Pertumbuhan Bayi dengan faktor-faktor yang mempengaruhi seperti yang telah dipaparkan peneliti. Peneliti melakukan Penelitian pada Posyandu Binaya. Posyandu Binaya merupakan salah satu Posyandu yang bertugas untuk melihat perkembangan Bayi pada kota Masohi terkhusus pada Kelurahan Namaelo RT 001. Data yang peneliti peroleh dapat terlihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Data Pertumbuhan Bayi

No	Y	X1	X2	X3	X4
1	62.0	216.0	51.0	2.7	19.0
2	50.0	104.0	50.0	3.1	16.0
3	61.0	106.0	51.0	2.4	21.0
4	60.0	147.0	52.0	2.0	26.0
5	60.0	71.0	52.0	2.3	23.0
6	63.0	144.0	49.0	2.2	22.0
7	58.0	73.0	50.0	2.3	22.0
8	63.0	235.0	50.0	2.1	24.0
9	55.0	23.0	51.0	3.2	16.0
10	56.0	92.0	50.0	2.9	17.0
11	56.0	53.0	51.0	3.0	17.0
12	67.0	85.0	52.0	2.6	20.0
13	59.0	100.0	48.0	2.4	20.0
14	55.0	80.0	48.0	3.0	16.0
15	55.0	80.0	48.0	3.0	16.0
16	64.0	133.0	51.0	2.4	21.0
17	60.0	140.0	52.0	2.6	20.0
18	62.0	141.0	51.0	2.3	22.0
19	68.0	233.0	50.0	2.3	22.0
20	60.0	167.0	48.0	2.3	21.0

Keterangan :

Y =Tinggi bayi sekarang (cm)

X₁ =Usia Bayi (hari)

X₂ =Tinggi bayi waktu lahir (cm)

X_3 =Berat bayi waktu lahir (kg)
 X_4 =Ukuran dada bayi waktu lahir (cm)

Regresi Linier Berganda

Akan dibentuk suatu model regresi linier berganda berdasarkan Tabel 1. Analisa regresi dengan menggunakan SPSS terhadap data menghasilkan nilai estimator parameter (Tabel 2)

Tabel 2. Coefficients^a

Model	Unstandardized Coefficients	
	B	Std. Error
1 (Constant)	73.715	33.961
X1	.033	.012
X2	1.839	.669
X3	-22.595	10.368
X4	-2.602	1.330

a. Dependent Variable: Y

Berdasarkan Tabel 2 diperoleh persamaan regresi linier berganda yaitu

$$Y = 73,715 + 0,033X_1 + 1,839X_2 - 22,595X_3 - 2,602X_4$$

Pada persamaan diatas terlihat bahwa koefisien regresi dari setiap variabel bebas memiliki nilai yang positif dan negatif. Sehingga dapat diartikan bahwa variabel bebas X_1, X_2 yang memiliki koefisien regresi yang positif menunjukkan bahwa antara X_1, X_2 dengan variabel terikat Y berjalan satu arah, dimana setiap penurunan atau peningkatan variabel bebas X_1, X_2 akan diikuti dengan penurunan atau peningkatan variabel terikat Y. Sedangkan variabel bebas X_3, X_4 yang memiliki koefisien regresi negatif menunjukkan bahwa antara X_3, X_4 berjalan dua arah dimana setiap peningkatan pada variabel bebas X_3, X_4 akan diikuti dengan penurunan variabel terikatnya dan setiap penurunan pada variabel bebas X_3, X_4 akan diikuti dengan peningkatan variabel terikat Y.

Pendeteksian Multikolinieritas Nilai VIF dan Tolerance

Mendeteksi multikolinieritas dengan menggunakan nilai VIF dan nilai tolerance dapat disimpulkan terdapat multikolinieritas apabila nilai VIF dari variabel-variabel bebasnya lebih dari 10 dan nilai tolerance dari variabel-variabel bebasnya mendekati 0.

Tabel 3. Coefficients^a

Model	Collinearity Statistics	
	Tolerance	VIF
1 (Constant)		
X1	.664	1.507
X2	.346	2.894
X3	.022	45.831
X4	.020	49.386

a. Dependent Variable: Y

Dari Tabel 3 terlihat bahwa nilai VIF dari $X_3 = 45,831$ dan $X_4 = 49,386$. karena nilai VIF dari X_3 dan X_4 lebih dari 10 dan juga nilai tolerance dari $X_3 = 0,022$ dan $X_4 = 0,020$ karena nilai tolerance mendekati 0 maka dapat disimpulkan bahwa adanya multikolinieritas antara variabel bebasnya.

Determinan Korelasi

Mendeteksi multikolinieritas dengan menggunakan determinan korelasi dapat disimpulkan terdapat multikolinieritas apabila nilai determinan korelasinya mendekati 0. Untuk memperoleh koefisien korelasi antara variabel-variabel bebasnya peneliti menggunakan SPSS 16.0. Hasilnya dapat terlihat pada matriks korelasi berikut

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -0,334 & -0,294 & 0,237 \\ -0,334 & 1 & 0,062 & 0,186 \\ -0,294 & 0,062 & 1 & -0,956 \\ 0,237 & 0,186 & -0,956 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari matriks korelasi tersebut akan diperoleh determinannya yaitu $|C| = 0,019674$

Karena nilai determinan dari matriks korelasinya mendekati 0 maka dapat disimpulkan bahwa terdapat korelasi antara variabel-variabel bebasnya.

Pemodelan Regresi Ridge

Software NCSS merupakan salah satu program matematika yang dipakai untuk menyelesaikan beberapa masalah yang terjadi dalam bidang matematika terkhususnya dalam bidang statistika. NCSS diciptakan pada tahun 1981.NCSS LLC merupakan perusahaan yang menciptakan NCSS. NCSS LLC khusus menyediakan software analisis statistika untuk penelitian, bisnis, dan lembaga akademik.

NCSS (Number Cruncher Statistical System) memasukkan lebih dari 230 dokumen statistik dan menggambarkan caranya. NCSS dapat menyelesaikan berbagai macam masalah Statistika dan salah satunya yaitu masalah multikolinieritas dengan menggunakan Metode Regresi Ridge.

Untuk menghilangkan kondisi buruk yang tidak menguntungkan yang diakibatkan oleh adanya Multikolinieritas dalam data yang dianalisis dan juga untuk memudahkan kerja dalam proses pendeteksian maupun dalam penanganan multikolinieritas maka dilakukan proses pemusatan dan penskalaan terhadap data atau variabel.

Tabel 4. One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Unstandardized Residual
N		20
Normal Parameters ^a	Mean	.0000000
	Std. Dev	2.14694314
Most Extreme Differences	Absolute	.175
	Positive	.175
	Negative	-.119
Kolmogorov-Smirnov Z		.782
Asymp. Sig. (2-tailed)		.574

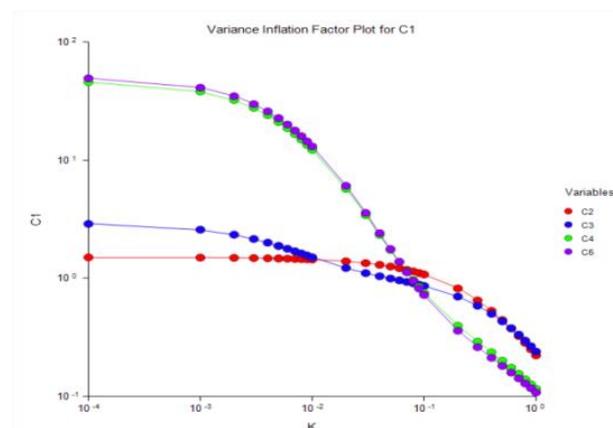
Sebelumnya akan dilakukan pengujian terhadap data yang ada. Apakah data berdistribusi normal. Dalam penelitian ini, peneliti menggunakan pengujian Kolmogorov-Smirnov.

Peneliti menggunakan SPSS 16.0 untuk mendapatkan hasilnya. Hasil yang diperoleh dapat terlihat pada Tabel 4

Dari Tabel 4 dapat terlihat bahwa nilai Kolmogorov-Smirnov Z sebesar 0,782 dan Asymp Sig sebesar 0,574 lebih besar dari Nilai signifikan yang dipilih yaitu 0,05 maka dapat disimpulkan bahwa data berdistribusi normal. Karena data yang diperoleh berdistribusi normal maka tidak perlu dilakukan pentransformasian terhadap data.

Tabel 5. Nilai VIF $\hat{\beta}(c)$ dengan berbagai nilai c

Nilai c	VIF $\hat{\beta}_1(c)$	VIF $\hat{\beta}_2(c)$	VIF $\hat{\beta}_3(c)$	VIF $\hat{\beta}_4(c)$
0,000	1,5067	2,894	45,831	49,386
0,001	1,4995	2,584	38,213	41,156
0,002	1,4927	2,345	32,363	34,836
0,003	1,4862	2,157	27,774	29,879
0,004	1,4800	2,006	24,108	25,918
0,005	1,4740	1,884	21,133	22,704
0,006	1,4682	1,782	18,685	20,059
0,007	1,4625	1,697	16,647	17,858
0,008	1,4569	1,626	14,932	16,006
0,009	1,4514	1,564	13,475	14,432
0,01	1,4460	1,511	12,227	13,085
0,02	1,3949	1,225	5,737	6,077
0,03	1,3474	1,109	3,424	3,582
0,04	1,3028	1,043	2,339	2,415
0,05	1,2606	0,998	1,743	1,774
0,06	1,2206	0,963	1,378	1,3836
0,07	1,1826	0,934	1,138	1,1275
0,08	1,1464	0,908	0,970	0,9498
0,09	1,1121	0,885	0,848	0,8209
0,1	1,0794	0,864	0,756	0,7240
0,2	0,8223	0,702	0,398	0,3607
0,3	0,6515	0,588	0,292	0,2618
0,4	0,5315	0,501	0,237	0,2127
0,5	0,4436	0,4334	0,2012	0,1817
0,6	0,3771	0,3789	0,1755	0,1595
0,7	0,3253	0,3344	0,1557	0,1425
0,8	0,2841	0,2974	0,1400	0,1289
0,9	0,2507	0,2664	0,1271	0,1177
1,0	0,2232	0,2401	0,1162	0,1082



Gambar 1. VIF plot

Dalam proses pengestimasi regresi ridge, pemilihan tetapan bias c merupakan hal yang paling penting dalam penelitian ini, penentuan tetapan bias c ditempuh melalui pendekatan nilai VIF dan gambar Ridge Trace. Nilai dari VIF $\hat{\beta}(c)$ dengan berbagai kemungkinan tetapan bias c dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 5 menunjukkan bahwa $0,000 \leq c \leq 1,000$ dengan berbagai nilai VIF-nya. Dari Tabel 5 juga dapat terlihat bahwa semakin besar nilai c , semakin kecil nilai VIF koefisien estimator $\hat{\beta}(c)$. Nilai VIF dapat diplot pada Gambar 1.

Berdasarkan Gambar 1 terlihat bahwa setiap nilai VIF semakin mengalami penurunan. VIF dari setiap koefisien $\hat{\beta}(c)$ mengalami penurunan menuju 0. Pada saat $c = 0,2$ nilai VIF mendekati 1 dari 0. Nilai VIF $\hat{\beta}_1(c) = 0,8223$, VIF $\hat{\beta}_2(c) = 0,7015$, VIF $\hat{\beta}_3(c) = 0,3977$, VIF $\hat{\beta}_4(c) = 0,3607$.

Sedangkan nilai koefisien estimator parameter $\hat{\beta}(c)$ dengan berbagai kemungkinan tetapan bias c dapat dilihat pada Tabel 6 berikut :

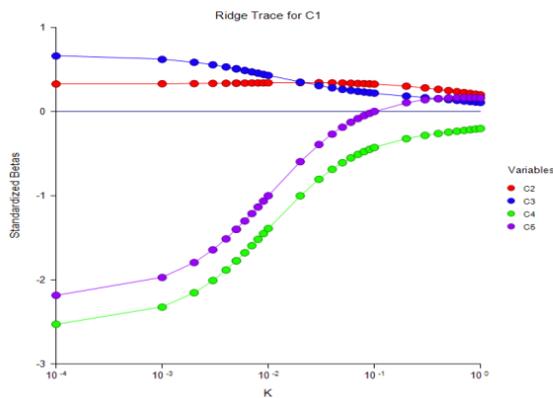
Tabel 6. Nilai $\hat{\beta}(c)$ dengan berbagai nilai c

Nilai (c)	$\hat{\beta}_1(c)$	$\hat{\beta}_2(c)$	$\hat{\beta}_3(c)$	$\hat{\beta}_4(c)$
0.0000	0.5069	0.6914	-2.181	-2.0323
0.0010	0.5090	0.6542	-1.998	-1.8418
0.0020	0.5107	0.6229	-1.845	-1.6820
0.0030	0.5120	0.5963	-1.714	-1.5460
0.0040	0.5130	0.5733	-1.602	-1.4290
0.0050	0.5137	0.5533	-1.505	-1.3271
0.0060	0.5143	0.5356	-1.419	-1.2376
0.0070	0.5148	0.5199	-1.343	-1.1584
0.0080	0.5151	0.5059	-1.275	-1.0878
0.0090	0.5153	0.4934	-1.215	-1.0245
0.0100	0.5154	0.4820	-1.160	-0.9674
0.0200	0.5136	0.4080	-0.813	-0.6023
0.0300	0.5093	0.3690	-0.638	-0.4173
0.0400	0.5042	0.3442	-0.534	-0.3053
0.0500	0.4987	0.3266	-0.464	-0.2300
0.0600	0.4931	0.3132	-0.415	-0.1758
0.0700	0.4875	0.3024	-0.379	-0.1349
0.0800	0.4820	0.2934	-0.350	-0.1029
0.0900	0.4766	0.2857	-0.328	-0.0771
0.1000	0.4713	0.2790	-0.310	-0.0558
0.2000	0.4246	0.2360	-0.227	0.0477
0.3000	0.3878	0.2104	-0.201	0.0854
0.4000	0.3581	0.1917	-0.187	0.1041
0.5000	0.3335	0.1770	-0.179	0.1145
0.6000	0.3127	0.1649	-0.172	0.1206
0.7000	0.2948	0.1546	-0.167	0.1240
0.8000	0.2793	0.1458	-0.163	0.1257
0.9000	0.2655	0.1381	-0.158	0.1264
1.0000	0.2533	0.1313	-0.154	0.1263

Tabel 6 menunjukkan berbagai koefisien estimator parameter $\hat{\beta}(c)$ dengan berbagai nilai c . Berdasarkan Tabel 6 dapat terlihat bahwa semakin besar nilai c , koefisien regresi ridge dari variabel bebas X_1, X_2 semakin kecil sedangkan koefisien regresi ridge dari variabel bebas X_3, X_4 . Dari Tabel 6 dapat membuat sebuah Ridge Trace seperti pada Gambar 2

Dari Gambar 2 terlihat bahwa koefisien β lebih stabil pada saat $c = 0,2$. Dengan demikian persamaan Regresi Ridge yang dihasilkan dari $c = 0,2$ yaitu

$$Y^* = 0,4246 X_1^* + 0,2360X_2^* - 0,2274X_3^* + 0,0477 X_4^*$$



Gambar 2. Ridge Trace

Uji Keberartian Regresi

Persamaan regresi yang diperoleh yaitu:

$$Y^* = 0,4246 X_1^* + 0,2360X_2^* - 0,2274X_3^* + 0,0477 X_4^*$$

Akan diuji keberartian dari model tersebut

- Hipotesis
 $H_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$
 (tidak ada hubungan antara variabel-variabel bebas dengan variabel terikat)
 $H_0: \exists \beta_j \neq 0, j = 1,2,3,4$
 (ada hubungan linier antara variabel-variabel bebas dengan variabel terikat)
- Taraf signifikansi $\alpha = 0,05$
- Nilai F_{hitung} dapat dilihat pada Tabel 7

Tabel 7. Anava Ridge

S. Varians	JK	DK	KT	F_{hitung}	F_{tabel}
Regresi	0,687	4	0,1718	8,23	3,056
Sis	0,313	15	0,0209		
Total	1	19			

- Dari Tabel 7 terlihat bahwa $F_{hitung} = 8,23 > F_{tabel} = 3,06$ maka tolak H_0 sehingga ada hubungan antara variabel-variabel bebas dengan variabel terikat.

