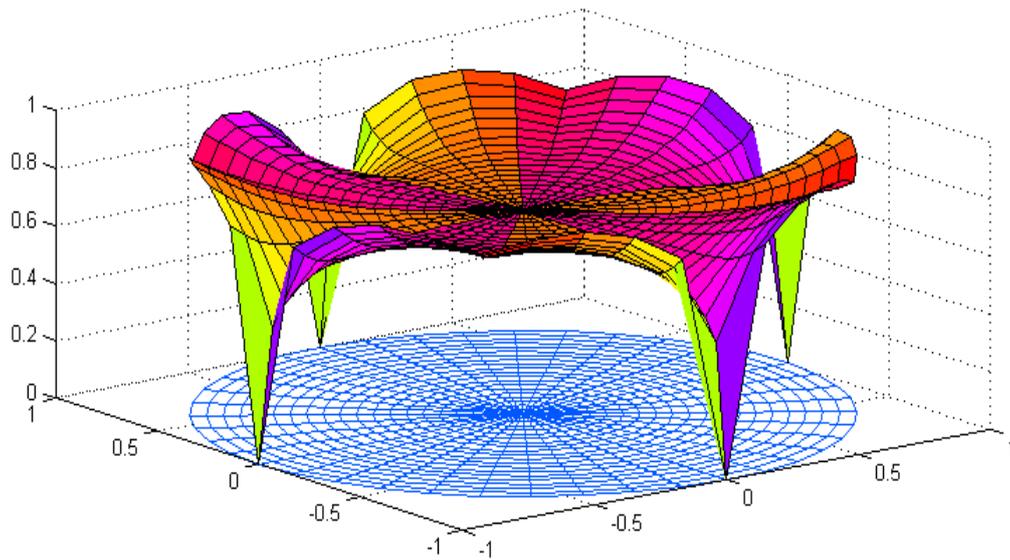


# Barekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan

ISSN 1978-7227





**jurnal ilmu matematika dan terapan**

ISSN 1978-7227

Volume 8 Nomor 2 | Desember 2014

---

**PENANGGUNG JAWAB**

Ketua Jurusan Matematika  
FMIPA - Universitas Pattimura

**KETUA DEWAN REDAKSI**

H. J. Wattimanela, S.Si, M.Si

**PENYUNTING AHLI**

Prof. Drs. Subanar, Ph.D (UGM Yogyakarta)  
Prof. Dr. Edi Baskoro (ITB Bandung)  
Prof. Dr. Siswadi (IPB Bogor)  
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc (ITS Surabaya)  
Prof. Dr. Thomas Pentury, M.Si (UNPATTI Ambon)  
Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (UNPATTI Ambon)

**PENYUNTING PELAKSANA**

M. W. Talakua, S.Pd, M.Si  
F. Y. Rumlawang, S.Si, M.Si  
E. R. Persulesy, S.Si, M.Si  
L. J. Sinay, S.Si, M.Sc  
D. L. Rahakbauw, S.Si, M.Si  
V. Y. I. Ilwaru, S.Si, M.Si

**SEKRETARIAT**

Y. A. Lesnussa, S.Si, M.Si

**PENERBIT (PUBLISHER)**

Jurusan Matematika FMIPA  
Universitas Pattimura Ambon

**ALAMAT EDITOR (EDITORIAL ADDRESS)**

Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Pattimura  
Alamat:  
Kampus FMIPA UNPATTI  
Jl. Ir. M. Putuhena, Poka 97233  
Ambon - Maluku



## PENELITIAN

- |   |                            |         |
|---|----------------------------|---------|
| <p><b>HASIL KALI LANGSUNG S-NEAR-RING DAN S-NEAR-RING BEBAS</b><br/><i>Smarandache Direct Product and Smarandache Free Near-Rings</i></p>   | Henry W. M. Patty          | 1 – 7   |
| <p><b>PENDEKATAN VECTOR ERROR CORRECTION MODEL UNTUK ANALISIS HUBUNGAN INFLASI, BI RATE DAN KURS DOLAR AMERIKA SERIKAT</b><br/><i>Vector Error Correction Model Approach to Analysis of the relationship of Inflation, BI Rate and US Dollar</i></p>  | Lexy Janzen Sinay          | 9 – 18  |
| <p><b>SISTEM ORTONORMAL DALAM RUANG HILBERT</b><br/><i>Orthonormal Systems in Hilbert Space</i></p>   | Zeth Arthur Leleury        | 19 – 26 |
| <p><b>ANALISIS JARINGAN SARAF TIRUAN BACKPROPAGATION TERHADAP PERAMALAN NILAI TUKAR MATA UANG RUPIAH DAN DOLAR</b><br/><i>Analysis of Backpropagation Artificial Neural Network to forecast Rupiah and Dollar</i></p>   | Dorteus Lodewyik Rahakbauw | 27 – 32 |
| <p><b>KLASIFIKASI NEAR-RING</b><br/><i>Classifications of Near Ring</i></p>   | Elvinus Richard Persulesy  | 33 – 39 |
| <p><b>ANALISIS KETIMPANGAN PEMBANGUNAN ANTARA KECAMATAN DI KOTA AMBON</b><br/><i>Analysis of the Development Imbalance between Districts in Ambon City</i></p>  | Jefri Tipka                | 41 – 45 |
| <p><b>MATRIKS PANGKAT DAN KEPERIODIKANNYA DALAM ALJABAR MAX-PLUS</b><br/><i>The Power of Matrices and its Periodic in the Max-Plus Algebra</i></p>  | Venn Yan Ishak Ilwaru      | 47 – 52 |
| <p><b>PENDEKATAN MODEL GEOGRAPHICALLY WEIGHTED REGRESSION UNTUK MENENTUKAN FAKTOR-FAKTOR YANG MEMPENGARUHI JUMLAH RUMAH TANGGA MISKIN DI PULAU BURU</b><br/><i>Geographically Weighted Regression Model Approach to Determine Factors that Influence the Number of Poor Households in Buru Island</i></p> | Salmon Notje Aulele        | 53 – 57 |



merupakan Jurnal Ilmu Matematika dan Terapannya sebagai suatu wahana informasi ilmiah yang menyajikan artikel (naskah) hasil penelitian meliputi bidang-bidang sebagai berikut: matematika analisis, aljabar, matematika terapan, statistika, pendidikan matematika dan ilmu komputer. Jurnal ini diterbitkan dua kali dalam setahun yaitu pada bulan Maret dan bulan Desember. Artikel atau naskah-naskah di dalam jurnal ini merupakan hasil-hasil penelitian pribadi ataupun kelompok yang belum pernah diterbitkan di jurnal-jurnal atau majalah ilmiah lainnya.

---

**Diterbitkan oleh:**

Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Pattimura  
Ambon  
2014  
Copyright © Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI 2014

## HASIL KALI LANGSUNG $S$ -NEAR-RING DAN $S$ -NEAR-RING BEBAS *Smarandache Direct Product and Smarandache Free Near-Rings*

HENRY W. M. PATTY

Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon  
E-mail: henrywmpatty81@gmail.com

### ABSTRAK

Hasil kali langsung  $near$ -ring Smarandache  $\prod_{i \in I} N_i$  dikembangkan dari hasil kali langsung  $near$ -ring dengan kondisi khusus jika paling sedikit terdapat satu anggota dari  $N_i$  merupakan  $near$  ring Smarandache ( $S$ - $near$ -ring). Sedangkan  $near$ -ring Smarandache bebas didefinisikan dengan bantuan homomorfisma  $near$ -ring Smarandache.

**Kata kunci** :  $near$ -ring, hasil kali langsung,  $S$ - $near$  ring,  $S$ - $near$  ring bebas

### PENDAHULUAN

Sebagaimana diketahui, struktur aljabar dibangun oleh tiga komponen utama yaitu suatu himpunan tak kosong, operasi biner dan aksioma. Jika pada himpunan tak kosong tersebut dilengkapi dengan operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma maka akan muncul kelas baru dalam aljabar yang mempunyai karakteristik tertentu. Salah satu kelas dalam aljabar adalah  $near$ -ring yang merupakan himpunan tak kosong serta dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan (+) dan pergandaan ( $\cdot$ ). Struktur  $near$ -ring merupakan generalisasi dari ring tanpa harus memenuhi sifat distributif kiri dan komutatif terhadap penjumlahan. Sejalan dengan perkembangan teori aljabar banyak penelitian tentang  $near$ -ring yang sampai sekarang ini menjadi objek menarik untuk diteliti. Jelas bahwa himpunan bilangan bulat  $Z$  merupakan contoh  $near$ -ring yang paling sederhana. Namun setiap bilangan bulat tidak memiliki invers terhadap operasi pergandaan. Sehingga pembahasan mengenai  $near$ -ring menjadi terbatas dalam bentuk maupun sifatnya. Oleh karena itu dikembangkan atau disyaratkan suatu kondisi dimana setiap elemen tak nol dalam  $near$ -ring tersebut memiliki invers terhadap operasi pergandaan. Struktur ini yang sekarang dikenal sebagai  $near$ -field.

Dalam aljabar, konsep  $near$ -ring dan  $near$ -field sering dipahami secara terpisah dan dapat dikarakterisasi. Namun jika mempunyai suatu  $near$ -ring dengan himpunan bagian sejatinya yang merupakan  $near$ -field maka diperoleh struktur aljabar yang disebut  $near$ -ring

Smarandache (dinotasikan  $S$ - $near$ -ring). Konsep  $S$ - $near$ -ring ini, telah diperkenalkan Florentin Smarandache dan telah dibahas oleh Vasantha Kandasamy pada tahun 2002 dalam tulisannya yang berjudul *Smarandache near-rings*.  $Near$ -ring ini sering disebut  $S$ - $near$ -ring tingkat 1 dan merupakan  $near$ -ring kanan (hanya memenuhi sifat distributif kanan). Dalam tulisan ini akan dijelaskan definisi  $S$ - $near$ -ring serta beberapa contohnya namun diutamakan pada hasil kali langsung  $S$ - $near$ -ring dan  $S$ - $near$ -ring bebas.

### TINJAUAN PUSTAKA

Hasil kali langsung  $near$ -ring Smarandache (*direct product*  $S$ - $near$ -ring) dan  $S$ - $near$ -ring bebas yang di bahas dalam tulisan ini menggunakan konsep  $near$ -ring sebagai landasan utama. Pengertian dan klasifikasi dari  $near$ -ring mengacu pada tulisan Gunter Pilz pada tahun 1977 tentang  $near$ -rings. Dijelaskan karakteristik  $near$ -ring berupa definisi, contoh, klasifikasi dan hasil kali  $near$ -ring. Namun berbicara konsep  $near$ -ring tetap berkaitan dengan semigrup  $near$ -ring. Dalam bagian ini juga akan diperkenalkan bentuk semigrup Smarandache ( $S$ -semigrup) dan Smarandache subsemigrup ( $S$ -subsemigrup) yang tetap merujuk pada tulisan W.B. Vasantha Kandasamy tahun 2002 tentang *Smarandache near-rings*. Diharapkan pembahasan  $S$ - $near$ -ring dan  $near$ -ring bebas akan lebih mudah dipahami.

Berikut ini diberikan definisi dan contoh semigrup Smarandache ( $S$ -semigrup) dan subsemigrup Smarandache ( $S$ -subsemigrup).

**Definisi 1.**

Diberikan semigrup  $S$ , semigrup  $S$  disebut semigrup Smarandache ( $S$ -semigrup) jika memuat himpunan bagian sejati  $A$ , sedemikian hingga  $A$  merupakan grup terhadap operasi yang sama di  $S$ .

**Contoh 1:**

Diketahui  $Z_{12} = \{0, 1, 2, \dots, 11\}$  merupakan semigrup dengan operasi pergandaan modulo 12. Dapat diambil

$$P = \{4, 8\} \subset Z_{12}, P \neq Z_{12}$$

dan merupakan grup terhadap operasi pergandaan modulo 12. Jadi  $Z_{12}$  merupakan  $S$ -semigrup

**Contoh 2:**

Diketahui  $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$  merupakan semigrup dengan operasi pergandaan modulo 4. Dapat diambil

$$P = \{1, 3\} \subset Z_4, P \neq Z_4$$

dan merupakan grup terhadap operasi pergandaan modulo 4. Jadi  $Z_4$  merupakan  $S$ -semigrup

**Definisi 2.**

Misalkan  $S$  adalah  $S$ -semigrup. Suatu himpunan bagian sejati  $P$  dari  $S$  ( $P \subset S, P \neq S$ ) disebut subsemigrup Smarandache ( $S$ -subsemigrup) jika  $P$  adalah  $S$ -semigrup dengan operasi yang sama di  $S$ .

**Contoh 3:**

Diketahui  $Z_{24} = \{0, 1, 2, \dots, 23\}$  merupakan  $S$ -semi grup dengan operasi pergandaan modulo 24. Dapat diambil  $P = \{0, 2, 4, \dots, 22\}$  dan merupakan  $S$ -subsemigrup terhadap operasi pergandaan modulo 24 dengan  $A = \{8, 16\}$  merupakan subgrup di  $P$ .

Selanjutnya diberikan definisi dan contoh dari *near-ring* sebagai berikut

**Definisi 3.**

Diberikan himpunan  $N \neq \emptyset$ . Pada  $N$  didefinisikan operasi biner "+" dan "·". Himpunan  $N$  disebut *near-ring* terhadap kedua operasi biner tersebut, jika memenuhi :

- (i)  $(N, +)$ ; grup
- (ii)  $(N, \cdot)$ ; semigrup
- (iii) Distributif Kanan:

$$(\forall a, b, c \in N)(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Himpunan  $N$  terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan padanya disebut *near-ring* dan dinotasikan dengan  $(N, +, \cdot)$ .

**Contoh 4:**

Diketahui  $(Z, +)$  grup. Pada  $Z$  didefinisikan operasi "·" sebagai berikut

$$(\forall a, b \in Z)a \cdot b = a$$

Jelas bahwa  $(Z, +, \cdot)$  merupakan *near-ring*.

**Contoh 5:**

Misalkan  $Z_{12} = \{0, 1, 2, \dots, 11\}$ . Diketahui  $(Z_{12}, +)$  grup atas operasi penjumlahan modulo 12. Didefinisikan operasi "·". Pada  $Z_{12}$  didefinisikan operasi "·" sebagai berikut

$$(\forall a, b \in Z_{12})a \cdot b = a$$

Maka  $(Z_{12}, +, \cdot)$  merupakan *near-ring*.

Berikut ini diberikan beberapa definisi yang menunjukkan klasifikasi dari ring.

**Definisi 4.**

Suatu *near-ring*  $N$  dikatakan *near-ring* abelian jika  $N$  memenuhi sifat komutatif terhadap operasi "+", yaitu

$$(\forall a, b \in N)a + b = b + a$$

**Definisi 5.**

Suatu *near-ring*  $N$  dikatakan *near-ring* distributif jika  $N$  memenuhi sifat distributif kiri, yaitu

$$(\forall a, b \in N)a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

**Definisi 6.**

Suatu *near-ring*  $N$  dikatakan *near-ring* komutatif jika  $N$  memenuhi sifat komutatif terhadap operasi "·", yaitu

$$(\forall a, b \in N)a \cdot b = b \cdot a$$

**Definisi 7.**

Suatu *near-ring*  $N$  dikatakan *near-ring* dengan elemen satuan jika  $N$  memuat elemen satuan terhadap operasi "·", yaitu

$$(\exists e \in N)(\forall a \in N)ae = ea = a$$

**Definisi 8.**

*Near-ring*  $(M, +, \cdot)$  disebut *near-field* jika

- i.  $(M, +, \cdot)$  adalah *near-ring* dengan elemen satuan
- ii. Setiap elemen tak nol di  $M$  mempunyai invers terhadap pergandaan di

$$M : (\forall a \in M)[a \neq 0 \Rightarrow (\exists a^{-1} \in M)aa^{-1} = a^{-1}a = e]$$

Dalam pembahasan akan dijelaskan tentang hasil kali langsung *S-near-ring* dan *S-near-ring* bebas. Oleh karena itu dibutuhkan bahasan tentang hasil kali langsung *near-ring*, kondisi ore, *near-ring* hasil bagi dan *near-ring* bebas.

**Definisi 9.**

Diberikan  $\{N_i\}$  adalah keluarga *near-ring* ( $i \in I, I$  himpunan indeks,  $I = \{1, 2, \dots, r\}$ ).  $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_r = XN_i$  yang didefinisikan terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan disebut hasil kali langsung *near-ring*  $N_i$ .

**Contoh 6.**

Diketahui  $Z_2 = \{0, 1\}$  *near-field* dan  $Z$  *near-ring*.

Dibentuk  $N = Z \times Z_2 = \{(z, p) | z \in Z, p \in Z_2\}$  maka  $N$  merupakan hasil kali langsung *near-ring*. Jika diselidiki

$N$  juga merupakan *near-ring* dengan operasi penjumlahan '+' dan '.' di  $N$ .

**Definisi 10.**

Suatu subnear-ring dari  $\bigoplus_{i \in I} N_i$  dimana jumlah setiap elemen berhingganya sama dengan nol disebut jumlah langsung eksternal (dinotasikan  $\bigoplus_{i \in I} N_i$ ) dari setiap  $N_i$ .

Secara umum setiap *subnear-ring*  $N$  dari  $\bigoplus_{i \in I} N_i$  dimana setiap pemetaan proyektif  $\pi_i (i \in I)$  adalah surjektif (dengan kata lain untuk setiap  $i \in I$  dan untuk setiap  $n_i \in N_i$ ;  $n_i$  merupakan elemen ke- $i$  dari sebarang elemen di  $N$ ) disebut sub hasil kali langsung dari setiap  $N_i$ .

**Definisi 11.**

Suatu *near-ring*  $N$  dikatakan memenuhi kondisi ore kiri (kanan) dalam kaitannya dengan suatu subsemigrup  $S$  dari  $(N, \cdot)$  jika untuk setiap  $(s, n) \in S \times N$  berlaku

$$ns_1 = sn_1 \quad (s_1n = n_1s)$$

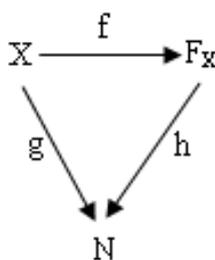
**Definisi 12.**

Jika  $S = \{s \in N \mid s \text{ dapat dikanselasi}\}$  maka  $N_s$  disebut *near-ring* hasil bagi kiri (kanan) dari  $N$

Misalkan  $V$  himpunan semua jenis *near-ring* (*near-ring*, *near ring* abelian, *near-ring* dengan elemen satuan, atau *near-ring* distributif) dan  $X$  himpunan bagian tak kosong.

**Definisi 13.**

Suatu *near-ring*  $F_X \in V$  disebut *near-ring* bebas di  $V$  atas  $X$  jika terdapat suatu pemetaan  $f : X \rightarrow F_X$  (dengan  $X$  sebarang himpunan tak kosong) untuk setiap  $N \in V$  dan untuk setiap  $g : X \rightarrow N$  maka terdapat suatu homomorfisma  $h \in \text{Hom}(F_X, N) : h \circ f = g$



Gambar 1. Homomorfisma *near-ring*

Setelah membahas tentang *near-ring*, berikut ini diberikan definisi dan contoh dari *near-ring* Smarandache (*S-near-ring*) yang diklasifikasikan dalam *S-near-ring* tingkat 1.

**Definisi 14.**

Diberikan himpunan  $N \neq \emptyset$  dengan  $A$  himpunan bagian sejati dari  $N$  atau  $(A \subset N \text{ dan } A \neq N)$ . Pada  $N$  didefinisikan operasi-operasi biner "+" dan ".". Himpunan  $N$  disebut *near-ring* Smarandache (*S-near-ring*) terhadap kedua operasi biner, jika memenuhi :

- i.  $(N, +, \cdot)$  adalah *near-ring*
  - a.  $(N, +)$  adalah grup
  - b.  $(N, \cdot)$  adalah semigrup
  - c. Distributif Kanan;  $(\forall a, b, c \in N)(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- ii.  $(A, +, \cdot)$  adalah *near-field*
  - a.  $(A, +)$  adalah grup
  - b.  $(A \setminus \{0\}, \cdot)$  adalah grup
  - c. Distributif Kanan;  $(\forall a, b, c \in A)(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

**Contoh 6.**

Diberikan  $(Z_n, +, \cdot)$  ring dan  $(Z_2, +, \cdot)$  *near-field* terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan modulo  $n$ . Himpunan  $Z_n$  dengan  $n \geq 2$  merupakan *S-near-ring* dengan  $Z_2$  merupakan himpunan bagian sejati dari  $Z_n$  atau  $(Z_2 \subset Z_n \text{ dan } Z_2 \neq Z_n)$ .

Pada contoh ini, ternyata tidak semua *near-ring*  $Z_n$  merupakan *near-field* jika  $n = 2$  (bilangan prima) maka  $Z_2$  merupakan *near-field*. Sehingga  $n$  bilangan prima maka  $Z_n$  merupakan *near-field*. Analog dengan sifat di lapangan (*field*), bahwa himpunan bilangan bulat modulo  $n$  merupakan lapangan jika  $n$  prima.

Selain itu, contoh ini hanya memberikan gambaran umum mengenai struktur *near-ring* Smarandache namun belum menunjukkan karakter khusus struktur *near-ring* sendiri dan himpunan bagiannya yang *near-field* dengan  $Z_n$  dan  $Z_2$  masing-masing ternyata memenuhi sifat distributif kanan.

Contoh selanjutnya akan menunjukkan struktur *S-near-ring* lainnya.

**Contoh 7.**

Diberikan  $Z_2 = \{0,1\}$  dan sebarang grup  $G$  terhadap operasi pergandaan  $Z_2$  adalah *near-ring* terhadap operasi penjumlahan "+" didefinisikan seperti penjumlahan modulo  $Z_2$  dan terhadap operasi pergandaan "." didefinisikan sebagai berikut :

$$(\forall a, b \in Z_2) a \cdot b = a$$

$Z_2G$  adalah grup *near-ring* dari grup  $G$  atas *near-field*  $Z_2$ .

Grup *near-ring*  $Z_2G$  juga adalah *S-near-ring* dengan  $(Z_2 \subset Z_2G \text{ dan } Z_2 \neq Z_nG)$

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

**1. Hasil Kali Langsung Near-Ring Smarandache**

**Definisi 15.**

Misalkan  $\{N_i\}$  adalah keluarga *near-ring* ( $i \in I, I$  himpunan indeks) dengan operasi "+" dan "." yang didefinisikan di setiap  $N_i$ . Jika  $\{N_i\}$  memiliki paling

sedikit satu  $S$ -near-ring maka hasil kali langsung  $N_1 \times N_2 \times \dots \times N_r = \prod_{i \in I} N_i$  disebut hasil kali langsung dari near-ring Smarandache  $N_i$  (hasil kali langsung  $S$ -near-ring)

### Teorema 1.

Hasil kali langsung  $S$ -near-ring adalah  $S$ -near-ring

### Bukti

Diketahui  $N = \prod_{i=1}^r N_i = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_r$  merupakan

hasil kali langsung dari near-ring Smarandache  $N_i$

Akan ditunjukkan  $(N, +, \cdot)$  merupakan  $S$ -near-ring

i)  $(N, +, \cdot)$  near-ring

I.  $(N, +)$  adalah grup

i. Tertutup

Ambil sebarang  $a, b \in N$

Akan ditunjukkan  $a + b \in N$

Karena  $a, b \in N$  maka  $a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$  dengan

$a_1 \in N_1, a_2 \in N_2, \dots, a_r \in N_r$

$b = (b_1, b_2, \dots, b_r)$  dengan  $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2,$

$\dots, b_r \in N_r$

Sehingga

$$a + b = (a_1, a_2, \dots, a_r) + (b_1, b_2, \dots, b_r)$$

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_r + b_r)$$

dengan  $a_1 + b_1 \in N_1, a_2 + b_2 \in N_2, \dots,$

$a_r + b_r \in N_r$

ii. Asosiatif

Ambil sebarang  $a, b, c \in N$

Akan ditunjukkan  $(a + b) + c = a + (b + c)$

$a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$  dengan  $a_1 \in N_1, a_2 \in N_2, \dots,$   
 $a_r \in N_r$

$b = (b_1, b_2, \dots, b_r)$  dengan  $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, \dots,$   
 $b_r \in N_r$

$c = (c_1, c_2, \dots, c_r)$  dengan  $c_1 \in N_1, c_2 \in N_2, \dots,$   
 $c_r \in N_r$

Sehingga

$$(a + b) + c = [(a_1, a_2, \dots, a_r) + (b_1, b_2, \dots, b_r)] + (c_1, c_2, \dots, c_r)$$

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_r + b_r) + (c_1, c_2, c_r) = [(a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, \dots, (a_r + b_r) + c_r]$$

$$= [a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), \dots, a_r + (b_r + c_r)]$$

$$= (a_1, a_2, \dots, a_r) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2, \dots, b_r + c_r) = (a_1, a_2, \dots, a_r) + [(b_1, b_2, \dots, b_r) + (c_1, c_2, \dots, c_r)] = a + (b + c)$$

iii. Terdapat elemen netral

Ambil sebarang  $a \in N$

Akan ditunjukkan terdapat  $e \in N$  sedemikian hingga

$$a + e = e + a = a$$

Karena  $a \in N$  maka

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$$

dengan  $a_1 \in N_1, a_2 \in N_2, \dots, a_r \in N_r$

Misalkan  $e \in N$  maka

$$e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$$

dengan  $e_1 \in N_1, e_2 \in N_2, \dots, e_r \in N_r$

Sehingga  $a + e = a$

$$(a_1, a_2, \dots, a_r) + (e_1, e_2, \dots, e_r) = (a_1, a_2, \dots, a_r) \quad (i)$$

$$(-a_1, \dots, -a_r) + (a_1, \dots, a_r) + (e_1, \dots, e_r)$$

$$= (-a_1, \dots, -a_r) + (a_1, \dots, a_r) \quad (ii)$$

$$(-a_1 + a_1, \dots, -a_r + a_r) + (e_1, \dots, e_r)$$

$$= (-a_1 + a_1, \dots, -a_r + a_r)$$

$$(0, 0, \dots, 0) + (e_1, e_2, \dots, e_r) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$(0 + e_1, 0 + e_2, \dots, 0 + e_r) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$(e_1, e_2, \dots, e_r) = (0, 0, \dots, 0)$$

Dengan

$$e_1 = 0 \in N_1, e_2 = 0 \in N_2, \dots, e_r = 0 \in N_r$$

$$e = (0, 0, \dots, 0)$$

Karena  $a_1 \in N_1, a_2 \in N_2, \dots, a_r \in N_r$

dan  $N_1, N_2, \dots, N_r$  merupakan near-ring

maka  $-a = (-a_1, -a_2, \dots, -a_r)$  dan diperoleh (i) ke (ii)

Analog untuk  $e + a = a$

iv. Setiap elemen memiliki invers

Ambil sebarang  $a \in N$

Akan ditunjukkan terdapat  $a^{-1} \in N$  sedemikian hingga  $a + a^{-1} = a^{-1} + a = 0$

Karena  $a \in N$  maka  $a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$  dengan  $a_1 \in N_1, a_2 \in N_2, \dots, a_r \in N_r$

Misalkan  $a^{-1} \in N$  maka

$a^{-1} = (b_1, b_2, \dots, b_r)$  dengan  $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, \dots, b_r \in N_r$

Sehingga  $a + a^{-1} = 0$

$$(a_1, \dots, a_r) + (b_1, \dots, b_r) = (0, \dots, 0) \quad (i)$$

$$(-a_1, \dots, -a_r) + (a_1, \dots, a_r) + (b_1, \dots, b_r)$$

$$= (-a_1, \dots, -a_r) + (0, \dots, 0) \quad (ii)$$

$$(-a_1 + a_1, \dots, -a_r + a_r) + (b_1, \dots, b_r)$$

$$= (-a_1 + 0, \dots, -a_r + 0)$$

$$(0, \dots, 0) + (b_1, \dots, b_r) = (-a_1, \dots, -a_r)$$

$$(0 + b_1, \dots, 0 + b_r) = (-a_1, \dots, -a_r)$$

$$(b_1, \dots, b_r) = (-a_1, \dots, -a_r)$$

$$a^{-1} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_r)$$

Karena  $a_1 \in N_1, a_2 \in N_2, \dots, a_r \in N_r$

dan  $N_1, N_2, \dots, N_r$  merupakan near-ring maka

$-a_1 \in N_1, -a_2 \in N_2, \dots, -a_r \in N_r$

dan diperoleh (i) ke (ii)

Analog untuk  $a^{-1} + a = 0$

II.  $(N, \cdot)$  semigrup

i. Tertutup

Ambil sebarang  $a, b \in N$

Akan ditunjukkan  $a \cdot b \in N$

Karena  $a, b \in N$  maka

$a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$  dengan  $a_1 \in N_1, a_2 \in N_2, \dots,$   
 $a_r \in N_r$

$b = (b_1, b_2, \dots, b_r)$  dengan  $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, \dots,$   
 $b_r \in N_r$

Sehingga

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_1, a_2, \dots, a_r) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_r) \\ &= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_r \cdot b_r) \in N \\ &\text{dengan } a_1 \cdot b_1 \in N_1, a_2 \cdot b_2 \in N_2, \dots, a_r \cdot b_r \in N_r \end{aligned}$$

ii. Asosiatif

Ambil sebarang  $a, b, c \in N$   
 Akan ditunjukkan  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$   
 $a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$  dengan  $a_1 \in N_1, a_2 \in N_2, \dots, a_r \in N_r$   
 $b = (b_1, b_2, \dots, b_r)$  dengan  $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, \dots, b_r \in N_r$   
 $c = (c_1, c_2, \dots, c_r)$  dengan  $c_1 \in N_1, c_2 \in N_2, \dots, c_r \in N_r$

Sehingga

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot c &= [(a_1, a_2, \dots, a_r) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_r)] \\ &\quad \cdot (c_1, c_2, \dots, c_r) \\ &= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_r \cdot b_r) \\ &\quad \cdot (c_1, c_2, \dots, c_r) \\ &= [(a_1 \cdot b_1) \cdot c_1, (a_2 \cdot b_2) \cdot c_2, \dots, \\ &\quad (a_r \cdot b_r) \cdot c_r] \\ &= [a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1), a_2 \cdot (b_2 \cdot c_2), \dots, a_r \\ &\quad \cdot (b_r \cdot c_r)] \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_r) \cdot (b_1 \cdot c_1, b_2 \cdot c_2, \dots, b_r \cdot c_r) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_r) \cdot [(b_1, b_2, \dots, b_r) \\ &\quad \cdot (c_1, c_2, \dots, c_r)] \\ &= a \cdot (b \cdot c) \end{aligned}$$

III. Distributif Kanan

Ambil sebarang  $a, b, c \in N$   
 Akan ditunjukkan  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$   
 karena  $a, b, c \in N$  maka

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$$

Dengan

$$\begin{aligned} a_1 &\in N_1, a_2 \in N_2, \dots, a_r \in N_r \\ b &= (b_1, b_2, \dots, b_r) \end{aligned}$$

Dengan

$$\begin{aligned} b_1 &\in N_1, b_2 \in N_2, \dots, b_r \in N_r \\ c &= (c_1, c_2, \dots, c_r) \end{aligned}$$

dengan

$$c_1 \in N_1, c_2 \in N_2, \dots, c_r \in N_r$$

Sehingga

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot c &= [(a_1, a_2, \dots, a_r) + (b_1, b_2, \dots, b_r)] \\ &\quad \cdot (c_1, c_2, \dots, c_r) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_r + b_r) \\ &\quad \cdot (c_1, c_2, \dots, c_r) \\ &= [(a_1 + b_1) \cdot c_1, (a_2 + b_2) \cdot c_2, \dots, (a_r \\ &\quad + b_r) \cdot c_r] \\ &= [(a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_1), (a_2 \cdot c_2 + b_2 \cdot c_2), \dots, \\ &\quad (a_r \cdot c_r + b_r \cdot c_r)] \\ &= (a_1 \cdot c_1, a_2 \cdot c_2, \dots, a_r \cdot c_r) \\ &\quad + (b_1 \cdot c_1, b_2 \cdot c_2, \dots, b_r \cdot c_r) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_r) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_r) + \\ &\quad (b_1, b_2, \dots, b_r) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_r) \\ &= a \cdot c + b \cdot c \end{aligned}$$

Berdasarkan I, II, dan III terbukti  $(N, +, \cdot)$  near-ring

ii)  $(A, +, \cdot)$  near-field  $A \subset N$  dan  $A \neq N$ .

$$\text{Karena } N = \prod_{i=1}^r N_i = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_r$$

berdasarkan definisi 15 terdapat paling sedikit himpunan bagian  $M \subset N$  dan  $M \neq N$  yang merupakan  $S$ -near-ring maka  $N$  merupakan  $S$ -near-ring.