Untuk mengetahui koefisien yang diperoleh berarti atau tidak dilakukan pengujian sebagai berikut :

- Hipotesis
 $H_0: \beta_i = 0$ (koefisien regresi tidak signifikan)
 $H_1: \beta_i \neq 0$ (koefisien regresi signifikan)
- Tingkat signifikansi $\alpha = 0,05$
- Uji-t

$$t = \frac{b_i}{s_{b_i}}$$
 $b_i =$ Koefisien regresi variabel $-i$
 $s_{b_i} =$ Standar error variabel $-i$

Dari Tabel 8 dapat disimpulkan bahwa variabel X_1 berpengaruh secara signifikan terhadap variabel terikat Y , sedangkan variabel X_2, X_3, X_4 tidak berpengaruh secara

signifikan terhadap variabel Y . Proses Pengembalian X^* ke X bentuk semula dengan $\bar{Y} = 60,11, \bar{X}_1 = 121,15, \bar{X}_2 = 50,25, \bar{X}_3 = 2,55, \bar{X}_4 = 20,05 S_Y = 3,751347,$

$$S_{X_1} = 58,16336, S_{X_2} = 1,409554, S_{X_3} = 0,361976, S_{X_4} = 5,448563$$

Sehingga persamaan regresinya menjadi :

$$\hat{Y} = 30,12984 + 0,0274X_1 + 0,628X_2 - 2,3551X_3 + 0,061X_4$$

Tabel 8. Uji Keberartian Koefisien

	b_i	s_{b_i}	$ t_{hitung} $	t_{tabel}	Kesimpulan
1	0,425	0,011	40,46	2,13	signifikan
2	0,2360	0,399	0,59		Tidak signifikan
3	-0,227	1,173	0,19		Tidak signifikan
4	0,048	0,138	0,346		Tidak signifikan

Dari persamaan regresi diatas dapat diartikan bahwa variabel bebas X_1, X_2, X_4 yang memiliki koefisien regresi yang positif menunjukkan bahwa antara X_1, X_2, X_4 dengan variabel terikat Y berjalan satu arah, dimana setiap penurunan atau peningkatan variabel bebas X_1, X_2, X_4 akan diikuti dengan penurunan atau peningkatan variabel terikat Y . Sedangkan variabel bebas X_3 yang memiliki koefisien regresi negatif menunjukkan bahwa antara X_3 berjalan dua arah dimana setiap peningkatan pada variabel bebas X_3 akan diikuti dengan penurunan variabel terikatnya dan setiap penurunan pada variabel bebas X_3 akan diikuti dengan peningkatan variabel terikat Y .

KESIMPULAN

Dari pembahasan diatas dapat disimpulkan bahwa :

- Persamaan regresi yang diperoleh dengan menggunakan kuadrat terkecil mengandung multikolinieritas. Sehingga diterapkan Metode Regresi Ridge untuk memperoleh persamaan regresi yang baru dan tidak mengandung multikolinieritas. dan persamaan regresi yang baru yaitu

$$\hat{Y} = 30,12984 + 0,0274X_1 + 0,628X_2 - 2,3551X_3 + 0,061X_4$$
- Berdasarkan data bayi yang peneliti teliti, usia bayi sangat berpengaruh secara signifikan terhadap tinggi bayi sekarang, sedangkan tinggi bayi waktu lahir, berat bayi waktu lahir dan ukuran dada bayi waktu lahir tidak berpengaruh secara signifikan terhadap tinggi bayi sekarang.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Agriska Prenadita Putri. 2011. *Penggunaan Metode Ridge Trace dan Variance Inflation Factor*.

- [2] Draper N dan Smith H. 1981. *Analisis Regresi Terapan Edisi 2 (Terjemahan Cmbang-Sumantri)*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama
- [3] Kariyam. 2000. *Studi Penanganan Kasus Multikolinieritas dengan Pendekatan Analisis Regresi Faktor*. ISSN: 1410-2315
- [4] Pradipta, Nanan. 2009. *Model Regresi Ridge untuk Mengatasi Model Regresi Linier Berganda yang Mengandung Multikolinieritas*. USU Repository
- [5] Walpole, RE dan Myers, R H. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Penerbit ITB



APLIKASI METODE RUNGE KUTTA ORDE EMPAT PADA PENYELESAIAN RANGKAIAN LISTRIK RLC

Application of Fourth Order Runge Kutta methods on Completion of the Electrical Circuit RLC

SAMSUL B. LOKLOMIN¹, FRANCIS Y. RUMLAWANG²

¹Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura

²Staf Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

E-mail: ²rumlawang@staff.unpatti.ac.id

ABSTRAK

Dalam penelitian ini akan ditentukan solusi penyelesaian persamaan diferensial orde kedua yang timbul dalam masalah rangkaian listrik RLC dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Persamaan diferensial orde kedua dibentuk menjadi sistem persamaan orde pertama dan diselesaikan secara simultan. Hasilnya diperoleh solusi yang tingkat presisinya cukup tinggi jika dibandingkan dengan solusi analitiknya.

Kata kunci : *Metode Runge-Kutta, Persamaan Diferensial, Rangkaian Listrik RLC.*

PENDAHULUAN

Salah satu model matematika dalam fisika dan elektronika adalah model rangkaian listrik. Rangkaian listrik adalah suatu kumpulan elemen atau komponen listrik yang saling dihubungkan dengan cara-cara tertentu dan paling sedikit mempunyai satu lintasan tertutup yang terdiri atas hambatan R , induktansi L , dan kapasitansi C .

Jika R , L dan C disusun secara seri dengan input tegangan, model matematikanya berbentuk persamaan diferensial linear orde dua. Persamaan matematika ini cukup panjang prosedurnya jika diselesaikan secara analitik oleh karena itu dilakukan pendekatan secara numerik.

Metode Numerik yang banyak dipakai dalam menyelesaikan persamaan diferensial adalah metode Range-Kutta hal ini dikarenakan metode ini mempunyai presisi yang cukup tinggi.

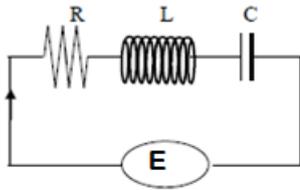
Dalam penelitian ini akan ditentukan solusi penyelesaian persamaan diferensial orde kedua yang timbul dalam masalah rangkaian listrik RLC dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dengan membentuk persamaan orde kedua menjadi sistem persamaan orde pertama dan diselesaikan secara simultan.

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam [1] dan [2] dibahas mengenai penyelesaian persamaan diferensial biasa secara numerik dengan menggunakan metode Range-Kutta. Dibahas pula bagaimana menyelesaikan persamaan diferensial orde dua dengan mereduksinya menjadi dua persamaan diferensial orde satu yang dapat diselesaikan secara simultan, yang dikenal sebagai penyelesaian sistem persamaan diferensial.

Rahayu 2005 dalam [4] menggunakan Metode Range-Kutta untuk menyelesaikan persamaan pendulum, sedangkan Arifin 2011 dalam [3] menggunakan Metode Range-Kutta orde dua untuk menyelesaikan persamaan rangkaian listrik RLC.

Dalam [3] dan [5] rangkaian RLC adalah rangkaian listrik yang di dalamnya mengandung resistor, kapasitor, dan induktor yang saling terhubung satu sama lain secara paralel maupun seri. Dalam gambar 1. Diperlihatkan rangkaian RLC yang menghubungkan suatu resistor yang beresistansi R (*ohm*), suatu induktor yang berinduktansi L (*henry*), dan sebuah kapasitor yang berkapasitansi C (*farad*) sebuah sumber gaya elektromotif $E(t)$ (*volt*) dengan t adalah waktu.



Gambar 1. Rangkaian Listrik RLC

Metode Runge-Kutta Orde Empat

Bentuk Metode Runge-Kutta orde empat klasik untuk menyelesaikan persamaan diferensial adalah sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (1)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

Semua harga k berhubungan secara rekursif. Artinya k_1 muncul dalam persamaan untuk k_2 , yang muncul lagi pada persamaan k_3 dan seterusnya. Dengan y_0 adalah *initial value* atau nilai awal.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Rangkaian Listrik Seri

Rangkaian listrik seri adalah suatu rangkaian alat-alat listrik yang disusun berurutan tanpa adanya cabang. Langkah pertama dalam mencari solusi rangkaian ini adalah mencari persamaan rangkaian. Karena rangkaian mengandung C dan L , maka ada dua peubah status, yaitu tegangan kapasitor dan arus induktor, yang dapat dipilih untuk digunakan dalam mencari persamaan rangkaian. Dalam mencari persamaan rangkaian terlebih dulu menggunakan tegangan kapasitor sebagai peubah rangkaian, kemudian melihat apa yang akan didapatkan jika arus induktor yang dipilih. Karena rangkaian adalah seri maka arus yang mengalir pada setiap beban adalah sama sedangkan tegangan pada setiap beban adalah berbeda. Dengan mengabaikan gaya gerak listrik induksi yang timbul pada resistor, besarnya arus listrik yang mengalir melalui resistor dapat ditentukan dengan hukum ohm persamaan:

$$I = \frac{E_R}{R} \quad (2)$$

dengan :

I : Arus listrik

E_R : Tegangan Resistor

R : Resistor

Sehingga diperoleh

$$E_R = IR \quad (3)$$

Apabila induktor mempunyai induktansi sebesar L , maka berdasar Hukum Lenz besar tegangan padabeban L dinyatakan dengan persamaan :

$$E_L = \frac{dI}{dt} \quad (4)$$

Sehingga hubungan resistor (R), induktansi (L), kapasitor (C), dan Elektromotif $E(t)$ (Volt) adalah

$$E_L + E_R + E_C = E(t)$$

Maka diperoleh

$$L \frac{dI}{dt} + IR + E_C = E(t) \quad (5)$$

karena $I = I_c = C \frac{dE_c}{dt}$, maka persamaan (5) menjadi :

$$LC \frac{d^2 E_c}{dt^2} + RC \frac{dE_c}{dt} + E_c = E(t) \quad (6)$$

Persamaan (6) di atas adalah persamaan diferensial orde kedua, yang merupakan diskripsi lengkap rangkaian, dengan tegangan kapasitor E_c sebagai variabel terikat dan t sebagai variabel bebas. Untuk memperoleh persamaan rangkaian dengan arus induktor I sebagai peubah, kita memanfaatkan hubungan arus tegangan kapasitor, yaitu

$$I = I_c = C \frac{dE_c}{dt} \rightarrow E_c = \frac{1}{C} \int I dt \quad (7)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (7) ke (6) maka diperoleh

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{1}{C} \int I dt = E(t) \quad (8)$$

Dengan mendiferensialkan persamaan (8) terhadap I maka diperoleh

$$LI'' + RI' + \frac{I}{C} = \frac{dE(t)}{dt} \quad (9)$$

Persamaan (9) adalah persamaan diferensial orde dua dengan arus induktor I sebagai variabel terikat dan t sebagai variabel bebas. Persamaan (6) dan (9) sama bentuknya, hanya peubah sinyalnya yang berbeda. Hal ini berarti bahwa tegangan kapasitor ataupun arus induktor sebagai peubah akan memberikan persamaan rangkaian yang setara.

Aplikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Pada Kasus Rangkaian Seri

Kasus 1:

Sebuah rangkaian RLC dihubungkan secara seri memiliki $R=4 \text{ Ohm}$, $C=1/5 \text{ Farad}$, $L=1 \text{ Henry}$, dan diberikan tegangan $E=12 \text{ Volt}$. Pada saat $t=0$ kuat arus $I(0) =$

2 Ampere dan tegangan pada kapasitor $E_c(0) = 5$ volt. Tentukan tegangan kapasitor $E_c(t)$ untuk waktu $0 \leq t \leq 2$ detik.

Penyelesaian:

Berdasarkan persamaan (6) dapat dibentuk persamaan diferensial orde-2

$$\frac{1}{5} \frac{d^2 E_c}{dt^2} + \frac{4}{5} \frac{dE_c}{dt} + E_c = 12$$

Dengan $I(0)=2$ Ampere dan $E_c(0) = 5$ volt. Karena $I = I_c = C \cdot \frac{dE_c}{dt}$ maka $E'_c(0) = 10$. Sehingga rangkaian dapat dimodelkan ke persamaan diferensial tingkat dua.

$$\frac{d^2 E_c}{dt^2} + 4 \frac{dE_c}{dt} + 5E_c = 60$$

Misalkan: $E_c = y$

Maka dapat ditulis:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 5y - 60 = 0 \quad (10)$$

Karena persamaan diferensial biasa berorde-2 jadi di ubah menjadi persamaan diferensial orde-1.

Misal: $\frac{dy}{dt} = y' = z$
 $\frac{d^2 y}{dt^2} = y'' = z'$

diperoleh:

$$y'' + 4y' + 5y - 60 = 0$$

$$z' = -4z - 5y + 60$$

Sehingga diperoleh 2 persamaan baru yang masing-masing orde pertama:

$$y' = z \text{ dan } z' = 60 - 5y - 4z \quad (11)$$

Dengan $E_c(0) = y(0) = 5$ dan $E'_c(0) = y'(0) = z(0) = 10$

Penyelesaian sistem persamaan diferensial (11) dapat dilakukan dengan mengaplikasikan metode Range-Kutta pada kedua persamaan tersebut (dapat dilihat dalam [2]).

Perhitungan dengan metode Runge-Kutta Orde 4 untuk iterasi ke-1, dengan $t_0 = 0$; $y_0 = 5$; $z_0 = 10$ adalah sebagai berikut:

$$k_1 = hf(t_0, y_0, z_0)$$

$$= 0,1f(0,5,10)$$

$$= 0,1(10)$$

$$= 1$$

$$l_1 = hf(t_0, y_0, z_0)$$

$$= 0,1f(0,5,10)$$

$$= 0,1(60 - 5(5) - 4(10))$$

$$= 0,1(-5)$$

$$= -0,5$$

$$k_2 = hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1, z_0 + \frac{1}{2}l_1\right)$$

$$= 0,1f\left(0 + \frac{1}{2}(0,1), 5 + \frac{1}{2}(1), 10 + \frac{1}{2}(-0,5)\right)$$

$$= 0,1f(0,05; 5,5; 9,75)$$

$$= 0,1(9,75)$$

$$= 0,975$$

$$l_2 = hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1, z_0 + \frac{1}{2}l_1\right)$$

$$= 0,1f\left(0 + \frac{1}{2}(0,1), 5 + \frac{1}{2}(1), 10 + \frac{1}{2}(-0,5)\right)$$

$$= 0,1f(0,05; 5,5; 9,75)$$

$$= 0,1(60 - 5(5,5) - 4(9,75))$$

$$= 0,1(-6,5)$$

$$= -0,65$$

$$k_3 = hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2, z_0 + \frac{1}{2}l_2\right)$$

$$= 0,1f\left(0 + \frac{1}{2}(0,1), 5 + \frac{1}{2}(0,975), 10 + \frac{1}{2}(-0,65)\right)$$

$$= 0,1f(0,05; 5,4875; 9,675)$$

$$= 0,1(9,675)$$

$$= 0,9675$$

$$l_3 = hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2, z_0 + \frac{1}{2}l_2\right)$$

$$= 0,1f\left(0 + \frac{1}{2}(0,1), 5 + \frac{1}{2}(0,975), 10 + \frac{1}{2}(-0,65)\right)$$

$$= 0,1f(0,05; 5,4875; 9,675)$$

$$= 0,1(60 - 5(5,4875) - 4(9,675))$$

$$= 0,1(-6,1375)$$

$$= -0,61375$$

$$k_4 = hf(t_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3)$$

$$= 0,1(0 + 0,1; 5 + 0,9675; 10 - 0,61375)$$

$$= 0,1(0,1; 5,9675; 9,38625)$$

$$= 0,1(9,38625)$$

$$= 0,938625$$

$$l_4 = hf(t_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3)$$

$$= 0,1(0 + 0,1; 5 + 0,963; 10 + (-0,601375))$$

$$= 0,1(0,1; 5,9675; 9,38625)$$

$$= 0,1(60 - 5(5,9675) - 4(9,38625))$$

$$= 0,1(-7,3825)$$

$$= -0,73825$$

Rumus iterasi ke-1 metode Runge-Kutta Orde 4:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= 5 + \frac{1}{6}(1 + 2(0,975) + 2(0,9675) + 0,938625)$$

$$= 5,970604167$$

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$= 10 + \frac{1}{6}(-0,5 + 2(-0,65) + 2(-0,61375) - 0,73825)$$

$$= 9,372375$$

Selanjutnya dilakukan perhitungan dengan metode Runge-Kutta Orde 4 untuk iterasi ke-2, dengan $t_1 = 0,1$; $y_1 = 5,9706$; $z_1 = 9,3724$ sehingga diperoleh nilai $y_2 = 6,868611$ dan $z_2 = 8,5671$. Perhitungan dilakukan sampai iterasi ke-20 untuk memperoleh nilai y_{20} dan z_{20} .

Solusi dari persamaan (10) adalah nilai y_0 sampai y_{20} yang merupakan nilai $E_c(t)$ dimana $0 \leq t \leq 2$ dengan langkah 0.1

Solusi analitik persamaan (10) adalah.

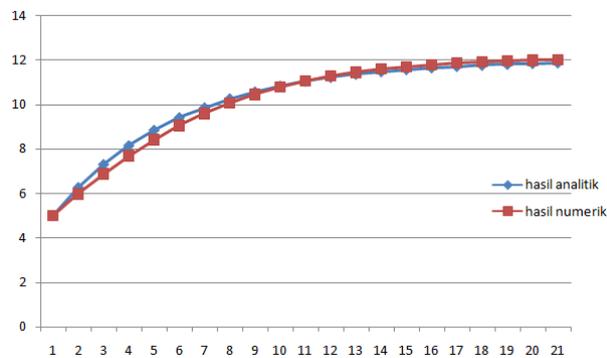
$$y(t) = E_c(t) = 12 - 4e^{-2t} \sin(t) - 7e^{-2t} \cos(t)$$

Perbandingan solusi persamaan (10) secara numerik dan analitik serta galat dari kedua solusi diberikan oleh tabel berikut.

Tabel.1 Nilai Pendekatan Metode Runge-Kutta orde 4

Iterasi	t	Solusi Analitik	Solusi Numerik	Galat
	0	5	5	0
1.	0.1	6.26318	5.970604	0.292576
2.	0.2	7.29843	6.868658	0.429772
3.	0.3	8.14688	7.681225	0.465655
4.	0.4	8.84223	8.403141	0.439089
5.	0.5	9.4121	9.0368	0.3753
6.	0.6	9.85461	9.5832	0.27141
7.	0.7	10.26189	10.049	0.21289
8.	0.8	10.57559	10.441	0.13459
9.	0.9	10.83267	10.767	0.06567
10.	1	11.04335	11.037	0.00635
11.	1.1	11.21601	11.257	-0.04099
12.	1.2	11.35751	11.436	-0.07849
13.	1.3	11.47348	11.578	-0.10452
14.	1.4	11.56851	11.691	-0.12249
15.	1.5	11.64639	11.779	-0.13261
16.	1.6	11.71022	11.848	-0.13778
17.	1.7	11.76253	11.9	-0.13747
18.	1.8	11.80534	11.939	-0.13366
19.	1.9	11.84052	11.967	-0.12648
20.	2	11.8693	11.988	-0.1187

Secara grafik perbandingan solusi persamaan (10) secara numerik dan analitik dapat dilihat sebagai berikut



Grafik 1. Solusi analitik dan solusi numerik

Kasus 2:

Sebuah rangkaian listrik RLC yang terdiri dari resistor, kapasitor dan induktor dengan elemen-elemen $R = 4 \Omega$,

$C=1/3Farad$, $L=1 Henry$ disusun secara seri dan diberikan tegangan $E=10 Volt$. Pada saat $t=0$ kuat arus $I(0) = 2 Ampere$ dan tegangan pada kapasitor $E_c(0) = 6 volt$. Tentukan nilai $E_c(t)$ untuk waktu $0 \leq t \leq 1$ detik.

Penyelesaian :

Berdasarkan persamaan (4.25) dapat dibentuk persamaan diferensial orde-2

$$\frac{1}{3} \frac{d^2 E_c}{dt^2} + \frac{4}{3} \frac{dE_c}{dt} + E_c = 10$$

Dengan $I(0)=2 Ampere$ dan $E_c(0) = 6 Volt$. Karena $I = I_c = C \cdot \frac{dE_c}{dt}$ maka $E'_c(0) = 12$. Sehingga rangkaian dapat dimodelkan kepersamaan diferensial tingkat dua.

$$\frac{d^2 E_c}{dt^2} + 4 \frac{dE_c}{dt} + 3E_c = 30$$

Misalkan $E_c = y$

Maka

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 3y - 30 = 0 \tag{12}$$

Untuk memperoleh solusi dengan pendekatan numerik diperlukan manipulasi persamaan diferensial orde dua kepersamaan diferensial orde pertama.

Misal: $\frac{dy}{dt} = y' = z$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = y'' = z'$$

Jadi dapat ditulis :

$$y'' + 4y' + 3y - 30 = 0$$

$$z' = -4z - 3y + 30$$

Sehingga diperoleh 2 persamaan orde pertama

$$y' = z$$

$$z' = 30 - 3y - 4z \tag{13}$$

Dengan $E_c(0) = y(0) = 6$ dan $E'_c(0) = y'(0) = z(0) = 12$ dengan $h= 0.1$

Tabel 2. Perbandingan Solusi Numerik dan Analitik kasus 2

Iterasi	t	Solusi Analitik	Solusi Numerik	Galat
1	0	6	6	0
2	0.1	6.87271	7.03665	-0.16394
3	0.2	7.53483	7.8046392	-0.2698092
4	0.3	8.039474	8.3735944	-0.3341204
5	0.4	8.42609	8.795098	-0.369008
6	0.5	8.72408	9.107363	-0.383283
7	0.6	8.95529	9.338701	-0.383411
8	0.7	9.13604	9.510085	-0.374045
9	0.8	9.27852	9.637053	-0.358533
10	0.9	9.391814	9.8008	-0.408986
11	1	9.48276	9.852425	-0.369665

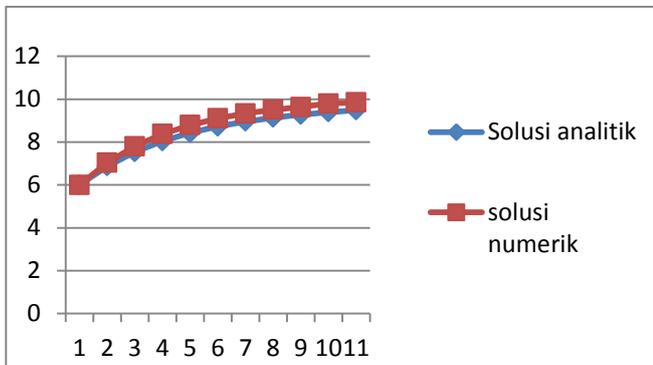
Dengan melakukan perhitungandengan cara yang sama dengan pada kasus 1 dan dengan

membandingkannya dengan solusi analitik persamaan (12) yang berbentuk

$$E_c = 10 - e^{-t} - 3e^{-3t}$$

Perbandingan solusi numerik dan analitik persamaan (12) dapat dilihat dalam tabel 2.

Secara grafik perbandingan solusi persamaan (12) secara numerik dan analitik dapat dilihat sebagai berikut



Grafik 2. Solusi analitik dan solusi numerik

KESIMPULAN

Dalam penyelesaian persamaan diferensial pada persamaan rangkaian listrik RLC secara numerik, persamaan diferensial orde-2 diubah ke sistem persamaan orde pertama untuk memudahkan proses perhitungan.

Metode Runge-Kutta orde empat yang digunakan untuk penyelesaian rangkaian listrik RLC diaplikasikan pada sistem persamaan diferensial orde pertama secara simultan. Hasilnya dapat dilihat dalam kasus 1 ataupun kasus 2, jika dibandingkan dengan solusi analitiknya diperoleh nilai galat yang relatif kecil.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Chapra C. Steven & Canale P. Raymond. (1991). *Metode Numerik Untuk Teknik Dengan Penerapan Pada Komputer*, Universitas Indonesia, Jakarta.
- [2] John H. Mathews & Kurtis D. Fink. 1999. *Numerical Methods Using Matlab 3rd Ed.* Prentice Hall Upper Saddle River NJ 07458
- [3] Mizwar Arifin, Tulus. 2011. *Metode Runge-Kutta Ordo-2 untuk penyelesaian rangkaian listrik RLC*. Jurnal. Medan, Indonesia: Universitas Sumatera Utara.
- [4] Puji Utami Rahayu. 2005. *Metode Runge-Kutta Untuk Solusi Persamaan Pendulum*. Skripsi Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang.
- [5] Widagda, IGA. 2006. *Fisika Komputasi*. Fisika FMIPA UNUD : Bali



ANALISIS SISTEM ANTRIAN PADA BANK MANDIRI CABANG AMBON *Analysis of Queue System on the Bank Mandiri Branch Ambon*

SALMON NOTJE AULELE
Staf Jurusan Matematika, FMIPA, UNPATTI
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
E-mail: salmon.aulele@yahoo.com

ABSTRAK

Antrian adalah suatu garis tunggu dari orang/satuan yang memerlukan pelayanan dari satu atau lebih fasilitas layanan, misalnya antrian pada *teller* di bank. Pada bank dengan jumlah *teller* yang sedikit atau tingkat pelayanan yang rendah seringkali mengakibatkan antrian yang panjang di depan *teller* sehingga nasabah yang akan dilayani menunggu dalam jangka waktu yang lama. Tujuan penelitian ini yaitu untuk menentukan jumlah *teller* yang optimal pada Bank Mandiri Cabang Ambon dengan menggunakan Model Tingkat Aspirasi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa jumlah *teller* yang optimal ialah 4 *teller*.

Kata Kunci : *Antrian, Teller, Model Tingkat Aspirasi, Bank Mandiri Cabang Ambon*

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari sering terjadi kejadian-kejadian yang berkaitan dengan antrian untuk memperoleh pelayanan tertentu, misalnya antrian pada *teller* di bank. Setiap bank memiliki pelayanan *teller* yang merupakan bagian yang penting, karena setiap nasabah bank yang akan melakukan transaksi di bank tersebut dilayani melalui *teller*. Pada umumnya, setiap bank memiliki jumlah *teller* minimal satu sesuai kebutuhan pelayanan kepada nasabah. Pada bank dengan jumlah *teller* yang sedikit atau tingkat pelayanan yang rendah seringkali mengakibatkan antrian yang panjang di depan *teller*, apabila pada waktu yang bersamaan atau selang beberapa saat terdapat beberapa nasabah yang ingin melakukan transaksi pada *teller* tersebut. Antrian yang panjang menyebabkan nasabah yang akan dilayani pada *teller* menunggu dalam jangka waktu yang lama. Hal ini menunjukkan tingkat pelayanan yang rendah terhadap nasabah dalam sistem pelayanan pada bank.

Berdasarkan pengamatan diketahui bahwa nasabah yang datang pada Bank Mandiri Cabang Ambon sangat banyak sehingga menyebabkan antrian yang panjang dan nasabah menunggu dalam jangka waktu yang lama untuk dapat dilayani pada *teller*. Kondisi diatas menunjukkan bahwa kapasitas pelayanan tidak sesuai dengan jumlah nasabah yang datang sehingga menyebabkan antrian yang panjang dan waktu menunggu yang lama untuk memperoleh pelayanan. Kenyataan ini jauh dari harapan

menagemen bank mandiri cabang Ambon agar rasio pemanfaatan *teller* yaitu 85 sampai 100 persen dari total waktu pelayanan dan maksimum waktu tunggu nasabah yaitu 15 menit. Berdasarkan hal diatas, untuk mendapatkan solusi terhadap kualitas pelayanan yang optimal, yakni mengurangi antrian yang panjang dan mengetahui jumlah *teller* yang optimal, serta memaksimalkan pemanfaatan sarana pelayanan, maka perlu dilakukan analisis model sistem antrian pada Bank Mandiri Cabang Ambon.

TINJAUAN PUSTAKA

1. Distribusi Poisson

Distribusi Poisson merupakan suatu distribusi untuk peristiwa yang probabilitas kejadiannya kecil, dimana kejadiannya tergantung pada interval waktu tertentu atau di suatu daerah tertentu dengan hasil pengamatan berupa variabel diskrit dan antar variabel saling independen. Interval waktu tersebut dapat berapa saja panjangnya, misalnya semenit, sehari, seminggu, sebulan atau bahkan setahun. Daerah tertentu yang dimaksudkan dapat berupa suatu garis, suatu luasan, suatu volume, atau mungkin sepotong bahan (Walpole, 1995). Jika selang waktu kejadian adalah sama, maka fungsi distribusi peluang untuk variabel random Poisson Y dengan parameter μ dapat dituliskan dengan rumus di bawah ini.

$$P(y, \mu) = \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} ; y = 0, 1, 2, \dots; \mu > 0 \quad (1)$$

Dengan $E(Y) = Var(Y) = \mu$

2. Distribusi Eksponensial

Waktu pelayanan dalam distribusi antrian dapat juga sesuai dengan salah satu bentuk distribusi teoritis. Asumsi yang biasa digunakan bagi distribusi waktu pelayanan adalah distribusi eksponensial. Jika waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial, maka tingkat pelayanan mengikuti distribusi Poisson. Rumus umum distribusi eksponensial adalah

$$f(x) = \mu e^{-\mu x} ; x > 0, \mu > 0 \quad (2)$$

Dengan $E(X) = \frac{1}{\mu}$ dan $Var(X) = \frac{1}{\mu^2}$

3. Uji Chi Square

Uji Chi-kuadrat adalah salah satu metode yang digunakan untuk memeriksa apakah satu himpunan data mentah sesuai dengan distribusi teoritis tertentu atau tidak. Langkah pertama dalam prosedur Chi Square adalah menggambarkan sebuah histogram frekuensi. Dengan menggambarkan histogram frekuensi, dapat secara visual memutuskan fungsi kepadatan teoritis mana yang paling sesuai dengan data dalam bentuk histogram tersebut. Kemudian menentukan hipotesis awal sesuai dengan distribusi pada histogram tersebut.

Uji Chi Square didasari oleh pengukuran jumlah deviasi antara fungsi kepadatan empiris dengan teoritis. Untuk memperolehnya, anggaplah $[I_{i-1}, I_i]$ mewakili batas-batas interval I sebagaimana didefinisikan dalam distribusi empiris dan asumsikan bahwa $f(t)$ adalah fungsi kepadatan teoritis yang dihipotesiskan.

Dengan diketahui sampel data mentah dengan ukuran n , maka frekuensi teoritis yang berkaitan dengan interval I dihitung sebagai berikut:

$$n_i = n \int_{I_{i-1}} f(t) dt, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Dengan

n_i = Frekuensi teoritis yang dihipotesiskan dalam sel

n = Jumlah frekuensi empiris

$f(t)$ = Fungsi kepadatan distribusi teoritis

m = Jumlah sel efektif

Dengan diketahui n_i dan asumsi bahwa O_i adalah frekuensi empiris yang diamati di sel I , maka ukuran deviasi antara frekuensi yang diamati dan frekuensi teoritis yang dihipotesiskan dihitung sebagai berikut:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - n_i)^2}{n_i}$$

Dimana χ^2 adalah Chi Square hitung sedangkan Chi Square tabel diperoleh dari tabel Chi Square berdasarkan derajat bebas ν dan taraf nyata α . Jika Chi Square hitung kurang dari Chi Square tabel maka terima H_0 , sebaliknya tolak H_0 .