Berdasarkan i) dan ii) terbukti  $(N, +, \cdot)$   $S$ -near-ring  $\square$

### Contoh 8

Misalkan  $N = Z_3 \times Z_5 \times Z_7$ , maka  $N$  merupakan hasil kali langsung  $S$ -near-ring karena masing-masing  $Z_3, Z_5, Z_7$  merupakan  $S$ -near-ring (terdapat himpunan bagian sejati  $Z_2 \subset Z_3 \subset Z_5 \subset Z_7$  dan  $Z_2 \neq Z_3 \neq Z_5 \neq Z_7$ ; near-field). Selanjutnya menurut Teorema 1,  $N = Z_3 \times Z_5 \times Z_7$  merupakan  $S$ -near-ring.

### Sifat 1.

Diberikan  $\{M_i\}$  merupakan keluarga near-field dengan  $i = 1, 2, \dots, n$  pada  $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = \{(m_1, m_2, \dots, m_n) | m_1 \in M_1, m_2 \in M_2, \dots, m_n \in M_n\}$  berlaku sifat distributif kanan dengan operasi "+" dan pergandanan "." yang didefinisikan untuk setiap  $a, b \in M$  sebagai berikut :

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$
- $(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n)$

### Bukti.

Diketahui pada  $M_1, M_2, \dots, M_n$  masing-masing merupakan near-field. Akan dibuktikan  $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  dengan operasi yang didefinisikan padanya berlaku sifat distributif kanan.

Selanjutnya

Ambil sebarang  $a, b, c \in M$

Akan ditunjukkan  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Karena  $a, b, c \in M$

Maka

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

dengan  $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n$

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

dengan  $b_1 \in M_1, b_2 \in M_2, \dots, b_n \in M_n$

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

dengan  $c_1 \in M_1, c_2 \in M_2, \dots, c_n \in M_n$

Sehingga

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot c &= [(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)] \\ &\quad \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \cdot \\ &\quad (c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &= [(a_1 + b_1) \cdot c_1, (a_2 + b_2) \cdot c_2, \dots, (a_n + \\ &\quad b_n) \cdot c_n] \quad (i) \\ &= [(a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_1), (a_2 \cdot c_2 + b_2 \cdot c_2), \dots, \\ &\quad (a_n \cdot c_n + b_n \cdot c_n)] \quad (ii) \\ &= (a_1 \cdot c_1, a_2 \cdot c_2, \dots, a_n \cdot c_n) \\ &\quad + (b_1 \cdot c_1, b_2 \cdot c_2, \dots, b_n \cdot c_n) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &\quad + (b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) \end{aligned}$$

$$= a \cdot c + b \cdot c$$

Karena  $a_1, b_1, c_1 \in M_1, a_2, b_2, c_2 \in M_2, \dots, a_n, b_n, c_n \in M_n$ , dan  $M_1, M_2, \dots, M_n$  masing-masing merupakan *near-field* berlaku sifat distributif kanan sehingga diperoleh (i) ke (ii) . □

**Definisi 16.**

Suatu *S*-subnear-ring dari hasil kali langsung Smarandache  $\prod_{i \in I} N_i$  yang terdiri dari elemen-elemen dimana jumlah setiap elemen berhingganya sama dengan nol disebut jumlah langsung eksternal Smarandache,  $\bigoplus_{i \in I} N_i$  dari setiap  $N_i$ .

Secara umum untuk setiap *S*-subnear-ring *N* dari  $\prod_{i \in I} N_i$  dimana setiap pemetaan proyektif  $\pi_i (i \in I)$  adalah surjektif (dengan kata lain untuk setiap  $i \in I$  dan untuk setiap  $n_i \in N_i$ ;  $n_i$  merupakan elemen ke-*i* dari sebarang elemen di *N*) disebut hasil kali langsung bagian Smarandache dari setiap  $N_i$

**Teorema 2.**

Jika  $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$  merupakan jumlah langsung *S*-near-ring maka *N* adalah *S*-near-ring.

**Bukti**

Dengan menggunakan definisi operasi “+” dan “.” di

$$N = \bigoplus_{i \in I} N_i = \sum_{i=1}^r N_i = N_1 + N_2 + \dots + N_r \text{ yaitu}$$

$$\{a_i | i \in I\} + \{b_i | i \in I\} = \{a_i + b_i | i \in I\}$$

$$\{a_i | i \in I\} \cdot \{b_i | i \in I\} = \{a_i \cdot b_i | i \in I\}$$

maka  $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$  jelas merupakan *near-ring* untuk suatu

$N_i \subset N = \bigoplus_{i \in I} N_i$  yang merupakan *near-field* terhadap operasi “+” dan “.” di *N* ( dengan memperhatikan definisi hasil kali langsung *S*-near-ring) maka *N* merupakan *S*-near-ring. □

Dengan mengacu pada definisi *near-ring* hasil bagi (Definisi 12) berikut ini didefinisikan *S*-near-ring hasil bagi.

**Definisi 16.**

Diberikan *N* suatu near-ring dan *S* suatu *S*-subsemigrup dari  $(N, +)$ . Near-ring  $N_s$  disebut *S*-near-ring hasil bagi kiri (kanan) dari *N* pada *S* jika:

- a.  $N_s$  memiliki elemen satuan
- b. *N* dapat disisipkan dalam  $N_s$  dengan suatu homomorfisma *h*

c. Untuk setiap  $s \in S$  :  $h(s)$  memiliki invers dalam  $(N_s, \cdot)$

d. Untuk setiap  $q \in N_s$  terdapat  $s \in S$  dan terdapat  $n \in N$  sedemikian hingga  $q = h(n)h(s)^{-1} (q = h(s)^{-1}h(n))$ .

Dengan mengacu pada definisi kondisi ore *near-ring* (Definisi 11) berikut ini didefinisikan kondisi ore *S*-near-ring sebagai berikut.

**Definisi 17.**

Near-ring *N* dikatakan memenuhi kondisi ore kiri (kanan) Smarandache berkaitan dengan suatu *S*-subsemigrup *P* dari  $(N, \cdot)$ . yang diberikan jika untuk setiap  $(s, n) \in S \times N$  berlaku  $ns_1 = sn_1 (s_1n = n_1s)$

Berdasarkan Definisi 17 maka diperoleh sifat tentang *near-ring* *N* yang memenuhi kondisi ore sebagai berikut.

**Teorema 3.**

Jika suatu *near-ring* *N* memenuhi kondisi ore kiri (kanan) Smarandache dengan memperhatikan suatu *S*-subsemigrup *P* dari  $(N, \cdot)$  maka *near-ring* *N* memenuhi kondisi ore kiri (kanan) yang berkaitan pada suatu subsemigrup *P* yang diberikan dari  $(N, \cdot)$

**Bukti**

Dapat langsung dibuktikan dari Definisi 17. Jika dapat ditemukan contoh suatu *near-ring* *N* yang memenuhi kondisi ore kiri (kanan) dalam kaitannya dengan subsemigrup *P* dari  $(N, \cdot)$  namun tidak memenuhi kondisi ore kiri (kanan) Smarandache. □

**Definisi 18.**

Jika  $S = \{s \in N | s \text{ dapat dikanselasi}\}$  suatu  $N_s$  (jika ada) adalah *S*-near-ring maka  $N_s$  disebut *near-ring* Smarandache hasil bagi kiri (kanan) dari *N*

Berdasarkan Definisi 18 maka diperoleh sifat tentang *S*-near-ring hasil bagi sebagai berikut.

**Teorema 4.**

Jika  $N_s$  merupakan suatu *S*-near-ring hasil bagi maka  $N_s$  suatu near-ring hasil bagi.

**Bukti**

Dapat langsung dibuktikan dari Definisi 18. □

**2. Near-Ring Smarandache Bebas**

Dengan memperhatikan syarat perlu dan cukup suatu *near-ring* hasil bagi kiri (kanan) dari *N* (yang sudah didefinisikan sebelumnya) menjadi *S*-near-ring hasil bagi maka akan didefinisikan *near-ring* Smarandache bebas.

Namun sebelumnya diberikan definisi homomorfisma *near-ring* Smarandache sebagai berikut.

### Definisi 19.

Misalkan  $N$  dan  $N_1$  adalah pasangan *S-near-ring*. Maka  $h: N \rightarrow N_1$  disebut homomorfisma *S-near-ring* jika untuk setiap  $m, n \in M$  (dimana  $M$  himpunan bagian sejati dari  $N$ ,  $M$  merupakan *near-field*) berlaku:

$$h(m+n) = h(m) + h(n)$$

$$h(m.n) = h(m).h(n)$$

dimana  $h(m), h(n) \in M_1$  (dengan  $M_1$  himpunan bagian sejati dari  $N_1$ ,  $M_1$  merupakan *near-field*).

Misalkan  $S(V)$  keluarga *S-near-ring* dan  $X$  himpunan bagian tak kosong yang merupakan *S-semigrup* atas “+” dan “.” maka didefinisikan :

### Definisi 20.

Suatu *S-near-ring*  $F_X \in S(V)$  disebut *near-ring* Smarandache bebas di  $V$  atas  $X$  jika terdapat suatu pemetaan  $f: X \rightarrow F$  untuk setiap  $N \in V$  dan untuk setiap  $g: X \rightarrow N$  maka terdapat suatu homomorfisma *S-near-ring*,  $h \in S(\text{Hom}(F_X, N))$ : [dimana  $S(\text{Hom}(F_X, N))$  adalah kumpulan semua homomorfisma smarandache dari  $F_X$  ke  $N$ ] sedemikian sehingga  $h \circ f = g$

## KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dalam tulisan ini dapat disimpulkan bahwa struktur *near-ring* Smarandache dimotivasi dari struktur *near-ring*. Hal ini berakibat untuk hasil kali langsung *S-near-ring*  $\prod_{i \in I} N_i$  merupakan suatu struktur yang serupa dengan hasil kali langsung pada *near-ring* dengan syarat paling sedikit terdapat satu dari  $N_i$  merupakan *S-near ring*. Sedangkan untuk struktur *near-ring* Smarandache bebas dimotivasi dari keberadaan homomorfisma *S-near-ring* dari  $F_X$  ke  $N$  dengan mempertahankan sifat komutatif pada diagram homomorfisma.

## DAFTAR PUSTAKA

- Hungerford, T.W., 1980, *Algebra*, Springer-Verlag, New York.
- Pilz, Gunter, 1977, *Near-rings*, Noth Holland Pub. Co
- Vasanth Kandasamy, W.B., 2002, *Smarandache Near-rings*, American Research Press, Rehoboth, USA
- Vasanth Kandasamy, W.B., 2002, *Smarandache rings*, American Research Press, Rehoboth, USA



## PENDEKATAN VECTOR ERROR CORRECTION MODEL UNTUK ANALISIS HUBUNGAN INFLASI, BI RATE DAN KURS DOLAR AMERIKA SERIKAT

*Vector Error Correction Model Approach to Analysis of the relationship of Inflation, BI Rate and US Dollar*

**LEXY JANZEN SINAY**

*Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Maluku  
E-mail: lj.sinay@staf.unpatti.ac.id*

### ABSTRAK

Pengendalian terhadap tingkat inflasi, BI rate dan nilai tukar dolar Amerika Serikat terhadap rupiah merupakan hal yang paling penting demi terciptanya stabilitas moneter dan perekonomian di Indonesia. Penelitian ini bertujuan untuk memodelkan hubungan antara tingkat inflasi, BI rate, dan nilai tukar USD terhadap IDR, kemudian menganalisis model tersebut, dan memberikan peramalan dan analisis struktural dari model tersebut. Oleh karena itu, metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah analisis *Vector Error Correction Model* yang diterapkan pada data time series dari tingkat inflasi ( $X$ ), BI rate ( $Y$ ), dan nilai tukar USD terhadap IDR ( $Z$ ). Berdasarkan spesifikasi, estimasi dan pemeriksaan model, maka diperoleh model  $VECM(5)$  sebagai model terbaik. Hasil analisis model mengatakan bahwa ada hubungan kausalitas jangka panjang dan jangka pendek antara tingkat inflasi dengan BI rate dan nilai tukar USD terhadap IDR. Kemudian, berdasarkan peramalan dan analisis struktural maka dapat disimpulkan bahwa hasil yang diperoleh akurat.

**Kata kunci :** *inflasi, BI rate, USD, IDR, time series, Vector Error Correction Model,  $VECM(5)$ .*

### PENDAHULUAN

Pada tanggal 14 Agustus 1998 Pemerintah Indonesia menerapkan kebijakan sistem nilai tukar mengambang bebas. Kebijakan ini, membawa dampak yang sangat signifikan pada perkembangan perekonomian nasional baik dalam sektor moneter maupun sektor riil. Salah satu dampak yang terjadi adalah depresiasi nilai tukar rupiah terhadap dolar Amerika (USD) menjadi sangat besar. Hal ini mengakibatkan aktivitas bisnis dan ekonomi di Indonesia mengalami ketidakpastian dalam pengambilan keputusan. Oleh karena itu, perlunya kestabilan nilai tukar uang, yaitu dengan menekan nilai tukar USD terhadap nilai tukar rupiah (IDR).

Langkah awal yang perlu dikaji adalah menganalisis faktor-faktor penyebab kenaikan nilai tukar tersebut, baik yang bersifat ekonomi maupun non ekonomi. Pada umumnya faktor non ekonomi yang dianggap sebagai

penyebab terjadinya gejolak nilai tukar rupiah terhadap dolar, seperti faktor politik, pertahanan dan keamanan, kebijakan pemerintah dan lain-lain sangat sulit digunakan sebagai acuan pengukuran secara kuantitatif karena tidak dapat diukur. Hal ini berbeda dengan faktor ekonomi, seperti tingkat suku bunga, inflasi, dan lain-lain yang umumnya dapat diukur secara kuantitatif.

Tingkat suku bunga merupakan salah satu faktor penting yang dianggap sangat mempengaruhi nilai tukar mata uang. Di Indonesia tingkat suku bunga diatur oleh pihak Pemerintah melalui Bank Indonesia (BI). Suku bunga Bank Indonesia (BI Rate) adalah suku bunga kebijakan yang mencerminkan sikap atau *stance* kebijakan moneter yang ditetapkan oleh Bank Indonesia dan diumumkan kepada publik [1]. Dengan demikian, secara sederhana, BI Rate diartikan sebagai suku bunga yang dikeluarkan oleh BI melalui Dewan Gubernur BI pada setiap Rapat Dewan Gubernur bulanan, kemudian BI

Rate diimplementasikan pada operasi moneter yang dilakukan oleh BI melalui pengelolaan likuiditas (*liquidity management*) di pasar uang untuk mencapai sasaran operasional kebijakan moneter [1]. Pada umumnya, penetapan BI Rate didasarkan atas analisis ekonomi dan finansial, yaitu mempertimbangkan berbagai faktor ekonomi dan finansial negara Indonesia. Faktor utama yang sering dijadikan sebagai indikasi untuk penetapan BI Rate adalah tingkat inflasi.

Inflasi, secara sederhana, dapat diartikan sebagai peningkatan harga-harga (barang dan jasa) secara umum (menyeluruh) dan terus menerus [1]. Di Indonesia, kebijakan tentang penentuan tingkat inflasi dikeluarkan oleh Badan Pusat Statistik (BPS). Kebijakan ini didasarkan atas Survey Biaya Hidup (SBH), dengan menggunakan Indeks Harga Konsumen (IHK) sebagai indikator untuk menentukan tingkat inflasi [1]. Tingkat inflasi yang tinggi dan tidak stabil cenderung memberi dampak negatif kepada kondisi sosial ekonomi masyarakat yang pada akhirnya mengganggu stabilitas perekonomian, sosial, politik, pertahanan dan keamanan suatu negara. Dengan demikian, kestabilan inflasi sangat penting dan menjadi syarat utama bagi pertumbuhan ekonomi yang positif dan berkesinambungan, yang pada akhirnya memberikan manfaat bagi peningkatan kesejahteraan masyarakat. Untuk itu, pentingnya pengawasan dan pengendalian inflasi oleh berbagai pihak terutama oleh pemerintah.

Di Indonesia, pengendalian inflasi dilakukan oleh pemerintah dengan koordinasi beberapa pihak seperti Bank Indonesia, Kementerian Keuangan, Pemerintah Daerah (Provinsi, Kabupaten/Kota), lembaga keuangan, dan pihak perbankan baik itu BUMN ataupun swasta. Salah satu kebijakan untuk mengendalikan inflasi adalah penentuan BI Rate, kebijakan kestabilan kurs, dan lain-lain.

Berdasarkan penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa ada hubungan yang saling mempengaruhi antara kebijakan BI Rate, tingkat inflasi, dan nilai tukar USD terhadap IDR. Ada banyak metode dalam Ekonometrika yang dapat memodelkan hubungan ketiga faktor tersebut dengan kelebihan dan kekurangannya masing-masing. Karena data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data *time series* (data yang mengandung lag), maka model yang digunakan adalah model regresi *time series* dengan beberapa peubah, seperti model ARIMAX, model *autoregressive distributed lag* (ADL), model *vector autoregressive* (VAR), *vector error correction model* (VECM), dan lain-lain.

Penelitian ini difokuskan pada model VECM untuk menganalisis hubungan terkointegrasi antara BI Rate, inflasi, dan nilai tukar dolar tanpa memperhatikan stasioneritas data (atau data yang mengandung akar unit). Tujuan dari penelitian ini adalah untuk memodelkan hubungan antara BI rate, inflasi dan nilai tukar USD terhadap IDR; kemudian menganalisis model tersebut berdasarkan struktur model untuk melihat hubungan (pengaruh) masing-masing variabel dalam jangka panjang maupun jangka pendek; serta memberikan peramalan dan analisis struktural dari peramalan tersebut.

## TINJAUAN PUSTAKA

Pada umumnya model ekonometrika *time series* merupakan model struktural karena didasarkan atas teori ekonomi yang telah ada. Pada tahun 1980 Christopher A. Sims memperkenalkan model VAR sebagai alternatif dalam analisis ekonomi makro. Model VAR merupakan model non struktural karena bersifat ateori. Model VAR memiliki struktur model yang lebih sederhana dengan jumlah variabel yang minimalis dimana semua variabelnya adalah variabel endogen dengan variabel independennya adalah *lag*. Model VAR didesain untuk variabel stasioner yang tidak mengandung *trend* [3].

*Trend* stokastik dalam data mengindikasikan bahwa ada komponen *long-run* (jangka panjang) dan *short-run* (jangka pendek) dalam data *time series*. Penelitian tentang *trend* stokastik dalam variabel ekonomi terus berkembang, sehingga pada tahun 1981, Granger mengembangkan konsep kointegrasi. Pada tahun 1987, Engle bersama Granger mengembangkan konsep kointegrasi dan koreksi error (*error correction*). Kemudian, pada tahun 1990, Johansen dan Juselius mengembangkan konsep VECM. VECM menawarkan suatu prosedur kerja yang mudah untuk memisahkan komponen jangka panjang (*long-run*) dan komponen jangka pendek (*short-run*) dari proses pembentukan data [5], [6]. Dengan demikian, VECM berbeda dengan VAR dimana VECM dapat digunakan untuk memodelkan data *time series* yang terkointegrasi dan tidak stasioner. VECM sering disebut sebagai bentuk VAR terestriksi [4].

Berikut ini merupakan kajian analisis VECM secara teoritis:

### Uji Akar Unit

Seperti yang dibahas sebelumnya, pemodelan dengan menggunakan VECM didasarkan atas data *time series* yang tidak stasioner namun terkointegrasi. Untuk memeriksa stasioneritas data dapat digunakan uji akar unit, dengan statistik uji yang digunakan adalah Augmented Dickey-Fuller (ADF), sebagai berikut:

$$\Delta Y_t = \gamma + \delta t + \rho Y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \phi_j \Delta Y_{t-j} + e_t$$

Dengan  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$  dan  $\rho = a - 1$ .

Hipotesis

$$H_0 : \rho = 0 \text{ (terdapat akar unit).}$$

Pada tingkat signifikansi  $(1 - \alpha)100\%$ ,  $H_0$  ditolak jika statistik ADF lebih kecil dari nilai kritis pada saat  $\alpha$ , atau *p value* lebih kecil dari nilai signifikansi  $\alpha$ . Jika  $H_0$  ditolak maka data stasioner. [2] dan [7]

### Uji Kointegrasi Johansen

Kemudian, untuk uji kointegrasi digunakan uji kointegrasi Johansen sebagai berikut:

Diketahui model  $VAR(p)$  adalah

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + B x_t + \varepsilon_t$$

dengan  $y_t$  adalah sebuah vektor dengan  $k$  variabel non stasioner  $I(1)$ ,  $x_t$  adalah sebuah vektor dengan  $d$  variabel deterministik,  $\varepsilon_t$  adalah vektor error. Persamaan  $VAR(p)$  dapat ditulis juga sebagai

$$\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta y_{t-i} + B x_t + \varepsilon_t$$

dimana

$$\Pi = \sum_{i=1}^p A_i - I, \quad \Gamma_i = - \sum_{j=i+1}^p A_j.$$

Untuk pengujian hipotesis dapat digunakan statistik uji trace:

$$LR_{tr}(r|k) = -T \sum_{i=r+1}^k \log(1 - \lambda_i)$$

dan statistik uji nilai Eigen maksimum

$$LR_{max}(r|r+1) = -T \log(1 - \lambda_{r+1}) \\ = LR_{tr}(r|k) - LR_{tr}(r+1|k)$$

untuk  $r = 0, 1, \dots, k-1$ ,

dengan hipotesis yang digunakan adalah

$$H_0 : \text{terdapat } r \text{ persamaan kointegrasi.}$$

Pada tingkat signifikansi  $(1 - \alpha)100\%$ ,  $H_0$  diterima jika statistik uji trace dan nilai Eigen maksimum lebih kecil dari nilai kritis pada saat  $\alpha$ , atau  $p$  value lebih besar dari nilai signifikansi  $\alpha$ . [2] dan [7]

### Uji kecocokan model

Uji kecocokan model untuk melihat serial korelasi pada residual menggunakan statistik uji Portmanteau sebagai berikut:

$$Q_h = T \sum_{j=1}^h \text{tr}(\hat{C}_j' \hat{C}_0^{-1} \hat{C}_j \hat{C}_0^{-1}),$$

atau

$$Q_h^* = T^2 \sum_{j=1}^h \frac{1}{T-j} \text{tr}(\hat{C}_j' \hat{C}_0^{-1} \hat{C}_j \hat{C}_0^{-1})$$

dengan  $\hat{C}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=i+1}^T \hat{u}_t \hat{u}_t'$ . Statistik uji ini berdistribusi  $\chi^2_{(k^2(h-n^*))}$ , dengan  $n^*$  menyatakan jumlah koefisien selain konstanta dalam model  $VAR(p)$  yang diestimasi. Hipotesis

$$H_0 : \text{tidak ada serial korelasi.}$$

Pada tingkat signifikansi  $(1 - \alpha)100\%$ ,  $H_0$  diterima jika  $p$  value statistik  $Q$  untuk setiap lag  $h$  lebih besar dari nilai signifikansi  $\alpha$ . Dengan demikian, tidak ada serial korelasi. [5] dan [6]

### Kriteria Informasi

Pemilihan order lag  $p$  dapat menggunakan kriteria informasi berikut:

- Akaike Information Criterion (AIC)

$$AIC(p) = \log \det(\hat{\Sigma}_u(p)) + \frac{2_p k^2}{T}$$

- Schwarz Information Criterion (SC)

$$SC(p) = \log \det(\hat{\Sigma}_u(p)) + \frac{\log(T) p k^2}{T}$$

Dengan  $\hat{\Sigma}_u(p) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t \hat{u}_t'$ ,  $T$  adalah ukuran sampel dan  $k$  adalah jumlah variabel endogen. Nilai lag  $p$  dipilih sebagai nilai  $p^*$  yang meminimumkan kriteria informasi dalam interval  $1, \dots, p_{max}$  yang diamati. Lag yang optimum didasarkan atas nilai AIC dan SC yang paling kecil. [5] dan [7]

### Analisis Kausalitas

Pada pemodelan VECM, analisis kausalitas bertujuan untuk melihat hubungan jangka panjang (*long-run causality*) dan hubungan jangka pendek (*short-run causality*).

Analisis hubungan kausalitas jangka panjang antara variabel independen ke variabel dependen dalam pemodelan VECM dapat dilihat pada koefisien dari bentuk koreksi galat atau *error correction term* (ECT), yaitu berdasarkan tanda dan hasil uji signifikansi koefisien menggunakan statistik uji  $t$  pada metode *Ordinary Least Square* (OLS).

Sementara itu, untuk analisis kausalitas jangka pendek untuk setiap variabel dapat menggunakan uji kausalitas Granger. Uji kausalitas Granger didasarkan atas statistik uji Wald yang berdistribusi *chi square* atau uji  $F$  sebagai alternatifnya. Hipotesis yang digunakan adalah

$$H_0 : \text{Tidak ada hubungan kausalitas Granger}$$

[5] dan [6]

### Peramalan dan Analisis Struktural

Secara teoritis, analisis peramalan dan struktural dari VECM memiliki kemiripan dengan analisis peramalan dan analisis struktural dari model VAR. Pada pemodelan VAR analisis tersebut dapat menggunakan analisis *impulse response* dan dekomposisi variansi [5], [6]. Analisis *Impulse Response* bertujuan untuk melihat efek (pengaruh) dari setiap variabel (endogen) jika diberikan *shock* atau *impulse* (guncangan). Sementara itu, analisis dekomposisi variansi bertujuan untuk memprediksi kontribusi setiap variabel (persentase variansi setiap variabel) yang diakibatkan oleh perubahan variabel tertentu dalam sebuah sistem.

Seperti analisis peramalan pada umumnya, untuk menentukan keakuratan hasil ramalan dari sebuah model dapat menggunakan *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) :

$$MAPE = \frac{\sum_{t=1}^n \left| \frac{\hat{Y}_t - Y_t}{Y_t} \right|}{n} \times 100\%$$

dan *Mean Square Error* (MSE) :

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2$$

dimana  $n$  menyatakan jumlah data. Semakin kecil nilai MSE dan MAPE, maka semakin akurat hasil ramalan yang diperoleh. [4]

### METODE PENELITIAN

Pada bagian sebelumnya telah dijabarkan tentang latar belakang dan tujuan dari penelitian ini. Berdasarkan informasi tersebut maka secara ekonomi dapat dirumuskan beberapa hipotesis sebagai berikut:

- Tingkat inflasi dipengaruhi oleh tingkat suku bunga;
- Tingkat suku bunga dipengaruhi oleh tingkat inflasi;
- Tingkat inflasi dipengaruhi oleh kurs (nilai tukar mata uang asing);
- Tingkat suku bunga dipengaruhi oleh kurs;
- Kurs dipengaruhi oleh tingkat inflasi dan tingkat suku bunga.

Berdasarkan rumusan hipotesis di atas, maka dapat dibentuk tiga variabel sebagai berikut:

$X$  : Tingkat inflasi;

$Y$  : BI rate;

$Z$  : Nilai tukar dolar Amerika Serikat (USD) terhadap rupiah (IDR).

Dengan demikian, penelitian ini merupakan sebuah studi kasus untuk menganalisis hubungan ketiga variabel tersebut secara makro.

Berdasarkan variabel yang dibentuk, maka data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data bulanan pada periode Juli 2005 sampai dengan Desember 2013 dari tingkat inflasi dan BI rate. Sedangkan, data nilai tukar rupiah terhadap dolar yang digunakan merupakan data nilai tengah per akhir bulanan yang dimulai pada tanggal 30 juni 2005 sampai dengan 30 Nopember 2013. Ketiga data ini merupakan data sekunder yang bersumber dari Bank Indonesia yang dipublikasikan secara resmi.

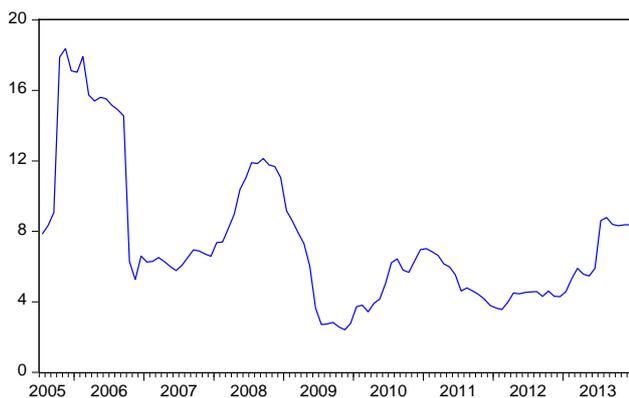
Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah analisis VECM untuk memodelkan ketiga variabel di atas. Prosedur dalam analisis VECM sebagai berikut:

1. Spesifikasi estimasi, dan pemeriksaan model
  - a. Uji akar unit (pemeriksaan stasioneritas)
  - b. Uji kointegrasi Johansen
  - c. Estimasi dan Pemeriksaan Model
2. Analisis kausalitas
3. Peramalan dan Analisis struktural

Hasil pengolahan data yang dilakukan pada penelitian ini menggunakan software Eviews 7.

### HASIL DAN PEMBAHASAN

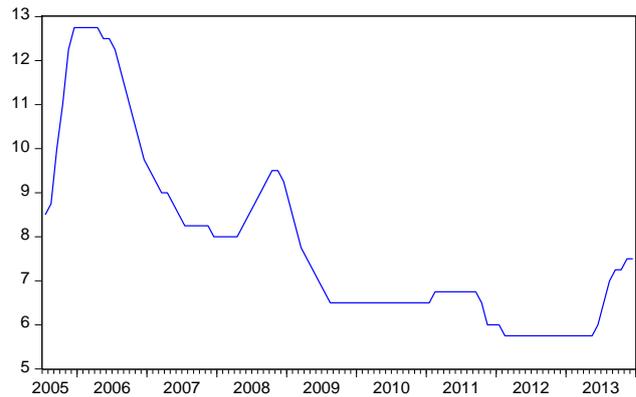
Data Bi Rate (BI), tingkat inflasi yang terjadi di negara Indonesia (INF), dan nilai tengah dari nilai tukar dolar Amerika Serikat (USD) terhadap Rupiah Indonesia (IDR) diberikan pada Gambar 1.