4. Disiplin Antrian

Disiplin antrian adalah aturan untuk para pelanggan dilayani, atau disiplin pelayanan yang memuat urutan para pelanggan menerima pelayanan. Aturan pelayanan menurut urutan kedatangan ini dapat didasarkan pada:

- *First in First Out (FIFO)*
FIFO merupakan suatu peraturan dimana yang akan dilayani terlebih dahulu adalah pelanggan yang datang terlebih dahulu.
- *Last In First Out (LIFO)*
LIFO merupakan antrian dimana yang datang paling akhir adalah yang dilayani paling awal.
- *Service In Random Order (SIRO)*
SIRO merupakan antrian dimana pelayanan dilakukan secara acak.
- *Pelayanan Berdasarkan Prioritas (PRI)*
Pelayanan ini didasarkan pada prioritas khusus.

5. Model Antrian (M/M/c) : (GD/∞/∞)

Model ini mempunyai karakteristik sebagai berikut :

- Jumlah kedatangan yang terdistribusi secara Poisson/Eksponensial
- Waktu pelayanan terdistribusi secara Poisson/eksponensial
- Mempunyai Lebih dari 1 server
- Disiplin antrian adalah first come first serve (FCFS)
- Jumlah pelanggan yang diijinkan dalam sistem tidak terbatas
- Jumlah pelanggan yang ingin memasuki sistem tidak terbatas

Notasi-notasi parameter yang digunakan dalam model ini yaitu :

- λ = Tingkat Kedatangan (Jumlah unit per periode waktu)
- μ = Tingkat Pelayanan (Jumlah unit per periode waktu)
- ρ = Sistem Pelayanan Sibuk dengan $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Ukuran-ukuran kinerja sistem antrian Model (M/M/c) : (GD/∞/∞) antara lain:

- Probabilitas tidak terdapat pelanggan dalam sistem (P_0)

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!(1-\rho/c)} \right\}^{-1} \quad (4)$$

- Probabilitas terdapat n pelanggan dalam sistem (P_n)

$$P_n = \begin{cases} \left(\frac{\rho^n}{n!} \right) P_0, & 0 \leq n \leq c \\ \left(\frac{\rho^n}{c^{n-c} c!} \right) P_0, & n > c \end{cases} \quad (5)$$

- Rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian (L_q)

$$L_q = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} P_0 = \left[\frac{c\rho}{(c-\rho)^2} \right] P_0 \quad (6)$$

- Rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem (L_s)

$$L_s = L_q + \rho$$

- Rata-rata waktu menunggu pelanggan dalam antrian (W_q)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (7)$$

- Rata-rata waktu menunggu pelanggan dalam sistem (W_s)

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (8)$$

6. Model Keputusan Antrian

Model keputusan antrian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu model tingkat aspirasi. Model tingkat aspirasi secara langsung memanfaatkan karakteristik yang terdapat dalam sistem yang bersangkutan dalam memutuskan nilai – nilai optimal dari parameter perancangan. Optimalisasi dipandang dalam arti memenuhi tingkat aspirasi tertentu yang ditentukan oleh pengambil keputusan. Tingkat aspirasi didefinisikan sebagai batas atas dari nilai – nilai ukuran yang saling bertentangan yang ingin diseimbangkan oleh pengambil keputusan tersebut (Taha,1997).

Dalam model pelayanan berganda perlu menentukan jumlah pelayanan c yang optimal, dua ukuran yang digunakan yaitu :

- Waktu menunggu yang diperkirakan dalam sistem (W_s)
- Persentase waktu menganggur para pelayan (X)

Dengan :

$$X = 100\% - \text{Rasio Pemanfaatan}$$

dan

$$\text{Rasio Pemanfaatan} = \frac{100\lambda}{c\mu}$$

METODOLOGI PENELITIAN

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data primer. Pengumpulan data dilakukan secara langsung dengan mengobservasi lokasi penelitian yaitu pada Bank Mandiri Cabang Ambon. Prosedur pengumpulan data dilakukan sebagai berikut :

- Wawancara dengan pihak manajemen Bank Mandiri Cabang Ambon untuk memperoleh data pendukung.
- Pengukuran dan pencatatan data yang dibutuhkan meliputi waktu kedatangan nasabah, waktu lamanya nasabah dilayani di *teller* dan waktu nasabah meninggalkan *teller*

Pengolahan data dilakukan untuk data rata-rata jumlah kedatangan nasabah per hari dalam satu bulan. Dalam penelitian ini akan dilakukan analisis data terhadap jumlah kedatangan 351 nasabah dalam satu hari di Bank Mandiri Cabang Ambon. dari data yang diperoleh, dicari rata-rata waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan, kemudian diperoleh tingkat kedatangan sebagai λ dan tingkat pelayanan sebagai μ . Selanjutnya dilakukan uji Chi Square untuk mengetahui distribusi data. Kemudian dilakukan perhitungan ukuran kinerja antrian dan

penentuan jumlah *teller* yang optimal dengan menggunakan model tingkat aspirasi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Data antrian yang diperoleh adalah merupakan data antrian yang terjadi pada sistem pelayanan Bank Mandiri Cabang Ambon, dengan model sistem antrian yang diterapkan yaitu antrian paralel, dimana nasabah yang datang dilayani pada tiga *teller* dengan mengacuh pada disiplin antrian FIFO. Tiga *teller* yang ada bertugas untuk melayani setiap nasabah yang melakukan transaksi tunai. Selain tiga *teller* yang beroperasi, terdapat beberapa sarana pelayanan lain yang bertugas untuk melayani transaksi yang tidak bersifat tunai, dokumentasi, atau administrasi.

Walaupun pelayanan terhadap nasabah dilakukan melalui tiga *teller*, namun dalam pengambilan data pelayanan pada ketiga *teller* tersebut digabungkan karena sistem antrian yang diterapkan merupakan sistem antrian tunggal saluran ganda sejajar. Dimana nasabah akan dilayani hanya membentuk suatu antrian tetapi akan dilayani oleh ketiga *teller*. Sehingga tingkat pelayanan rata – rata (μ) yang didapat merupakan rata – rata pelayanan dari ketiga *teller* tersebut.

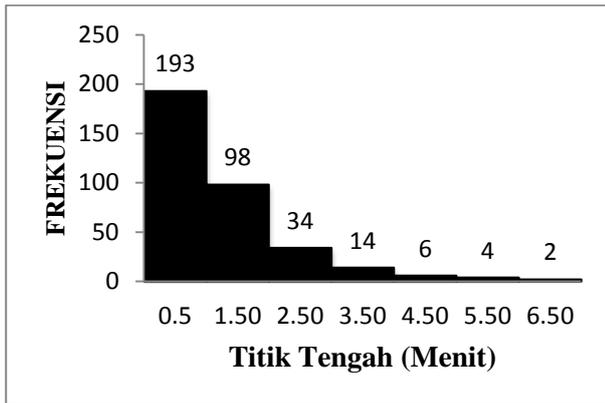
Tingkat kedatangan (λ) diperoleh dengan menghitung setiap selisih antar kedatangan sehingga diperoleh rata – rata waktu antar kedatangan dalam satuan menit. Kemudian dilakukan uji Chi Square dari data waktu antar kedatangan untuk memeriksa apakah data waktu antar kedatangan sesuai dengan distribusi teoritis atau tidak. Tingkat kedatangan (λ) diperoleh dari satu per rata – rata waktu antar kedatangan.

Tingkat pelayanan (μ) diperoleh dengan cara membagi waktu pelayanan berdasarkan masing – masing *teller*. Dari masing – masing *teller* tersebut dihitung rata – rata waktu pelayanan nasabah pada *teller* tersebut. Dimana waktu pelayanan merupakan selisih antar waktu keberangkatan dan waktu nasabah tiba di *teller*, kemudian dilakukan uji Chi Square dari data pelayanan masing – masing *teller* untuk memeriksa apakah data waktu pelayanan sesuai dengan distribusi teoritis tertentu atau tidak. Tingkat pelayanan (μ) diperoleh dari satu per rata – rata waktu pelayanan dari keseluruhan *teller*

Analisis Antrian Untuk Jumlah Kedatangan Nasabah 351 Orang

Analisis dilakukan pada jumlah kedatangan nasabah sebanyak 351 orang dengan menggunakan 3 *teller*. Berdasarkan data yang ada, diperoleh rata-rata waktu antar kedatangan ialah 1,019 menit/nasabah maka akan diperoleh tingkat kedatangan (λ) adalah 0,981 nasabah/menit.

Selanjutnya akan dilakukan uji Chi Square untuk memeriksa apakah data waktu antar kedatangan yang diperoleh berdistribusi teoritis tertentu atau tidak. Langkah pertama yaitu membuat histogram frekuensi. Berdasarkan pengolahan data, maka hasil yang diperoleh dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Histogram Frekuensi Waktu Antar Kedatangan

Dari Gambar 1, terlihat bahwa distribusi empiris mirip distribusi eksponensial. Untuk memastikan bahwa distribusi empiris sesuai dengan distribusi eksponensial maka dilakukan uji Chi Square. Hipotesisnya adalah :
 H_0 : Waktu antar kedatangan berdistribusi eksponensial
 H_1 : Waktu antar kedatangan tidak berdistribusi eksponensial

Hasil perhitungan uji Chi Square disajikan dalam tabel sebagai berikut:

Tabel 1. Hasil Uji Chi Square

No	Kelas Interval	Titik Tengah	Frekuensi Yang Diamati	Frekuensi Relatif	Mean Dari Distribusi Teoretis Yang Diestimasi	Frekuensi Teoretis	Chi Square Hitung
1	0.00 – 1.00	0.50	193	0.550	0.275	192.699	0.001
2	1.00 – 2.00	1.50	98	0.279	0.419	87.048	1.378
3	2.00 – 3.00	2.50	34	0.097	0.243	38.961	0.632
4	3.00 – 4.00	3.50	14	0.040	0.140	17.901	0.850
5	4.00 – 5.00	4.50	6	0.017	7.722	7.722	0.384
6	5.00 – 6.00	5.50	4	0.011	3.861	3.861	0.045
7	6.00 – 7.00	6.50	2	0.006	1.404	2.808	0.022
Total			351		1.254	351	3.312

Berdasarkan Tabel 1, terlihat bahwa nilai Chi Square hitung sebesar 3,312. Dengan menggunakan $\alpha = 0,05$ maka akan diperoleh nilai Chi Square tabel sebesar 11,070. Karena nilai Chi Square hitung < Chi Square tabel maka terima H_0 , sehingga waktu antar kedatangan berdistribusi eksponensial.

Selanjutnya dilakukan pengujian untuk melihat distribusi waktu pelayanan. Dengan menggunakan histogram terlihat bahwa distribusi empiris mirip distribusi eksponensial untuk waktu pelayanan masing-masing teller. Untuk memastikan bahwa distribusi empiris sesuai dengan distribusi eksponensial maka dilakukan uji Chi Square. Hipotesisnya adalah :

H_0 : Waktu pelayanan berdistribusi eksponensial

H_1 : Waktu pelayanan tidak berdistribusi eksponensial

Perhitungan uji Chi Square, rata-rata waktu pelayanan masing-masing teller disajikan dalam tabel sebagai berikut:

Tabel 2. Hasil Uji Chi Square Untuk Waktu Pelayanan

No	Teller	Jumlah Nasabah Yang Dilayani	Rata-Rata Waktu Pelayanan	Tingkat Pelayanan	Chi Square Hitung	Chi Square Tabel	Kesimpulan
1.	1	110	3,670	0,272	2,133	5,991	Terima H_0
2.	2	117	3,340	0,299	1,084	5,991	Terima H_0
3.	3	124	3,448	0,290	4,182	5,991	Terima H_0

Berdasarkan Tabel 2, terlihat bahwa jumlah nasabah yang dilayani di teller 1, 2 dan 3 masing-masing adalah 110, 117 dan 124 nasabah. Rata-rata waktu pelayanan di teller 1 adalah 3,670 menit/nasabah sehingga tingkat pelayanan teller 1 adalah 0,272 nasabah/menit. Dari tabel juga terlihat bahwa nilai Chi Square hitung adalah 2,133 dan dengan menggunakan $\alpha = 0,05$ maka diperoleh nilai Chi Square tabel adalah 5,991. Karena nilai Chi Square hitung < Chi Square tabel maka terima H_0 , sehingga waktu pelayanan di teller 1 berdistribusi eksponensial. Hal yang sama juga berlaku untuk teller 2 dan teller 3. Karena tingkat pelayanan teller 1, 2 dan 3 masing-masing adalah 0,272; 0,299 dan 0,290 nasabah/menit maka rata-rata tingkat pelayanan (μ) adalah 0,287 nasabah/menit.

Tingkat pelayanan masing – masing teller bila dijumlahkan akan mendapatkan tingkat pelayanan adalah 0.861 nasabah/menit. Hasil ini menunjukkan bahwa tingkat pelayanan sistem yaitu 0.861 nasabah/menit lebih kecil dari tingkat kedatangan 0.981 nasabah/menit. Secara umum dapat dikatakan bahwa laju kedatangan nasabah lebih cepat dari laju pelayanan sehingga dapat menyebabkan antrian yang panjang. Untuk lebih rinci dilakukan perhitungan terhadap kinerja antrian.

Perhitungan Ukuran Kinerja Antrian

Berdasarkan observasi terhadap proses antrian pada Bank Mandiri Cabang, maka akan dihitung kinerja antrian dengan menggunakan rumus dari model antrian (M/M/c):(GD/∞/∞). Dengan diketahui tingkat kedatangan dan tingkat pelayanan sistem antrian yaitu :

$$\lambda = 0.981 \text{ nasabah/menit}$$

$$\mu = 0.287 \text{ nasabah/menit}$$

$$c = 3 \text{ teller}$$

Maka rasio pemanfaatan sistem antrian yaitu :

$$\frac{100\lambda}{c\mu} = \frac{(100)(0.981)}{(3)(0.287)} = 113.94\%$$

Hasil di atas menunjukkan bahwa tingkat pemanfaatan sistem antrian adalah 113.94% dimana hal ini menunjukkan bahwa sistem antrian dengan 3 teller bekerja melampaui kapasitas pelayanan. Untuk itu dilakukan pengujian terhadap kinerja sistem antrian dengan mencoba melakukan penambahan teller untuk 4 teller dan 5 teller. Hasil perhitungan disajikan dalam tabel sebagai berikut:

Tabel 3. Perhitungan Ukuran Kinerja Antrian

No	Jumlah Teller	λ	μ	Rasio Pemanfaatan	P_0	L_1	L_n	W_1	W_n
		Nasabah/Menit	Nasabah/Menit	%	-	Nasabah	Nasabah	Menit	Menit
1.	3	0,981	0,287	113,94	-	-	-	-	-
2.	4	0,981	0,287	85,45	0,018	7,651	3,933	7,493	4,009
3.	5	0,981	0,287	68,36	0,029	4,688	0,770	4,269	0,785

Berdasarkan hasil perhitungan pada Tabel 3, terlihat bahwa dengan penambahan unit pelayanan menjadi 4 teller, rasio pemanfaatan sistem turun dari 113.94% menjadi 85.45%, hal ini menunjukkan sistem bekerja dengan kapasitas maksimal atau tidak diperlukan waktu tambahan untuk masing-masing teller menyelesaikan pelayanan. Dengan menggunakan 4 teller diperkirakan bahwa terdapat 4 orang nasabah yang menunggu dalam antrian dengan rata-rata seorang nasabah akan menunggu selama kurang lebih 4.01 menit dalam antrian.

Jika sistem antrian melayani dengan 5 *teller*, maka sistem antrian hanya menggunakan 68.36% dari total waktu kerja untuk melayani nasabah dan dipastikan bahwa setiap nasabah yang datang dapat langsung dilayani tanpa harus menunggu dalam antrian.

Penentuan Jumlah Teller Dengan Menggunakan Model Tingkat Aspirasi.

Dalam menentukan jumlah *teller* yang optimal sesuai dengan tingkat kedatangan, maka dilakukan perhitungan dengan menggunakan model tingkat aspirasi. Berdasarkan wawancara dengan pihak manajemen Bank Mandiri Cabang Ambon diperoleh data sebagai berikut :

1. Pihak manajemen berharap supaya 10 sampai 15 menit nasabah sudah memperoleh pelayanan.
2. Supaya tidak terjadi penempatan *teller* yang berlebihan atau menghindari waktu menganggur, diharapkan supaya karyawan bagian *teller* bekerja tidak kurang dari 85% (Waktu menganggur kurang dari 15%).

Dengan menggunakan model tingkat aspirasi dari manajemen Bank Mandiri Cabang Ambon terhadap peningkatan kualitas pelayanan kepada nasabah, maka dilakukan penentuan jumlah *teller* yang optimal sesuai dengan harapan manajemen. Berdasarkan hasil perhitungan ukuran kinerja antrian, diperoleh rasio pemanfaatan dan waktu menunggu nasabah dalam sistem (W_s) serta dihitung waktu menganggur *teller* (X). Hasilnya adalah sebagai berikut:

Tabel 4. Ukuran Model Tingkat Aspirasi

No	Jumlah Teller	Rasio	Waktu	W_s
		Pemanfaatan %	Menganggur %	
1.	3	113,94	-	-
2.	4	85,45	14,55	7,493
3.	5	68,36	31,64	4,269

Berdasarkan Tabel 4, terlihat bahwa jumlah *teller* optimal yang memenuhi aspirasi atau harapan manajemen Bank Mandiri Cabang Ambon adalah 4 *teller*, karena waktu menganggur kurang dari 15% dan nasabah memperoleh pelayanan tidak melebihi 15 menit.

KESIMPULAN

Dari hasil analisa data dan pembahasan dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Waktu kedatangan nasabah dan waktu pelayanan pada Bank Mandiri Cabang Ambon berdistribusi eksponensial.
2. Jumlah *teller* yang optimal untuk melayani nasabah pada Bank Mandiri Cabang Ambon adalah 4 *teller*. Sehingga model antrian yang diperoleh adalah :

$$(M/M/4) : (FIFO/\infty/\infty)$$

DAFTAR PUSTAKA

Dimiyati, T. T. dan Dimiyati, A. 1987. *Operation Research. Model-Model Pengambilan Keputusan*. Penerbit: CV Sinar Baru bandung

Kakiay, T. 2004. *Dasar-Dasar Teori Antrian Untuk Kehidupan Nyata*. Penerbit: Andi Yogyakarta

Siagian, P. 1987. *Penelitian Operasional, Teori dan Praktek*. Penerbit: Universitas Indonesia Jakarta

Taha, A. H. 1997. *Riset Operasi*. Edisi ke-5. Penerbit: Binarupa Aksara Jakarta

Walpole, R. E. 1995. *Pengantar Statistika*. Edisi ke-3. Penerbit: PT Gramedia Pustaka Utama Jakarta



APLIKASI ALGORITMA ANT COLONY SYSTEM DALAM PENENTUAN RUTE OPTIMUM DISTRIBUSI BBM PADA PT. BURUNG LAUT

*Ant Colony System Algorithm Application to Determining Optimum Distribution Routes of Fuel
on PT. Burung Laut*

F. S. TUTUPARY¹, M. W. TALAKUA², Y. A. LESNUSSA³

¹Alumni Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

^{2,3}Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhena, KampusUnpatti, Poka-Ambon, Maluku

E-mail: ¹filiatutupary@yahoo.co.id; ²ocat_talakua@yahoo.com; ³yopi_a_lesnussa@yahoo.com

ABSTRAK

Bahan Bakar Minyak (BBM) merupakan salah satu komoditas penting bagi masyarakat Indonesia. BBM didistribusikan melalui angkutan laut. Salah satu perusahaan armada laut yang bekerja dalam pendistribusian BBM ini adalah PT. Burung Laut, yaitu dengan mengoperasikan kapal tanker MT. Citra Bintang. Kapal ini mendistribusikan BBM dari kota Ambon ke 13 lokasi di sekitarnya. Namun dalam pendistribusiannya, kapal ini tidak memiliki rute yang pasti, yaitu menggunakan sistem *tramper*. Untuk itu penelitian ini memberikan usulan penggunaan algoritma *Ant Colony System* khususnya dalam menyelesaikan kasus *Traveling Salesman Problem (TSP)* pada PT. Burung Laut. Dengan menggunakan sistem *tramper*, jarak rute yang harus ditempuh untuk pendistribusian BBM sejauh 5.798 mil dalam waktu 3,37 minggu. Sedangkan dengan menggunakan algoritma *Ant Colony System*, jarak rute pendistribusian BBM dapat ditempuh sejauh 5.262 mil dengan waktu tempuh 3,09 minggu.

Kata kunci: *Pendistribusian BBM, PT Burung Laut, Ant Colony System, Traveling Salesman Problem*

PENDAHULUAN

Indonesia adalah salah satu Negara kepulauan yang terdiri dari ribuan pulau dihubungkan dengan laut dan samudera. Sebagai Negara kepulauan, terpenuhinya setiap komoditas seperti sandang, pangan, papan, dan komoditas-komoditas lain dari setiap daerah sangat penting, demi pemerataan pembangunan dan menunjang kebutuhan hidup masyarakat. Salah satu komoditas yang penting adalah Bahan Bakar Minyak (BBM). BBM telah menjadi kebutuhan utama bagi masyarakat Indonesia untuk kehidupannya sehari-hari, seperti memasak, bahan bakar kendaraan, dan lain sebagainya. Oleh karena itu BBM harus didistribusikan secara merata keseluruh wilayah kepulauan Indonesia, tentunya dengan menggunakan angkutan laut. Karena selain biaya yang dikeluarkan tidak sebesar angkutan udara, angkutan laut pun memiliki kapasitas angkut yang lebih besar dibandingkan dengan angkutan udara. Salah satu perusahaan pelayaran yang memanfaatkan angkutan laut ini adalah PT. Burung Laut.

Salah satu armada kapal pada PT. Burung Laut yaitu kapal tanker MT. Citra Bintang. Kapal ini digunakan untuk mengangkut BBM dari beberapa pulau yang terletak di provinsi Maluku dengan menyewakannya kepada pihak PT. Pertamina Cabang Ambon. PT. Pertamina di daerah Maluku dalam mendistribusikan BBM yaitu depot asal berasal dari Ambon, sementara depot tujuannya ada sebanyak 13 tujuan, yaitu Dobo, Tual, Masohi, Wayame, Merauke, Saumlaki, Fakfak, Kaimana, Sanana, Tobelo, Namlea, Ternate dan Labuha. Dalam pendistribusiannya kapal ini akan memenuhi permintaan BBM dari daerah-daerah tersebut. Namun, kapal ini tidak memiliki rute yang pasti.

Untuk itu dalam penulisan ini akan ditentukan rute yang optimal dalam pendistribusian BBM pada PT. Burung Laut dengan algoritma *Ant Colony System* untuk masalah *Traveling Salesman Problem (TSP)*, yaitu akan dicari jalur terpendek, dimana kapal harus menuju ke semua depot tujuan dan kembali lagi ke depot asal.

METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian ini bersifat studi kasus, yang disusun berdasarkan rujukan pustaka dengan mempelajari beberapa literatur yang berhubungan dengan penelitian, kemudian dianalisis untuk mencari mencari solusi dan menuangkannya secara sistematis kedalam suatu penulisan ilmiah. Adapun langkah-langkah penelitian sebagai berikut : Analisis graf dan algoritma semut yang berkaitan dengan masalah TSP, data antar pelabuhan yang dilalui oleh kapal MT. Citra Bintang, dan menyelesaikan masalah TSP pada PT. Bintang Laut dengan algoritma semut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

PT. Burung Laut merupakan suatu perusahaan pelayaran nasional yang bergerak dalam bidang jasa angkutan laut (dalam dan luar negeri) dan keagenan pelayaran. Bisnis utama perusahaan adalah melayani jasa pengangkutan muatan cair, seperti: BBM (Bahan Bakar Minyak), Gula Cair (*Molasses*) dan CPO (*Crude Palm Oil*). Salah satu konsumen yang menggunakan jasa angkutan laut PT. Burung Laut adalah PT. Pertamina Cabang Ambon.

Pada tahun 2009, PT. Burung Laut membeli kapal MT. Citra Bintang, dengan pengoperasiannya disewakan kepada pihak PT. Pertamina Cabang Ambon dengan sistem *time charter* yang melayani 13 depot tujuan yaitu Dobo, Tual, Masohi, Wayame, Merauke, Saumlaki, Fakfak, Kaimana, Sanana, Tobelo, Namlea, Ternate, dan Labuha, dengan depot asal adalah Ambon. Muatan yang diangkut MT. Citra Bintang ada 3 jenis yaitu premium, solar atau HSD, dan kerosin untuk keperluan pihak PT. Pertamina di depot tujuan.

Spesifikasi kapal tanker MT. Citra Bintang adalah sebagai berikut:

Nama kapal : MT. Citra Bintang
 Kapasitas muat tangki : 2899,87 KL
 Kecepatan Kapal : 10 Knot (11,51 mil/jam) pada saat *Laden/Bermuatan* 10,5 Knot (12,09 mil/jam) pada saat *Ballast/Kosong*

Rata-rata kecepatan pompa : 177,925 KL/jam

Dalam melakukan pendistribusian, kapal ini belum memiliki rute yang pasti. Kapal ini menggunakan sistem *tramper*, dimana kapal bergerak tanpa penjadwalan terlebih dahulu yaitu dengan melayani depot tujuan yang membutuhkan BBM paling dominan. Dalam pembahasan ini akan dilakukan pembagian *cluster* daerah pendistribusian BBM berdasarkan lokasi dan permintaan BBM pada depot tujuan, juga mencari rute terpendek pada masing-masing *cluster* dengan menggunakan *Ant Colony System* (ACS). Untuk pembagian *cluster* dan pencarian rute terpendek pada proses pendistribusian BBM dengan menggunakan ACS, diperlukan 3 data utama dalam penyelesaiannya, yaitu:

1. Data Permintaan BBM

Berikut data yang menunjukkan rata-rata permintaan BBM setiap bulan pada masing-masing depot tujuan.

Tabel 1. Rata-rata Permintaan BBM Setiap Depot Tujuan

Depot Tujuan	Kebutuhan BBM per Bulan (KL)	Depot Tujuan	Kebutuhan BBM per Bulan (KL)
Merauke	2588,46	Saumlaki	1036,73
Ternate	1320,07	Labuha	852,53
Tual	1207,32	Sanana	657,70
Tobelo	1116,77	Dobo	610,02
Kaimana	1076,76	Masohi	569,27
Namlea	463,14	Fak-Fak	547,81

2. Jarak Antar Pelabuhan

Berikut merupakan jarak pelabuhan antar pelabuhan pada masing-masing depot:

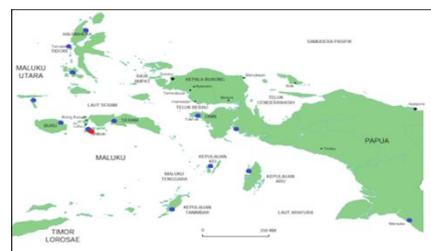
Tabel 2.

Data Jarak Tempuh Antar Pelabuhan dalam Satuan Mil

Bagian a							
	Ambon	Dobo	Tual	Wavame	Masohi	Merauke	Saumlaki
Ambon	0	453	325	75	62	850	335
Dobo	453	0	110	515	410	466	235
Tual	325	110	0	416	311	559	190
Wavame	75	515	416	0	133	932	435
Masohi	62	410	311	133	0	869	171
Merauke	850	466	559	932	869	0	609
Saumlaki	335	235	190	435	171	609	0
Fak-Fak	310	242	175	373	242	310	366
Kaimana	391	155	348	460	335	565	348
Sanana	186	621	534	149	224	1093	578
Tobelo	430	683	621	404	364	1149	739
Namlea	87	534	435	43	134	1031	469
Ternate	323	160	584	329	315	1118	696
Labuha	240	95	174	224	215	1062	596
Bagian b							
	Fak-Fak	Kaimana	Sanana	Tobelo	Namlea	Ternate	Labuha
Ambon	310	391	186	430	87	323	240
Dobo	242	155	621	683	534	160	95
Tual	175	348	534	621	435	584	174
Wavame	373	460	149	404	43	329	224
Masohi	242	335	224	364	134	315	215
Merauke	310	565	1093	1149	1031	1118	1062
Saumlaki	366	348	578	739	469	696	596
Fak-Fak	0	112	310	450	373	450	366
Kaimana	112	0	546	546	472	286	185
Sanana	310	546	0	298	112	286	185
Tobelo	450	546	298	0	356	160	95
Namlea	373	472	112	356	0	286	185
Ternate	450	286	286	160	286	0	112
Labuha	366	185	185	95	185	112	0

3. Peta Lokasi

Pada penelitian ini peta lokasi berfungsi sebagai alat bantu dalam menghitung jarak antar lokasi yang akan ditempuh. Peta lokasi dari tiap-tiap depot dapat dilihat pada gambar berikut.



Ket :
 ● : depot asal
 ● : depot tujuan

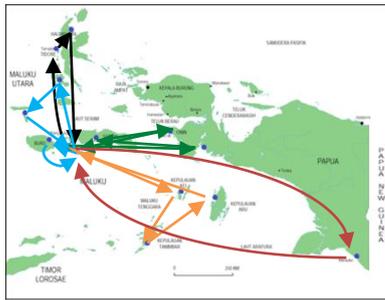
Gambar 1. Peta Lokasi Pendistribusian BBM oleh Kapal MT. Citra Bintang

A. Perhitungan Jarak Rute Distribusi BBM dengan Menggunakan Sistem *Tramper*

Sistem yang digunakan oleh perusahaan dalam melakukan pendistribusian BBM ke depot tujuan adalah melalui sistem *tramper*, dimana depot yang dilayani terlebih dahulu adalah depot tujuan dengan permintaan terbanyak.

Berdasarkan permintaan masing-masing depot tujuan pada Tabel 1, kapasitas muat kapal yaitu sebesar 2899,87 KL dan letak geografisnya, 13 depot tujuan

dibagi menjadi 5 cluster. Jika BBM didistribusikan dengan menggunakan sistem *tramper*, maka rute pada setiap cluster adalah sebagai berikut:



Gambar 4.2 Pendistribusian BBM Menggunakan Sistem *Tramper*

Ket :

- : Cluster I (Ambon–Merauke–Ambon)
- : Cluster II (Ambon–Ternate–Tobelo–Ambon)
- : Cluster III (Ambon–Tual–Saumlaki–Dobo–Ambon)
- : Cluster IV (Ambon–Kaimana–Masohi–Fak–Fak–Ambon)
- : Cluster V (Ambon–Labuha–Sanana–Wayame–Namlea–Ambon)

Gambar 2 menunjukkan bahwa pada masing-masing cluster, kapal akan mendistribusikan BBM di depot yang memiliki permintaan terbesar lebih dahulu, kemudian menuju ke depot yang memiliki permintaan besar berikutnya berdasarkan muatan BBM yang masih tersisa, dan seterusnya hingga semua permintaan masing-masing depot di dalam tiap cluster terpenuhi. Jarak perjalanan masing-masing cluster dalam satuan mil dan total rata-rata permintaan per bulan sebagai berikut:

Cluster I (Ambon–Merauke–Ambon)

Jarak = 850 + 850 = 1700

Permintaan = 2588,46 KL

Cluster II (Ambon–Ternate–Tobelo–Ambon)

Jarak = 323 + 160 + 430 = 913

Permintaan = 1320,07 KL + 1116,77 KL = 2436,84 KL

Cluster III (Ambon–Tual–Saumlaki–Dobo–Ambon)

Jarak = 325 + 190 + 235 + 453 = 1203

Permintaan = 1207,32 KL + 1036,73 KL + 610,02 KL = 2854,07 KL

Cluster IV (Ambon–Kaimana–Masohi–Fak–Fak–Ambon)

Jarak = 391 + 335 + 242 + 310 = 1278

Permintaan = 1076,76 KL + 569,27 KL + 547,81 KL = 2193,84 KL

Cluster V (Ambon–Labuha–Sanana–Wayame–Namlea–Ambon)

Jarak = 240 + 185 + 149 + 43 + 87 = 704

Permintaan = 852,53 KL + 657,70 KL + 558,88 KL + 463,14 KL = 2532,25 KL

Jadi, jumlah jarak perjalanan yang ditempuh oleh kapal MT. Citra Bintang dengan menggunakan sistem

tramper adalah 1700 + 913 + 1203 + 1278 + 704 = 5798 mil.

Berdasarkan data kecepatan kapal, rata-rata kecepatan pompa kapal dan jarak antar pelabuhan pada Tabel 2, waktu keseluruhan dari pelayaran dapat diketahui dari persamaan:

$$\begin{aligned} \text{Waktu keseluruhan} &= \text{waktu perjalanan ke depot tujuan} \\ &+ \text{waktu penyaluran muatan} + \text{waktu} \\ &\text{perjalanan ke depot asal} \\ &= \frac{\text{Jumlah jarak perjalanan ke depot – depot tujuan}}{11,51 \text{ mil/jam}} \\ &+ \frac{\text{banyaknya muatan}}{177,925 \text{ KL/jam}} \\ &+ \frac{\text{Jarak perjalanan ke depot asal}}{12,09 \text{ mil/jam}} \end{aligned}$$

Berikut merupakan perhitungan waktu untuk seluruh pelayaran dari masing-masing cluster:

Cluster I (Ambon–Merauke–Ambon)

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{850 \text{ mil}}{11,51 \text{ mil/jam}} \right) + \left(\frac{2588,46 \text{ KL}}{177,925 \text{ KL/jam}} \right) + \left(\frac{850 \text{ mil}}{12,09 \text{ mil/jam}} \right) \\ &= 73,85 \text{ jam} + 14,55 \text{ jam} + 70,31 \text{ jam} \\ &= 158,71 \text{ jam} = 6,61 \text{ hari} \\ &= 6 \text{ hari } 14 \text{ jam } 38 \text{ menit} \end{aligned}$$

Cluster II (Ambon–Ternate–Tobelo–Ambon)

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{483 \text{ mil}}{11,51 \text{ mil/jam}} \right) + \left(\frac{2436,84 \text{ KL}}{177,925 \text{ KL/jam}} \right) + \left(\frac{430 \text{ mil}}{12,09 \text{ mil/jam}} \right) \\ &= 41,96 \text{ jam} + 13,7 \text{ jam} + 35,57 \text{ jam} \\ &= 91,23 \text{ jam} = 3,8 \text{ hari} = 3 \text{ hari } 19 \text{ jam } 12 \text{ menit} \end{aligned}$$

Cluster III (Ambon–Tual–Saumlaki–Dobo–Ambon)

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{750 \text{ mil}}{11,51 \text{ mil/jam}} \right) + \left(\frac{2854,07 \text{ KL}}{177,925 \text{ KL/jam}} \right) + \left(\frac{453 \text{ mil}}{12,09 \text{ mil/jam}} \right) \\ &= 65,16 \text{ jam} + 16,04 \text{ jam} + 37,47 \text{ jam} \\ &= 118,67 \text{ jam} = 4,94 \text{ hari} \\ &= 4 \text{ hari } 22 \text{ jam } 34 \text{ menit} \end{aligned}$$

Cluster IV (Ambon–Kaimana–Masohi–Fak–Fak–Ambon)

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{968 \text{ mil}}{11,51 \text{ mil/jam}} \right) + \left(\frac{2193,84 \text{ KL}}{177,925 \text{ KL/jam}} \right) + \left(\frac{310 \text{ mil}}{12,09 \text{ mil/jam}} \right) \\ &= 84,1 \text{ jam} + 12,33 \text{ jam} + 25,64 \text{ jam} \\ &= 122,07 \text{ jam} = 5,09 \text{ hari} \\ &= 5 \text{ hari } 2 \text{ jam } 10 \text{ menit} \end{aligned}$$

Cluster V (Ambon–Labuha–Sanana–Wayame–Namlea–Ambon)

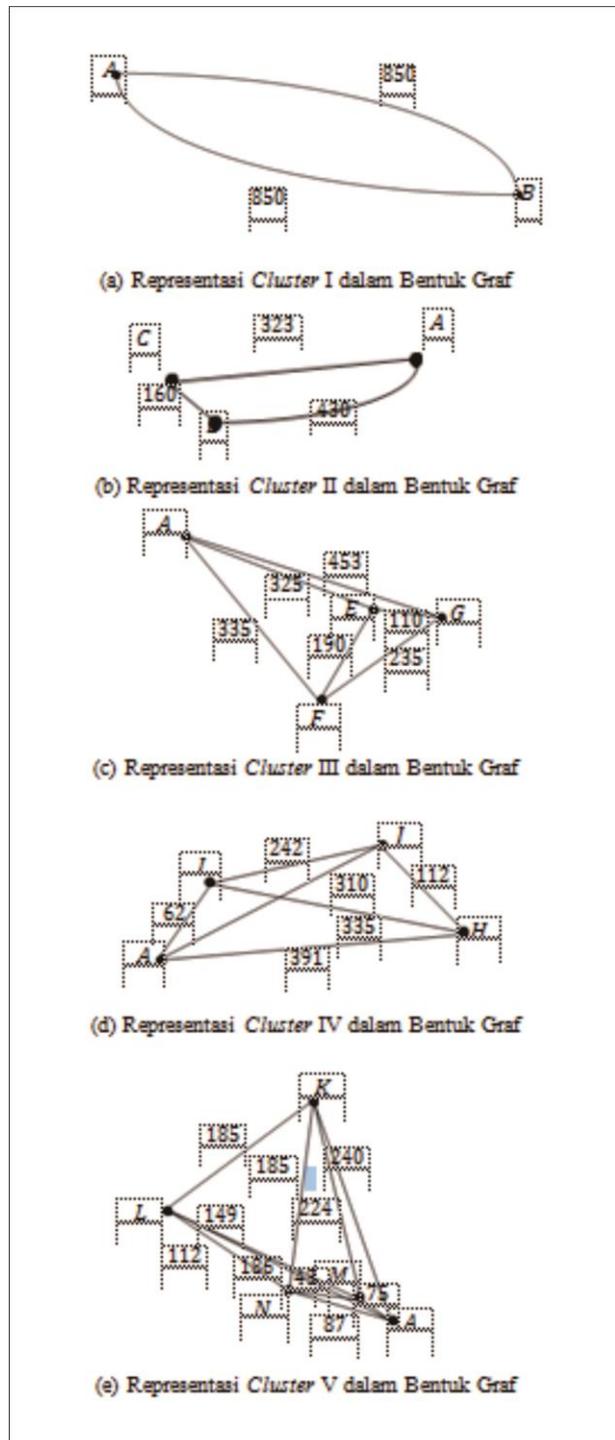
$$\begin{aligned} &= \left(\frac{617 \text{ mil}}{11,51 \text{ mil/jam}} \right) + \left(\frac{2532,25 \text{ KL}}{177,925 \text{ KL/jam}} \right) + \left(\frac{87 \text{ mil}}{12,09 \text{ mil/jam}} \right) \\ &= 53,61 \text{ jam} + 14,23 \text{ jam} + 7,2 \text{ jam} \\ &= 75,04 \text{ jam} = 3,13 \text{ hari} = 3 \text{ hari } 3 \text{ jam } 7 \text{ menit} \end{aligned}$$

Sehingga, total lamanya perjalanan yang ditempuh kapal MT. Citra Bintang dengan menggunakan sistem *tramper* adalah

$$\begin{aligned} &= 158,71 \text{ jam} + 91,23 \text{ jam} + 118,67 \text{ jam} + \\ &122,07 \text{ jam} + 75,04 \text{ jam} \\ &= 565,72 \text{ jam} = 3,37 \text{ minggu} \\ &= 3 \text{ minggu } 2 \text{ hari } 14 \text{ jam } 10 \text{ menit} \end{aligned}$$

B. Perhitungan Jarak Rute Distribusi BBM dengan Menggunakan Algoritma Ant Colony System (ACS)

Berdasarkan pembagian *cluster*, sudah terdapat 5 *tour* yang harus ditempuh oleh kapal MT. Citra Bintang. Berikut representasinya dalam graf



Gambar 3

Keterangan Gambar 3:

- A : Ambon (depot asal)
- B : Merauke
- C : Ternate
- D : Tobelo
- E : Tual
- F : Saumlaki
- G : Dobo
- H : Kaimana
- I : Masohi
- J : Fak-Fak
- K : Labuha
- L : Sanana
- M : Wayame
- N : Namlea

Pada *Cluster I* dan *Cluster II* tidak perlu dicari jarak terpendeknya karena terdiri dari < 4 depot tujuan, sehingga rute manapun yang diambil, jarak tempuhnya tetap sama. Sedangkan diketahui terdapat $\frac{(4-1)!}{2} = 3$ sirkuit Hamilton pada *Cluster III* dan *Cluster IV*, serta $\frac{(5-1)!}{2} = 12$ sirkuit Hamilton pada *Cluster V*.

Jadi, di dalam pembahasan ini akan dicari rute terpendek pada *Cluster III*, *Cluster IV* dan *Cluster V* dengan menggunakan algoritma *Ant Colony System*.

Karena metode ini merupakan metode multi agen, maka kita misalkan terdapat 3 agen (semut) yang akan menempuh masing-masing *cluster* untuk mencari rute terpendeknya. Terdapat tiga tahapan dalam menghitung jarak rute terpendek dengan menggunakan algoritma *Ant Colony System*, yaitu:

1. Tahap pemilihan titik yang akan dituju

Pada tahap ini kapal yang ditempatkan pada titik *t* memilih menuju ke titik *v* dengan menggunakan persamaan (1).

$$temporary(t, u) = [\tau(t, u_i)] \cdot [\eta(t, u_i)]^\beta, i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$v = \max\{[\tau(t, u_i)] \cdot [\eta(t, u_i)]^\beta\} \dots \dots \dots (1)$$

$$\eta(t, u_i) = \frac{1}{jarak(t, u_i)}$$

Contoh perhitungan:

Misalnya pada *Cluster III*, titik awal kapal pertama untuk menjalani *turnya* berawal dari Ambon.

a. Terlebih dahulu dilakukan perhitungan awal untuk menghitung invers jarak ($\eta(t, v)$) antar tiap depot tujuan berdasarkan Tabel 2 sebagai berikut:

$$\eta(t, v) = \frac{1}{jarak(t, u_i)}$$

Contoh perhitungan antar tiap depot tujuan berdasarkan Tabel 2 pada titik $\eta(A, H)$:

$$\eta(A, H) = \frac{1}{jarak(A, H)} = \frac{1}{391} = 0,00256$$

Hasil keseluruhan dari invers jarak ($\eta(t, v)$) pada *Cluster III*, *Cluster IV* dan *Cluster V* dapat dilihat pada Tabel 3, Tabel 4 dan Tabel 5.

Tabel 3. Invers Jarak ($\eta(t, v)$) pada *Cluster III*

	Ambon	Tual	Saumlaki	Dobo
Ambon	0,00000	0,00308	0,00299	0,00221
Tual	0,00308	0,00000	0,00526	0,00909
Saumlaki	0,00299	0,00526	0,00000	0,00426
Dobo	0,00221	0,00909	0,00426	0,00000

Tabel 4. Invers Jarak ($\eta(t, v)$) pada *Cluster IV*

	Ambon	Kaimana	Masohi	Fak-Fak
Ambon	0,00000	0,00256	0,01613	0,00323
Kaimana	0,00256	0,00000	0,00299	0,00893
Masohi	0,01613	0,00299	0,00000	0,00413
Fak-Fak	0,00323	0,00893	0,00413	0,00000

Tabel 5. Invers Jarak ($\eta(t, v)$) pada *Cluster V*

	Ambon	Labuha	Sanana	Wayame	Namlea
Ambon	0,00000	0,00417	0,00538	0,01333	0,01149
Labuha	0,00417	0,00000	0,00541	0,00446	0,00541
Sanana	0,00538	0,00541	0,00000	0,00671	0,00893
Wayame	0,01333	0,00446	0,00671	0,00000	0,02326
Namlea	0,01149	0,00541	0,00893	0,02326	0,00000

Nilai dari semua *pheromone* (τ_0) pada awal perhitungan ditetapkan dengan angka awal yang sangat kecil. Pada contoh perhitungan penelitian ini nilai *pheromone* awal pada *Cluster III*, *Cluster IV* dan *Cluster V* masing-masing adalah 0,0002, 0,0003 dan 0,0003, yang diperoleh dari persamaan:

$$\tau_0 = \frac{1}{n(C^{nn})}$$

dimana n adalah banyaknya titik pada *tour*, dan C^{nn} adalah kemungkinan jarak *tour* terpendek yang diperoleh dari metode *nearest neighborhood heuristic*. Penetapan nilai *pheromone* awal dimaksudkan agar tiap-tiap sisi memiliki nilai ketertarikan untuk dikunjungi oleh tiap-tiap semut. Nilai *pheromone* untuk semua titik pada *Cluster III*, *Cluster IV* dan *Cluster V* dapat dilihat pada Tabel 6, Tabel 7 dan Tabel 8.

Tabel 6.
Pheromone Awal (τ_0) pada Tiap Titik di *Cluster III*

	Ambon	Labuha	Sanana	Wayame	Namlea
Ambon	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
Labuha	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
Sanana	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
Wayame	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
Namlea	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003

b. Tahap pemilihan titik yang akan dituju

Dalam pemilihan titik selanjutnya yang dituju, pertama-tama dilakukan penetapan dari nilai $\beta = 2$, yaitu parameter perhitungan untuk mendapatkan nilai yang optimal dalam ACS. Selanjutnya dilakukan perhitungan untuk mendapatkan nilai *temporary*(t, u) berdasarkan persamaan (1) serta nilai probabilitas berdasarkan persamaan (2) dari titik awal yaitu Ambon (t) ke titik selanjutnya yang belum dilalui (u).

Tabel 7.
Pheromone Awal (τ_0) pada Tiap Titik di *Cluster IV*

	Ambon	Tual	Saumlaki	Dobo
Ambon	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
Tual	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
Saumlaki	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
Dobo	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002

Tabel 8.
Pheromone Awal (τ_0) pada Tiap Titik di *Cluster V*

	Ambon	Kaimana	Masohi	Fak-Fak
Ambon	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
Kaimana	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
Masohi	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
Fak-Fak	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003

Nilai *temporary* digunakan untuk menentukan titik-titik yang akan dituju selanjutnya. Contoh perhitungan serta hasil perhitungan nilai *temporary* dan nilai probabilitas dari titik Ambon (A) ke Kaimana (H) pada *Cluster IV* dapat dilihat sebagai berikut:

$$\text{temporary}(t, u) = [\tau_0(t, u_i)] \cdot [\eta(t, u_i)]^\beta, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\begin{aligned} \text{temporary}(A, H) &= [\tau_0(A, H)] \cdot [\eta(A, H)]^\beta \\ &= [0,0003] \cdot [0,00256]^2 \\ &= 0,01962 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

$$\text{Probabilitas}(r, u) = \frac{[\tau_0(t, v)] \cdot [\eta(t, v)]^\beta}{\sum_{i=1}^n [\tau_0(t, u_i)] \cdot [\eta(t, u_i)]^\beta}$$

$$\text{Probabilitas}(A, H) = \frac{0,01962 \times 10^{-7}}{0,83128 \times 10^{-7}} = 0,02361$$

Hasil perhitungan *temporary* dan probabilitas dari titik awal yaitu Ambon (A) pada *Cluster III*, *Cluster IV* dan *Cluster V* dapat dilihat pada Tabel 9, Tabel 10 dan Tabel 11.

Tabel 9.
Hasil Perhitungan *Temporary* dan Probabilitas dari Titik Awal Ambon (A) pada *Cluster III*

	Ambon	Tual	Saumlaki	Dobo
<i>Temporary</i> ($\times 10^{-7}$)	0	0,01894	0,01782	0,00975
Probabilitas	0,00000	0,40718	0,38324	0,20958
Probabilitas akumulatif	0	0,40718	0,79042	1

Tabel 10.
Hasil Perhitungan *Temporary* dan Probabilitas dari Titik Awal Ambon (A) pada *Cluster IV*

	Ambon	Kaimana	Masohi	Fak-Fak
<i>Temporary</i> ($\times 10^{-7}$)	0	0,01962	0,78044	0,03122
Probabilitas	0,000000	0,02361	0,93884	0,03755
Probabilitas akumulatif	0	0,02361	0,96245	1

Untuk memilih persamaan yang tepat sebagai acuan dalam pemilihan lokasi selanjutnya dibangkitkan suatu bilangan acak (q) sebesar 0,1 dan suatu bilangan pembatas (q_0) sebesar 0,9, yang artinya semut melakukan proses eksploitasi dengan probabilitas 90% dan proses eksplorasi 10% (Bauer, n.d). Penentuan lokasi yang akan dituju berdasarkan persamaan (1), yaitu dengan melihat hasil *temporary* yang paling besar. Sehingga depot tujuan selanjutnya yang terpilih pada *Cluster III* adalah Tual (E), *Cluster IV* adalah Masohi (I), sedangkan pada *Cluster V* adalah Wayame (M).

Tabel 11.
Hasil Perhitungan *Temporary* dan Probabilitas dari Titik Awal Ambon (A) pada *Cluster V*

	Ambon	Labuha	Sanana	Wayame	Namlea
<i>Temporary</i> ($\times 10^{-7}$)	0	0,05208	0,08672	0,53333	0,39635
Probabilitas	0	0,04874	0,08116	0,49915	0,37095
Probabilitas akumulatif	0	0,04874	0,12990	0,62905	1

2. Tahap pembaruan *pheromone* (τ) lokal
Setelah kapal berpindah ke depot tujuan selanjutnya, maka tahap selanjutnya adalah melakukan pembaruan

pheromone (τ) secara lokal dengan menggunakan persamaan (2).

$$\tau(t, v) \leftarrow (1 - \rho) \cdot \tau(t, v) + \rho \cdot \Delta\tau(t, v) \dots \dots \dots (2)$$

$$\Delta\tau(t, v) = \frac{1}{L_{nn} \cdot c}$$

dimana:

L_{nn} = panjang *tour* yang diperoleh

c = jumlah lokasi

ρ = parameter dengan nilai 0 sampai 1

$\Delta\tau$ = perubahan *pheromone*

Dalam memperbaharui *pheromone* secara local dibutuhkan suatu parameter (ρ) sebesar 0,1. Contoh perhitungan pada *Cluster III* serta hasil perhitungannya sebagai berikut:

$$\Delta\tau(A, E) = \frac{1}{325 \cdot 4} = \frac{1}{1300} = 0,00077$$

$$\tau(A, E) \leftarrow (1 - \rho) \cdot \tau_0(A, E) + \rho \cdot \Delta\tau(A, E)$$

$$\tau(A, E) \leftarrow (1 - 0,1) \cdot 0,0002 + 0,1 \cdot 0,00077$$

$$\tau(A, E) \leftarrow 0,00026$$

Hasil pembaharuan *pheromone* (τ) lokal untuk $\tau(A, E)$, $\tau(A, I)$ dan $\tau(A, M)$ di masing-masing *cluster* dapat dilihat pada Tabel 12, Tabel 13 dan Tabel 14 dengan tulisan yang dicetak miring dan dicetak tebal.

Tabel 12.

Nilai *Pheromone* (τ) Setelah Mengalami Pembaharuan Lokal untuk $\tau(A, E)$ pada *Cluster III*

	Ambon	Tual	Saumlaki	Dobo
Ambon	0,0002	0,00026	0,0002	0,0002
Tual	0,00026	0,0002	0,0002	0,0002
Saumlaki	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
Dobo	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002

Tabel 13.

Nilai *Pheromone* (τ) Setelah Mengalami Pembaharuan Lokal untuk

	Ambon	Kaimana	Masohi	Fak-Fak
Ambon	0,0003	0,0003	0,00067	0,0003
Kaimana	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
Masohi	0,00067	0,0003	0,0003	0,0003
Fak-Fak	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003

Tabel 14.

Nilai *Pheromone* (τ) Setelah Mengalami Pembaharuan Lokal untuk $\tau(A, M)$ pada *Cluster V*

	Ambon	Labuha	Sanana	Wayame	Namlea
Ambon	0,0003	0,0003	0,0003	0,00054	0,0003
Labuha	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
Sanana	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
Wayame	0,00054	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
Namlea	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003

Dengan proses yang sama, hasil keseluruhan pembaharuan *pheromone* local oleh semut pertama dalam sekali jalan untuk *Cluster III*, *Cluster IV* dan *Cluster V* masing-masing ditunjukkan oleh Tabel 15, Tabel 16 dan Tabel 17.

Tabel 15.

Nilai *Pheromone* (τ) di *Cluster III* Setelah Mengalami Pembaharuan Lokal oleh Semut Pertama

	Ambon	Tual	Saumlaki	Dobo
Ambon	0.00020	0.00026	0.000205	0.00020
Tual	0.00026	0.00020	0.00020	0.00024
Saumlaki	0.000205	0.00020	0.00020	0.00022
Dobo	0.00020	0.00024	0.00022	0.00020

Tabel 16.

Nilai *Pheromone* (τ) di *Cluster IV* Setelah Mengalami Pembaharuan Lokal oleh Semut Pertama

	Ambon	Kaimana	Masohi	Fak-Fak
Ambon	0.00030	0.000304	0.00067	0.00030
Kaimana	0.000304	0.00030	0.00030	0.00033
Masohi	0.00067	0.00030	0.00030	0.00035
Fak-Fak	0.00030	0.00033	0.00035	0.00030

Tabel 17.

Nilai *Pheromone* (τ) di *Cluster V* Setelah Mengalami Pembaharuan Lokal oleh Semut Pertama

	Ambon	Labuha	Sanana	Wayame	Namlea
Ambon	0.00030	0.000301	0.00030	0.00054	0.00030
Labuha	0.000301	0.00030	0.00032	0.00030	0.00030
Sanana	0.00030	0.00032	0.00030	0.00030	0.00036
Wayame	0.00054	0.00030	0.00030	0.00030	0.00044
Namlea	0.00030	0.00030	0.00036	0.00044	0.00030

Ternyata semut pertama mendapat lintasan dengan total panjang lintasan pada masing-masing *cluster* sebagai berikut:

Cluster III

Rute : Ambon –Tual –Dobo–Saumlaki – Ambon

Panjang lintasan : 1005 mil

Cluster IV

Rute : Ambon –Masohi–Fak–Fak– Kaimana–Ambon

Panjang lintasan : 807 mil

Cluster V

Rute : Ambon – Wayame – Namlea – Sanana – Labuha – Ambon

Panjang lintasan : 655 mil

Berikut merupakan hasil keseluruhan pembaharuan *pheromone* local oleh semut ke dua dalam sekali jalan untuk *Cluster III*, *Cluster IV* dan *Cluster V* masing-masing ditunjukkan oleh Tabel 18, Tabel 19 dan Tabel 20.

Tabel 18.

Nilai *Pheromone* (τ) di *Cluster III* Setelah Mengalami Pembaharuan Lokal oleh Semut Kedua

	Ambon	Tual	Saumlaki	Dobo
Ambon	0.0002	0.00031	0.000209	0.00020
Tual	0.00031	0.00020	0.00020	0.00027
Saumlaki	0.000209	0.00020	0.00020	0.00023
Dobo	0.0002	0.00027	0.00023	0.00020

Tabel 19.

Nilai *Pheromone* (τ) di *Cluster IV* Setelah Mengalami Pembaharuan Lokal oleh Semut Kedua

	Ambon	Kaimana	Masohi	Fak-Fak
Ambon	0.00030	0.000305	0.00101	0.00030
Kaimana	0.000305	0.00030	0.00030	0.00036
Masohi	0.00101	0.00030	0.00030	0.00040
Fak-Fak	0.00030	0.00036	0.00040	0.00030

Tabel 20.

Nilai *Pheromone* (τ) di *Cluster V* Setelah Mengalami Pembaharuan Lokal oleh Semut Kedua

	Ambon	Labuha	Sanana	Wayame	Namlea
Ambon	0.00030	0.000301	0.00030	0.00075	0.00030
Labuha	0.000301	0.00030	0.00033	0.00030	0.00030
Sanana	0.00030	0.00033	0.00030	0.00030	0.00041
Wayame	0.00075	0.00030	0.00030	0.00030	0.00057
Namlea	0.00030	0.00030	0.00041	0.00057	0.00030

Ternyata semut kedua pun mendapat lintasan yang sama dengan semut pertama, dengan total panjang lintasan yang sama pula dengan semut pertama.

Berikut merupakan hasil keseluruhan pembaharuan *pheromone* local oleh semut ketiga dalam sekali jalan untuk *Cluster III*, *Cluster IV* dan *Cluster V* masing-masing ditunjukkan oleh Tabel 21, Tabel 22 dan Tabel 23.

Tabel 21.

Nilai *Pheromone* (τ) di *Cluster III* Setelah Mengalami Pembaharuan Lokal oleh Semut Ketiga

	Ambon	Tual	Saumlaki	Dobo
Ambon	0.00020	0.00035	0.000213	0.00020
Tual	0.00035	0.00020	0.00020	0.00030
Saumlaki	0.000213	0.00020	0.00020	0.00025
Dobo	0.00020	0.00030	0.00025	0.00020

Tabel 22.

Nilai *Pheromone* (τ) di *Cluster IV* Setelah Mengalami Pembaharuan Lokal oleh Semut Ketiga

	Ambon	Kaimana	Masohi	Fak-Fak
Ambon	0.00030	0.00031	0.00131	0.00030
Kaimana	0.00031	0.00030	0.00030	0.00038
Masohi	0.00131	0.00030	0.00030	0.00044
Fak-Fak	0.00030	0.00038	0.00044	0.00030

Tabel 23.

Nilai *Pheromone* (τ) di *Cluster V* Setelah Mengalami Pembaharuan Lokal oleh Semut Ketiga

	Ambon	Labuha	Sanana	Wayame	Namlea
Ambon	0.00030	0.0003014	0.00030	0.00094	0.00030
Labuha	0.0003014	0.00030	0.00035	0.00030	0.00030
Sanana	0.00030	0.00035	0.00030	0.00030	0.00045
Wayame	0.00094	0.00030	0.00030	0.00030	0.00068
Namlea	0.00030	0.00030	0.00045	0.00068	0.00030

Ternyata semut ketiga juga mendapat lintasan yang sama dengan semut pertama dan kedua, dengan total panjang lintasan yang sama pula. Jadi dapat disimpulkan bahwa tidak ada lagi jalur terpendek pada masing-masing *cluster* selain yang ditemukan oleh semut pertama, kedua, maupun ketiga.

3. Tahap pembaharuan *pheromone* (τ) global

Setelah Tahap 1 dan 2 telah selesai untuk mendapatkan rute dan setiap depot tujuan yang dikunjungi telah mengalami pembaharuan *pheromone* secara lokal, maka tahap berikutnya adalah melakukan pembaharuan *pheromone* secara global. Hanya saja depot tujuan yang dapat diperbaharui secara global hanyalah depot tujuan yang menghasilkan rute dengan jarak terpendek. Pembaharuan *pheromone* secara global dilakukan berdasarkan persamaan (3):

$$\tau(t, v) \leftarrow (1 - \alpha) \cdot \tau(t, v) + \alpha \cdot \Delta\tau(t, v) \dots \dots \dots (3)$$

$$\Delta\tau(t, v) = \begin{cases} L_{gb}^{-1} & \text{jika } (t, v) \in \text{tur terbaik} \\ 0 & \end{cases}$$

- dimana:
- $\tau(t, v)$ = nilai *pheromone* akhir setelah mengalami pembaharuan lokal
 - L_{gb} = panjang jalur terpendek pada akhir siklus
 - α = parameter dengan nilai 0 sampai 1
 - $\Delta\tau$ = perubahan *pheromone*

Pada *Cluster III*, setelah semut pertama, kedua maupun ketiga melewati tahap 1 dan tahap 2, maka rute yang dihasilkan adalah Ambon – Tual – Dobo – Saumlaki – Ambon. Dari rute tersebut didapat panjang jalur yaitu 1005 mil, dan jalur ini merupakan panjang jalur terpendek. Maka contoh perhitungan pembaharuan *pheromone* globalnya adalah sebagai berikut:

$$\alpha = 0,1$$

$$L_{gb} = 1005$$

Nilai *pheromone* akhir:

- o Untuk (t, v) yang merupakan bagian dari rute terpendek

$$\Delta\tau(t, v) = L_{gb}^{-1} = (1005)^{-1} = 0,001$$

Contohnya pembaharuan *pheromone* global untuk *pheromone* $\tau(A, E)$ di *Cluster III*:

$$\tau(A, E) \leftarrow (1 - \alpha) \cdot \tau(A, E) + \alpha \cdot \Delta\tau$$

$$\tau(A, E) \leftarrow (1 - 0,1) \cdot (0,00035) + (0,1 \cdot 0,001)$$

$$\tau(A, E) \leftarrow 0,00042$$

- o Untuk (t, v) yang bukan merupakan bagian dari rute terpendek

$$\Delta\tau(t, v) = 0$$

Contohnya pembaharuan *pheromone* global untuk *pheromone* $\tau(A, G)$ di *Cluster III*:

$$\tau(A, G) \leftarrow (1 - \alpha) \cdot \tau(A, G) + \alpha \cdot \Delta\tau$$

$$\tau(A, G) \leftarrow (1 - 0,1) \cdot 0,0002 + (0,1 \cdot 0)$$

$$\tau(A, G) \leftarrow 0,00018$$

Hasil pembaharuan *pheromone* global pada *Cluster III*, *Cluster IV* dan *Cluster V* dapat dilihat pada Tabel 24, Tabel 25 dan 26.

Tabel 24.
 Nilai *Pheromone*(τ) Setelah Mengalami Pembaharuan
 Global pada *Cluster III*

	Ambon	Tual	Saumlaki	Dobo
Ambon	0,00018	0,00042	0,00029	0,00018
Tual	0,00042	0,00018	0,00018	0,00037
Saumlaki	0,00029	0,00018	0,00018	0,00032
Dobo	0,00018	0,00037	0,00032	0,00018

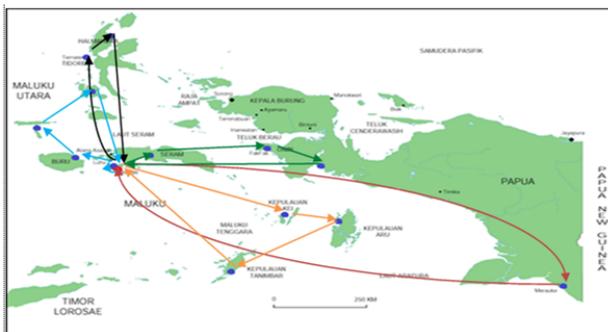
Tabel 25.
 Nilai *Pheromone* (τ) Setelah Mengalami Pembaharuan
 Global pada *Cluster IV*

	Ambon	Kaimana	Masohi	Fak-Fak
Ambon	0,00027	0,00040	0,00130	0,00027
Kaimana	0,00040	0,00027	0,00027	0,00047
Masohi	0,00130	0,00027	0,00027	0,00052
Fak-Fak	0,00027	0,00047	0,00052	0,00027

Tabel 26.
 Nilai *Pheromone* (τ) Setelah Mengalami Pembaharuan
 Global pada *Cluster V*

	Ambon	Labuha	Sanana	Wayame	Namlea
Ambon	0,00027	0,00042	0,00027	0,001	0,00027
Labuha	0,00042	0,00027	0,00047	0,00027	0,00027
Sanana	0,00027	0,00047	0,00027	0,00027	0,00056
Wayame	0,001	0,00027	0,00027	0,00027	0,00076
Namlea	0,00027	0,00027	0,00056	0,00076	0,00027

Jadi, berikut merupakan rute optimal pendistribusian BBM pada *Cluster III*, *Cluster IV* dan *Cluster V* dalam bentuk graf. Jalur optimal pendistribusian BBM yang pada peta lokasi dapat dilihat pada Gambar 5.



Gambar 5. Rute Optimal Pendistribusian BBM oleh Kapal MT. Citra Bintang dengan Menggunakan Algoritma *Ant Colony System*

Keterangan Gambar 5:

- : *Cluster I* (Ambon – Merauke – Ambon)
- : *Cluster II* (Ambon–Ternate –Tobelo –Ambon)
- : *Cluster III* (Ambon–Tual–Dobo–Saumlaki– Ambon)
- : *Cluster IV* (Ambon–Masohi–Fak-Fak– Kaimana–Ambon)
- : *Cluster V* (Ambon–Wayame–Namlea–Sanana –Labuha– Ambon)

Dimana jarak perjalanan masing-masing *cluster* dalam satuan mil dan total rata-rata permintaan per bulannya adalah sebagai berikut:

Cluster I (Ambon – Merauke – Ambon)

Jarak = 920 + 920 = 1840

Permintaan = 2588,46 KL

Cluster II (Ambon – Ternate – Tobelo – Ambon)

Jarak = 334 + 184 + 437 = 955

Permintaan = 1320,07 KL + 1116,77 KL = 2436,84 KL

Cluster III (Ambon – Tual – Dobo – Saumlaki – Ambon)

Jarak = 325 + 110 + 235 + 335 = 1005

Permintaan = 1207,32 KL + 610,02 KL + 1036,73 KL = 2854,07 KL

Cluster IV (Ambon–Masohi–Fak-Fak–Kaimana– Ambon)

Jarak = 62 + 242 + 112 + 391 = 807

Permintaan = 569,27 KL + 547,81 KL + 1076,76 KL = 2193,84 KL

Cluster V (Ambon–Wayame– Namlea– Sanana –Labuha– Ambon)

Jarak = 75 + 43 + 112 + 185 + 240 = 655

Permintaan = 558,88 KL + 463,14 KL + 657,70 KL + 852,53 KL = 2532,25 KL

Jadi, jumlah jarak perjalanan yang ditempuh oleh kapal MT. Citra Bintang adalah 1840 + 955 + 1005 + 807 + 655 = 5262 mil, dengan total rata-rata permintaan pada masing-masing *cluster* tidak melebihi kapasitas muat kapal. Sehingga jika ada depot yang melakukan penambahan permintaan, maka masih memungkinkan untuk dipenuhi.

Berikut merupakan perhitungan waktu untuk seluruh pelayaran dari masing-masing *cluster*:

Cluster I (Ambon – Merauke – Ambon)

$$= \left(\frac{920 \text{ mil}}{11,51 \text{ mil/jam}} \right) + \left(\frac{2588,46 \text{ KL}}{177,925 \text{ KL/jam}} \right) + \left(\frac{920 \text{ mil}}{12,09 \text{ mil/jam}} \right)$$

$$= 79,93 \text{ jam} + 14,55 \text{ jam} + 76,1 \text{ jam}$$

$$= 170,58 \text{ jam} = 7,1 \text{ hari} = 7 \text{ hari } 2 \text{ jam } 24 \text{ menit}$$

Cluster II (Ambon – Ternate – Tobelo – Ambon)

$$= \left(\frac{518 \text{ mil}}{11,51 \text{ mil/jam}} \right) + \left(\frac{2436,84 \text{ KL}}{177,925 \text{ KL/jam}} \right) + \left(\frac{437 \text{ mil}}{12,09 \text{ mil/jam}} \right)$$

$$= 45 \text{ jam} + 13,7 \text{ jam} + 36,15 \text{ jam}$$

$$= 94,85 \text{ jam} = 3,95 \text{ hari} = 3 \text{ hari } 22 \text{ jam } 48 \text{ menit}$$

Cluster III (Ambon – Tual – Dobo – Saumlaki – Ambon)

$$= \left(\frac{670 \text{ mil}}{11,51 \text{ mil/jam}} \right) + \left(\frac{2854,07 \text{ KL}}{177,925 \text{ KL/jam}} \right) + \left(\frac{335 \text{ mil}}{12,09 \text{ mil/jam}} \right)$$

$$= 58,21 \text{ jam} + 16,04 \text{ jam} + 27,71 \text{ jam}$$

$$= 101,96 \text{ jam} = 4,25 \text{ hari} = 4 \text{ hari } 6 \text{ jam}$$

Cluster IV (Ambon–Masohi–Fak-Fak–Kaimana–Ambon)

$$= \left(\frac{416 \text{ mil}}{11,51 \text{ mil/jam}} \right) + \left(\frac{2193,84 \text{ KL}}{177,925 \text{ KL/jam}} \right) + \left(\frac{391 \text{ mil}}{12,09 \text{ mil/jam}} \right)$$

$$= 36,14 \text{ jam} + 12,33 \text{ jam} + 32,34 \text{ jam}$$

$$= 80,81 \text{ jam} = 3,37 \text{ hari} = 3 \text{ hari } 8 \text{ jam } 53 \text{ menit}$$

Cluster V (Ambon–Wayame–Namlea–Sanana–Labuha– Ambon)

$$= \left(\frac{415 \text{ mil}}{11,51 \text{ mil/jam}} \right) + \left(\frac{2532,25 \text{ KL}}{177,925 \text{ KL/jam}} \right) + \left(\frac{240 \text{ mil}}{12,09 \text{ mil/jam}} \right)$$

$$= 36,06 \text{ jam} + 14,23 \text{ jam} + 19,85 \text{ jam}$$

$$= 70,14 \text{ jam} = 2,92 \text{ hari} = 2 \text{ hari } 22 \text{ jam } 5 \text{ menit}$$

Sehingga, total lamanya perjalanan yang ditempuh kapal adalah
 $= 170,58 \text{ jam} + 94,85 \text{ jam} + 101,96 \text{ jam} + 80,81 \text{ jam}$
 $+ 70,14 \text{ jam}$
 $= 518,34 \text{ jam} = 3,09 \text{ minggu}$
 $= 3 \text{ minggu } 15 \text{ jam } 7 \text{ menit}$

Dapat dibandingkan bahwa rute ini dapat mendistribusikan BBM dalam waktu yang lebih singkat, yaitu 3,09 minggu, juga dengan jarak rute yang lebih pendek daripada sebelumnya, yaitu 5262 mil, daripada dengan menggunakan sistem *tramper* yang memakan waktu 3,37 minggu, dan memiliki jarak rute yang lebih panjang yaitu 5798 mil. Dengan demikian, kegiatan pendistribusian akan lebih efisien dan dapat menekan pengeluaran biaya, serta meningkatkan kualitas pelayanan bagi masyarakat.

KESIMPULAN

Diperoleh rute rute perjalanan kapal MT. Citra Bintang milik PT. Burung Laut dalam mendistribusikan BBM dari Ambon ke 13 depot tujuan dengan menggunakan system *tramper* kurang efektif dibandingkan dengan usulan rute dengan menggunakan algoritma *Ant Colony System*. Pemilihan rute dengan menggunakan *Ant Colony System* menghasilkan rute dengan jarak tempuh sepanjang 5.262 mil dengan waktu berlayar selama 3,09 minggu, dimana semua permintaan dari depot tujuan terpenuhi tanpa melebihi kapasitas muat kapal. Sedangkan rute sebelumnya dalam melakukan pendistribusian memakan waktu 3,37 minggu dan jarak rute yang ditempuh adalah 5.798 mil. Dengan demikian algoritma *Ant Colony System* dapat memangkas jarak sebesar 536 mil dan lebih menghemat waktu sebanyak 0,28 minggu, atau sekitar 1 hari 23 jam 2 menit.

DAFTAR PUSTAKA

- Dorigo, M. dan Gambardella, L. M. (1997). *Ant Colonies for the Traveling Salesman Problem*. London: Cambridge.
- Fernandez, A., Handoyo, E. dan Saomantri, M. "Pembangunan Aplikasi Penyusunan Jadwal Kuliah Menggunakan Algoritma Semut". *Jurnal Teknik Elektro Universitas Diponegoro*, Semarang.
- Hindriyanto. Pengantar Optimisasi. [Online]. Tersedia: <http://hindriyanto.wordpress.com/2010/10/23/pengantar-optimisasi/>. [10 Februari 2014]
- Leksono, Agus. (2009). Algoritma *Ant Colony Optimization* (ACO) Untuk Menyelesaikan *Traveling Salesman Problem* (TSP). Skripsi Sarjana pada FMIPA Universitas Diponegoro, Semarang.
- Lintasan dan Sirkuit Hamilton. [Online]. Tersedia: <http://kuliahmsi.blogspot.com/2010/07/lintasan-dan-sirkuit-hamilton.html?m=1>. [11 Februari 2014].
- Lintasan Hamilton. [Online]. Tersedia: http://id.m.wikipedia.org/wiki/Lintasan_Hamilton [11 Februari 2014].
- Manurung, Dorkas Taruli. (2009). Penentuan Rute Distribusi BBM Untuk Menentukan Jalur yang Optimal dan Biaya yang Optimum dengan Metode *Structural Equation Modeling* di PT. Burung Laut. Skripsi Sarjana pada FT Universitas Sumatera Utara, Medan.
- Mindaputra, Eka. (2009). Penggunaan Algoritma *Ant Colony System* dalam *Traveling Salesman Problem* (TSP) pada PT. Eka Jaya Motor. Skripsi Sarjana pada FMIPA Universitas Diponegoro, Semarang.
- Mutakhiroh, I., Indrato dan Hidayat, T. (2007). "Pencarian Jalur Terpendek Menggunakan Algoritma Semut". *Jurnal Pemrograman dan Teori Informatika Universitas Islam Indonesia*, Yogyakarta.
- Suryadi, D. *Teori dan Algoritma Graph*.
- Yuwono, B., Aribowo, A.S. dan Wardoyo S.B. (2009). "Implementasi Algoritma Koloni Semut Pada Proses Pencarian Jalur Terpendek Jalan Protokol di Kota Yogyakarta". *Jurnal Teknik Informatika UPN "Veteran" Yogyakarta*.



Barekeng terbit dua kali dalam setahun yaitu Bulan Maret dan Desember. *Barekeng* menerima naskah dalam bentuk hasil penelitian, catatan penelitian (*note*) atau artikel ulas balik (*review/ minireview*) dan ulasan (*feature*) baik dalam bahasa Indonesia maupun dalam bahasa Inggris yang berkaitan dengan bidang Matematika dan Terapannya. Naskah yang dikirimkan merupakan naskah asli yang belum pernah diterbitkan di media manapun.

PENGIRIMAN NASKAH

Naskah dikirimkan kepada:

Redaksi *Barekeng*

Jurusan Matematika

Fakultas MIPA

Universitas Pattimura

Jl. Ir. M. Putuhena, Poka-Ambon

Email: jurnalbarekeng@gmail.com

Naskah yang dikirimkan harus dalam bentuk naskah cetak (*hard copy*) dan naskah lunak (*soft copy*), disertai dengan alamat korespondensi lengkap dan alamat *email* yang dapat dihubungi.

Naskah cetak (*hard copy*):

Naskah cetak dikirim sebanyak satu eksemplar dengan format pengetikan menggunakan *Microsoft Word* seperti berikut:

- Naskah diketik 1 spasi pada kertas HVS Ukuran A4 dengan batas tepi 2 cm dan berbentuk 2 kolom dengan jarak antar kolom 0.5 cm. Tipe huruf *Times New Roman* berukuran 10 point.
- Jumlah halaman maksimum 12 halaman termasuk Lampiran (Gambar dan Tabel). Setiap halaman diberi nomor secara berurutan pada tepi kanan atas. Untuk keterangan Lampiran: Tipe huruf *Times New Roman* berukuran 9 point.
- Persamaan matematika (*equations*) dapat diketik dengan menggunakan *MS Equations* atau *MathType* dengan tipe huruf *Cambria* atau *Times New Roman* berukuran 10 point.

Naskah lunak (*soft copy*):

Naskah lunak harus dalam format *Microsoft Word* dan dikirimkan dalam bentuk disk (CD, DVD), *flashdisk*, atau *attachment email*.

SUSUNAN NASKAH

- Judul dalam Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris untuk artikel berbahasa Indonesia dan Judul dalam Bahasa Inggris untuk artikel berbahasa Inggris.
- Nama Lengkap Penulis (tanpa gelar).
- Nama Lembaga atau Institusi, disertai Alamat Lengkap dengan nomor kode pos. Untuk korespondensi dilengkapi No. Telp., fax dan *email*.
- Judul Ringkas (*Running Title*) (jika diperlukan).

- Abstrak (*Abstract*) dalam Bahasa Inggris atau Bahasa Indonesia.
- Kata Kunci (*Keywords*) dalam Bahasa Inggris atau Bahasa Indonesia.
- Pendahuluan (*Introduction*) meliputi latar belakang, masalah dan tujuan penelitian.
- Tinjauan Pustaka meliputi ulasan (*review*) penelitian dari beberapa literatur serta teori-teori dasar yang mendukung penelitian.
- Metode Penelitian (*Methods and Materials*) meliputi bahan, cara, dan analisis dalam penelitian (jika ada).
- Hasil dan Pembahasan (*Results and Discussion*) ditulis secara berkesinambungan dalam satu rangkaian naskah penulisan.
- Kesimpulan (*Conclusion*)
- Ucapan Terima Kasih (*Acknowledgements*) (Jika diperlukan)
- Daftar Pustaka ditulis memakai sistem nama dan disusun menurut abjad. Di bawah ini beberapa contoh penulisan sumber acuan:

Jurnal :

Efron, B. 1983. *Estimating the Error Rate of Prediction Rule: Improvement on Cross-Validation*. J. Amer. Statist. Assoc., 78:316-331.

Buku :

Dennis, G. Z., 1986, *Differential Equations with Boundary Value Problems*. Ed ke-2. Boston: Massachusetts. PWS Publishers.

Skripsi/Tesis/Disertasi :

Mochamad Apri., *Model Biaya Total Jaringan Pipa Transmisi Gas dan Optimasinya*, Departemen Matematika ITB Bandung, Tugas Akhir, 2002.

Informasi dari Internet :

Mallat, Stephane, 1999, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Second Edition, Academic Press 24-28 Oval Road, London NW1 7DX UK, <http://www.hbuk.co.uk/ap/>

- Lampiran meliputi Gambar dan Tabel beserta keterangannya (jika diperlukan).

CATATAN (NOTE)

- Naskah harus dikirimkan ke redaksi selambat-lambatnya 2 (dua) bulan sebelum bulan penerbitan jurnal (Maret dan Desember).
- Naskah akan dinilai oleh tim penilai yang relevan sebelum diterbitkan dan tim redaksi berhak merubah struktur naskah tanpa merubah isi naskah.
- Naskah dapat diterima atau ditolak. Naskah ditolak, jika tidak memenuhi kriteria penulisan, pelanggaran hak cipta, kualitas rendah, dan tidak menanggapi korespondensi redaksi. Pengumuman naskah ditolak atau diterima paling lambat 1 (satu) bulan setelah naskah terkirim.
- Penulis atau penulis pertama yang akan mendapat 1 (satu) eksemplar jurnal yang sudah diterbitkan.

Barekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan