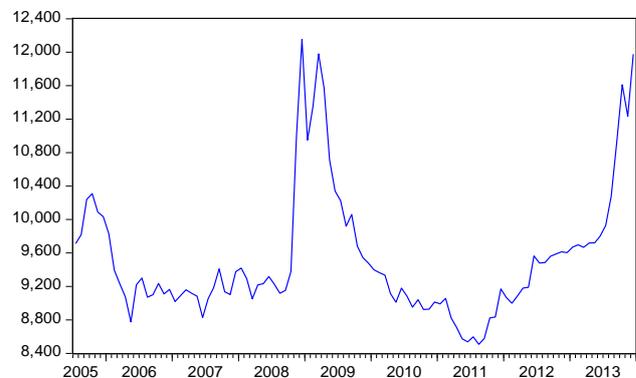
Gambar 1. Tingkat Inflasi di Indonesia

Pada Gambar 1, Gambar 2 dan Gambar 3, dapat dilihat bahwa pola tingkat inflasi, BI rate dan kurs USD memiliki pola yang hampir sama pada beberapa tahun tertentu dalam jangka waktu yang cukup lama. Secara tersirat, hal ini menggambarkan bahwa ada hubungan yang kointegrasi antara ketiga variabel tersebut. Untuk melihat lebih jelas tentang hubungan kointegrasi untuk masing-masing variabel akan digunakan uji kointegrasi

Johansen, namun sebelumnya akan diperiksa stasioneritas dari ketiga data tersebut.



Gambar 2. BI rate



Gambar 3. Kurs USD terhadap IDR

#### Spesifikasi, Estimasi dan Pemeriksaan Model

##### a. Uji Akar Unit (Pemeriksaan Stasioneritas)

Langkah awal dalam prosedur ini adalah melakukan uji akar unit terhadap ketiga data tersebut. Berdasarkan pengolahan data, diperoleh hasil seperti yang diperlihatkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Uji Akar Unit

Data	Nilai Kritis ( $\alpha$ )	Level		1st Difference	
		Stat. ADF	$p$ value	Stat. ADF	$p$ value
X		-2,1747	0,2168	-5,6676	0,000
	5%	-2,8906		-2,8943	
Y		-2,1323	0,2327	-3,5668	0,0082
	5%	-2,8906		-2,8906	
Z		-1,0268	0,7414	-4,3473	0,0007
	5%	-2,8903		-2,8912	

Sumber: Hasil Pengolahan Data

Berdasarkan Tabel 1 dapat dilihat bahwa data  $X$ ,  $Y$  dan  $Z$  merupakan data-data yang mengandung akar unit pada level atau tidak stasioner pada level. Hal ini dapat dilihat pada saat level,  $p$  value statistik ADF untuk masing-masing variabel lebih besar dari  $\alpha = 5\%$ , ini artinya menerima hipotesis  $H_0$  yaitu terdapat akar unit

pada data atau data tidak stasioner. Sementara itu, dari hasil diferensi pertama dapat dilihat bahwa *p value* statistik ADF dari masing-masing variabel lebih kecil dari  $\alpha = 5\%$ , ini artinya menolak hipotesis  $H_0$  yaitu data tidak mengandung akar unit atau sudah stasioner. Dengan demikian, variabel  $X$ ,  $Y$  dan  $Z$  merupakan variabel non stasioner orde pertama.

**b. Uji Kointegrasi Johansen**

Hasil uji kointegrasi untuk lag 2 (lag signifikan berdasarkan prosedur VAR) dari variabel  $X$ ,  $Y$  dan  $Z$  dengan menggunakan statistik trace dan statistik nilai Eigen maksimum dapat dilihat pada Tabel 2 dan Tabel 3.

Pada Tabel 2 dapat dilihat bahwa, hasil uji hipotesis dengan menggunakan statistik trace. untuk hipotesis

$$H_0 : \text{Tidak ada persamaan kointegrasi,}$$

*p value* adalah 0,0434 lebih kecil dari  $\alpha = 5\%$  (Nilai statistik trace 30,3287 lebih besar dari nilai 29,7979 tabelnya pada  $\alpha = 5\%$ ). Ini artinya hipotesis  $H_0$  ditolak. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa ada persamaan kointegrasi. Untuk itu, dilakukan pemeriksaan untuk hipotesis berikutnya.

Tabel 2. Uji kointegrasi (Trace)

Hipotesis: <i>r</i>	Nilai Eigen	Trace Statistic	Nilai kritis $\alpha = 5\%$	<i>p value</i>
Tidak ada	0,184386	30,32868	29,79707	0,0434
1	0,084917	10,15103	15,49471	0,2693
2	0,013700	1,365677	3,841466	0,2426

Sumber: Hasil Pengolahan Data

Berdasarkan Tabel 2, akan diperiksa hasil uji hipotesis berikut ini:

$$H_0 : \text{Ada 1 persamaan kointegrasi}$$

dan

$$H_0 : \text{Ada 2 persamaan kointegrasi.}$$

Pada Tabel 2 dapat dilihat bahwa *p value* untuk masing-masing hipotesis secara berurutan adalah 0,2693 dan 0,2426 lebih besar dari  $\alpha = 5\%$  (statistik trace lebih besar dari nilai kritisnya pada saat  $\alpha = 5\%$  untuk masing-masing hipotesis). Ini artinya bahwa menerima  $H_0$ . Dengan demikian, berdasarkan analisis tersebut dapat disimpulkan bahwa hasil uji kointegrasi dengan menggunakan statistik trace mengindikasikan bahwa minimal ada 1 persamaan kointegrasi yang dapat dibentuk.

Tabel 3. Uji kointegrasi (nilai Eigen maksimum)

Hipotesis: <i>r</i>	Nilai Eigen	Max-Eigen Statistic	Nilai kritis $\alpha = 5\%$	<i>p value</i>
[Tidak ada]	0,184386	20,17765	21,13162	0,0675
[1]	0,084917	8,785352	14,26460	0,3045
[2]	0,013700	1,365677	3,841466	0,2426

Sumber: Hasil Pengolahan Data

Pada Tabel 3 dapat dilihat bahwa, hasil uji hipotesis dengan menggunakan statistik nilai Eigen maksimum, yaitu *p value* statistik trace untuk masing-masing hipotesis

$$H_0 : \text{Tidak ada persamaan kointegrasi,}$$

$$H_0 : \text{Ada 1 persamaan kointegrasi}$$

dan

$$H_0 : \text{Ada 2 persamaan kointegrasi}$$

secara berutan adalah 0,0675; 0,3045; dan 0,2426 lebih besar dari  $\alpha = 5\%$  (statistik nilai Eigen maksimum lebih besar dari nilai kritis pada saat  $\alpha = 5\%$  untuk masing-masing hipotesis). Ini artinya bahwa masing-masing hipotesis tersebut diterima. Dengan demikian, kesimpulan yang diperoleh dari uji hipotesis berdasarkan nilai Eigen maksimum adalah tidak ada persamaan kointegrasi yang terjadi.

Dari hasil uji kointegrasi dengan dua metode di atas, dapat disimpulkan bahwa minimal ada satu bentuk persamaan kointegrasi artinya bahwa ada satu bentuk error, dengan bentuk persamaan error adalah

$$\varepsilon_t = X_t - 1,5798Y_t + 0,0000401Z_t$$

Berdasarkan hasil yang diperoleh maka dapat dilakukan estimasi bentuk persamaan VECM.

**c. Estimasi dan Pemeriksaan Model**

Prosedur penting dalam mengestimasi persamaan VECM adalah pemilihan lag optimum. Prosedur pemilihan lag optimum dalam VECM dapat menggunakan kriteria informasi, yaitu *AIC* dan *SC*.

Hasil pengolahan data tentang kedua kriteria informasi tersebut untuk lag 1 sampai dengan lag 8 dapat dilihat pada Tabel 4. Perlu diketahui bahwa penggunaan lag 1 sampai dengan lag 8 dikarenakan prinsip parsimony (kesederhanaan model) dalam pemodelan statistika, karena semakin banyak lag yang digunakan, maka koefisien parameter model semakin banyak.

Tabel 4. Kriteria informasi

Lag	<i>AIC</i>	<i>SC</i>
1	17,04493	17,51386
2	16,50059	<b>17,20835</b>
3	16,34287	17,29245
4	16,26006	17,45452
5	<b>16,22917</b>	17,67162
6	16,37575	18,06938
7	16,39363	18,34168
8	16,30582	18,51163

Sumber: Hasil Pengolahan Data

Pada Tabel 4 dapat dilihat bahwa lag 5 memiliki nilai *AIC* terkecil, sedangkan lag 2 memiliki nilai *SC* terkecil. Dengan demikian, lag 2 dan lag 5 akan digunakan untuk proses estimasi parameter VECM. Berdasarkan hasil analisis lag optimum tersebut, maka bentuk persamaan VECM yang diestimasi adalah *VECM*(2) dan *VECM*(5), masing-masing dengan jumlah persamaan kointegrasi adalah 1.

Kemudian dilakukan pemeriksaan model untuk memilih model terbaik antara  $VECM(2)$  dan  $VECM(5)$ . Pemeriksaan model yang dilakukan adalah uji asumsi residual dari kedua model tersebut, yaitu uji serial korelasi residual seperti yang diperlihatkan pada Tabel 5. Pada Tabel 5, dapat dilihat bahwa hasil uji Portmanteau untuk  $VECM(2)$  menyatakan bahwa model tersebut mengandung serial korelasi residual pada lag 3, dimana pada lag 3  $p$  value dari statistik  $Q$  kurang dari taraf signifikansi  $\alpha = 5\%$  (artinya menolak  $H_0$  : tidak ada serial korelasi). Sementara itu, hasil uji Portmanteau untuk  $VECM(5)$  menyatakan bahwa tidak mengandung serial korelasi residual pada setiap lag. Dengan demikian,  $VECM(5)$  lebih baik dibandingkan  $VECM(2)$  karena tidak terdapat serial korelasi residual. Ini artinya bahwa  $VECM(5)$  merupakan model terbaik.

Tabel 5. Uji Portmanteau

Lag	VECM(2)			VECM(5)		
	Stat. Q	p value	db	Stat. Q	p value	db
1	9,607332	NA*	NA*	0,464832	NA*	NA*
2	15,22395	NA*	NA*	2,126732	NA*	NA*
3	<b>29,02361</b>	<b>0,0160</b>	<b>15</b>	3,404707	NA*	NA*
4	33,80128	0,0883	24	7,532918	NA*	NA*
5	44,05873	0,0945	33	10,97131	NA*	NA*
6	49,15562	0,2083	42	14,15259	0,5140	15
7	55,85669	0,2974	51	25,64869	0,3712	24
8	64,40410	0,3252	60	30,64600	0,5848	33
9	70,76791	0,4184	69	35,98643	0,7313	42
10	83,23205	0,3217	78	45,31610	0,6979	51
11	93,24688	0,3040	87	47,14269	0,8864	60
12	100,5661	0,3548	96	53,96726	0,9080	69

Sumber: Hasil Pengolahan Data

Dengan demikian, bentuk persamaan  $VECM(5)$  adalah

$$\begin{aligned} \Delta X_t = & -0,314(X_{t-1} - 1,63Y_{t-1} + 0,0005Z_{t-1} + 0,59) \\ & + 0,264\Delta X_{t-1} - 0,099\Delta X_{t-2} + 0,052\Delta X_{t-3} \\ & + 0,015\Delta X_{t-4} - 0,067\Delta X_{t-5} + 2,49\Delta Y_{t-1} \\ & + 0,938\Delta Y_{t-2} + 0,764\Delta Y_{t-3} - 1,617\Delta Y_{t-4} \\ & + 1,197\Delta Y_{t-5} + 7,84 \times 10^{-5}\Delta Z_{t-1} \\ & + 0,00014\Delta Z_{t-2} + 0,00035\Delta Z_{t-3} \\ & + 9,85 \times 10^{-05}\Delta Z_{t-4} + 0,001\Delta Z_{t-5} \\ & + 0,0959 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta Y_t = & 0,011(X_{t-1} - 1,63Y_{t-1} + 0,0005Z_{t-1} + 0,59) \\ & + 0,027\Delta X_{t-1} + 0,0297\Delta X_{t-2} - 0,0155\Delta X_{t-3} \\ & + 0,0315\Delta X_{t-4} + 0,0041\Delta X_{t-5} + 0,659\Delta Y_{t-1} \\ & - 0,083\Delta Y_{t-2} + 0,023\Delta Y_{t-3} - 0,072\Delta Y_{t-4} \\ & - 0,047\Delta Y_{t-5} - 5,799 \times 10^{-5}\Delta Z_{t-1} \\ & - 5,797 \times 10^{-5}\Delta Z_{t-2} - 6,577 \times 10^{-5}\Delta Z_{t-3} \\ & - 4,17 \times 10^{-5}\Delta Z_{t-4} + 3,45 \times 10^{-5}\Delta Z_{t-5} \\ & - 0,019 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Delta Z_t = & -9,282(X_{t-1} - 1,63Y_{t-1} + 0,0005Z_{t-1} + 0,59) \\ & + 0,883\Delta X_{t-1} - 15,39\Delta X_{t-2} - 50,33\Delta X_{t-3} \\ & - 50,55\Delta X_{t-4} + 7,978\Delta X_{t-5} + 335,14\Delta Y_{t-1} \\ & + 248,9\Delta Y_{t-2} + 291,3\Delta Y_{t-3} - 230,9\Delta Y_{t-4} \\ & + 89,787\Delta Y_{t-5} + 0,173\Delta Z_{t-1} - 0,228\Delta Z_{t-2} \\ & + 0,329\Delta Z_{t-3} + 0,122\Delta Z_{t-4} + 0,081\Delta Z_{t-5} \\ & + 48,8496 \end{aligned} \quad (3)$$

**Analisis Kausalitas Granger**

Berdasarkan bentuk persamaan (1) model  $VECM(5)$  di atas, diketahui bahwa variabel independen persamaan tersebut adalah tingkat inflasi (diferensi pertama dari  $X$ ). Pada persamaan tersebut dapat dilihat bahwa koefisien persamaan kointegrasi adalah  $-0,314$ . Dengan kata lain, koefisien ECT bertanda negatif. Berdasarkan hasil pengolahan data, diperoleh bahwa  $p$  value untuk statistik  $t$  adalah  $0,0002$  kurang dari taraf signifikansi  $\alpha = 5\%$ , yang berarti bahwa koefisien tersebut merupakan koefisien yang signifikan. Dengan demikian, koefisien ECT pada persamaan (1) merupakan koefisien yang signifikan dan bertanda negatif. Ini berarti bahwa, terdapat hubungan kausalitas jangka panjang (*long-run causality*) dari BI rate dan nilai tukar USD terhadap tingkat inflasi.

Tabel 6. Uji Kausalitas Granger: Variabel Dependen  $\Delta X_t$

Excluded	Chi-sq	db	p value
$\Delta Y_t$	25,48137	5	0,0001
$\Delta Z_t$	9,415045	5	0,0936
All	31,38931	10	0,0005

Sumber: Hasil Pengolahan Data

Untuk melihat hubungan kausalitas jangka pendek (*short-run causality*) pada persamaan (1) dapat menggunakan Uji kausalitas Granger seperti yang diperlihatkan pada Tabel 6. Pada Tabel 6 dapat dilihat bahwa  $p$  value statistik uji Wald untuk variabel  $\Delta Y_t$  adalah  $0,0001$  lebih kecil dari taraf signifikan  $\alpha = 5\%$ . Ini berarti bahwa, menolak hipotesis  $H_0$  : tidak ada hubungan kausalitas antara variabel. Dengan demikian, terdapat hubungan kausalitas jangka pendek antara BI rate terhadap tingkat inflasi. Sementara itu, untuk variabel  $\Delta Z_t$  memiliki  $p$  value adalah  $0,0936$  lebih dari taraf signifikan  $\alpha = 5\%$ . Ini berarti bahwa menerima hipotesis  $H_0$  pada taraf signifikansi  $\alpha = 5\%$  atau tidak ada hubungan kausalitas jangka pendek antara nilai tukar USD terhadap tingkat inflasi. Namun, jika dilihat secara keseluruhan pada persamaan (1), maka terdapat hubungan kausalitas jangka pendek dari BI rate dan USD terhadap tingkat inflasi. Hal ini dikarenakan oleh  $p$  value =

0,0005 lebih kecil dari taraf signifikan  $\alpha = 5\%$ , yang artinya bahwa menolak hipotesis  $H_0$ .

Berikut, berdasarkan bentuk persamaan (2) dengan variabel independen adalah BI rate (diferensi pertama dari  $Y$ ), maka dapat dilihat bahwa koefisien persamaan kointegrasi adalah 0,011. Berdasarkan hasil pengolahan data, diperoleh bahwa  $p$  value untuk statistik  $t$  adalah 0,3118 lebih dari taraf signifikansi  $\alpha = 5\%$ , yang berarti bahwa koefisien tersebut tidak signifikan. Dengan demikian, koefisien ECT bertanda positif dan tidak signifikan. Ini berarti bahwa, tidak terdapat hubungan kausalitas jangka panjang (*long-run causality*) dari tingkat inflasi dan nilai tukar USD terhadap BI rate.

Berdasarkan hasil uji kausalitas Granger pada Tabel 7, maka analisis hubungan kausalitas jangka pendek (*short-run causality*) pada persamaan (2) sebagai berikut:  $p$  value statistik uji Wald untuk variabel  $\Delta X_t$  adalah 0,0065 lebih kecil dari taraf signifikan  $\alpha = 5\%$ . Ini berarti bahwa, menolak hipotesis  $H_0$  yang berarti terdapat hubungan kausalitas jangka pendek antara tingkat inflasi terhadap BI rate. Sementara itu,  $p$  value variabel  $\Delta Z_t$  memiliki adalah 0,2181 lebih dari taraf signifikan  $\alpha = 5\%$ , yang berarti bahwa menerima  $H_0$  atau tidak ada hubungan kausalitas jangka pendek antara nilai tukar USD terhadap BI rate. Namun, secara keseluruhan pada persamaan (2) terdapat hubungan kausalitas jangka pendek dari tingkat inflasi dan nilai tukar USD terhadap BI rate. Hal ini dikarenakan oleh  $p$  value = 0,004 lebih kecil dari taraf signifikan  $\alpha = 5\%$ , yang artinya bahwa menolak hipotesis  $H_0$ .

Tabel 7. Uji Kausalitas Granger: Variabel Dependen  $\Delta Y_t$

Excluded	Chi-sq	db	$p$ value
$\Delta X_t$	16,11923	5	0,0065
$\Delta Z_t$	7,034041	5	0,2181
All	25,81654	10	0,0040

Sumber: Hasil Pengolahan Data

Kemudian, bentuk persamaan (3) dengan variabel independen adalah BI rate (diferensi pertama dari  $Z$ ), dapat dilihat bahwa koefisien persamaan kointegrasi adalah -9,282. Berdasarkan hasil pengolahan data, diperoleh bahwa  $p$  value untuk statistik  $t$  adalah 0,7431 kurang dari taraf signifikansi  $\alpha = 5\%$ , yang berarti bahwa koefisien tersebut tidak signifikan. Dengan demikian, koefisien ECT bertanda negatif dan tidak signifikan. Ini berarti bahwa, tidak terdapat hubungan kausalitas jangka panjang (*long-run causality*) dari tingkat inflasi dan BI rate terhadap nilai tukar USD.

Kemudian, dengan menggunakan menggunakan Uji kausalitas Granger pada Tabel 8, maka dapat dianalisis hubungan kausalitas jangka pendek (*short-run causality*) pada persamaan (3) sebagai berikut:  $p$  value statistik uji Wald untuk variabel  $\Delta X_t$  adalah 0,518 lebih besar dari taraf signifikan  $\alpha = 5\%$ . Ini berarti bahwa, menerima hipotesis  $H_0$ , yaitu tidak terdapat hubungan kausalitas jangka pendek antara tingkat inflasi terhadap nilai tukar USD. Sementara itu, untuk variabel  $\Delta Y_t$  memiliki  $p$  value adalah 0,278 lebih besar dari taraf signifikan  $\alpha = 5\%$ , artinya bahwa menerima hipotesis  $H_0$ , dengan kata lain tidak ada hubungan kausalitas jangka pendek antara variabel BI rate terhadap nilai tukar USD. Secara keseluruhan pada persamaan (3), dapat dilihat bahwa tidak terdapat hubungan kausalitas jangka pendek dari tingkat inflasi dan BI rate terhadap nilai tukar USD. Hal ini dikarenakan oleh  $p$  value = 0,6277 lebih besar dari taraf signifikan  $\alpha = 5\%$ , yang artinya bahwa menerima hipotesis  $H_0$ .

Tabel 8. Uji Kausalitas Granger: Variabel Dependen  $\Delta Z_t$

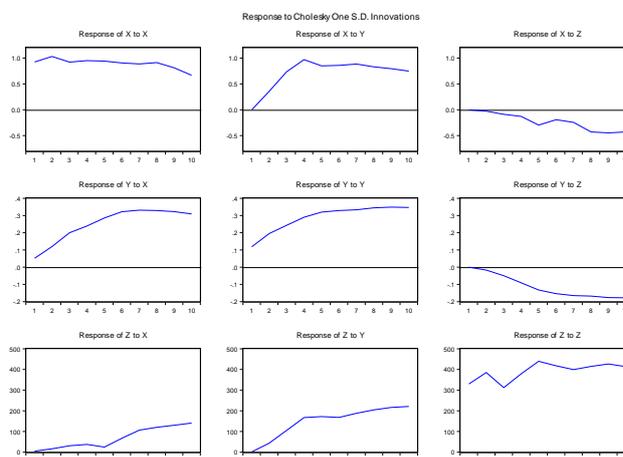
Excluded	Chi-sq	db	$p$ value
$\Delta X_t$	4,221556	5	0,5180
$\Delta Y_t$	6,300783	5	0,2780
All	8,011534	10	0,6277

Sumber: Hasil Pengolahan Data

**Peramalan dan Analisis Struktural**

Bagian ini akan membahas tentang peramalan dan analisis struktur peramalan dari model  $VECM(5)$ . Sebelum, membahas tentang hasil peramalan (lihat Tabel 12) akan dibahas terlebih dahulu tentang analisis struktural yang mencakup analisis *Impulse-Response* dan dekomposisi variansi.

**a. Analisis Impulse – Response**



Gambar 4. Analisis Impulse - Response

Analisis *impulse-response* dapat menggunakan fungsi *impulse-response* (IRF). Hasil plot dari IRF dapat dilihat pada Gambar 4. Pada Gambar 4 dapat dilihat bahwa ada 9 plot IRF untuk 10 kuartal ke depan, yang mana menjelaskan secara visual tanggapan (*response*) suatu variabel yang timbul karena adanya guncangan (*shock/impulse*) sebesar 1 standar deviasi baik dari dirinya sendiri ataupun variabel lain.

Berdasarkan Gambar 4, analisis IRF dari tingkat inflasi untuk 10 kuartal ke depan sebagai berikut:

- Respons tingkat inflasi terhadap guncangan dari dirinya sendiri pada kuartal 1 cukup besar, yaitu 0,92. Meskipun pada kuartal 2 sempat mengalami kenaikan menjadi 1,03, namun hingga kuartal 10 respons terhadap guncangan (dari dirinya sendiri) mengalami penurunan. Ini berarti bahwa setelah kuartal 2 reaksi tingkat inflasi terhadap guncangan dari dirinya sendiri cenderung menjadi lemah.
- Respons tingkat inflasi terhadap guncangan dari BI rate pada kuartal 1 sampai dengan 4 terus meningkat, namun pada kuartal 5 sampai dengan kuartal 10 mengalami penurunan. Ini berarti bahwa pada kuartal 5 sampai dengan 10 reaksi yang diberikan oleh tingkat inflasi terhadap guncangan BI rate cenderung menjadi lemah.
- Respons tingkat inflasi terhadap guncangan dari nilai tukar USD cenderung bernilai negatif. Ini artinya bahwa jika terjadi guncangan sebesar 1 standar deviasi dari nilai tukar USD maka tingkat inflasi akan bereaksi negatif terhadap nilai tukar USD.

Kemudian, dari Gambar 4, analisis IRF dari BI rate untuk 10 kuartal ke depan sebagai berikut:

- Respons BI rate terhadap guncangan dari tingkat inflasi pada kuartal 1 sampai dengan kuartal 7 mengalami peningkatan. Kemudian, pada kuartal 8 sampai dengan 10 mengalami penurunan, artinya bahwa setelah kuartal 7 reaksi tingkat inflasi terhadap guncangan dari tingkat inflasi cenderung menjadi lemah.
- Respons BI rate terhadap guncangan dari dalam dirinya sendiri cenderung menguat pada kuartal 1 sampai dengan kuartal 9 karena mengalami peningkatan. Kemudian, pada kuartal 10 mengalami penurunan.
- Sama seperti tingkat inflasi, Respons BI rate terhadap guncangan dari nilai tukar USD cenderung bernilai negatif. Ini artinya bahwa jika terjadi guncangan sebesar 1 standar deviasi dari nilai tukar USD maka BI rate akan bereaksi negatif terhadap nilai tukar USD.

Berdasarkan Gambar 4, analisis IRF dari BI rate untuk 10 kuartal ke depan sebagai berikut:

- Respons nilai tukar USD terhadap guncangan dari tingkat inflasi pada kuartal 1 sampai dengan kuartal 10 mengalami peningkatan yang sangat signifikan. Ini berarti bahwa guncangan sebesar 1 standar deviasi dari tingkat inflasi mengakibatkan kenaikan yang sangat signifikan terhadap nilai tukar USD.
- Respons nilai tukar USD terhadap guncangan dari BI rate pada kuartal 1 sampai dengan kuartal 10 mengalami peningkatan yang sangat signifikan. Ini berarti bahwa guncangan sebesar 1 standar deviasi

dari BI rate mengakibatkan kenaikan yang sangat signifikan terhadap nilai tukar USD.

- Respons nilai tukar USD terhadap guncangan dari dalam dirinya sendiri pada kuartal 1 sampai dengan kuartal 10 mengalami fluktuasi untuk setiap kuartal secara berurutan.

## b. Dekomposisi Variansi

Analisis dekomposisi variansi sering disebut sebagai analisis *forecast error decomposition variance* (FEDV). Hasil analisis FEDV untuk 10 kuartal dari masing-masing variabel dapat dilihat pada Tabel 9, Tabel 10, dan Tabel 11.

Tabel 9. Dekomposisi Variansi: Variabel X

Periode	S.E.	X	Y	Z
1	0,923738	100,0000	0,000000	0,000000
2	1,430307	93,75786	6,206312	0,035826
3	1,856583	80,38549	19,36614	0,248372
4	2,303307	69,24007	30,29115	0,468773
5	2,646314	65,13373	33,25540	1,610868
6	2,932219	62,58508	35,66979	1,745128
7	3,198492	60,29931	37,65002	2,050675
8	3,455090	58,65580	38,04786	3,296343
9	3,664425	57,06196	38,52114	4,416896
10	3,823323	55,46613	39,21758	5,316292

Sumber: Hasil Pengolahan Data

Tabel 9 merupakan rangkuman hasil analisis FEDV untuk tingkat inflasi dari guncangan yang diberikan oleh masing-masing variabel termasuk dirinya sendiri. Analisis FEDV pada Tabel 9 menyatakan bahwa dalam jangka pendek, yaitu kuartal 3: guncangan terhadap dirinya sendiri mengakibatkan 80,39% fluktuasi dalam tingkat inflasi, dan guncangan terhadap BI rate mengakibatkan 19,37% fluktuasi dalam tingkat inflasi, serta guncangan terhadap nilai tukar USD mengakibatkan 0,25% fluktuasi dalam tingkat inflasi. Di lain pihak dalam jangka panjang, yaitu pada kuartal 10: guncangan terhadap dirinya sendiri mengakibatkan semakin lemah fluktuasi dalam tingkat inflasi, sedangkan guncangan terhadap BI rate dan nilai tukar USD mengakibatkan fluktuasi semakin meningkat dalam tingkat inflasi. Secara umum, fluktuasi yang diakibatkan oleh guncangan nilai tukar USD dalam tingkat inflasi sangat kecil.

Kemudian, analisis FEDV untuk BI rate (lihat Tabel 10) menyatakan bahwa dalam jangka pendek, yaitu kuartal 3: guncangan terhadap dirinya sendiri mengakibatkan 65,05% fluktuasi dalam BI rate, dan guncangan terhadap tingkat inflasi mengakibatkan 33,34% fluktuasi dalam BI rate, serta guncangan terhadap nilai tukar USD mengakibatkan 1,6% fluktuasi dalam BI rate. Di lain pihak dalam jangka panjang, yaitu pada kuartal 10: guncangan terhadap dirinya sendiri mengakibatkan semakin lemah fluktuasi dalam BI rate, sedangkan guncangan terhadap tingkat inflasi dan nilai tukar USD mengakibatkan fluktuasi semakin meningkat dalam BI rate. Secara umum, fluktuasi yang diakibatkan

oleh guncangan nilai tukar USD dalam BI rate sangat kecil.

Tabel 10. Dekomposisi Variansi: Variabel Y

Periode	S.E.	X	Y	Z
1	0,129489	15,89009	84,10991	0,000000
2	0,263355	24,55518	75,01779	0,427027
3	0,413055	33,34726	65,05035	1,602390
4	0,565776	35,60401	60,97999	3,415995
5	0,721861	37,49763	57,03236	5,470008
6	0,869624	39,49582	53,60463	6,899542
7	1,001796	40,67585	51,42611	7,898037
8	1,121838	41,01592	50,44462	8,539466
9	1,230898	40,92709	49,92568	9,147236
10	1,327414	40,60364	49,73674	9,659619

Sumber: Hasil Pengolahan Data

Kemudian, berdasarkan Tabel 11, analisis FEDV untuk nilai tukar USD menyatakan bahwa dalam jangka pendek, yaitu kuartal 3: guncangan terhadap dirinya sendiri mengakibatkan 96,15% fluktuasi dalam nilai tukar USD, dan guncangan terhadap tingkat inflasi mengakibatkan 0,34% fluktuasi dalam nilai tukar USD, serta guncangan terhadap BI rate mengakibatkan 3,51% fluktuasi dalam BI rate. Di lain pihak dalam jangka panjang, yaitu pada kuartal 10: guncangan terhadap dirinya sendiri mengakibatkan semakin lemah fluktuasi dalam nilai tukar USD, sedangkan guncangan terhadap tingkat inflasi dan BI rate mengakibatkan fluktuasi semakin meningkat dalam nilai tukar USD. Secara umum, fluktuasi yang diakibatkan oleh guncangan tingkat inflasi dalam nilai tukar USD sangat kecil.

Tabel 11. Dekomposisi Variansi: Variabel Z

Periode	S.E.	X	Y	Z
1	329,5605	0,023750	0,002306	99,97394
2	508,9282	0,111969	0,729639	99,15839
3	606,8796	0,336047	3,512566	96,15139
4	735,7820	0,484846	7,577222	91,93793
5	874,3194	0,421859	9,232363	90,34578
6	985,7046	0,797017	10,16773	89,03525
7	1085,121	1,617891	11,38355	86,99855
8	1185,630	2,378605	12,51501	85,10639
9	1284,964	3,048226	13,48344	83,46833
10	1375,145	3,706177	14,36396	81,92986

Sumber: Hasil Pengolahan Data

### c. Hasil Ramalan

Hasil ramalan dengan menggunakan *VECM*(5) untuk 10 periode (bulan) ke depan dapat dilihat pada Tabel 12. Hasil yang diperoleh pada Tabel 12 merupakan hasil ramalan dari tingkat inflasi dan BI Rate pada periode Januari 2014 sampai dengan Oktober 2014, sedangkan hasil ramalan dari nilai tukar USD adalah ramalan untuk periode Desember 2013 sampai dengan September 2014 (nilai tukar USD per akhir bulan). Selain itu, pada Tabel 12 terdapat data aktual untuk 10 bulan dari tingkat inflasi,

BI rate dan nilai tukar USD. Periode untuk masing-masing variabel pada data aktual sama dengan periode data hasil ramalan, yaitu tingkat inflasi dan BI rate pada periode yang sama (Januari 2014 sampai dengan Oktober 2014), sedangkan nilai tukar USD terhadap IDR merupakan data per akhir bulan yang dimulai dari Desember 2013 sampai dengan September 2014.

Tabel 12. Hasil Ramalan dan Data Aktual

Periode	Inflasi (X)		BI Rate (Y)		USD (Z)	
	Act.	Fore.	Act.	Fore.	Act.	Fore.
1	8.22	9.12	7.50	7.52	12,189.00	11,996.40
2	7.75	9.29	7.50	7.48	12,226.00	12,169.81
3	7.32	8.46	7.50	7.47	11,634.00	12,066.77
4	7.25	7.27	7.50	7.38	11,404.00	12,147.79
5	7.32	6.69	7.50	7.26	11,532.00	12,313.61
6	6.70	6.40	7.50	7.17	11,611.00	12,383.05
7	4.53	5.77	7.50	7.07	11,969.00	12,442.38
8	3.99	5.11	7.50	6.93	11,591.00	12,546.30
9	4.53	4.65	7.50	6.78	11,717.00	12,609.07
10	4.83	4.18	7.75	6.64	12,212.00	12,629.03

Act. = Actual (Data Aktual); Fore = Forecast (Hasil Ramalan)

Sumber: Hasil Pengolahan Data

Berdasarkan Tabel 12, maka dapat diperoleh nilai *MSE* dan *MAPE* dari masing-masing variabel seperti yang diperlihatkan pada Tabel 13. Pada Tabel 13 dapat dilihat bahwa *MSE* dan *MAPE* terkecil adalah variabel Y atau BI rate. Ini artinya bahwa peramalan dengan menggunakan model *VECM*(5) lebih akurat jika diterapkan pada BI Rate.

Tabel 13. Keakuratan hasil Ramalan

	Inflasi (X)	BI Rate (Y)	USD (Z)
<i>MSE</i>	0,82	0,24	409,413,05
<i>MAPE</i>	13,12%	4,73%	4,89%

Sumber: Hasil Pengolahan Data

## KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa:

- Berdasarkan spesifikasi model (analisis lag optimum) dan pemeriksaan model (uji serial korelasi residual), maka diperoleh model terbaik untuk data tingkat inflasi, BI rate dan nilai tukar USD terhadap IDR adalah *VECM*(5).
- Berdasarkan *VECM*(5), diperoleh hasil analisis kausalitas sebagai berikut:
  - Terdapat hubungan kausalitas jangka pendek maupun jangka panjang antara tingkat inflasi sebagai variabel dependen dengan BI rate dan nilai tukar USD.
  - Tidak terdapat hubungan kausalitas jangka pendek antara BI rate sebagai variabel dependen dengan

tingkat inflasi dan nilai tukar USD, namun sebaliknya terdapat hubungan jangka panjang antara BI rate sebagai variabel dependen dengan tingkat inflasi dan nilai tukar USD

- c. Tidak terdapat hubungan kausalitas jangka pendek maupun jangka panjang antara nilai tukar USD sebagai variabel dependen dengan tingkat inflasi dan BI rate.
3. Berdasarkan analisis struktural dari *VECM(5)*, dapat disimpulkan bahwa:
    - a. Respon dari masing-masing variabel terhadap guncangan yang berasal dari dirinya sendiri cukup signifikan, karena terjadi fluktuasi.
    - b. Respon dari tingkat inflasi dan BI rate terhadap guncangan dari nilai tukar USD tidak signifikan. Sebaliknya respon nilai tukar USD terhadap guncangan dari tingkat inflasi sangat signifikan.
    - c. Secara umum, untuk analisis ke depan baik itu dalam jangka panjang maupun jangka pendek, tingkat inflasi dan BI rate saling mempengaruhi secara signifikan, dan kedua variabel tersebut secara signifikan mempengaruhi nilai tukar USD terhadap IDR. Sementara itu, nilai tukar USD terhadap IDR memiliki pengaruh yang kurang signifikan terhadap tingkat inflasi dan BI rate.
  4. Hasil ramalan yang diperoleh dengan menggunakan *VECM(5)* cukup akurat, terutama untuk meramalkan BI rate. Hal ini dapat dilihat dari nilai *MSE* dan *MAPE* dari BI rate.

Perlu diketahui bahwa BI rate merupakan kebijakan yang dikeluarkan oleh Pemerintah yang disesuaikan dengan keadaan ekonomi yang terjadi di Indonesia. Berbeda dengan BI rate dan nilai tukar USD terhadap IDR. Kedua hal ini merupakan kejadian-kejadian ekonomi yang diakibatkan oleh berbagai faktor baik itu kebijakan yang dikeluarkan oleh Pemerintah atau bukan. Untuk itu, disarankan bahwa perlu adanya kajian-kajian secara sistematis untuk menjaga kestabilan tingkat inflasi dan nilai tukar USD terhadap IDR.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bank Indonesia, 2014, [www.bi.go.id](http://www.bi.go.id).
- [2] Eviews, 2009, *EViews 7 User's Guide II*, Quantitative Micro Software, Irvine CA.
- [3] Gujarati, D., 2004, *Basic Econometrics*, 4th Edition, Mc. Graw Hill, New York.
- [4] Juanda, B & Junaidi, 2012, *Ekonometrika Deret Waktu*, IPB Press, Bogor.
- [5] Lutkepohl, H., 2006, *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer-Verlag, Berlin.
- [6] Lutkepohl, H., 2011, *Vector Autoregressive Models*. EUI Working Paper ECO 2011/30, Department of Economics, European University Institute, Florence.
- [7] Rosadi, D., 2012, *Ekonometrika dan Analisis Runtun Waktu Terapan dengan Eviews*, Penerbit Andi Offset, Yogyakarta.

## SISTEM ORTONORMAL DALAM RUANG HILBERT *Orthonormal Systems in Hilbert Space*

**ZETH ARTHUR LELEURY**

*Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura*  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon  
E-mail: zetharthur82@gmail.com

### ABSTRACT

Hilbert space is one of the important inventions in mathematics. Historically, the theory of Hilbert space originated from David Hilbert's work on quadratic form in infinitely many variables with their applications to integral equations. This paper contains some definitions such as vector space, normed space and inner product space (also called pre-Hilbert space), and which is important to construct the Hilbert space. The fundamental ideas and results are discussed with special attention given to finite dimensional pre-Hilbert space and some basic propositions of orthonormal systems in Hilbert space. This research found that each finite dimensional pre-Hilbert space is a Hilbert space. We have provided that a finite orthonormal systems in a Hilbert space  $X$  is complete if and only if this orthonormal systems is a basis of  $X$ .

**Keywords:** *Hilbert space, Inner product space, Orthonormal systems, Pre-Hilbert space*

### PENDAHULUAN

Ruang Hilbert diperkenalkan oleh David Hilbert (1862-1943), seorang ahli matematika yang sangat terkenal pada generasinya. Penelitian yang dilakukannya menciptakan dasar dari pekerjaannya mengenai "ruang dimensi tak terbatas", yang kemudian disebut dengan ruang Hilbert, suatu konsep yang sangat diperlukan dalam matematika analisis.

Ruang Hilbert merupakan ruang vektor atas suatu lapangan, dimana pada ruang vektor tersebut juga terdapat suatu *inner product* dan *norm*, sedemikian sehingga setiap barisan Cauchy konvergen ke suatu elemen di dalamnya. Hal ini disebut dengan penyempurnaan sifat dari ruang vektor. Selanjutnya dalam tesisnya yang berjudul *Learning in Hilbert Spaces*, Nimit Kumar juga mencoba menyusun suatu konsep tentang konvergensi barisan dalam ruang ber-*norm* yang mempunyai konsekuensi alami terhadap barisan Cauchy dan gagasan kelengkapannya (Kumar, 2004).

Dalam kaitan dengan Ruang Hilbert  $L_2(-\pi, \pi)$ , pada tahun 1907, Fischer dan Riesz membuktikan suatu jawaban natural untuk masalah konvergensi deret Fourier klasik (Zeidler, 1995). Dalam penelitian ini akan

ditunjukkan bahwa hal tersebut merupakan suatu kasus khusus dari suatu hasil abstrak pada sistem ortonormal dalam ruang Hilbert. Selain itu juga dibahas beberapa sifat atau teorema tentang ruang pre Hilbert dan ruang Hilbert serta pembuktiannya. Diharapkan melalui penelitian ini, masalah-masalah dalam ruang pre Hilbert dengan dimensi terbatas dan sistem ortonormal dalam ruang Hilbert yang ditemui serta bentuk pengembangannya akan lebih mudah dipahami.

### METODOLOGI PENELITIAN

Tipe penelitian ini adalah studi pustaka yaitu mempelajari beberapa *textbook* dan jurnal yang berhubungan dengan penulisan, Kemudian mencoba membahas inti permasalahan tersebut dengan menuangkan secara benar. Penelitian ini dilakukan dengan cara mengumpulkan, mempelajari dan menganalisis *textbook* dan jurnal yang berkaitan dengan permasalahan yang diteliti. Hasil-hasil yang diperoleh dalam penelitian ini berupa pembuktian teorema dan akibat dengan menggunakan bantuan beberapa definisi dengan tetap memperhatikan keterkaitan yang ada.

## KAJIAN PUSTAKA

Pada bagian ini dikaji definisi dan beberapa teorema dari ruang vektor, ruang ber-*norm*, ruang *inner product* dan ruang pre-Hilbert sebagai konsep dasar dari pembahasan sistem ortonormal dalam Ruang Hilbert.

### Ruang Vektor

Konsep dasar ruang vektor yang digunakan sebagai landasan pada pembicaraan selanjutnya adalah rentang (*span*), basis, dan dimensi.

#### Definisi 1. (ruang vektor)

Sistem  $X$  merupakan ruang vektor atas lapangan  $F$ , terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan skalar jika memenuhi aksioma-aksioma di bawah ini :

I. Terhadap operasi penjumlahan.

1. Tertutup ( $\forall v_1, v_2 \in X$ )  $v_1 + v_2 \in X$
2. Asosiatif ( $\forall v_1, v_2, v_3 \in X$ )  $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
3. Terdapat elemen netral ( $\exists \mathbf{0} \in X$ ) ( $\forall v \in X$ )  $\mathbf{0} + v = v + \mathbf{0} = v$
4. Setiap elemen mempunyai invers ( $\forall v \in X$ ) ( $\exists -v \in X$ )  
 $v + (-v) = -v + v = \mathbf{0}$

5. Komutatif ( $\forall v_1, v_2 \in X$ )  $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

II. Tertutup terhadap pergandaan skalar.

( $\forall v \in X$ ),  $\alpha \in F$  maka  $\alpha v \in X$

$\bullet : F \times X \rightarrow X$

$$(\alpha, v) \rightarrow \bullet(\alpha, v) \stackrel{nt}{=} \alpha \bullet v \stackrel{df}{=} \alpha v \in X$$

III. Untuk setiap  $v_1, v_2 \in X$ ;  $\alpha, \beta \in F$

1.  $(\alpha + \beta)v_1 = \alpha v_1 + \beta v_1$
2.  $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$
3.  $(\alpha\beta)v_1 = \alpha(\beta v_1)$
4.  $1_F \cdot v_1 = v_1$

selanjutnya ruang vektor  $X$  atas lapangan  $F$  dinotasikan dengan  $X(F)$ . (Steven, 2001)

#### Definisi 2. (rentang/span)

Misalkan  $v_1, v_2, \dots, v_n$  adalah vektor-vektor dalam suatu ruang vektor  $X$ . Jumlah vektor-vektor berbentuk  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ , dimana  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  adalah skalar-skalar disebut suatu kombinasi linear dari  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Himpunan semua kombinasi linear dari  $v_1, v_2, \dots, v_n$  disebut rentang dari  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Rentang dari  $v_1, v_2, \dots, v_n$  akan dinyatakan dengan Rentang  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ . (Anton, 1987)

#### Definisi 3. (basis)

Jika  $X$  adalah sebarang ruang vektor dan  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  adalah suatu himpunan vektor-vektor dalam  $X$ , maka  $S$  disebut suatu basis untuk  $X$  jika  $S$  bebas linear dan merentang  $X$ . (Anton, 1987)

#### Definisi 4. (dimensi)

Suatu ruang vektor  $X$  disebut berdimensi terbatas jika  $X$  berisi suatu himpunan vektor terbatas  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  yang membentuk suatu basis. Jika tidak ada himpunan seperti

itu, maka  $X$  disebut berdimensi tak terbatas dan ditulis  $\dim X = \infty$ . Jika  $X$  memiliki basis yang terdiri dari  $n$  vektor, maka dikatakan bahwa  $X$  memiliki dimensi  $n$ . Ruang bagian  $\{\mathbf{0}\}$  dari  $X$  dikatakan memiliki dimensi 0. (Anton, 1987)

### Ruang Ber-Norm

Ruang ber-*norm* adalah suatu ruang vektor dengan *norm* yang didefinisikan di dalamnya.

#### Definisi 5. (norm)

Diberikan ruang vektor  $X$ . Suatu fungsi riil  $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ , disebut *norm* jika memenuhi :

1.  $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$
2.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$
3.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$

(Kreyszig, 1978)

#### Teorema 1.

Misalkan  $\{u_n\}$  suatu barisan dalam ruang ber-*norm* berdimensi terbatas dengan  $\dim X > 0$ .

$$u_n \rightarrow u \text{ dalam } X, n \rightarrow \infty$$

jika dan hanya jika komponen-komponennya saling berhubungan (*corresponding components*) satu sama lain dengan respek bahwa sebarang basis konvergen. (Zeidler, 1995)

#### Definisi 6.

Suatu barisan vektor  $\{x_n\}$  dalam ruang be-*norm* disebut barisan Cauchy jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat bilangan  $M$  sedemikian sehingga  $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$  untuk setiap  $m, n > M$ . Dengan kata lain

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| = 0$$

(Zeidler, 1995)

#### Teorema 2.

Misalkan  $\{u_n\}$  suatu barisan Cauchy dalam ruang ber-*norm*  $X$  atas  $F$  yang memiliki barisan bagian  $\{u_{n'}\}$  yang konvergen, yakni

$$u_{n'} \rightarrow u \text{ dalam } X, \text{ untuk } n \rightarrow \infty$$

Maka, keseluruhan barisan konvergen ke  $u$ . Dengan kata lain  $u_n \rightarrow u$  dalam  $X$ , untuk  $n \rightarrow \infty$

(Zeidler, 1995)

### Ruang Inner product

#### Definisi 7. (ruang inner product)

Misalkan  $X$  ruang vektor atas lapangan  $F$ . Suatu fungsi  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow F$  disebut *inner product* jika memenuhi aksioma-aksioma berikut :

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$
  2.  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  3.  $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$
  4.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
  5.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- untuk setiap  $x, y, z \in X$  dan  $\alpha \in F$

Suatu ruang vektor  $X$  bersama-sama dengan *inner product* disebut ruang *inner product*. Suatu ruang *inner product* adalah lengkap jika setiap barisan Cauchy dalam  $X$  konvergen ke suatu titik dalam  $X$ . (Kreyszig, 1978)

### Ruang Pre Hilbert

#### Definisi 8. (ruang pre Hilbert)

Misalkan  $X$  ruang vektor atas lapangan  $F$ , dimana  $F = R$  atau  $F = C$ . Suatu *inner product* pada  $X$  memberikan setiap pasangan  $\langle u, v \rangle$  dengan  $u, v \in X$  dan  $\langle u, v \rangle \in F$  Sedemikian sehingga menunjukkan bahwa untuk setiap  $u, v, w \in X$  dan  $\alpha, \beta \in F$  berlaku :

- i.  $\langle u, u \rangle \geq 0$  dan  $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ ;
- ii.  $\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle$ ;
- iii.  $\overline{\langle u, v \rangle} = \langle v, u \rangle$  (bar menunjukkan konjugat bilangan kompleks).

Suatu ruang pre Hilbert atas  $F$  adalah ruang vektor  $X$  atas  $F$  bersama dengan suatu *inner product*.

Dari (ii) dan (iii) diperoleh bahwa :

$$\langle \alpha v + \beta w, u \rangle = \overline{\alpha} \langle v, u \rangle + \overline{\beta} \langle w, u \rangle$$

untuk setiap  $u, v, w \in X$  dan  $\alpha, \beta \in F$  (Zeidler, 1995)

#### Teorema 3. (Ketaksamaan Cauchy-Schwarz)

Misalkan  $X$  adalah ruang pre Hilbert, maka berlaku :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \quad \text{untuk setiap } u, v \in X$$

atau dapat ditulis dalam bentuk norm:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad \text{untuk setiap } u, v \in X$$

(Zeidler, 1995)

#### Teorema 4.

Misalkan  $X$  adalah ruang pre Hilbert, maka :

- i. *Inner product* adalah kontinu, sehingga

$$u_n \rightarrow u \quad \text{dan} \quad v_n \rightarrow v, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\text{Mengandung arti } \langle u_n, v_n \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle, \quad n \rightarrow \infty$$

- ii. Misalkan  $M$  adalah dense subset dari  $X$ . Jika

$$\langle u, v \rangle = 0 \quad \text{untuk } u \in X \quad \text{dan setiap } v \in M, \\ \text{maka } u = 0$$

#### Bukti

- (i) Jika  $\{v_n\}$  terbatas, maka dari ketaksamaan Schwarz (4.3) diperoleh bahwa:

$$\begin{aligned} \|\langle u_n, v_n \rangle - \langle u, v \rangle\| &= \|\langle u_n - u, v_n \rangle + \langle u, v_n - v \rangle\| \\ &\leq \|\langle u_n - u, v_n \rangle\| + \|\langle u, v_n - v \rangle\| \\ &\leq \|\langle u_n - u \rangle\| \|v_n\| + \|u\| \|\langle v_n - v \rangle\| \rightarrow 0, \\ & \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

- (ii) Jika  $M$  adalah *dense* dalam  $X$ , terdapat suatu barisan  $\{v_n\}$  dalam  $M$  sedemikian sehingga  $v_n \rightarrow u$  dalam  $X$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Misalkan  $n \rightarrow \infty$ , berarti  $\langle u, v_n \rangle = 0$  untuk setiap  $n$ . Maka  $\langle u, u \rangle = 0$ . Dengan demikian diperoleh bahwa  $u = 0$ . ■

## PEMBAHASAN

Sebelum membahas mengenai sistem ortonormal dalam ruang Hilbert, terlebih dahulu dibahas tentang definisi dan beberapa teorema dasar dari ruang Hilbert yang nantinya akan digunakan untuk pembuktian sifat-sifat pada sistem ortonormal dalam Ruang Hilbert. Selain itu juga disajikan contoh ruang Hilbert dalam kaitannya dengan ruang pre-Hilbert dalam dimensi terbatas.

### Ruang Hilbert

#### Definisi 9. (Ruang Hilbert)

Suatu ruang vektor  $X$  atas  $F$  adalah ruang Hilbert jika dan hanya jika berlaku sifat berikut :

- (i) Terdapat suatu *inner product* dalam  $X$ , dan
- (ii) Setiap barisan Cauchy dengan *norm*  $\|u\|$  adalah konvergen.

(Zeidler, 1995)

#### Teorema 5.

Setiap ruang pre-Hilbert dengan dimensi terbatas adalah ruang Hilbert.

#### Bukti

Misalkan  $\dim X = 0$ . Maka  $X = \{0\}$  dan pernyataan ini trivial. Misalkan  $\dim X > 0$ . Anggap bahwa  $\{u_n\}$  adalah suatu barisan Cauchy. Karena dua *norm* dalam ruang vektor dengan dimensi terbatas  $X$  atas  $F$  selalu ekuivalen, maka dapat ditulis  $|\alpha_{nj} - \alpha_{mj}| \leq b \|u_n - u_m\| < \varepsilon$  untuk setiap  $n, m \geq n_0(\varepsilon)$  dan  $\forall j$ .

Karena komponen-komponen berhubungan satu sama lain, akibatnya setiap barisan  $\{\alpha_{nj}\}$  juga Cauchy. Karenanya diperoleh

$$\alpha_{jn} \rightarrow \alpha_j, \quad n \rightarrow \infty$$

untuk setiap  $j$ . Dari Teorema 1 diperoleh bahwa

$$u_n \rightarrow u \quad \text{dalam } X, \quad n \rightarrow \infty \quad \blacksquare$$

#### Contoh (Ruang Hilbert $L_2(a, b)$ ) :

Anggap bahwa  $-\infty < a < b < \infty$ .

Misalkan  $L_2(a, b)$  adalah notasi himpunan semua fungsi terukur.

$$u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

Sedemikian sehingga  $\int_a^b |u|^2 dx < \infty$ . Maka

(i)  $L_2(a, b)$  adalah suatu ruang Hilbert real dengan *inner product* :

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b uv dx \quad \text{untuk setiap } u, v \in L_2(a, b).$$

(ii)  $\dim L_2(a, b) = \infty$

Dengan tepat, digunakan mengikuti prinsip identifikasi

(I) Dua fungsi  $u$  dan  $v$  berhubungan dengan elemen yang sama dalam ruang Hilbert  $L_2(a, b)$  jika dan hanya jika  $u(x) = v(x)$  untuk setiap  $x \in (a, b)$ .

Sehingga, elemen  $L_2(a, b)$  adalah kelas fungsi yang ditandai oleh (I).

### Bukti

Akan ditunjukkan (i).

*Langkah 1: Ketaksamaan Schwarz*

Akan ditunjukkan bahwa jika  $u, v \in L_2(a, b)$ , maka

integral  $\int_a^b uv dx$  ada

dan

$$\left| \int_a^b uv dx \right| \leq \left( \int_a^b |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

Untuk membuktikan ini, dimulai dengan mudah, ketaksamaan klasik

$$|\xi \eta| \leq 2^{-1} (|\xi|^2 + |\eta|^2) \quad \text{untuk setiap } \xi, \eta \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

yang mana ditunjukkan dari

$$0 \leq (|\xi| - |\eta|)^2 = |\xi|^2 - 2|\xi||\eta| + |\eta|^2.$$

Diberikan

$$\|u\| = \left( \int_a^b |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pertama misalkan  $\|u\| = 0$  atau  $\|v\| = 0$ . Maka

$u(x) = 0$  atau  $v(x) = 0$  untuk setiap  $x \in (a, b)$ ,

Oleh sebab itu  $\int_a^b uv dx = 0$ , Berarti ketaksamaan (1)

adalah benar.

Anggap sekarang bahwa  $\|u\| \neq 0$  dan  $\|v\| \neq 0$ . Gantikan  $u$  dengan  $\frac{u}{\|u\|}$  dan  $v$  dengan  $\frac{v}{\|v\|}$ , jika perlu, boleh diasumsikan bahwa  $\|u\| = 1$  dan  $\|v\| = 1$ . Dari ketaksamaan (1),

$$|u(x)v(x)| \leq 2^{-1} (|u(x)|^2 + |v(x)|^2) \quad \text{untuk } x \in (a, b) \quad (3)$$

Jika fungsi  $u$  dan  $v$  terukur pada  $(a, b)$ , maka  $uv$  adalah *product*. Dari ketaksamaan (3), terdapat integral

$\int_a^b |u|^2 dx$  and  $\int_a^b |v|^2 dx$  dan secara tidak langsung

integral  $\int_a^b |uv| dx$  ada, dan karenanya terdapat  $\int_a^b uv dx$ .

Selanjutnya, dengan mengikuti ketaksamaan (3) diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b uv dx \right| &\leq \int_a^b |uv| dx \leq 2^{-1} \left( \int_a^b |u|^2 dx + \int_a^b |v|^2 dx \right) \\ &= 1 = \|u\| \|v\| \end{aligned}$$

ini adalah ketaksamaan yang dikehendaki oleh ketaksamaan (1).

*Langkah 2:*

Akan ditunjukkan bahwa  $L_2(a, b)$  adalah ruang vektor.

Untuk setiap  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  dan  $x \in (a, b)$ ,

$$|\alpha u(x) + \beta v(x)|^2 \leq |\alpha|^2 |u(x)|^2 + |2\alpha\beta| |u(x)v(x)| + |\beta|^2 |v(x)|^2$$

Misalkan  $u, v \in L_2(a, b)$ . Maka, integral  $\int_a^b |u|^2 dx$  dan

$\int_a^b |v|^2 dx$  ada. Dari langkah 1, secara tidak langsung

terdapat  $\int_a^b |uv| dx$ . Oleh sebab itu integral

$$\int_a^b |\alpha u + \beta v|^2 dx$$

ada, atau dengan kata lain  $\alpha u + \beta v \in L_2(a, b)$ .

*Langkah 3:*

Akan ditunjukkan bahwa

$\langle u, v \rangle = \int_a^b uv dx$  adalah suatu *inner product* pada  $L_2(a, b)$

Pertama akan ditunjukkan bahwa

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Misalkan  $\langle u, u \rangle = 0$ . maka

$\int_a^b |u|^2 dx = 0$  sehingga  $u(x) = 0$  untuk setiap  $x \in (a, b)$

Dari prinsip identifikasi (I), diperoleh bahwa fungsi  $u = u(x)$  berhubungan dengan elemen nol  $u = 0$  dalam  $L_2(a, b)$ . Sebaliknya, misalkan  $u = 0$  elemen nol dalam

$L_2(a, b)$ . Dari (I), elemen ini berhubungan dengan kelas semua fungsi  $u$  dimana  $u(x) = 0$  untuk setiap  $x \in (a, b)$ .

Oleh sebab itu,  $\langle u, u \rangle = 0$ . Selanjutnya, jika

$u(x) = u_1(x)$  and  $v(x) = v_1(x)$  untuk setiap  $x \in (a, b)$  diperoleh bahwa  $u(x)v(x) = u_1(x)v_1(x)$  untuk setiap  $x \in (a, b)$ , dan

$$\int_a^b uv dx = \int_a^b u_1(x)v_1(x) dx$$

atau dengan kata lain  $\langle u, v \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle$ .

Akibatnya, *inner product* berkenaan dengan prinsip identifikasi (I), atau dengan kata lain tergantung hanya pada kelas fungsi yang sesuai.

Terakhir, jika  $u, v, w \in L_2(a, b)$ , maka  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$  dan

$$\int_a^b u(\alpha v + \beta w) dx = \alpha \int_a^b uv dx + \beta \int_a^b uw dx,$$

$$\text{Atau } \langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle$$

Akibatnya,  $L_2(a, b)$  adalah suatu ruang pre Hilbert. Jelas, ketaksamaan Schwarz

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \text{ untuk setiap } u, v \in L_2(a, b)$$

sesuai untuk ketaksamaan Schwarz klasik (2) dari Langkah 1.

*Langkah 4: ruang Hilbert.*

Akan ditunjukkan bahwa  $L_2(a, b)$  adalah ruang Hilbert. Untuk yang terakhir ini, harus ditunjukkan bahwa setiap barisan Cauchy dalam  $L_2(a, b)$  adalah konvergen. Berdasarkan Definisi 6, cukup dibuktikan bahwa setiap barisan Cauchy dalam  $L_2(a, b)$  mempunyai barisan bagian yang konvergen.

Misalkan  $\{u_n\}$  suatu barisan Cauchy dalam  $L_2(a, b)$ , atau

$$\|u_n - u_m\| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n, m \geq n_0(\varepsilon).$$

Pilih  $\varepsilon = 2^{-k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$

dan terdapat bilangan asli  $n_1 \leq n_2 \leq \dots$  sehingga

$$\|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\| \leq 2^{-k} \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Himpunan  $v_k = u_{n_k}$  dan  $s_m(x) = \sum_{k=1}^m |v_{k+1}(x) - v_k(x)|$ .

Jika barisan  $\{s_m(x)\}$  adalah monoton naik, maka  $S(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x)^2$  ada untuk setiap  $x \in (a, b)$ , dimana  $0 \leq S(x) \leq \infty$ . Jika  $L_2(a, b)$  adalah ruang pre Hilbert, maka ketaksamaan segitiga berlaku. Oleh sebab itu,

$$\|s_m\| \leq \sum_{k=1}^m \|v_{k+1} - v_k\| \leq 2^{-1} + 2^{-2} + \dots \leq 1 \text{ untuk } m \geq 1$$

sehingga

$$\int_a^b s_m(x)^2 dx \leq 1 \text{ untuk setiap } m \geq 1.$$

Dengan demikian, dari lemma Fatou, fungsi S adalah terintegral atas  $(a, b)$  dengan

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x)^2 dx \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_a^b s_m(x)^2 dx \leq 1.$$

Khususnya,  $S(x)$  terbatas untuk setiap  $x \in (a, b)$ . Misalkan pada titik-titik ujungnya (*remaining points*) didefinisikan kembali S dengan aturan  $S(x) = 0$ .

Misalkan  $s(x) = S(x)^{\frac{1}{2}}$ , diperoleh

$$s(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x) \text{ untuk setiap } x \in (a, b), \tag{4}$$

dan  $\int_a^b s^2 dx \leq 1$ , atau dengan kata lain  $s \in L_2(a, b)$ .

Selanjutnya dengan menggunakan sifat

$$v_m(x) = v_1(x) + \sum_{k=1}^{m-1} v_{k+1}(x) - v_k(x). \tag{5}$$

Dari (4),

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \infty \text{ untuk } x \in (a, b) \tag{6}$$

Dengan demikian, limit terbatas  $v(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} v_m(x)$  ada untuk setiap  $x \in (a, b)$ . Pada titik ujung  $x$  dari interval  $(a, b)$  ditetapkan bahwa  $v(x) = 0$ . Seperti limit dari fungsi terukur  $v_m$ , fungsi  $v$  adalah juga terukur pada interval  $(a, b)$ .

Sesuai dengan persamaan (5) dan (6),

$$|v(x)| \leq |v_1(x) + s(x)| \text{ untuk setiap } x \in (a, b). \tag{7}$$

Jika  $v_1 \in L_2(a, b)$ , diperoleh  $|v_1|, s \in L_2(a, b)$ , dan karenanya  $|v_1| + s \in L_2(a, b)$ , dari Langkah 2. Dengan mengikuti ketaksamaan (7) diperoleh bahwa

$$\int_a^b |v(x)|^2 dx \leq \int_a^b (|v_1(x)| + s)^2 dx < \infty,$$

Atau dengan kata lain  $v \in L_2(a, b)$ .

Terakhir, akan ditunjukkan bahwa

$$v_n \rightarrow v \text{ dalam } L_2(a, b), n \rightarrow \infty. \tag{8}$$

Jika  $\{v_n\}$  adalah suatu barisan Cauchy, untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $m_0(\varepsilon)$  sedemikian sehingga

$$\|v_n - v_m\|^2 \equiv \int_a^b |v_n - v_m|^2 dx \leq \varepsilon^2$$

untuk setiap  $n, m \geq m_0(\varepsilon)$ .

Misalkan  $m \rightarrow \infty$ , dengan mengikuti lemma Fatou diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \|v_n - v\|^2 &\equiv \int_a^b |v_n(x) - v(x)|^2 dx \\ &= \int_a^b \lim_{m \rightarrow \infty} |v_n(x) - v_m(x)|^2 dx \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_a^b |v_n(x) - v_m(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2, \end{aligned}$$

untuk setiap  $n \geq m_0(\varepsilon)$ . Ini adalah (8)

Akan ditunjukkan (ii). Pilih suatu interval  $[c, d]$  dengan  $[c, d] \subseteq ]a, b[$  dan  $c < d$ . Didefinisikan

$$u_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{jika } x \in [c, d] \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

Maka  $u_n \in L_2(a, b)$  untuk setiap  $n = 0, 1, 2, \dots$

sehingga diperoleh bahwa fungsi  $u_0, \dots, u_n$  bebas linear untuk setiap  $n$ . Karenanya  $\dim L_2(a, b) = \infty$ . ■

### Sistem Ortonormal

Pada bagian ini diasumsikan bahwa :

(H) Misalkan  $X$  suatu ruang Hilbert atas  $F = R = C$ , dan  $\{u_0, u_1, \dots\}$  sistem ortonormal terbatas atau terbilang dalam  $X$ . Dengan kata lain, menurut definisi,

$$\langle u_k, u_m \rangle = \delta_{km} \quad \text{untuk setiap } k, m \quad (9)$$

Sasaran utama adalah mempelajari konvergensi yang disebut Deret Fourier abstrak

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u_n, u \rangle u_n \quad (10)$$

juga ditetapkan

$$s_m = \sum_{n=0}^m \langle u_n, u \rangle u_n \quad (11)$$

Nilai  $\langle u_n, u \rangle$  disebut koefisien Fourier dari  $u$ .

### Definisi 10.

Asumsikan (H). Sistem ortonormal terbatas  $\{u_0, \dots, u_n\}$  dikatakan lengkap dalam  $X$  jika dan hanya jika

$$u = \sum_{n=0}^n \langle u_n, u \rangle u_n \quad \text{untuk setiap } u \in X \quad (12)$$

Sistem ortonormal terbilang  $\{u_0, u_1, \dots\}$  dikatakan lengkap dalam  $X$  jika dan hanya jika deret tak terbatas (10) konvergen untuk setiap  $u \in X$ . Artinya,

$$u = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m \quad \text{untuk setiap } u \in X.$$

(Zeidler, 1995)

### Teorema 6.

Sistem ortonormal terbatas  $\{u_0, \dots, u_n\}$  lengkap dalam ruang Hilbert  $X$  atas  $F$  jika dan hanya jika sistem ortonormal tersebut merupakan suatu basis dari  $X$ .

### Bukti

( $\Leftarrow$ ) Misalkan  $\{u_n\}$  suatu basis dalam  $X$ . Maka

$$u = \sum_{n=0}^n c_n u_n \quad \text{untuk setiap } u \in X \quad (13)$$

dimana koefisien  $c_0, \dots, c_n \in F$  tergantung pada  $u$ . Gunakan (9), diperoleh

$$\langle u_k, u \rangle = \sum_{n=0}^n c_n \langle u_k, u_n \rangle = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Ini tersirat dalam persamaan (12). Berarti  $\{u_n\}$  lengkap.

( $\Rightarrow$ ) Misalkan  $\{u_n\}$  suatu sistem ortonormal yang lengkap; Maka  $\{u_n\}$  merupakan basis dalam  $X$ , oleh persamaan (12). Dalam hubungan ini, catat bahwa  $\{u_0, \dots, u_n\}$  adalah bebas linier, jika persamaan (13) dengan  $u = 0$ .

Berarti  $c_k = 0$  untuk setiap nilai  $k$ . ■

### Akibat 7.

Misalkan  $\{u_n\}$  suatu sistem ortonormal terbilang dalam ruang Hilbert atas  $F$ . Asumsikan bahwa deret tak terbatas

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n \quad \text{dengan } c_n \in F, \forall n$$

konvergen untuk sebarang  $u \in X$  maka  $c_n = \langle u_n, u \rangle \forall n$

### Bukti

Dengan menggunakan persamaan (9) diperoleh

$$\langle u_k, u \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle u_k, \sum_{n=0}^m c_n u_n \right\rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m c_n \langle u_k, u_n \rangle = c_k. \blacksquare$$

Ini merupakan pendukung persamaan (10). Akan diberikan suatu pendukung kedua untuk persamaan (4.10). Dalam rangka mendapatkan suatu aproksimasi terbaik dari  $u$  oleh suatu kombinasi linier  $c_0 u_0 + \dots + c_m u_m$ , diberikan

$$f(c_0, \dots, c_m) = \left\| u - \sum_{n=0}^m c_n u_n \right\|^2,$$

dan dipertimbangkan masalah minimum berikut :

$$f(c_0, \dots, c_m) = \min!, \quad c_0, \dots, c_m \in F \quad (14)$$

### Teorema 8.

Asumsikan (H). Maka, solusi tunggal dari persamaan (14) diberikan melalui koefisien Fourier

$$c_n = \langle u_n, u \rangle, \quad n = 0, \dots, m.$$

### Bukti

Dari persamaan (9),

$$\begin{aligned} f(c) &= \left\langle u - \sum_{n=0}^m c_n u_n, u - \sum_{k=0}^m c_k u_k \right\rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \sum_{n=0}^m \bar{c}_n \langle u_n, u \rangle - \sum_{k=0}^m c_k \langle u, u_k \rangle + \sum_{n=0}^m \bar{c}_n c_n \end{aligned}$$

Oleh sebab itu,

$$f(c) = \|u\|^2 - \sum_{n=0}^m |\langle u_n, u \rangle|^2 + \sum_{n=0}^m |\langle u_n, u \rangle - c_n|^2 \quad (15)$$

Nilai terkecil dari  $f$  dicapai untuk

$$c_n = \langle u_n, u \rangle, \quad n = 0, \dots, m. \quad \blacksquare$$

Khususnya, dari persamaan (11) diperoleh bahwa

$$\|u - s_m\|^2 \leq f(c) \quad \text{untuk setiap } c \in F^m \text{ dan } \forall m. \quad (16)$$

Dari persamaan (15)

$$\|u - s_m\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{n=0}^m |\langle u_n, u \rangle|^2 \quad (17)$$

untuk setiap  $u \in X$  dan  $\forall m$ .

Karenanya diperoleh ketaksamaan Bessel berikut :

$$\sum_{n=0}^m |\langle u_n, u \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \quad \text{untuk setiap } u \in X \text{ dan } \forall m. \quad (18)$$

### Teorema 9. (Kriteria Konvergensi)

Misalkan  $\{u_n\}$  suatu sistem ortonormal terbilang dalam ruang Hilbert atas  $F$ .

Maka deret

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n, \quad c_n \in F, \forall n,$$

konvergen jika dan hanya jika deret  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$  konvergen.

**Bukti**

( $\Leftarrow$ ) Misalkan  $S_m = \sum_{n=0}^m c_n u_n$ . Dari persamaan (9),

$$\|S_{m+k} - S_m\|^2 = \left\| \sum_{n=m+1}^{m+k} c_n u_n \right\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m+k} |c_n|^2 \quad (19)$$

untuk setiap  $m, k = 1, 2, \dots$

Jika  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$  konvergen, maka  $\{S_m\}$  merupakan suatu barisan Cauchy. Karenanya  $\{S_m\}$  konvergen.

Dengan kata lain,  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$  konvergen.

( $\Rightarrow$ ) Jika  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$  konvergen, maka  $\{S_m\}$  merupakan suatu barisan Cauchy, dan karenanya  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$  konvergen, dari persamaan (19). ■

Dengan mengikuti Teorema 9 dan ketaksamaan Bessel (18), maka diperoleh bahwa deret Fourier konvergen untuk setiap  $u \in X$ . Dengan kata lain, terdapat beberapa  $v \in X$  sedemikian sehingga

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u_n, u \rangle u_n.$$

Bagaimanapun, ini mungkin bila  $v \neq u$ . Tetapi jika sistem ortonormal  $\{u_n\}$  lengkap, maka  $v = u$  untuk setiap  $u \in X$ .

**Teorema 10.**

Misalkan  $\{u_n\}$  suatu sistem ortonormal terbilang dalam ruang Hilbert atas  $F$ . Maka, dua pernyataan berikut adalah ekuivalen :

- (i) Sistem  $\{u_n\}$  lengkap dalam  $X$ .
- (ii) Span / rentangan  $\{u_n\}$  dense (rapat) dalam  $X$ .

**Bukti**

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Ini jelas, oleh Definisi 10

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Diberikan  $\varepsilon > 0$ , terdapat koefisien

$$c_0, \dots, c_m \in F \text{ sedemikian sehingga}$$

$$f(c) = \left\| u - \sum_{n=0}^m c_n u_n \right\|^2 < \varepsilon.$$

Dapat diasumsikan juga bahwa  $m$  cukup besar, dengan memisalkan  $c_n = 0$  untuk  $n$  besar. Pilih  $\varepsilon = \frac{1}{r}, r = 1, 2, \dots$ , dengan mengikuti ketaksamaan (16) bahwa terdapat suatu barisan bagian  $\{s_{m_r}\}$  sedemikian sehingga

$$\|u - s_{m_r}\| < \frac{1}{r}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Jika suatu Deret Fourier selalu konvergen, maka barisan  $\{s_m\}$  konvergen. Dengan kata lain,  $s_m \rightarrow v, m \rightarrow \infty$ . Misalkan  $r \rightarrow \infty$ , dari ketaksamaan (20) diperoleh bahwa  $v = u$ . ■

**Akibat 11.**

Misalkan  $\{u_n\}$  suatu sistem ortonormal terbilang yang lengkap dalam ruang Hilbert atas  $F$ . Maka, pernyataan-pernyataan berikut dianggap benar :

(i) Untuk setiap  $u, v \in X$ ,

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n(u)} c_n(v) \quad (\text{persamaan Parseval}),$$

(ii) Untuk setiap  $u \in X$ , ketaksamaan Bessel digantikan dengan yang disebut persamaan Parseval khusus

$$\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle u_n, u \rangle|^2.$$

(iii) Jika  $\langle u_n, u \rangle = 0$  untuk setiap  $n$  dan  $u \in X$ , maka  $u = 0$ .

**Bukti**

(i). Dari persamaan (9) dan persamaan (10),

$$\langle u, v \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{n=0}^m c_n(u) u_n, \sum_{k=0}^m c_k(v) u_k \right\rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \overline{c_n(u)} c_n(v)$$

(ii) Ini adalah kasus khusus dari (i).

(iv) Ini ditunjukkan dari persamaan (10). ■

**KESIMPULAN**

Dari pembahasan pada bagian sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Setiap ruang Pre Hilbert dengan dimensi terbatas adalah ruang Hilbert.
2. Sistem ortonormal terbatas  $\{u_0, \dots, u_n\}$  lengkap dalam ruang Hilbert  $X$  jika dan hanya jika sistem ortonormal tersebut merupakan suatu basis dari  $X$ .
3. Dengan asumsi bahwa deret tak terbatas  $u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$  konvergen untuk sebarang  $u \in X$  maka  $c_n = \langle u_n, u \rangle$  dengan merupakan sistem ortonormal terbilang dalam ruang Hilbert.
4. Untuk sistem ortonormal terbilang  $\{u_n\}$  dalam ruang Hilbert maka deret  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$  konvergen jika dan hanya jika deret  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$  konvergen.
5. Sistem ortonormal terbilang yang lengkap dalam ruang Hilbert saling ekuivalen dengan pernyataan bahwa rentangan dari sistem ortonormal tersebut *dense* dalam ruang Hilbert tersebut.
6. Jika sistem ortonormal terbilang yang lengkap dalam ruang Hilbert atas maka berlaku persamaan Parseval

$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n(u)} c_n(v)$  dan ketaksamaan Bessel dapat digantikan dengan persamaan Parseval khusus  $\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle u_n, u \rangle|^2$ .

#### DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard. *Aljabar Linear Elementer*. Erlangga, Jakarta. (1987).
- Kumar, Nimit. *Learning in Hilbert Spaces*. Departement of Electrical Engineering at Indian Institute of Technology, Kanpur. (2004).
- Kreyszig, Erwin. *Introductory Functional Analysis With Applications*. John Wiley & Sons, New York. (1978).
- Steven, Leon J. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Erlangga, Jakarta. (2001).
- Zeidler, Eberhard. *Applied Functional Analysis, Application to Mathematical Physics*. Springer-Verlag. (1995).

**ANALISIS JARINGAN SARAF TIRUAN BACKPROPAGATION  
TERHADAP PERAMALAN NILAI TUKAR MATA UANG RUPIAH DAN DOLAR**  
*Analysis of Backpropagation Artificial Neural Network to forecast Rupiah and Dollar*

**DORTEUS LODEWYIK RAHAKBAUW**

*Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura*  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon  
E-mail: lodewyik@gmail.com

**ABSTRAK**

Kurs atau nilai tukar mata uang. Jenis kurs ada tiga macam, yaitu kurs jual, kurs beli, dan kurs tengah. Kurs dibutuhkan untuk menentukan sesuatu yang perlu dilakukan yang berkaitan dengan kurs itu misalnya keputusan investasi jangka pendek, keputusan penganggaran modal, keputusan pembiayaan jangka panjang, dan penilaian laba. Oleh karena itu, perlu dilakukan upaya untuk memprediksi besarnya kurs untuk beberapa waktu ke depan. Permasalahan yang dihadapi adalah cara untuk memprediksi besarnya kurs yang menghasilkan nilai prediksi dengan tingkat kesalahan yang minimal. Peramalan merupakan suatu proses untuk memprediksi kejadian ataupun perubahan di masa yang akan datang. Dalam suatu proses kegiatan, proses peramalan ini merupakan awal dari suatu rangkaian kegiatan, dan sebagai titik tolak kegiatan berikutnya. Pemodelan *time series* seringkali dikaitkan dengan proses peramalan (*forecasting*) suatu nilai karakteristik tertentu pada periode kedepan, melakukan pengendalian suatu proses ataupun untuk mengenali pola perilaku sistem. Dengan mendeteksi pola dan kecenderungan data, kemudian memformulasikannya dalam suatu model, maka dapat digunakan untuk memprediksi data yang akan datang. Model dengan akurasi yang tinggi akan menyebabkan nilai prediksi cukup valid untuk digunakan sebagai pendukung dalam proses pengambilan keputusan.

Salah satu metode peramalan yang berkembang saat ini adalah menggunakan *Artificial Neural Network* (ANN), dimana ANN telah menjadi objek penelitian yang menarik dan banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah pada beberapa bidang kehidupan, salah satu diantaranya adalah untuk analisis data *time series* pada masalah *Forecasting* (Loh, 2003). Salah satu jaringan yang sering digunakan untuk prediksi data *time series* adalah *Backpropagation neuron network*. Dalam penelitian ini akan dibahas mengenai penggunaan jaringan saraf tiruan backpropagation untuk memprediksi kurs jual Rupiah (Rp) per 1 dolar amerika (USD). Dalam penelitian ini akan dibagi sebanyak 70% dari data yang ada sebagai pelatihan dan 30% dari data sebagai data pengujian. Dan dalam penelitian ini digunakan data kurs bulan Oktober 2013-Januari 2014, yang diambil dari situs Bank Indonesia. Dalam proses penelitian diperoleh Learning rate yang digunakan untuk data harian adalah 0.5, proses epoch berhenti pada iterasi ke-27088 untuk data harian, dengan pencapaian gradient sebesar 0,0081822 dan nilai R untuk pelatihan data sebesar 0,99494 yang berarti sangat baik. Selanjutnya data di uji dan memperoleh R sebesar 0,48638 yang berarti masih dikatakan baik untuk memprediksi data uji. Beberapa hal yang mempengaruhi hasil penelitian juga seperti data histories yang digunakan untuk variable masukkan JST kurang banyak, data yang digunakan untuk memprediksi kurs tidak bisa mewakili sebagai faktor utama yang mempengaruhi nilai kurs, dan batas nilai kesalahan yang kurang kecil serta kesesuaian bobot dalam arsitektur jaringan.

**Kata Kunci:** *Backpropagation*, Jaringan Saraf Tiruan, Kurs

## PENDAHULUAN

Kurs yang juga dikenal sebagai nilai tukar adalah rasio pertukaran antara dua mata uang yang berbeda negara. Atau dengan kata lain kurs dapat diartikan sebagai harga satu unit mata uang asing dinyatakan dalam mata uang domestik. Bank Sentral masing-masing negara dapat memilih sistem nilai tukar yang berbeda. Kurs tetap ditentukan oleh Bank Sentral (sebuah institusi yang memutuskan harga mata uang tersebut). Ada berbagai macam faktor yang mempengaruhi nilai tukar, seperti suku bunga, inflasi, dan keadaan politik dan ekonomi di setiap negara. Biasanya dalam pasar forex, atau dalam perdagangan mata uang pasar internasional, terdiri dari jaringan agen yang saling berhubungan. Serta melibatkan banyak agen, seperti investor individu, investor institusi, bank sentral, bank komersial, dll.

## TINJAUAN PUSTAKA

Jaringan syaraf tiruan telah dikembangkan sejak tahun 1940. Pada tahun 1943 McCulloch dan W.H.Pitts memperkenalkan pemodelan matematis neuron. Tahun 1949, Hebb Mencoba mengkaji proses belajar yang dilakukan oleh neuron. Teori ini dikenal sebagai Hebbian Law. Tahun 1958, Rosenblatt memperkenalkan konsep perseptron suatu jaringan yang terdiri dari beberapa lapisan yang saling berhubungan melalui umpan maju (*feed forward*). Konsep ini dimaksudkan untuk memberikan ilustrasi tentang dasar-dasar intelegensi secara umum. Hasil kerja Rosenblatt yang sangat penting adalah *perceptron convergence theorem* (tahun 1962) yang membuktikan bahwa bila setiap perseptron dapat memilah-milah dua buah pola yang berbeda maka siklus pelatihannya dapat dilakukan dalam jumlah yang terbatas. Pada tahun 1960 Widrow dan Hoff menemukan ADALINE (*Adaptive Linear Neuron*). Alat ini dapat beradaptasi dan beroperasi secara linier. Penemuan ini telah memperlebar aplikasi jaringan syaraf tiruan tidak hanya untuk pemilihan pola, tetapi juga untuk pengiriman sinyal khususnya dalam bidang *adaptive filtering*. Tahun 1969, Minsky dan Papert melontarkan suatu kritikan tentang kelemahan perseptronnya Rosenblatt di dalam memilah-milah pola yang tidak linier. Sejak saat itu penelitian di bidang jaringan syaraf tiruan telah mengalami masa vakum untuk kurang lebih satu dasawarsa. Tahun 1982, Hopfield telah memperluas aplikasi JST untuk memecahkan masalah-masalah optimasi. Hopfield telah berhasil memperhitungkan fungsi energi ke dalam jaringan syaraf yaitu agar jaringan memiliki kemampuan untuk mengingat atau memperhitungkan suatu obyek dengan obyek yang pernah dikenal atau diingat sebelumnya (*associative memory*). Konfigurasi jaringan yang demikian dikenal sebagai *recurrent network*. Salah satu aplikasinya adalah *Travelling Salesman Problem (TSP)*.

Pada tahun 1986 Rumelhart, Hinton dan William menciptakan suatu algoritma belajar yang dikenal sebagai propagasi balik (*backpropagation*). Bila algoritma ini diterapkan pada perseptron yang memiliki lapisan banyak (*multi layer perceptron*), maka dapat dibuktikan bahwa pemilahan pola-pola yang tidak linier dapat diselesaikan

sehingga dapat mengatasi kritikan yang dilontarkan oleh Minsky dan Papert.

## Definisi Jaringan Saraf Tiruan

Jaringan syaraf tiruan merupakan sistem pemroses informasi yang memiliki karakteristik mirip dengan jaringan syaraf biologi [Siang, 2005 dalam Maru'ao, 2010]. Menurut [Sekarwati, 2005 dalam Maru'ao, 2010], jaringan syaraf tiruan merupakan sistem komputasi yang didasarkan atas pemodelan sistem syaraf biologis (*neurons*) melalui pendekatan dari sifat-sifat komputasi biologis (*biological computation*). Menurut [Subiyanto, 2002 dalam Maru'ao, 2010], jaringan syaraf tiruan adalah membuat model sistem komputasi yang dapat menirukan cara kerja jaringan syaraf biologi. Selain itu [menurut Siang, 2005 dalam Maru'ao, 2010], jaringan syaraf tiruan dibentuk sebagai generalisasi model matematika dari jaringan syaraf biologi dengan asumsi sebagai berikut.

- Pemrosesan informasi terjadi pada banyak elemen sederhana (*neurons*).
- Sinyal dikirimkan diantara *neuron-neuron* melalui penghubung - penghubung.
- Penghubung antar *neuron* memiliki bobot yang akan memperkuat atau memperlemah sinyal
- Untuk menentukan keluaran (*output*), setiap *neuron* menggunakan fungsi aktivasi yang dikenakan pada penjumlahan masukan (*input*) yang diterima. Besarnya keluaran (*output*) ini selanjutnya dibandingkan dengan suatu batas ambang.

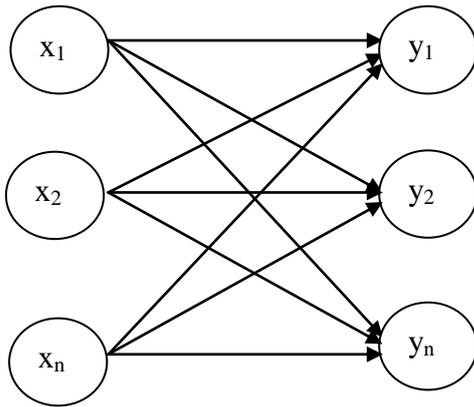
*Neuron* adalah unit pemroses informasi yang menjadi dasar dalam pengoperasian jaringan syaraf tiruan (Siang 2005:23). *Neuron* terdiri dari 3 elemen pembentuk sebagai berikut.

- Himpunan unit-unit yang dihubungkan dengan jalur koneksi.
- Suatu unit penjumlah yang akan menjumlahkan masukan-masukan sinyal yang sudah dikalikan dengan bobotnya.
- Fungsi aktivasi yang akan menentukan apakah sinyal dari *input neuron* akan diteruskan ke *neuron* lain atau tidak

## Arsitektur Jaringan ( Konfigurasi Jaringan )

Berdasarkan arsitekturnya, model jaringan syaraf tiruan digolongkan menjadi:

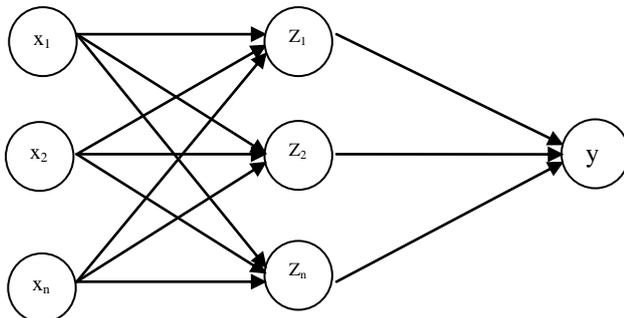
- Jaringan Layar Tunggal (*Single Layer Network*)  
Pada jaringan ini, sekumpulan masukan neuron dihubungkan langsung dengan sekumpulan keluarannya. Sinyal mengalir searah dari layar (lapisan) masukan sampai layar (lapisan) keluaran. Setiap simpul dihubungkan dengan simpul lainnya yang berada di atasnya dan dibawahnya, tetapi tidak dengan simpul yang berada pada lapisan yang sama. Model yang masuk kategori ini antara lain : ADALINE, Hopfield, Perceptron, LVQ, dan lain-lain. Pada Gambar 1 diperlihatkan arsitektur jaringan layar tunggal  
Dengan n buah masukan ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) dan m buah keluaran ( $y_1, y_2, \dots, y_m$ )



Gambar 1. Jaringan Layar Tunggal

b. Jaringan Layar Jamak (*Multiple Layer Network*)

Jaringan ini merupakan perluasan dari jaringan layar tunggal. Dalam jaringan ini, selain unit masukan dan keluaran, ada unit-unit lain (sering disebut layar tersembunyi). Dimungkinkan pula ada beberapa layar tersembunyi. Model yang termasuk kategori ini antara lain : MADALINE, *backpropagation*. Pada Gambar 2 diperlihatkan jaringan dengan n buah unit masukan ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ), sebuah layar tersembunyi yang terdiri dari m buah unit ( $z_1, z_2, \dots, z_m$ ) dan 1 buah unit keluaran.



Gambar 2. Jaringan Layar Jamak

c. Jaringan Reccurent

Model jaringan *reccurent* (*reccurent network*) mirip dengan jaringan layar tunggal ataupun jamak. Hanya saja, ada simpul keluaran yang memberikan sinyal pada unit masukan (sering disebut *feedback loop*). Dengan kata lain sinyal mengalir dua arah, yaitu maju dan mundur.  
Contoh : *Hopfield network, Jordan network, Elmal network*.

**Jaringan Saraf Tiruan Backpropagation**

*Backpropagation* merupakan model jaringan syaraf tiruan dengan layar jamak. Seperti halnya model jaringan syaraf tiruan lainnya, *backpropagation* melatih jaringan untuk mendapatkan keseimbangan antara kemampuan jaringan untuk mengenali pola yang digunakan selama pelatihan serta kemampuan jaringan untuk memberikan respon yang benar terhadap pola masukan yang serupa (tapi tidak sama) dengan pola yang dipakai selama pelatihan.

a. Fungsi Aktivasi pada *Backpropagation*

Dalam *backpropagation*, fungsi aktivasi yang dipakai harus memenuhi beberapa syarat sebagai berikut.

1. Kontinu.
2. Terdiferensial dengan mudah.
3. Merupakan fungsi yang tidak turun.

Salah satu fungsi yang memenuhi ketiga syarat tersebut sehingga sering dipakai adalah fungsi sigmoid biner yang memiliki *range* (0,1). Fungsi sigmoid biner didefinisikan sebagai berikut.

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)}$$

dengan

$$f_1'(x) = f_1(x)[1 - f_1(x)]$$

Fungsi lain yang sering dipakai adalah fungsi sigmoid bipolar dengan *range* (-1,1) yang didefinisikan sebagai berikut.

$$f_2(x) = \frac{2}{1 + \exp(-x)} - 1$$

dengan

$$f_2'(x) = \frac{1}{2}[1 + f_2(x)][1 - f_2(x)]$$

Fungsi sigmoid memiliki nilai maksimum 1. Untuk pola yang targetnya lebih dari 1, pola masukan dan keluaran harus terlebih dahulu ditransformasi sehingga semua polanya memiliki *range* yang sama seperti fungsi sigmoid yang dipakai.

Alternatif lain adalah menggunakan fungsi aktivasi sigmoid hanya pada layar yang bukan layar keluaran. Pada layar keluaran, fungsi aktivasi yang dipakai adalah fungsi identitas  $f(x) = x$ .

b. Pelatihan *Backpropagation*

Pelatihan *backpropagation* meliputi 3 fase. Fase pertama adalah fase maju. Pola masukan dihitung maju mulai dari layar masukan hingga layar keluaran menggunakan fungsi aktivasi yang ditentukan. Fase kedua adalah fase mundur. Selisih antara keluaran jaringan dengan target yang diinginkan merupakan kesalahan yang terjadi. Kesalahan tersebut dipropagation mundur, dimulai dari garis yang berhubungan langsung dengan unit – unit di layar keluaran. Fase ketiga adalah modifikasi bobot untuk menurunkankesalahan yang terjadi.

Pelatihan *backpropagation* meliputi 3 fase sebagai berikut. Fase 1, yaitu propagasi maju.

Selama propagasi maju, sinyal masukan ( $= x_i$ ) dipropagasikan ke layar tersembunyi menggunakan fungsi aktivasi yang ditentukan. Keluaran dari setiap unit layar tersembunyi ( $= z_j$ ) tersebut selanjutnya dipropagasikan maju lagi ke layar tersembunyi di atasnya menggunakan fungsi aktivitas yang ditentukan. Demikian seterusnya hingga menghasilkan keluaranjaringan ( $= y_k$ ). Berikutnya, keluaran jaringan ( $= y_k$ ) dibandingkan dengan target yang harus dicapai ( $= t_k$ ). Selisih  $t_k -$

$y_k$  adalah kesalahan yang terjadi. Jika kesalahan ini lebih kecil dari batas toleransi yang ditentukan, maka iterasi dihentikan. Akan tetapi apabila kesalahan masih lebih besar dari batas toleransinya, maka bobot setiap garis dalam jaringan akan dimodifikasi untuk mengurangi kesalahan yang terjadi.

2. Fase 2, yaitu propagasi mundur.

Berdasarkan kesalahan  $t_k - y_k$ , dihitung faktor  $\delta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) yang dipakai untuk mendistribusikan kesalahan di unit  $y_k$  ke semua unit tersembunyi yang terhubung langsung dengan  $y_k$ .  $\delta_k$  juga dipakai untuk mengubah bobot garis yang berhubungan langsung dengan unit keluaran.

Dengan cara yang sama, dihitung faktor  $\delta_j$  di setiap unit layar tersembunyi sebagai dasar perubahan bobot semua garis yang berasal dari unit tersembunyi di layar dibawahnya. Demikian seterusnya hingga semua faktor  $\delta$  di unit tersembunyi yang berhubungan langsung dengan unit masukan dihitung.

3. Fase 3, yaitu perubahan bobot.

Setelah semua faktor  $\delta$  dihitung, bobot semua garis dimodifikasi bersamaan. Perubahan bobot suatu garis didasarkan atas faktor  $\delta$  neuron dilayar atasnya. Sebagai contoh, perubahan bobot garis yang menuju ke layar keluaran didasarkan atas  $\delta_k$  yang ada di unit keluaran.

Ketiga fase tersebut diulang-ulang terus hingga kondisi penghentian dipenuhi. Umumnya kondisi penghentian yang sering dipakai adalah jumlah iterasi atau kesalahan. Iterasi akan dihentikan jika jumlah iterasi yang dilakukan sudah melebihi jumlah maksimum iterasi yang ditetapkan, atau jika kesalahan yang terjadi sudah lebih kecil dari batas toleransi yang diijinkan.

Algoritma pelatihan untuk jaringan *backpropagation* dengan satu layar tersembunyi (dengan fungsi aktivasi sigmoid biner) adalah sebagai berikut.

*Step 0* : Inisialisasi nilai bobot dengan nilai acak yang kecil.

*Step 1* : Selama kondisi berhenti masih tidak terpenuhi, laksanakan *step 2 - 9*.

*Step 2* : Untuk tiap pasangan pelatihan, kerjakan *step 3-8*.

#### **Feedforward :**

*Step 3* : Untuk tiap unit *input* ( $X_i, i=1, \dots, n$ ) menerima sinyal *input*  $x_i$  dan menyebarkan sinyal itu keseluruh unit pada *layer* atasnya (*hidden layer*)

*Step 4* : Untuk tiap unit dalam ( $Z_j, j=1, \dots, p$ ) dihitung nilai *input* dengan menggunakan nilai bobotnya

$$z_{-in_j} = v_{0j} + \sum_{i=1}^n x_i v_{ij}$$

Kemudian dihitung nilai *output* dengan menggunakan fungsi aktivasi yang dipilih

$$z_j = f(z_{-in_j})$$

Hasil fungsi tersebut dikirim ke semua unit pada *layer* di atasnya (unit *output*).

*Step 5* : Untuk tiap unit *output* ( $Y_k, k=1, \dots, m$ ) dihitung nilai *input* dengan menggunakan nilai bobotnya

$$y_{-in_k} = w_{0k} + \sum_{j=1}^p z_j w_{jk}$$

Kemudian dihitung nilai *output* dengan menggunakan fungsi aktivasi

$$y_k = f(y_{-in_k})$$

#### **Backpropagation Of Error**

*Step 6* : Untuk tiap unit *output* ( $Y_k, k=1, \dots, m$ ) menerima pola target yang bersesuaian dengan pola *input* dan kemudian dihitung informasi kesalahan

$$\delta_k = (t_k - y_k) f'(y_{-in_k})$$

Kemudian dihitung koreksi nilai bobot yang kemudian akan digunakan untuk memperbaharui nilai bobot  $w_{jk}$  :

$$\Delta w_{jk} = \alpha \delta_k z_j$$

Hitung koreksi nilai bias yang kemudian akan digunakan untuk memperbaharui nilai  $w_{0k}$  :

$$\Delta w_{0k} = \alpha \delta_k$$

dan kemudian nilai  $\delta_k$  dikirim ke unit pada *layer* sebelumnya.

*Step 7* : Untuk tiap unit dalam ( $Z_j, j=1, \dots, p$ ) dihitung delta *input* yang berasal dari unit pada *layer* di atasnya :

$$\delta_{-in_j} = \sum_{k=1}^m \delta_k w_{jk}$$

Kemudian nilai tersebut dikalikan dengan nilai turunan dari fungsi aktivasi untuk menghitung informasi kesalahan :

$$\delta_j = \delta_{-in_j} f'(z_{-in_j})$$

Hitung koreksi nilai bobot yang kemudian digunakan untuk memperbaharui nilai  $v_{ij}$

$$\Delta v_{ij} = \alpha \delta_j x_i$$

dan hitung nilai koreksi bias yang kemudian digunakan untuk memperbaharui  $v_{0j}$

$$\Delta v_{0j} = \alpha \delta_j$$

#### **Update nilai bobot dan bias :**

*Step 8* : Tiap unit *output* ( $Y_k, k=1, \dots, m$ ) mengupdate bias dan bobotnya ( $j=0, \dots, p$ )

$$w_{jk}(\text{new}) = w_{jk}(\text{old}) + \Delta w_{jk}$$

Tiap unit *hidden* ( $Z_j, j=1, \dots, p$ ) mengupdate bias dan bobotnya ( $i=0, \dots, n$ )

$$v_{ij}(\text{new}) = v_{ij}(\text{old}) + \Delta v_{ij}$$

*Step 9* : Menguji apakah kondisi berhenti sudah terpenuhi.

Parameter  $\alpha$  merupakan laju pemahaman yang menentukan kecepatan iterasi. Nilai  $\alpha$  terletak antara 0 dan 1 ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ). Semakin besar harga  $\alpha$ , semakin sedikit iterasi yang dipakai. Akan tetapi jika harga  $\alpha$  terlalu besar,

maka akan merusak pola yang sudah benar sehingga pemahaman menjadi lambat. Satu siklus pelatihan yang melibatkan semua pola disebut *epoch*.

Pemilihan bobot awal sangat mempengaruhi jaringan syaraf tiruan dalam mencapai minimum global (atau mungkin lokal saja) terhadap nilai *error* (kesalahan) dan cepat tidaknya proses pelatihan menuju kekonvergenan.

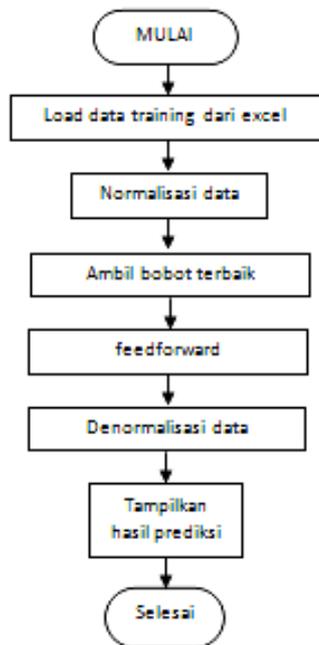
Apabila bobot awal terlalu besar maka *input* (masukan) ke setiap lapisan tersembunyi atau lapisan *output* (keluaran) akan jatuh pada daerah dimana turunan fungsi sigmoidnya akan sangat kecil. Apabila bobot awal terlalu kecil, maka *input* (masukan) ke setiap lapisan tersembunyi atau lapisan *output* (keluaran) akan sangat kecil. Hal ini akan menyebabkan proses pelatihan berjalan sangat lambat. Biasanya bobot awal diinisialisasi secara random dengan nilai antara -0.5 sampai 0.5 (atau -1 sampai 1 atau interval yang lainnya).

Setelah pelatihan selesai dilakukan, jaringan dapat dipakai untuk pengenalan pola.

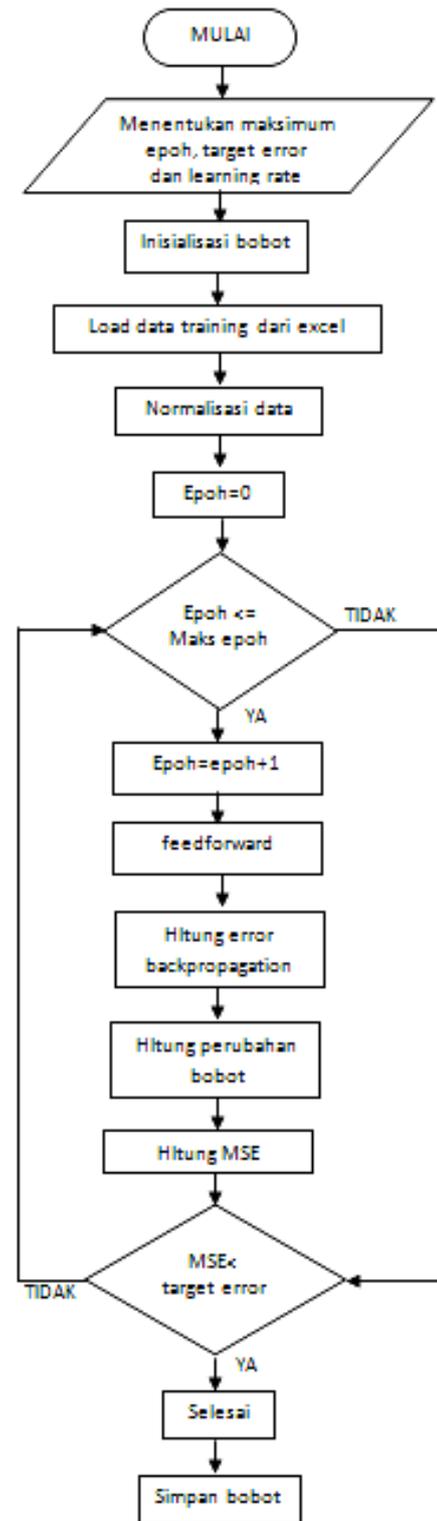
Dalam hal ini, hanya propagasi maju (langkah 4 dan 5) saja yang dipakai untuk menentukan keluaran jaringan.

**Diagram Alir Sistem ( Flowchart )**

Diagram alir sistem digunakan untuk menggambarkan langkah kerja sistem yang akan dibuat dan juga akan digunakan oleh penulis untuk menentukan langkah-langkah berikutnya.. Data yang digunakan adalah data sekunder dari harga kurs USD/AUD. Input data kurs ini berdasarkan pada variabel-variabel data harga pembukaan, harga penutupan, harga tertinggi, harga terendah, volume. Gambar 4 menunjukkan flowchart pelatihan jaringan syaraf tiruan untuk 1 arsitektur jaringan, untuk arsitektur yang lain caranya juga sama. Pelatihan dilakukan dengan data yang banyak yang bisa mewakili keadaan kurs yang terjadi.



Gambar 3. Alur kerja forecasting



Gambar 4. Flowchart algoritma Backpropagation

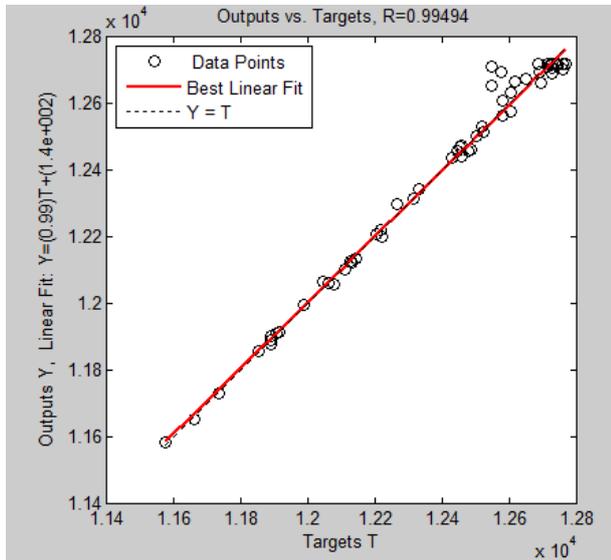
**HASIL DAN PEMBAHASAN**

**Perancangan Arsitektur Jaringan**

Arsitektur jaringan adalah jumlah layer dan neuron pada input, hidden dan output. Dalam permasalahan ini untuk memprediksi harga kurs USD terhadap Rupiah, menggunakan jaringan syaraf dengan momentum. Arsitektur jaringan saraf ini terdiri dari lapisan input, 2

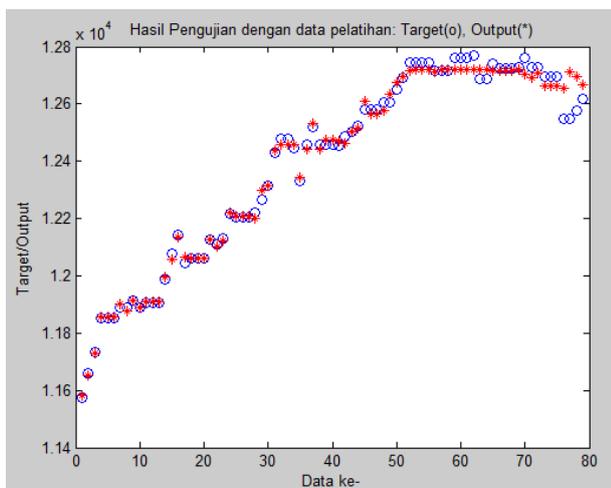
lapisan tersembunyi dan lapisan output. Lapisan tersembunyi terdiri atas 10 neuron dengan fungsi aktivasi tansig, lapisan tersembunyi yang kedua terdiri dari 5 neuron dengan fungsi aktivasi logsig, sedangkan lapisan output terdiri dari 1 neuron dengan fungsi aktivasi purelin.

### Analisis Hasil Pelatihan

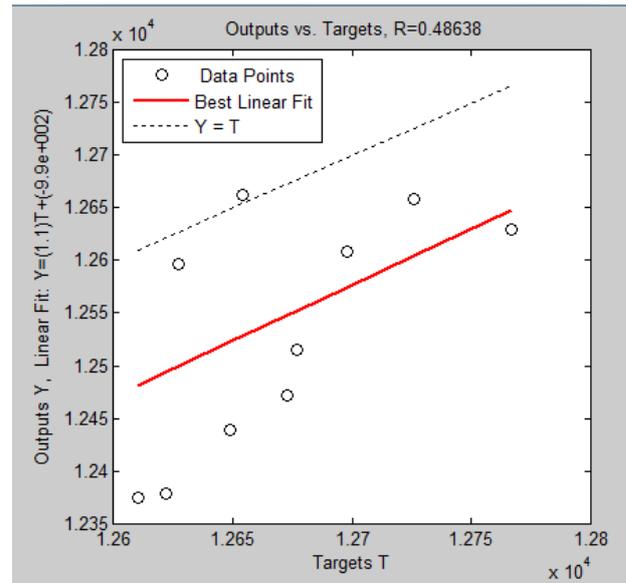


Gambar 5. Hasil Training data harian

Dalam proses training penelitian diperoleh Learning rate yang digunakan untuk data harian adalah 0.5, proses epoch berhenti pada iterasi ke-27088 untuk data harian, dengan pencapaian gradient sebesar 0,0081822 dan nilai R untuk pelatihan data sebesar 0,99494 (Gambar 5) yang berarti sangat baik karena mendekati nilai 1.



Gambar 6.



Gambar 7.

Selanjutnya data di uji dan memperoleh R sebesar 0,48638 yang berarti masih dikatakan baik untuk memprediksi data uji.

### KESIMPULAN

Algoritma backpropagation dapat melakukan proses prediksi, akan tetapi baik atau tidaknya nilai yang dihasilkan sangat dipengaruhi oleh penentuan parameter seperti besarnya learning rate dan jumlah neuron pada hidden layer. Untuk menghasilkan konfigurasi parameter yang baik diperlukan waktu cukup lama dalam melakukan eksperimen mencari parameter yang terbaik yang nantinya parameter yang baru tersebut dapat dipakai untuk proses prediksi.

Dalam proses training penelitian diperoleh Learning rate yang digunakan untuk data harian adalah 0.5, proses epoch berhenti pada iterasi ke-27088 untuk data harian, dengan pencapaian gradient sebesar 0,0081822 dan nilai R untuk pelatihan data sebesar 0,99494 yang berarti sangat baik karena mendekati nilai 1. Selanjutnya data di uji dan memperoleh R sebesar 0,48638 yang berarti masih dikatakan baik untuk memprediksi data uji.

### DAFTAR PUSTAKA

- Fausett, Laurent, "Fundamentals of Neural Networks: Architectures, Algorithms, and Applications", Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1994.
- Kusumadewi, S, "Membangun Jaringan Syaraf Tiruan menggunakan Matlab & Excel link", Graha Ilmu, 2004
- Maru'ao, "Neural Network Implementation in Foreign Exchange Kurs Prediction", Gunadarma University, 2010.

## KLASIFIKASI NEAR-RING *Classifications of Near Ring*

ELVINUS RICHARD PERSULESSY

*Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura*  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, poka-Ambon  
E-mail: richardelvinus@yahoo.com

### ABSTRAK

Sebagaimana pada grup dan ring, struktur-struktur baru yang berkaitan dengan keduanya dapat dibentuk dengan menambahkan ciri-ciri baru pada kedua struktur tersebut. Ciri-ciri baru inilah yang berperan dalam membentuk klasifikasi grup dan ring. *Near-ring* sebagai salah satu struktur yang terbentuk dari ring mengalami hal yang sama. Penelitian ini bertujuan untuk memperkenalkan jenis-jenis *near-ring* yang berperan dalam mengklasifikasi *near-ring* dan karakteristik yang timbul sebagai akibatnya, terutama yang berkaitan dengan ketunggalan elemen identitas dan invers.

**Kata kunci:** *Klasifikasi, Near-ring, Ring.*

### PENDAHULUAN

Himpunan  $R \neq \emptyset$  disebut ring jika terhadap operasi penjumlahan  $R$  merupakan grup abelian, terhadap operasi perkalian  $R$  tertutup dan asosiatif serta pada  $R$  berlaku sifat distributif. Jika  $N \neq \emptyset$  adalah himpunan yang memiliki semua syarat untuk menjadi ring kecuali sifat komutatif dan distributif kiri, maka  $N$  disebut *near-ring*.

*Near-ring* memiliki banyak sifat yang diperoleh dengan cara membandingkan sifat-sifat yang ada dalam ring. Sifat-sifat tersebut bisa saja sama dengan sifat-sifat yang ada dalam ring, namun ada juga yang sangat berbeda. Perbedaan dan persamaan sifat inilah yang membentuk klasifikasi pada *near-ring* yang akan dibahas dalam penelitian ini.

### TINJAUAN PUSTAKA

Dalam perkembangan Matematika Aljabar khususnya teori ring, L. Dickson memperkenalkan konsep *near-field*. Konsep ini membicarakan tentang lapangan yang hanya memenuhi salah satu dari sifat distribusi (distribusi kiri atau distribusi kanan). Selanjutnya, sekitar tahun 1930, Wietlandt menggunakan konsep ini untuk menyusun syarat-syarat untuk mengembangkan konsep *near-ring* [2].

Dalam bukunya yang berjudul "*Near-Rings*", Günter Pilz memberikan pemahaman mendasar tentang *near-ring* melalui definisi dan contoh. Ia juga membandingkan sifat-sifat yang ada dalam ring untuk disesuaikan dalam konsep *near-ring* dan menghasilkan sifat-sifat yang baru. [2]

#### Definisi 1.

Diberikan  $G \neq \emptyset$ . Pada  $G$  didefinisikan operasi biner " $*$ ".  $G$  disebut grup terhadap terhadap operasi biner " $*$ " jika memenuhi sifat

- Tertutup ( $\forall g_1, g_2 \in G$ )  $g_1 * g_2 \in G$ .
- Asosiatif  
( $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$ )  $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$ .
- Ada elemen netral  
( $\exists e \in G$ ) ( $\forall g \in G$ )  $e * g = g * e = g$ .
- Setiap elemen memiliki invers  
( $\forall g \in G$ ) ( $\exists g^{-1} \in G$ )  $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$

Himpunan  $G$  yang membentuk grup terhadap operasi " $*$ " yang didefinisikan padanya dinotasikan dengan  $(G, *)$ .

#### Definisi 2.

Misalkan  $(G, *)$  adalah grup.  $G$  disebut grup abelian jika memenuhi sifat komutatif, yaitu

$$(\forall g_1, g_2 \in G) g_1 * g_2 = g_2 * g_1$$

**Definisi 3.**

Himpunan  $S \neq \emptyset$  merupakan semigrup terhadap operasi biner "\*" jika memenuhi sifat

- a. Tertutup ( $\forall s_1, s_2 \in S$ )  $s_1 * s_2 \in S$ .
- b. Asosiatif  
 $(\forall s_1, s_2, s_3 \in S) (s_1 * s_2) * s_3 = s_1 * (s_2 * s_3)$ .

Himpunan  $S$  yang membentuk semigrup terhadap operasi "\*" yang didefinisikan padanya dinotasikan dengan  $(S, *)$ .

**Definisi 4.**

Diberikan himpunan  $R \neq \emptyset$ . Pada  $R$  didefinisikan operasi-operasi biner "+" dan ".". Himpunan  $R$  disebut ring terhadap kedua operasi biner tersebut, jika :

- I. Terhadap operasi "+",  $(R, +)$  adalah grup abelian.
- II. Terhadap operasi "." memenuhi sifat
  - i). Tertutup ( $\forall a, b \in R$ )  $a \cdot b \in R$ .
  - ii). Asosiatif ( $\forall a, b, c \in R$ )  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .
- III. i). Distributif Kiri  
 $(\forall a, b, c \in R) a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .
- ii). Distributif Kanan  
 $(\forall a, b, c \in R) (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ .

Himpunan  $R$  yang membentuk ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan padanya dinotasikan dengan  $(R, +, \cdot)$ .

**HASIL DAN PEMBAHASAN****Near-Ring****Definisi 5.**

Diberikan himpunan  $N \neq \emptyset$ . Pada  $N$  didefinisikan operasi-operasi biner "+" dan ".". Himpunan  $N$  disebut *near-ring* terhadap kedua operasi biner tersebut, jika memenuhi :

- i).  $(N, +)$  adalah grup.
- ii).  $(N, \cdot)$  adalah semigrup.
- iii). Distributif kanan  
 $(\forall a, b, c \in N) (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Himpunan  $N$  yang membentuk *near-ring* terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan padanya dinotasikan dengan  $(N, +, \cdot)$ .

Contoh 1:

Misalkan  $(G, +)$  grup, maka  $F(G) = \{f : G \rightarrow G\}$  (himpunan semua fungsi dari  $G$  ke  $G$ ) merupakan *near-ring* terhadap operasi penjumlahan dan komposisi fungsi dengan aturan sebagai berikut :

- $$(\forall f, g \in F(G)) (\forall x \in G)$$
- i).  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ .
  - ii).  $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ .

**Bukti**

I.  $(F(G), +)$  grup.

- a. Tertutup  
 Ambil sebarang  $f, g \in F(G)$ .  
 Akan ditunjukkan  $f + g \in F(G)$ .  
 $f \in F(G) \Leftrightarrow f(x) \in G$  dan  
 $g \in F(G) \Leftrightarrow g(x) \in G$ .  
 $f + g \in F(G) \Leftrightarrow (f + g)(x) \in G$   
 Ambil sebarang  $x \in G$ , maka  
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$   
 Karena  $f(x) \in G$ ,  $g(x) \in G$  dan  $G$  grup maka  
 $f(x) + g(x) \in G$ .  
 Karena  $f(x) + g(x) \in G$  maka  $(f + g)(x) \in G$   
 atau  $f + g \in F(G)$ .

b. Asosiatif

Ambil sebarang  $f, g, h \in F(G)$ .  
 Akan ditunjukkan  $(f + g) + h = f + (g + h)$ .  
 Ambil sebarang  $x \in G$ , maka  

$$\begin{aligned} [(f + g) + h](x) &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= [f + (g + h)](x) \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua fungsi maka terbukti  $(f + g) + h = f + (g + h)$ .

c. Terdapat elemen netral

Ambil sebarang  $f \in F(G)$ .  
 Akan ditunjukkan terdapat  $g \in F(G)$  sehingga  
 $f + g = g + f = f$ .  
 Ambil sebarang  $x \in G$  maka  
 $(f + g)(x) = f(x)$   
 $f(x) + g(x) = f(x)$   
 karena  $f(x) \in G$  dan  $G$  grup maka  
 $-f(x) \in G$ .  
 $-f(x) + f(x) + g(x) = -f(x) + f(x) + g(x)$   
 $0 + g(x) = 0$   
 $g(x) = 0$   
 $g(x) = O(x)$  ,

dimana  $(\forall x \in G) O(x) = 0$ .

Menurut kesamaan dua fungsi diperoleh  $g = O$ .

Bukti untuk  $g + f = f$  sejalan.

d. Setiap elemen punya invers

Ambil sebarang  $f \in F(G)$ .

Akan ditunjukkan terdapat  $f^{-1} \in F(G)$

sehingga  $f + f^{-1} = f^{-1} + f = O$ .

Ambil sebarang  $x \in G$  maka

$$(f + f^{-1})(x) = O(x)$$

$$f(x) + f^{-1}(x) = O(x)$$

$$f(x) + f^{-1}(x) = 0$$

karena  $f(x) \in G$  dan  $G$  grup maka  $-f(x) \in G$ .

$$-f(x) + f(x) + f^{-1}(x) = -f(x) + 0$$

$$f^{-1}(x) = -f(x)$$

Menurut kesamaan dua fungsi diperoleh  $f^{-1} = -f$ .

Bukti untuk  $f^{-1} + f = O$  sejalan.

II.  $(F(G), \circ)$  semigrup.

a. Tertutup

Ambil sebarang  $f, g \in M(G)$ .

Akan ditunjukkan  $f \circ g \in F(G)$ .

$$f \in F(G) \Leftrightarrow f(x) \in G \text{ dan}$$

$$g \in F(G) \Leftrightarrow g(x) \in G.$$

$$f \circ g \in F(G) \Leftrightarrow (f \circ g)(x) \in G$$

Ambil sebarang  $x \in G$  maka

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

Karena  $g(x) \in G$  maka  $f[g(x)] \in G$ .

Karena  $f[g(x)] \in G$  maka  $(f \circ g)(x) \in G$

atau  $f \circ g \in F(G)$ .

b. Asosiatif

Ambil sebarang  $f, g, h \in F(G)$ .

Akan ditunjukkan  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .

Ambil sebarang  $x \in G$  maka

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)[h(x)]$$

$$= f[g(h(x))]$$

$$= f[(g \circ h)(x)]$$

$$= [f \circ (g \circ h)](x)$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua fungsi maka terbukti  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .

III. Distributif Kanan

Ambil sebarang  $f, g, h \in F(G)$ .

Akan ditunjukkan  $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ .

Ambil sebarang  $x \in G$ , maka

$$[(f + g) \circ h](x) = (f + g)[h(x)]$$

$$= f[h(x)] + g[h(x)]$$

$$= (f \circ h)(x) + (g \circ h)(x)$$

$$= [f \circ h + g \circ h](x)$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua fungsi maka terbukti  $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ .

Berdasarkan I, II dan III terbukti bahwa  $(F(G), +, \circ)$  *near-ring*.

Pada contoh ini distributif kiri tidak berlaku karena

$$[f \circ (g + h)](x) = f[(g + h)(x)]$$

$$= f[g(x) + h(x)]$$

Namun, belum tentu

$$f[g(x) + h(x)] = f[g(x)] + f[h(x)].$$

Terlihat bahwa fungsi  $f$  harus linier atau homomorfisma agar memenuhi kondisi di atas.

Contoh 2:

Telah diketahui bahwa  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$  dan  $(\mathbb{Z}, +)$  masing-masing merupakan grup. Berdasarkan Contoh 1, maka dapat diperoleh  $(F(\mathbb{R}), +, \circ)$ ,  $(F(\mathbb{Q}), +, \circ)$  dan  $(F(\mathbb{Z}), +, \circ)$  masing-masing merupakan *near-ring*.

Contoh 3:

Berdasarkan Contoh 1 juga dapat diperoleh bahwa

$$F_0(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f(0) = 0\}$$

merupakan *near-ring* terhadap operasi penjumlahan "+" dan komposisi "o" fungsi.

Contoh 4:

Diberikan  $(G, +)$  grup. Pada  $G$  didefinisikan operasi "." sebagai berikut

$$(\forall a, b \in G) a \cdot b = a$$

Dapat ditunjukkan bahwa  $(G, +, \cdot)$  merupakan *near-ring*.

**Bukti**

I.  $(G, +)$  grup.

Jelas dari yang diketahui.

II.  $(G, \cdot)$  semigrup

a. Tertutup

Ambil sebarang  $a, b \in G$ .

Akan ditunjukkan  $a \cdot b \in G$ .

Karena  $a \cdot b = a$  dan  $a \in G$  maka terbukti  $a \cdot b \in G$ .

b. Asosiatif

Ambil sebarang  $a, b, c \in G$ .

Akan ditunjukkan  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .

$$\begin{aligned}(a \cdot b) \cdot c &= a \cdot b \\ &= a \cdot (b \cdot c)\end{aligned}$$

III. Distributif kanan

Ambil sebarang  $a, b, c \in G$ .

Akan ditunjukkan  $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ .

$$\begin{aligned}(a+b) \cdot c &= a+b \\ &= a \cdot c + b \cdot c\end{aligned}$$

Berdasarkan I, II dan III terbukti bahwa  $(G, +, \cdot)$  *near-ring*.

Contoh 5:

Jelas bahwa semua ring pasti merupakan *near-ring*.

### Sifat-sifat Dasar *Near-ring*

Pada bagian ini akan dibahas sifat-sifat dasar dari *near-ring* yang berkaitan dengan elemen netral dan invers terhadap penjumlahan.

#### Teorema 1.

Jika  $N$  *near-ring* dan 0 elemen netral terhadap penjumlahan, maka  $(\forall a, b, c \in N)$  berlaku

- i).  $-(a+b) = -b - a$ .
- ii).  $0 \cdot a = 0$ .
- iii).  $(-a)b = -ab$ .
- iv).  $(a-b)c = ac - bc$

Tiga bagian pertama dari Teorema 1 di atas memperlihatkan perbedaan antara ring dan *near-ring*. Bagian pertama muncul karena pada *near-ring* tidak berlaku sifat abelian, sedangkan pada bagian kedua dan ketiga belum tentu berlaku  $a \cdot 0 = 0$  dan  $a(-b) = -ab$ . Hal ini dapat diperlihatkan dengan contoh berikut.

Contoh 6:

Telah diketahui  $(M(\mathbb{R}), +, \circ)$  *near-ring*.

Ambil  $f, O \in (M(\mathbb{R}), +, \circ)$

dimana  $(\forall x \in \mathbb{R})$

$$f(x) = 3x + 2 \text{ dan } O(x) = 0.$$

Selanjutnya,

$$(f \circ O)(x) = f[O(x)] = f(0) = 3 \cdot 0 + 2 = 2 \neq O(x)$$

Contoh 7:

Telah diketahui  $(M(\mathbb{R}), +, \circ)$  *near-ring*.

Ambil sebarang  $f, g \in (M(\mathbb{R}), +, \circ)$

dimana  $(\forall x \in \mathbb{R})$

$$f(x) = x^2 \text{ dan } g(x) = x + 2.$$

$$\begin{aligned}[f \circ (-g)](x) &= f[-g(x)] \\ &= f[-(x+2)] \\ &= f[-x-2] \\ &= (-x-2)^2 \\ &= x^2 + 4x + 4\end{aligned}$$

sedangkan,

$$\begin{aligned}-[f \circ g](x) &= -f[g(x)] \\ &= -f(x+2) \\ &= -(x+2)^2 \\ &= -(x^2 + 4x + 4) \\ &= -x^2 - 4x - 4\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $f \circ (-g) \neq -(f \circ g)$ . Untuk kasus ini fungsi  $f$  haruslah merupakan fungsi ganjil agar berlaku

$$f \circ (-g) = -(f \circ g).$$

Berdasarkan kasus pada Contoh 6 maka muncul definisi berikut.

#### Definisi 6.

Diberikan  $(N, +, \cdot)$  *near-ring*.

Himpunan  $N_0 = \{a \in N \mid a \cdot 0 = 0\}$  disebut simetris nol bagian dari  $N$ .

Jika  $N = N_0$  maka  $N$  disebut simetris nol.

Contoh 8:

Telah diketahui  $F(G)$  *near-ring*, maka

$$F_0(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f(0) = 0\}$$

merupakan simetris nol bagian dari  $F(G)$ .

Contoh 9:

Jelaslah bahwa semua ring pasti merupakan simetris nol.

### Klasifikasi *Near-ring*

Berdasarkan definisi *near-ring* dapat dilihat bahwa untuk menjadi *near-ring*, himpunan  $N$  tidak harus memenuhi sifat komutatif terhadap operasi "+" dan "." serta tidak harus mempunyai elemen satuan terhadap operasi ".". Pada bagian ini akan membahas lebih jauh tentang jenis-jenis *near-ring*.

Mengawali bagian ini akan diberikan definisi penting tentang *near-ring* abelian.

#### Definisi 7.

Suatu *near-ring*  $N$  dikatakan *near-ring* abelian jika  $N$  memenuhi sifat komutatif terhadap operasi "+", yaitu

$$(\forall a, b \in N) a + b = b + a$$

Contoh 10:

Telah diketahui  $(F(\mathbb{R}), +, \cdot)$  dan  $(F(\mathbb{Z}), +, \cdot)$  adalah *near-ring*. Terhadap operasi "+",  $\mathbb{R}$  dan  $\mathbb{Z}$  juga memenuhi sifat komutatif, maka  $(F(\mathbb{R}), +, \cdot)$  dan  $(F(\mathbb{Z}), +, \cdot)$  merupakan *near-ring* abelian.

### Definisi 8

Suatu *near-ring*  $N$  dikatakan *near-ring* distributif jika  $N$  memenuhi sifat distributif kiri, yaitu

$$(\forall a, b, c \in N) a(b+c) = ab+ac$$

Contoh 11:

Himpunan  $F_0(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f(0) = 0\}$  merupakan *near-ring* distributif.

### Bukti

Dari Contoh 3 telah diketahui bahwa  $F_0(G)$  merupakan *near-ring*.

Akan ditunjukkan pada  $F_0(G)$  berlaku sifat distributif kiri atau

$$(\forall f, g, h \in F_0(G)) f \circ (g+h) = (f \circ g) + (f \circ h)$$

Ambil sebarang  $f, g, h \in F_0(G)$ .

$$\begin{aligned} [f \circ (g+h)](0) &= f[(g+h)(0)] \\ &= f[g(0)+h(0)] \\ &= f(0+0) \\ &= f(0) \\ &= 0 \\ &= 0+0 \\ &= f(0)+f(0) \\ &= f(g(0))+f(h(0)) \\ &= [f \circ g](0)+[f \circ h](0) \\ &= [(f \circ g)+(f \circ h)](0) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan sifat kesamaan dua fungsi maka terbukti

$$f \circ (g+h) = (f \circ g) + (f \circ h).$$

Contoh 12:

Jelaslah bahwa setiap ring pasti merupakan *near-ring* distributif.

### Definisi 9

Suatu *near-ring*  $N$  dikatakan *near-ring* komutatif jika  $N$  memenuhi sifat komutatif terhadap operasi " $\cdot$ ", yaitu

$$(\forall a, b \in N) ab = ba$$

Contoh 13:

Himpunan

$$F_0(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f(0) = 0\}$$

merupakan *near-ring* komutatif.

Contoh 14:

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  merupakan *near-ring* komutatif dengan "+" dan " $\cdot$ " berurut-turut adalah operasi penjumlahan dan pergandaan pada himpunan  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  dan  $\mathbb{C}$ .

Karena *near-ring* dikembangkan dari ring, maka terdapat hubungan antara dua struktur tersebut. Hal ini akan diperlihatkan oleh teorema berikut.

### Teorema 2.

Misalkan  $(N, +, \cdot)$  *near-ring*.

- $N$  abelian dan komutatif jika dan hanya jika  $N$  ring komutatif.
- $N$  abelian dan distributif jika dan hanya jika  $N$  ring.
- Jika  $N$  distributif dan  $N \cdot N = N$  maka  $N$  ring

### Bukti

- i).  $\Rightarrow$ ). Diketahui  $N$  *near-ring* abelian dan komutatif.

Akan ditunjukkan  $N$  ring komutatif

Karena  $N$  *near-ring* abelian maka cukup ditunjukkan bahwa pada  $N$  berlaku sifat distributif kiri atau

$$(\forall a, b, c \in N) a(b+c) = ab+ac$$

Ambil sebarang  $a, b, c \in N$ .

Karena  $N$  *near-ring* maka berlaku sifat distributif kanan

$$(b+c)a = ba+ca$$

Karena  $N$  *near-ring* komutatif maka

$$(b+c)a = a(b+c) \text{ dan } ba+ca = ab+ac$$

Jadi diperoleh  $a(b+c) = ab+ac$ .

Karena pada  $N$  berlaku sifat abelian dan distributif kiri maka terbukti bahwa  $N$  ring. Karena  $N$  *near-ring* komutatif maka terbukti bahwa  $N$  ring komutatif.

- $\Leftarrow$ ). Diketahui  $N$  ring komutatif.

Akan ditunjukkan  $N$  *near-ring* abelian dan komutatif.

Karena  $N$  ring komutatif maka jelas bahwa  $N$  *near-ring* abelian dan komutatif.

- ii).  $\Rightarrow$ ). Diketahui  $N$  *near-ring* abelian dan distributif.

Akan ditunjukkan  $N$  ring.

Karena  $N$  distributif maka pada  $N$  berlaku sifat distributif kiri.

Karena pada  $N$  berlaku sifat abelian dan distributif kiri maka terbukti bahwa  $N$  ring.

- $\Leftarrow$ ). Diketahui  $N$  ring.

Akan ditunjukkan  $N$  *near-ring* abelian dan distributif.

Karena  $N$  ring maka jelas terbukti bahwa  $N$  *near-ring* abelian dan distributif.

iii). Diketahui  $N$  distributif dan  $N \cdot N = N$ .

Akan ditunjukkan  $N$  ring.

Akan digunakan bagian ii). di atas untuk membuktikannya.

Telah diketahui bahwa  $N$  distributif maka tinggal dibuktikan bahwa  $N$  abelian.

Ambil sebarang  $m, n \in N$ .

Harus ditunjukkan bahwa  $m+n = n+m$ .

Karena  $m, n \in N$  dan  $N \cdot N = N$  maka

$$(\exists a, b, c, d \in N) m = ab \text{ dan } n = cd.$$

Selanjutnya,

$$(a+c)(d+b) = ad + ab + cd + cb$$

dan

$$(a+c)(d+b) = ad + cd + ab + cb$$

sehingga

$$ad + ab + cd + cb = ad + cd + ab + cb$$

$$(-ad) + ad + ab + cd + cb + (-bc)$$

$$= (-ad)ad + cd + ab + cb + (-bc)$$

$$ab + cd = cd + ab$$

$$m + n = n + m$$

Terbukti bahwa  $N$  abelian.

Jadi, karena pada  $N$  berlaku sifat abelian dan distributif kiri maka terbukti  $N$  ring.

#### Definisi 10.

Diberikan  $N$  *near-ring*.

- i).  $e \in N$  disebut elemen satuan kiri terhadap operasi pergandaan jika  $(\forall a \in N) ea = a$ .
- ii).  $e \in N$  disebut elemen satuan kanan terhadap operasi pergandaan jika  $(\forall a \in N) ae = a$ .
- iii).  $e \in N$  disebut elemen satuan terhadap operasi pergandaan jika  $(\forall a \in N) ea = ae = a$

#### Definisi 11.

Suatu *near-ring*  $N$  dikatakan *near-ring* dengan elemen satuan jika  $N$  memuat elemen netral terhadap operasi pergandaan, yaitu

$$(\exists e \in N) (\forall a \in N) ae = ea = a$$

Contoh 15:

Elemen satuan pada *near-ring*  $F(G)$  adalah fungsi identitas  $e$ , yakni  $e(x) = x, \forall x \in G$ .

Contoh 16

$(Z, +, \cdot), (Q, +, \cdot), (R, +, \cdot)$  dan  $(C, +, \cdot)$  adalah *near-ring* dengan elemen satuan 1.

Pada *near-ring* elemen satuan belum tentu tunggal dan bisa saja yang dimiliki hanya elemen satuan kiri atau elemen satuan kanan. Contoh berikut akan memperlihatkan hal tersebut.

Contoh 17:

Berdasarkan contoh 4 telah diketahui bahwa  $(G, +, \cdot)$  *near-ring*.

Ambil  $a, b, c \in G$  dimana  $b \neq c$ .

Dengan menggunakan operasi pergandaan yang telah didefinisikan diperoleh

$$ab = a \text{ dan } ac = a$$

Terlihat bahwa  $b$  dan  $c$  merupakan elemen satuan kanan dari  $a$  namun  $b \neq c$ .

Terlihat juga bahwa  $G$  tidak memiliki elemen satuan kiri karena  $(\nexists e \in G) (\forall a \in G) ea = a$ .

Teorema berikut memperlihatkan hubungan antara elemen satuan dan sifat abelian pada *near-ring* serta menunjukkan kondisi yang harus dipenuhi oleh  $N$  agar  $N$  abelian.

#### Teorema 3

Diberikan  $(N, +, \cdot)$  *near-ring* dengan elemen satuan  $e$ .

Jika  $(\forall n \in N) n(-e) = -n$  maka  $N$  abelian.

#### Bukti

Diketahui  $(N, +, \cdot)$  *near-ring* dan  $(\forall n \in N) n(-e) = -n$ .

Akan ditunjukkan  $N$  abelian atau

$$(\forall m, n \in N) m + n = n + m.$$

Ambil sebarang  $m, n \in N$ .

$$m + n = [(-m)(-e)] + [(-n)(-e)]$$

$$= (-m - n)(-e)$$

$$= -(-m - n)$$

$$= n + m$$

Karena  $m + n = n + m$  maka terbukti  $N$  abelian.

#### Teorema 4.

Jika  $N$  *near-ring* dengan elemen satuan  $e$  dan  $a \in N$  maka

$$i). (-e)a = -a$$

$$ii). (-e)(-e) = e$$

#### Bukti

- i). Akan ditunjukkan  $-a = (-e)a$  atau invers dari  $a$  adalah  $(-e)a$ .

$$a + (-e)a = e \cdot a + (-e)a$$

$$= (e + (-e))a$$

$$= 0 \cdot a$$

$$= 0$$

$$\text{Jadi } a + (-e)a = 0 \text{ atau } (-e)a = -a.$$

- ii). Dari i). ambil  $a = -e$  diperoleh

$$\begin{aligned}(-e)(-e) &= -(-e) \\ &= e\end{aligned}$$

**Definisi 12.**

Misalkan  $N$  *near-ring* dengan elemen satuan  $e$  dan  $a \in N$ .

- i).  $s \in N$  disebut invers kiri dari  $a$  terhadap operasi pergandaan jika  $sa = e$ .
- ii).  $s \in N$  disebut invers kanan dari  $a$  terhadap operasi pergandaan jika  $as = e$ .
- iii).  $s \in N$  disebut invers dari  $a$  terhadap operasi pergandaan jika  $sa = as = e$ .

Invers perkalian dari  $a$  dinotasikan dengan  $a^{-1}$ .

Pada *near-ring* invers terhadap pergandaan juga belum tentu tunggal. Hal ini akan diperlihatkan dengan contoh berikut.

**Contoh 18**

Berdasarkan Contoh 4 telah diketahui bahwa  $(G, +, \cdot)$  *near-ring*.

Ambil  $a, b, c, d \in G$  dimana  $c \neq d$ .

Karena  $ab = a$  maka dapat dikatakan bahwa  $b$  merupakan elemen satuan kanan dari  $a$ . Selanjutnya,

$$bc = b \text{ dan } bd = b$$

Terlihat bahwa  $c$  dan  $d$  merupakan invers kanan dari  $a$  namun  $c \neq d$ .

**Teorema 5.**

Diberikan  $(N, +, \cdot)$  *near-ring* dengan elemen satuan  $e$  dan  $a, b \in N$ . Jika  $a$  dan  $b$  masing-masing mempunyai invers maka  $ab$  juga mempunyai invers yaitu  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

**Bukti**

Akan ditunjukkan  $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e$ .

$$\begin{aligned}(ab)(b^{-1}a^{-1}) &= a(bb^{-1})a^{-1} \\ &= aea^{-1} \\ &= aa^{-1} \\ &= e\end{aligned}$$

Karena  $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e$  maka terbukti  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

**KESIMPULAN**

1. Posisi elemen netral pada pergandaan sebarang elemen dengan elemen netral sangat menentukan apakah hasilnya elemen netral atau bukan.
2. Ciri khusus yang ditambahkan pada suatu *near-ring* membentuk jenis *near-ring* yang baru. Hal inilah sangat membantu dalam mengklasifikasikan *near-ring*.
3. Elemen identitas dan invers suatu elemen tidak tunggal.

**DAFTAR PUSTAKA**

- A. Adkins, William, dkk. *Algebra*. (1992) Springer. New York.
- Pilz, Günter. (1983) *Near-Rings*. North-Holland. New York.
- Abbasi, S. Jaban. Iqbal, Kahkashan. (2007). *On Near-Integral Domain*. Technology Forces. Pakistan



## ANALISIS KETIMPANGAN PEMBANGUNAN ANTARA KECAMATAN DI KOTA AMBON *Analysis of the Development Imbalance between Districts in Ambon City*

**JEFRI TIPKA**

*Badan Pusat Statistik Provinsi Maluku*  
Jl. Wolter Monginsidi – Passo, Ambon 97323  
E-mail : jefri.tipka@bps.go.id

### ABSTRAK

Perbedaan tingkat kuantitas dan kualitas sumber daya alam yang dimiliki suatu wilayah serta perbedaan kuantitas dan kualitas infrastruktur yang dimiliki wilayah, hal inilah yang menjadi salah satu penyebab timbulnya ketimpangan atau kesenjangan antar daerah. Tingkat perbedaan pendapatan masyarakat selain berasal dari faktor internal seperti SDM (sumber daya manusia) juga disebabkan dari faktor eksternal yakni ketimpangan antar wilayah. Adapun tujuan dari penelitian ini untuk mengetahui pola dan struktur ekonomi kecamatan di Kota Ambon, untuk mengetahui pengaruh tingkat ketimpangan pembangunan ekonomi terhadap pertumbuhan ekonomi di Kota Ambon, dan untuk mengetahui apakah hipotesis kuznets tentang “U-terbalik” berlaku di Kota Ambon. Penelitian ini menggunakan data PDRB dari tahun 2007 – 2010, serta jumlah penduduk tahun 2007 – 2010. Teknik analisis dengan Analisis Tipologi Klassen, Analisis Indeks Williamson dan Korelasi Pearson.

**Kata Kunci :** *Ketimpangan Pembangunan, Indeks Williamson, Kurva U-terbalik*

### PENDAHULUAN

Ketidak puasan timbul akibat pengendalian pemerintah terhadap pengendalian pemerintah pusat terhadap pengalihan sumber daya alam di daerah serta kurangnya sensitifnya pemerintah terhadap perbedaan antar daerah. permintaan yang kuat akan pembagian kewenangan ini memunculkan ketidakpuasan. Diperkuat oleh adanya krisis moneter dan pergolakan politik mulai tahun 1997.

Di samping itu, pemberian otonomi kepada daerah sangat perlu untuk memperbesar partisipasi masyarakat di seluruh Indonesia dalam memberikan keputusan yang berdampak langsung kepada daerahnya, sebab sangat tidak realistis Pemerintah Pusat membuat keputusan mengenai pelayanan masyarakat untuk seluruh wilayah negara. Demikian juga diyakini bahwa masyarakat lokal melalui kabupaten/kota memiliki pengetahuan yang lebih tentang kebutuhan, kondisi dan yang diprioritaskan. Mobilisasi sumber daya lebih dimungkinkan dilakukan oleh masyarakat yang dekat dengan pengambil keputusan di tingkat lokal. Otonomi daerah, anggaran daerah menjadi pintu penting yang paling mungkin setiap daerah

mendinamisir kegiatan pembangunan melalui alokasi yang tepat dalam rangka membuat strategi untuk menciptakan kebijakan yang lebih tepat dalam rangka membuat strategi untuk menciptakan kebijakan yang lebih sesuai situasi masing-masing daerah.

Pemerintah daerah tidak perlu lagi harus tergantung pada pusat dalam menentukan kebijakan publik karena daerahlah yang sebenarnya mengerahui secara pasti kebutuhannya. Keikutsertaan masyarakat dalam pembuatan kebijakan publik, membuat mereka merasa memiliki dan mau ikut bertanggung jawab terhadap pembangunan yang berlangsung. Untuk meningkatkan kesejahteraan masyarakat diperlukan pertumbuhan ekonomi yang meningkat dan distribusi pendapatan yang merata. Pertumbuhan ekonomi diukur dengan Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) dan laju pertumbuhannya atas dasar harga konstan. Ekonomi suatu daerah dikatakan mengalami pertumbuhan yang berkembang apabila tingkat kegiatan ekonominya lebih tinggi daripada apa yang dicapai pada masa sebelumnya.

Pertumbuhan ekonomi merupakan salah satu indikator kesejahteraan masyarakat pada suatu daerah. Apabila pertumbuhan ekonomi suatu daerah meningkat

diharapkan pertumbuhan tersebut dapat dinikmati merata oleh seluruh masyarakat. Sejalan dengan Hipotesis Kuznet mengenai kurva U-terbalik, dimana pada tahap-tahap pertumbuhan awal distribusi pendapatan cenderung memburuk, namun pada tahap-tahap berikutnya hal tersebut akan membaik.

Kota Ambon sebagai salah satu wilayah dengan 1. sebaran yang cukup tinggi juga mengalami ketidakterataan dalam percepatan pembangunan antar 2. wilayahnya. Pembangunan yang dilakukan di wilayah bertujuan tidak hanya untuk meningkatkan pendapatan per kapita masyarakat, namun juga untuk mengejar ketertinggalan pertumbuhan ekonomi dibandingkan dengan wilayah lain.

Tabel 1. PDRB Kecamatan di Kota Ambon Atas Dasar Harga Berlaku Tahun 2007 – 2010 (Juta Rupiah)

KECAMATAN	TAHUN			
	2007	2008	2009	2010
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Nusaniwe	594.982,94	679.963,23	764.354,53	874.606,90
Sirimau	1.070.282,05	1.224.897,33	1.384.700,22	1.590.697,29
Teluk Ambon	315.345,19	358.709,45	400.018,54	455.708,93
Teluk Ambon Baguala	266.777,95	306.399,75	344.405,04	395.104,21
Leitimur Selatan	86.425,25	98.264,79	109.974,11	125.558,38
<b>Kota Ambon</b>	<b>2.333.813,38</b>	<b>2.668.234,55</b>	<b>3.003.452,44</b>	<b>3.441.675,71</b>

Sumber : Badan Pusat Statistik Kota Ambon, PDRB 2007 – 2010

Tabel 2. PDRB Per Kapita Pada Kecamatan di Kota Ambon Tahun 2007 – 2010 (Rupiah)

KECAMATAN	TAHUN			
	2007	2008	2009	2010
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Nusaniwe	6.485.995	7.363.981	7.415.771	7.516.574
Sirimau	10.361.888	11.779.086	11.791.807	11.996.226
Teluk Ambon	9.878.627	11.158.945	11.174.996	11.277.766
Teluk Ambon Baguala	5.703.814	6.513.740	6.512.848	6.623.542
Leitimur Selatan	6.814.490	7.696.095	8.073.289	8.169.002
<b>Kota Ambon</b>	<b>8.153.418</b>	<b>9.260.482</b>	<b>9.309.381</b>	<b>9.450.426</b>

Sumber : Badan Pusat Statistik Kota Ambon, PDRB 2007 – 2010

Tabel 3. Laju Pertumbuhan PDRB Pada Kecamatan di Kota Ambon Tahun 2007 – 2010 (Persen)

KECAMATAN	TAHUN					Rata-rata
	2007	2008	2009	2010		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
Nusaniwe	6,30	5,91	5,40	6,33	5,87	
Sirimau	6,24	6,05	5,94	6,74	6,35	
Teluk Ambon	6,53	5,73	5,06	7,81	6,45	
Teluk Ambon Baguala	6,52	5,69	5,50	6,14	5,78	
Leitimur Selatan	5,70	5,34	4,69	4,92	5,14	
<b>Kota Ambon</b>	<b>6,31</b>	<b>5,91</b>	<b>5,58</b>	<b>6,65</b>	<b>6,13</b>	

Sumber : BPS Kota Ambon, PDRB 2007 – 2010 (data diolah)

Berdasarkan uraian sebelumnya menunjukkan bahwa kondisi kesejahteraan terlihat dari PDRB per kapita antara Kecamatan Sirimau (PDRB perkapita tertinggi) dan Kecamatan Teluk Ambon Baguala (PDRB perkapita terendah). Dengan demikian dapat dirumuskan Tujuan dari penelitian ini adalah

1. Untuk mengetahui pola struktur ekonomi kecamatan di Kota Ambon.

2. Untuk mengetahui pengaruh tingkat ketimpangan pembangunan ekonomi terhadap pertumbuhan ekonomi di Kota Ambon.

3. Untuk mengetahui apakah hipotesis Kuznets tentang “U terbalik” berlaku di Kota Ambon.

## METODE PENELITIAN

### Analisis Tipologi Klasen

Dalam penelitian ini pendekatan yang digunakan adalah pendekatan daerah yaitu empat daerah kuadran dibagi menurut klasifikasi daerah seperti yang ditunjukkan oleh Tabel 4.

Tabel 4. Klasifikasi Tipologi Klasen Pendekatan Daerah

PDRB perkapita Laju Pertumbuhan	$ydi > yni (+)$	$ydi < yni (-)$
	$rdi > rni (+)$	(I) Daerah maju dan tumbuh cepat
$rdi < rni (-)$	(III) Daerah maju tapi tertekan	(IV) Daerah relatif tertinggal

Keterangan:

$rdi$  = laju pertumbuhan kecamatan  $i$

$rni$  = laju pertumbuhan total Kota Ambon

$ydi$  = PDRB per kapita kecamatan  $i$

$rni$  = PDRB per kapita Kota Ambon

- Kuadran I (pertama) yakni daerah cepat maju dan cepat tumbuh (*high income and high growth*) adalah kecamatan yang memiliki pertumbuhan ekonomi dan pendapatan perkapita yang lebih tinggi dibanding dengan kota Ambon.
- Kuadran II (kedua) yakni daerah berkembang cepat tapi tidak maju (*high growth but low income*) adalah kecamatan yang memiliki tingkat pertumbuhan tinggi, tetapi tingkat pendapatan perkapita lebih rendah dibandingkan dengan Kota Ambon.
- Kuadran III (ketiga) yakni daerah maju tapi tertekan (*high income but low growth*) adalah kecamatan yang memiliki pendapatan perkapita lebih tinggi tetapi tingkat pertumbuhannya lebih rendah dibandingkan dengan Kota Ambon.
- Kuadran IV (keempat) adalah daerah relatif tertinggal (*low growth and slow income*) adalah kecamatan yang

memiliki tingkat pertumbuhan ekonomi dan pendapatan perkapita lebih rendah dibanding dengan Kota Ambon.

### Analisis Indeks Williamson

Untuk mengetahui ketimpangan antar kecamatan yang terjadi Kota Ambon dapat dianalisis menggunakan indeks ketimpangan regional (*regional inequality*) yang dinamakan indeks williamson. Indeks ketimpangan regional ini diformulasikan sebagai berikut :

$$IW = \frac{\sqrt{\sum (Y_i - Y)^2 \left(\frac{f_i}{n}\right)}}{Y} \quad (1)$$

Keterangan :

$Y_i$  = PDRB per kapita di kecamatan  $i$

$Y$  = PDRB rata-rata per kapita di Kota Ambon

$f_i$  = jumlah penduduk kecamatan  $i$

$n$  = jumlah penduduk Kota Ambon

Formula indeks Williamson menggunakan PDRB per kapita dan jumlah penduduk dimana nilai yang diperoleh antara nol dan satu ( $0 < W < 1$ ). Dengan indikator bahwa apabila angka indeks ketimpangan Williamson semakin mendekati nol maka menunjukkan ketimpangan yang semakin kecil dan bila angka indeks menunjukkan semakin jauh dari nol maka akan menunjukkan ketimpangan yang makin lebar.

### Korelasi Pearson

Hasil korelasi pearson dapat dilihat dari nilai signifikansi, bentuk korelasi positif atau negatif apabila hubungan 2 variabel tersebut menunjukkan adanya korelasi pearson nilainya kurang atau lebih dari nol (0), apabila menunjukkan tidak adanya hubungan maka nilai korelasi adalah nol (0). Nilai korelasi positif berarti arah hubungan antar variabel yang satu dengan variabel yang lain adalah satu arah, dengan kata lain apabila terjadi peningkatan pertumbuhan PDRB maka peningkatan tersebut akan mempengaruhi tingkat kesenjangan pendapatan regional. Hasil dari analisis korelasi pearson ini digunakan untuk mengetahui hubungan antar Indeks Wiliamson dengan pendapatan perkapita.

### Teori Kuznets tentang Kurva U-terbalik

Simon Kusnetz yang mempelopori analisis pola-pola pertumbuhan historis di negara-negara maju mengemukakan bahwa pada tahap awal berikutnya, distribusi pendapatannya cenderung memburuk, namun pada tahap berikutnya, distribusi pendapatannya akan membaik. Observasi ini dikenal secara luas sebagai konsep kurva “U-terbalik”, karena perubahan longitudinal (*time-series*) dalam distribusi pendapatan akan menurun seiring dengan peningkatan PDRB per kapita pada tahap pembangunan selanjutnya. Kemerosotan jangka pendek dalam pertumbuhan pendapatan per kapita sering mengakibatkan ketimpangan yang menajam. Hipotesis Kuznets (kurva U-terbalik) dapat dibuktikan dengan membuat PDRB perkapita dan indeks kesenjangan. Grafik tersebut merupakan hubungan antar pertumbuhan

PDRB dengan indeks Entropi Theil selama periode pengamatan. Kurva U-terbalik menggambarkan kesenjangan distribusi pendapatan yang meningkat pada tahap awal pembangunan dan menurun pada tahap-tahap berikutnya.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Tipologi Klassen

Analisis Tipologi Klassen digunakan untuk mengetahui gambaran tentang struktur pertumbuhan ekonomi daerah antar kecamatan di Kota Ambon tahun 2007-2010. Berdasarkan rangkuman perhitungan Tipologi Klassen maka diperoleh klasifikasi pertumbuhan antar kecamatan di Kota Ambon seperti tabel 5.

Tabel 5 menunjukkan klasifikasi pertumbuhan ekonomi kecamatan di Kota Ambon, dapat diuraikan bahwa dari lima kecamatan yang ada di Kota Ambon, dapat diklasifikasikan menjadi dua. Daerah yang pertama yakni daerah maju dan tumbuh cepat terdiri dari dua kecamatan yakni, Kecamatan Sirimau dan Kecamatan Teluk Ambon. Daerah Kedua yakni daerah yang relatif tertinggal, terdiri dari tiga kecamatan yaitu Kecamatan Nusaniwe, Kecamatan Teluk Ambon Baguala dan Kecamatan Leitumur Selatan.

Tabel 5. Klasifikasi Pertumbuhan Ekonomi Kecamatan di Kota Ambon menurut Tipologi Klassen

PDRB perkapita	$y_{di} > y_{ni} (+)$	$y_{di} < y_{ni} (-)$
Laju Pertumbuhan		
$r_{di} > r_{ni} (+)$	(I) Daerah maju dan tumbuh cepat : <b>Kecamatan Sirimau, Teluk Ambon</b>	(II) Daerah berkembang cepat tapi tidak maju
$r_{di} < r_{ni} (-)$	(III) Daerah maju tapi tertekan	(IV) Daerah relatif tertinggal: <b>Kecamatan Teluk Ambon Baguala, Leitumur Selatan dan Nusaniwe</b>

Sumber : Hasil Analisis Tipologi Klassen (data diolah)

### Analisis Indeks Williamson

Besar kecilnya ketimpangan pendapatan antar kecamatan memberikan gambar tentang kondisi dan perkembangan pembangunan di Kota Ambon. Perkembangan pembangunan daerah wilayah Kota Ambon akan dibahas pemertaan PDRB per kapita antar kecamatan yang dianalisis dengan menggunakan Indeks Williamson. Indeks Williamson merupakan koefisien persebaran dari rata-rata nilai sebaran dihitung berdasarkan estimasi dari nilai PDRB dan penduduk yang berada pada lingkup wilayah dikaji dan dianalisis, hasil analisis indeks Williamson dapat dilihat pada Tabel 6.

Tabel 6. Indeks Williamson antar Kecamatan di Kota Ambon Tahun 2007 – 2010

No	Tahun	Indeks Williamson
(1)	(2)	(3)
1.	2007	0,2608
2.	2008	0,2623
3.	2009	0,3137
4.	2010	0,3371

Sumber : Hasil Analisis Indeks Williamson (data diolah)

Angka indeks williamson semakin kecil atau mendekati nol menunjukkan ketimpangan yang semakin kecil dengan kata lain makin merata, dan bila semakin jauh dari nol menunjukkan ketimpangan yang semakin melebar. Hal ini berarti membuktikan bahwa semakin banyak pembangunan yang dilakukan maka tingkat kemungkinan ketimpangan yang akan terjadi semakin tinggi.

Tabel 6 di atas menjelaskan bahwa pada tahun 2007 angka ketimpangan Indeks Williamson sebesar 0,2608; pada tahun 2008 angka ketimpangan Indeks Williamson naik menjadi 0,2623 dan terus meningkay pada tahun 2009 menjadi 0,3137. Tahun 2010 angka ketimpangan Indeks naik menjadi 0,3371. Hal ini berarti secara rata-rata PDRB per kapita antar kecamatan di Kota Ambon relatif tidak merata, atau semakin terjadi ketimpangan pembangunan dari tahun 2007 sampai tahun 2010.

#### Hubungan Antara Indeks Williamson Dengan Pendapatan Per Kapita

Hubungan antara Indeks Williamson dan pendapatan per kapita dapat dilihat dari analisis korelasi pearson. Hasil korelasi dapat dilihat dari nilai signifikansinya. Pengolahan data statistik melalui korelasi perarson untuk mengetahui hubungan antara Pendapatan per kapita dengan Indeks Williamson, hasilnya sebesar 0,975 dengan nilai signifikansi 0,025 yang berarti adalah secara statistik adanya korelasi pearson dan hubungannya adalah positif.

Tabel 7. Hasil Analisis Korelasi Perarson

		Indeks Williamson	PDRBperkapit a
IndeksWilliamson	Pearson Correlation	1	.975'
	Sig. (2-tailed)		.025
	N	4	4
PDRBperkapita	Pearson Correlation	.975'	1
	Sig. (2-tailed)	.025	
	N	4	4

Sumber : Hasil Analisis Korelasi Pearson (data diolah)

#### 4.4. Hipotesis Kuznets “U-terbalik” di Kota Ambon

Hipotesis Kuznets dapat dibuktikan dengan membuat grafik Indeks Williamson dengan Pendapatan Perkapita.

Tabel 8. Indeks Williamson dan Pendapatan Per Kapita Kota Ambon Tahun 2003 – 2010

No	Tahun	Indeks Williamson	PDRB Per Kapita (Rupiah)
(1)	(2)	(3)	(4)
1.	2003	0,2608	5.859.483
2.	2004	0,2623	6.021.242
3.	2005	0,3137	6.675.907
4.	2006	0,3371	7.543.975
5.	2007	0,2608	8.153.418
6.	2008	0,2623	9.260.482
7.	2009	0,3137	9.309.381
8.	2010	0,3371	9.450.426

Sumber : Hasil Analisis Indeks Williamson (data diolah)

Tabel 9. Hubungan Angka Indeks Williamson dengan Pendapatan Per Kapita Kota Ambon Tahun 2003 – 2010

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
Pendapatan Per Kapita Kota Ambon	-6.130E-7	.000	-14.996	-11.453	.000
Pendapatan Per Kapita Kota Ambon ** 2 (Constant)	3.840E-14	.000	14.497		.000
	2.698	.201		13.454	.000

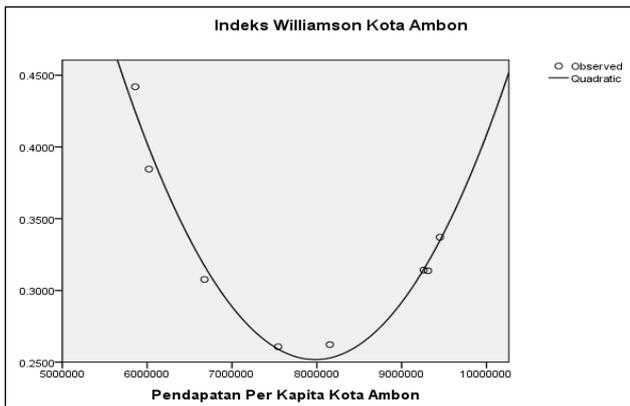
Sumber : Hasil Regresion Curve Estimation (data diolah)

Hubungan Angka Indeks Williamson dengan Pendapatan Per Kapita Kota Ambon diperoleh konstanta sebesar 2,698 b1 sebesar  $-6,130 \times 10^7$  dan nilai b2 sebesar  $3,840 \times 10^{14}$ . Nilai koefisien b2 bernilai positif ( $b_2 > 0$ ) menunjukkan akan diperoleh suatu kurva yang membentuk garis melengkung menaik. Nilai signifikan sebesar 0,000 secara statistik model *Regression Curve Estimation* dapat diterima sehingga persamaan *Regression Curve Estimation* adalah:

$$IW = 2,698 - (6,130 \times 10^7)Y + (3,840 \times 10^{14})Y^2 \quad (2)$$

Pembuktian kurva U-terbalik dilakukan dengan membuat kurva hubungan antara Indeks Williamson dengan pendapatan per kapita untuk itu digunakan *Regression Curve Estimation* seperti pada gambar 1.

Gambar 1 merupakan hubungan antara PDRB perkapita dan indeks ketimpangan. Gambar tersebut tidak menunjukkan kurva berbentuk U-terbalik, ini berarti teori Kuznets tentang kurva U-terbalik tidak berlaku di Kota Ambon. Ini membuktikan bahwa pada awal terjadinya pertumbuhan ekonomi disertai dengan ketimpangan yang menurun pada masa berikutnya ketimpangan ini akan semakin meningkat pada masa berikutnya.



Gambar 1. Grafik hubungan antara Indeks Williamson dan Pendapatan perkapita Kota Ambon, Tahun 2003 – 2010

Badan Pusat Statistik Kota Ambon. *Kota Ambon Dalam Angka 2011*. Ambon 2011.

Badan Pusat Statistik Kota Ambon. *Produk Domestik Regional Bruto Kota Ambon 2003-2008*. Ambon 2009.

Badan Pusat Statistik Kota Ambon. *Produk Domestik Regional Bruto Kota Ambon 2006-2010*. Ambon 2011.

Kuncoro, Mudjrat. *Otonomi Pembangunan Daerah*. Jakarta : Erlangga. 2004

Sari, Puput Desi Kurnia. *Pertumbuhan Ekonomi dan Ketimpangan Antar Kecamatan di Kabupaten Buleleng*. Dalam Jurnal Ekonomi Pembangunan Universitas Udayana. 2013.

## KESIMPULAN

Pembahasan hasil penelitian secara ringkas dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Dari hasil tipologi klassen Kota Ambon dapat di bagi menjadi dua klasifikasi. Daerah yang pertama yakni daerah maju dan tumbuh cepat terdiri dari dua kecamatan yakni Kecamatan Sirimau dan Kecamatan Teluk Ambon. Daerah yang kedua yakni daerah relatif tertinggal adalah Kecamatan Nusaniwe, Kecamatan, Kecamatan Teluk Ambon Baguala dan Kecamatan Leitimur Selatan.
2. Selama periode pengamatan tahun 2007-2010 angka ketimpangan di hitung dengan Indeks Williamson angkanya mengalami kenaikan dari tahun ke tahun. Hal ini dapat dikatakan ketimpangan pembangunan di Kota Ambon mengalami kenaikan dari tahun ke tahun sejalan dengan meningkatnya pertumbuhan ekonomi. Hipotesis Kuznets tentang kurva U-terbalik di Kota Ambon tidak berlaku pada periode penelitian (2003-2010).

## SARAN

Dari kesimpulan yang telah diuraikan maka dapat diajukan saran yaitu :

1. Pemerintah Daerah dalam kebijakannya agar memprioritaskan pada daerah yang relatif tertinggal (kuadran IV).
2. Pengujian hipotesis Kuznets menunjukkan bahwa tingkat pertumbuhan ekonomi yang meningkat menyebabkan ketimpangan meningkat, sehingga pemerintah perlu melaksanakan upaya pemerataan pembangunan, khususnya di daerah lain selain Kecamatan Sirimau dan Kecamatan Teluk Ambon.

## DAFTAR PUSTAKA

Badan Pusat Statistik Kota Ambon. *Kota Ambon Dalam Angka 2008*. Ambon 2008.

Badan Pusat Statistik Kota Ambon. *Kota Ambon Dalam Angka 2009*. Ambon 2009.

Badan Pusat Statistik Kota Ambon. *Kota Ambon Dalam Angka 2010*. Ambon 2010.



## MATRIKS PANGKAT DAN KEPERIODIKANNYA DALAM ALJABAR MAX-PLUS *The Power of Matrices and its Periodic in the Max-Plus Algebra*

VENN YAN ISHAK ILWARU

*Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura*  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon  
E-mail: vennilwaru007@gmail.com

### ABSTRAK

Dalam aljabar max-plus telah banyak dipelajari tentang sifat-sifat matriks. Salah satunya adalah keperiodikan suatu matriks yang tidak tereduksi. Telah diketahui pada aljabar max-plus bahwa barisan pangkat  $A^k$  dalam Aljabar Max-Plus, dengan  $A$  adalah matriks persegi yang tidak tereduksi, menjadi periodik setelah waktu terbatas  $T(A)$ , dan periode akhir  $\gamma$  samadengan siklisitas graf kritis dari  $A$ . Dalam hubungan ini dipelajari masalah komputasi dari matriks persegi yang berukuran  $n \times n$  yaitu jika diberikan  $k$ , hitung periodik pangkat  $A^r$  dengan  $r = k \pmod{\gamma}$  untuk  $r \geq T(A)$ . Ide utama adalah menggunakan penskalaan similaritas diagonal yang sesuai  $A \mapsto X^{-1}AX$ , yang disebut penskalaan visualisasi.

**Kata Kunci :** Graf Kritis, Periodik Pangkat, Periodik akhir.

### PENDAHULUAN

Pada Aljabar max-plus banyak permasalahan yang muncul, sehingga permasalahan itu dapat diselesaikan dengan mendapatkan suatu solusi yang tepat. Dalam penyelesaiannya, dibutuhkan analisis atau dengan menggunakan komputasi. Aljabar max-plus sering digunakan untuk memodelkan suatu permasalahan seperti transportasi, *manufacturing*, penjadwalan, sistem antrian, lalu lintas dan sebagainya.

Salah satu kegunaan dari pada aljabar max-plus yaitu dapat menyelesaikan dan mendapatkan suatu keperiodikan dari suatu permasalahan. Periodik yang dimaksud disini adalah periodik secara berkala. Untuk mempelajari periodik secara berkala, maka perlu dibahas visualisasi, dan perpangkatan matriks. Sehingga dapat membantu dalam menyelesaikan dan mendapatkan suatu periodik secara berkala.

Pada penelitian ini akan dibahas mengenai permasalahan yang diberikan oleh Sergei Sergeev (2009) yaitu menghitung periodik pangkat  $A^r$  dan mendapatkan perilaku periodik akhir dari  $\{A^i \otimes x\}$ .

### TINJAUAN PUSTAKA

Pada penelitian-penelitian sebelumnya telah banyak dibahas mengenai matriks tidak tereduksi dan matriks boolean. Pada (Bart De Schutter dkk, 1998) telah diberikan mengenai definisi dari pada matriks tidak tereduksi dan matriks boolean. Pada (Martin Cavalec, 1999) juga telah diberikan definisi mengenai keperiodikan suatu matriks.

Berikut ini akan diberikan materi yang diperlukan dalam pengerjaan penelitian. Materi yang diperlukan yaitu aljabar max-plus, vektor dan matriks pada aljabar max-plus, masalah spektral pada aljabar max-plus dan teori *Kleene star*.

Didefinisikan  $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$  dan  $e \stackrel{\text{def}}{=} 0$ . Himpunan  $R_{\max}$  adalah himpunan  $\mathfrak{R} \cup \{\varepsilon\}$ , dimana  $\mathfrak{R}$  adalah himpunan bilangan riil.

#### Definisi 1

Simbol  $R_{\max}$  menyatakan himpunan  $\mathfrak{R} \cup \{\varepsilon\}$  dengan dua operasi biner yaitu maksimum yang dinotasikan  $\oplus$  dan penjumlahan yang dinotasikan  $\otimes$ .

Untuk setiap  $a, b \in R_{\max}$ , didefinisikan operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  adalah

$$a \oplus b = \text{maks}(a, b) \text{ dan } a \otimes b = a + b.$$

Sehingga untuk setiap  $a \in R_{\max}$  dan  $\varepsilon$  didapatkan  $a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$  dan  $a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$ .

Himpunan  $R_{\max}$  dengan operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  disebut Aljabar Max-plus dan dinyatakan dengan  $\mathfrak{R} = (R_{\max}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$ .

Berikut adalah sifat-sifat Aljabar Max-plus (Heidergott dkk, 2006) sebagai berikut:

a. Asosiatif

$$\forall x, y, z \in R_{\max} : x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z,$$

dan

$$\forall x, y, z \in R_{\max} : x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$$

b. Komutatif

$$\forall x, y \in R_{\max} : x \oplus y = y \oplus x$$

dan

$$x \otimes y = y \otimes x$$

c. Distributif  $\otimes$  terhadap  $\oplus$

$$\forall x, y, z \in R_{\max} : x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

d. Eksistensi elemen nol, yaitu  $\varepsilon$

$$\forall x \in R_{\max} : x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$$

e. Eksistensi elemen satuan, yaitu  $e$

$$\forall x \in R_{\max} : x \otimes e = e \otimes x = x$$

f. Elemen nol adalah absorbing untuk operasi  $\otimes$

$$\forall x \in R_{\max} : x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$$

g. Idempoten dari operasi  $\oplus$

$$\forall x \in R_{\max} : x \oplus x = x$$

**Lemma 1**

Misalkan  $A \in R_{\max}^{n \times n}$  mempunyai nilai eigen  $\lambda$  yang berhingga, maka ada sebuah sirkuit  $p$  di  $G(A)$  sehingga

$$\lambda = \frac{|p|_w}{|p|_l}$$

**Teorema 1**

Sebarang matriks tidak tereduksi  $A \in R_{\max}^{n \times n}$  mempunyai satu dan hanya satu nilai eigen  $\lambda$ . Nilai eigen  $\lambda$  ini adalah bilangan berhingga dan nilainya sama dengan bobot rata-rata maksimum dari sirkuit pada  $G(A)$  yaitu:

$$\lambda(A) = \max_{p \in C(A)} \frac{|p|_w}{|p|_l}$$

**Teorema 2**

Misalkan sistem  $x(k+1) = A \otimes x(k)$  memenuhi asumsi dasar bahwa sistem mempunyai nilai eigen yang tunggal

dan jika diberikan nilai awal  $x(0) \neq \varepsilon$ , sistem akan bersifat periodik setelah iterasi yang berhingga. Misalkan  $p, q$  adalah bilangan bulat dengan  $p > q \geq 0$  dan  $c$  adalah bilangan riil yang berhingga sehingga  $x(p) = x(q) \otimes c$ .

Maka nilai eigen dari sistem adalah  $\lambda = \frac{c}{p-q}$  dengan vektor eigen yang bersesuaian adalah  $v = \bigoplus_{j=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes x(q+j-1))$ .

Dari teorema di atas, didapatkan Algoritma Power untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen.

**Algoritma Power (Subiono, 2000, hal. 86)**

- 1) Ambil sebarang vektor awal  $x(0) = x_0 \neq \mathbf{u}[\varepsilon]$ , yaitu  $x_0$  mempunyai minimal satu elemen berhingga.
- 2) Iterasi  $x(k+1) = A \otimes x(k)$  hingga ada bilangan bulat  $p, q$  dengan  $p > q \geq 0$  dan sebuah bilangan riil  $c$  sehingga  $x(p) = x(q) \otimes c$ , hingga suatu periodik didapatkan.
- 3) Hitung nilai eigen  $\lambda = \frac{c}{p-q}$ .
- 4) Hitung vektor eigen  $v = \bigoplus_{j=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes x(q+j-1))$ .

Untuk setiap  $A \in R_+^{n \times n}$

$A$  adalah Kleene star  $\Leftrightarrow A^2 = A, a_{ii} = 1, \forall i$   
 $\Leftrightarrow a_{ij} a_{jk} \leq a_{ik}, a_{ii} = 1, \forall i, j, k$

Kondisi  $\lambda(A) \leq 1$  menunjukkan bahwa ada hubungan yang kuat antara kleene stars dan masalah spektral.

**Proposisi 1**

Diberikan  $A \in R_{\max}^{n \times n}$  terdefinisi dan  $X = \text{diag}(x)$

- 1) Jika  $x = \bigoplus_{i=1}^n A_i^*$  maka  $X^{-1}AX$  adalah visualisasi
- 2) Jika  $x = \sum_{i=1}^n A_i^*$  maka  $X^{-1}AX$  adalah visualisasi *strictly*.

**Proposisi 2**

Diberikan  $A \in R_{\max}^{n \times n}$  terdefinisi dan diberikan  $t \geq 0$  sedemikian sehingga  $t_\gamma \geq n^2$ . Diberikan  $i, j \leq c$  sedemikian sehingga  $[i] \rightarrow_l [j], l \leq \gamma$ , mengakibatkan  $[j] \rightarrow_s [i]$ , dimana  $l + s = \gamma$ .

- 1) Jika  $A$  divisualisasikan maka  $a_{ij}^{(t\gamma+l)} = a_{ji}^{(t\gamma+s)} = 1$
- 2) Pada kasus umum  $a_{ij}^{(t\gamma+l)} a_{ji}^{(t\gamma+s)} = 1$

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

**Proyektor Spektral dan Matriks Periodesitas**

Untuk matriks  $A \in R_{\max}^{n \times n}$  yang tidak tereduksi dan terdefinisi, sesuai dengan matriks  $Q(A)$  dengan elemen-elemen:

$$q_{ij} = \bigoplus_{k=1}^c a_{ik}^* a_{kj}^*, \quad i, j = 1, \dots, n_c \tag{1}$$

Operator max-plus linear matriks  $Q(A)$  adalah proyektor spektral max-plus linear yang berkaitan dengan  $A$ , dalam arti bahwa  $R_{\max}^n$  pada eigencone  $V(A)$ . Operator ini sangat berkaitan dengan masalah periodisitas.  $Q(A)$  disebut juga matriks orbital.

**Definisi 2.**

Diberikan matriks  $A \in R_{\max}^{n \times n}$ ,  $Q \in R_{\max}^{n \times n}$  yang memenuhi  $AQ = QA = Q^2$  disebut spektral proyektor dari  $A$  yang berhubungan dengan nilai eigen  $\lambda$ .

Jika diberikan  $A \in R_{\max}^{n \times n}$  yang tidak tereduksi dan terdefinisi dan diberikan  $C(A)$  adalah primitive, maka terdapat bilangan bulat  $T(A)$  sehingga  $A^r = Q(A)$ , untuk semua  $r \geq T(A)$ .

Untuk matriks  $A \in R_{\max}^{n \times n}$  yang tidak tereduksi dan terdefinisi, setiap kolom kritis (atau baris) dari  $Q(A)$  adalah sama dengan korespondensi kolom (atau baris) dari  $A^*$ . Ketika  $C(A)$  mempunyai komponen imprimitive, sesuai dengan proposisi bahwa semua komponen dari  $C(A^\gamma)$  adalah primitive, dimana  $\gamma$  adalah siklisitas dari  $C(A)$ . Oleh karena itu, untuk setiap  $r$  yang cukup besar adalah kelipatan dari  $\gamma$ ,  $A^r$  adalah matriks dari proyektor spektral dalam eigencone dari  $A^\gamma$ . Ini juga mengakibatkan bahwa untuk  $r$  yang cukup besar, mempunyai  $A^r = A^{r+\gamma}$ . Jumlah  $r$  setelah dimulai disebut transient dari  $\{A^r\}$  dan dinotasikan dengan  $T(A)$ . Juga diketahui bahwa  $\gamma$  adalah periode akhir dari  $\{A^r\}$  yakni sedikitnya bilangan bulat  $\alpha$  sehingga  $A^{r+\alpha} = A^r$  untuk semua  $r \geq T(A)$ . Elemen  $a_{ij}^{(r)}$ , dimana  $i$  atau  $j$  adalah kritis, menjadi periodik jauh lebih cepat dari bagian non kritis dari  $A$ .

Berikut ini adalah proposisi untuk menentukan keperiodikan baris kritis dan kolom kritis dari matriks  $A^r$

**Proposisi 3.**

Diberikan  $A \in R_{\max}^{n \times n}$  yang tidak tereduksi dan terdefinisi. Baris dan kolom kritis dari  $A^r$  menjadi periodik untuk  $r \geq n^2$ .

**Bukti**

Diberikan  $i \leq c$ , maka terdapat sirkuit kritis dari panjang  $l_i$ . Oleh karena itu  $a_{ii}^{(kl_i)} = 1$  untuk  $k \geq 1$ . Untuk semua  $m < k$  dan beberapa  $t = 1, \dots, n$ , maka diperoleh:

$$a_{is}^{(ml_i)} = a_{ii}^{((k-m)l_i)} a_{is}^{(ml_i)} \leq a_{is}^{(kl_i)}$$

Selanjutnya

$$a_{is}^{(kl_i)} = \bigoplus_{m=1}^k a_{is}^{(ml_i)}. \tag{2}$$

Elemen-elemen  $a_{is}^{(kl_i)}$  merupakan bobot maksimal dari path dengan panjang  $k$  yang bersesuaian dengan matriks  $A^{l_i}$ . Karena bobot dari semua sirkuit adalah kurang dari atau sama dengan 1 dan semua path dari panjang  $n$  tidak sederhana. Maksimum dicapai pada saat  $k \leq n$ . Maka diperoleh bahwa  $a_{is}^{((t+1)l_i)} = a_{is}^{(tl_i)}$  untuk semua  $t \geq n$ . Lebih lanjut

$$a_{is}^{((t+1)l_i+d)} = \bigoplus_p a_{ip}^{(tl_i)} a_{ps}^{(d)}$$

Selanjutnya  $a_{is}^{((t+1)l_i+d)} = a_{is}^{(tl_i+d)}$  untuk semua  $t \geq n$  dan  $0 \leq d \leq l_i - 1$ . Sehingga  $a_{is}^{(k)}$  periodik untuk  $k \geq nl_i$  dan semua urutannya untuk setiap  $i \leq c$  dan setiap  $s$ , menjadi periodik untuk  $k \geq n^2$  ■

**Sifat-sifat Periodik Perpangkatan Matriks**

Periodik pangkat dari matriks yang tidak tereduksi dan terdefinisi dijelaskan dengan proposisi-proposisi berikut.

**Proposisi 4.**

Diberikan matriks  $A \in R_{\max}^{n \times n}$  yang tidak tereduksi dan terdefinisi dan  $t \geq 0$  sehingga  $t\gamma \geq T(A)$ . Maka untuk setiap bilangan bulat  $l \geq 0$

$$a_{k.}^{(t\gamma+l)} = \bigoplus_{i=1}^c a_{ki}^{(t\gamma)} A_i^{(t\gamma+l)}, \quad a_{.k}^{(t\gamma+l)} = \bigoplus_{i=1}^c a_{ik}^{(t\gamma)} A_i^{(t\gamma+l)}, \tag{3}$$

$1 \leq k \leq n$

**Bukti**

Untuk  $B = A^\gamma$  dan setiap  $t \geq T(B)$  diperoleh

$$b_{kj}^{(r)} = \bigoplus_{i=1}^c b_{ki}^* b_{ij}^*, \quad 1 \leq k, j \leq n \tag{4}$$

Dengan demikian diperoleh

$$b_{ki}^* = b_{ki}^{(t)} = a_{ki}^{(t\gamma)}$$

dan

$$b_{ij}^* = b_{ij}^{(t)} = a_{ij}^{(t\gamma)}$$

untuk semua  $t \geq T(B)$  atau ekuivalen dengan  $t\gamma \geq T(A)$  dan setiap  $i \leq c$ . Oleh karena itu

$$a_{kj}^{(t\gamma)} = \bigoplus_{i=1}^c a_{ki}^{(t\gamma)} a_{ij}^{(t\gamma)}, \quad 1 \leq k, j \leq n \quad (5)$$

Pada notasi matriks, persamaan di atas ekuivalen dengan

$$A_k^{t\gamma} = \bigoplus_{i=1}^c a_{ki}^{(t\gamma)} A_i^{t\gamma}, \quad A_k^{t\gamma} = \bigoplus_{i=1}^c a_{ik}^{(t\gamma)} A_i^{t\gamma}, \quad 1 \leq k \leq n \quad (6)$$

Perkalian persamaan (6) dengan matriks pangkat  $A^l$  akan diperoleh persamaan (3) ■

Pada pembuktian proposisi berikut akan digunakan prinsip sederhana berikut ini:

$$a_{ij}^{(r)} a_{jk}^{(s)} \leq a_{ik}^{(r+s)}, \quad \forall i, j, k, r, s \quad (7)$$

**Proposisi 5.**

Diberikan matriks  $A \in R_{\max}^{n \times n}$  yang tidak tereduksi dan terdefinisi dan diberikan  $i, j \in N_c(A)$  sedemikian sehingga  $[i] \rightarrow_l [j]$ , untuk  $0 \leq l < \gamma$ .

1) Terdapat  $t$  sedemikian sehingga untuk setiap  $r \geq n^2$

$$a_{ij}^{(t\gamma+l)} A_i^r = A_j^{r+l}, a_{ij}^{(t\gamma+l)} A_j^r = A_i^{r+l} \quad (8)$$

2) Jika matriks  $A$  adalah visualisasi maka untuk semua  $r \geq n^2$

$$A_i^r = A_j^{r+l}, A_j^r = A_i^{r+l} \quad (9)$$

**Bukti**

Diberikan  $s = \gamma - l$ . Dengan proposisi 2, terdapat  $t$  sedemikian sehingga  $a_{ij}^{(t\gamma+l)} a_{ji}^{(t\gamma+s)} = 1$ . Jika digabungkan dengan persamaan (7) maka diperoleh

$$\begin{aligned} A_i^r &= A_j^r a_{ij}^{(t\gamma+l)} a_{ji}^{(t\gamma+s)} \leq A_j^{r+t\gamma+l} a_{ji}^{(t\gamma+s)} \leq A_j^{r+(2t+1)\gamma} \\ A_j^r &= A_i^r a_{ij}^{(t\gamma+l)} a_{ji}^{(t\gamma+s)} \leq A_i^{r+t\gamma+l} a_{ji}^{(t\gamma+s)} \leq A_i^{r+(2t+1)\gamma} \end{aligned} \quad (10)$$

Dengan proposisi 2,  $A_i^r = A_j^{r+t\gamma}$  dan  $A_j^r = A_i^{r+t\gamma}$  untuk semua  $t \geq 0$  dan  $r \geq n^2$  maka semua ketidaksamaan pada persamaan (8) menjadi persamaan. Perkaliannya dengan  $a_{ij}^{(t\gamma+l)}$  diperoleh persamaan

$$A_i^r = A_j^{r+l}, A_j^r = A_i^{r+l} \quad \blacksquare$$

Diambil  $t\gamma \geq T(A)$ . Untuk setiap  $l \geq 0$ , diberikan  $C^{(l)} \in R_{\max}^{n \times c}$  atau sebaliknya  $R^{(l)} \in R_{\max}^{n \times c}$  menjadi matriks yang diekstrak dari kolom kritis dari  $A^{t\gamma+l}$  atau sebaliknya dari baris kritis  $A^{t\gamma+l}$ . Diberikan  $C := C^{(0)}, R := R^{(0)}$ . Dengan notasi ini dan dari proposisi 4 dan proposisi 5, maka dapat disimpulkan bahwa untuk visualisasi matriks tidak tereduksi  $A \in R_{\max}^{n \times n}$

$$A^{t\gamma+l} = C^{(l)} \otimes R = C \otimes R^{(l)} \quad (11)$$

$$C^{(l)} = C \otimes (A^{[c]})^l, R^{(l)} = (A^{[c]})^l \otimes R \quad (12)$$

Persamaan (11) setara dengan persamaan (3). Lebih lanjut  $[i] \rightarrow_l [j]$  jika dan hanya jika terdapat indeks  $p \in [i]$  dan  $s \in [j]$  sedemikian sehingga elemen  $(p, s)$  dari  $(A^{[c]})^l$  adalah 1, dan semua baris dari  $R$  atau kolom dari  $C$ , dengan indeks yang sama dengan kelas siklik adalah sama satu sama lain.

Dengan menggabungkan persamaan (11) dan persamaan (12) maka diperoleh

$$A^{t\gamma+l} = C \otimes (A^{[c]})^l \otimes R \quad (13)$$

Jika  $A$  tidak tervisualisasi tetapi terdefinisi tidak tereduksi, maka persamaan (12) dan persamaan (13) dapat dituliskan. Diberikan  $B = X^{-1}AX$  tervisualisasi. Dengan menerapkan penskalaan invers  $XBX^{-1}$  pada persamaan (13) (dimana  $B$  digantikan dengan  $A$ ) maka diperoleh persamaan dari bentuk yang sama, dimana  $C$  dan  $R$  adalah matriks yang diekstrak dari kolom kritis atau sebaliknya baris dari  $A^{t\gamma}$  dan  $A^{[c]}$  digantikan dengan matriks  $A^{[c]} = (a_{ij}^{(c)}) \in R_{\max}^{c \times c}$  yang didefinisikan dengan

$$a_{ij}^{(c)} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{jika } (i, j) \in E_c(A), \\ 0 & \text{jika } (i, j) \notin E_c(A), \end{cases} \quad i, j \leq c$$

**Penyelesaian Masalah Keperiodikan**

Diberikan  $A \in R_{\max}^{n \times n}$  dan  $\lambda(A) = 1$ .  $t$ -attraction cone  $\text{Attr}(A, t)$  adalah  $\text{maxcone}$  yang terdiri dari semua vektor  $x$ , dimana terdapat bilangan bulat  $r$  sehingga  $A^r \otimes x = A^{r+t} \otimes x$  dan hal ini juga berlaku untuk semua bilangan bulat yang lebih besar atau sama dengan  $r$ .

**Proposisi 6**

Diberikan matriks  $A$  tidak tereduksi dan terdefinisi. Sistem  $A^r \otimes x = A^{r+t} \otimes x$  setara dengan semua  $r \geq T(A)$ .

**Bukti**

Diberikan  $x$  yang memenuhi  $A^s \otimes x = A^{s+t} \otimes x$  untuk  $s \geq T(A)$ , maka juga akan memenuhi sistem ini untuk semua yang lebih besar dari  $s$ . Karena periodisitas untuk semua  $k$  dari  $T(A) \leq k \leq s$  terdapat  $l > s$  sehingga

$$A^k = A^l. A^k \otimes x = A^{k+t} \otimes x$$

juga memenuhi  $T(A) \leq k \leq s$  ■

**Akibat 1.**

$$\text{Attr}(A, t) = \text{Attr}(A^t, 1)$$

**Bukti**

Dengan proposisi 5,  $\text{Attr}(A, t)$  adalah solusi untuk sistem  $A^r \otimes x = A^{r+t} \otimes x$  untuk setiap  $r \geq T(A)$  yang adalah kelipatan dari  $t$  ■

Komponen dari  $A^r \otimes x = A^{r+t} \otimes x$  dengan indeks pada  $N_c(A) = \{1, \dots, c\}$  disebut kritis dan subsistem dari komponen-komponen dengan indeks ini disebut subsistem kritis.

**Lemma 2.**

Diberikan matriks  $A$  tidak tereduksi dan terdefinisi dan diberikan  $r \geq T(A)$ . Maka  $A^r \otimes x = A^{r+t} \otimes x$  setara dengan subsistem kritis.

**Bukti**

Berdasarkan komponen non kritis  $A_k^r \otimes x = A_k^{r+t} \otimes x$ . Dengan menggunakan persamaan (3) maka dapat dituliskan:

$$\bigoplus_{i=1}^c a_{ki}^{(r)} A_i^r \otimes x = \bigoplus_{i=1}^c a_{ki}^{(r+t)} A_i^{r+t} \otimes x \quad (14)$$

Hal ini merupakan kombinasi maksimum dari persamaan pada subsistem kritis ■

Berikutnya diberikan batasan dalam menghitung kompleksitas dalam memutuskan apakah  $x \in \text{Attr}(A, t)$ , seperti masalah-masalah yang lain yang dapat diformulasikan seperti di bawah ini:

P1. Diberikan  $x$ , uji apakah  $x \in \text{Attr}(A, t)$

P2. Diberikan  $x$ :  $0 \leq k < \gamma$ , hitung periodik matriks pangkat  $A^r$  dimana  $r = k \pmod{\gamma}$ .

P3. Diberikan  $x$ , hitung periodik akhir dari  $\{A^r \otimes x, r \geq 0\}$ , yang berarti sedikitnya bilangan bulat  $\gamma$  sedemikian sehingga  $A^{r+\gamma} \otimes x = A^r \otimes x$  untuk semua  $r \geq T(A)$ .

Untuk menyelesaikan P1-P3, maka dapat menggunakan metode sebagai berikut:

Pertama-tama perhatikan bahwa  $\lambda(A)$  dan vektor subeigen dapat dihitung dan mengidentifikasi semua titik kritis yang dilakukan dengan algoritma Floyd-Warshall. Selanjutnya mengidentifikasi semua kelas siklik  $C(A)$  dengan kondensasi Balcer-Veinott. Dengan proposisi 4, kolom kritis dan baris kritis menjadi periodik untuk  $r \geq n^2$ . Dengan mengetahui kolom kritis dan baris kritis pada  $r' \geq T(A)$ , itu sudah cukup untuk menghitung  $A^r$  untuk  $r \geq n^2$ , yang dapat diselesaikan dengan perpangkatan matriks persegi  $(A, A^2, A^4, \dots)$ . Persamaan (9) digunakan untuk permutasi siklik yang sesuai dengan kelas siklik. P1 dapat diselesaikan dengan

verifikasi dari subsistem kritis dari  $A^r \otimes x = A^{r+t} \otimes x$ . Dengan menggunakan bantuan persamaan (3), sisa submatriks non kritis dari  $A^r$ , untuk setiap  $r \geq T(A)$  sehingga  $r = k \pmod{\gamma}$  dapat dihitung. Ini adalah penyelesaian untuk P2. Baris non kritis dari matriks  $A$  merupakan generalisasi dari baris kritis, periodik akhir dari  $\{A^r \otimes x\}$  ditentukan dari komponen-komponen kritis.

Untuk visualisasi matriks, diketahui bahwa  $A_i^{r+t} = A_j^r$  untuk semua  $i, j$  sehingga  $[i] \rightarrow_t [j]$ . Ini berarti  $(A^r \otimes x)_i = (A^{r+t} \otimes x)_j$  untuk  $[i] \rightarrow_t [j]$ , artinya bahwa untuk menentukan periode dibutuhkan hanya sub vektor dari  $A^r \otimes x$  untuk setiap sembarang  $r \geq n^2$ . Untuk  $i \leq c$  dan  $r \geq n^2$ , barisan  $\{(A^r \otimes x)_i, t \geq 0\}$  dapat direpresentasikan dengan barisan dari koordinat kritis dari  $A^r \otimes x$  yang ditentukan oleh suatu permutasi pada kelas siklik  $\gamma_\mu$  dari komponen *strongly connected*. Untuk menghitung periode, dapat diambil contoh banyaknya  $\gamma_\mu$  secara berurutan pada barisan dan periksa semua periode-periode yang mungkin. Periode dari  $A^r \otimes x$  akan tampak seperti l.c.m. pada periode ini. Ini adalah penyelesaian P3.

**KESIMPULAN**

Kesimpulan yang dapat diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- 1) Jika diberikan matriks  $A \in R_{\max}^{n \times n}$  yang tidak tereduksi dan tervisualisasi maka baris kritis dan kolom kritis akan menjadi periodik untuk  $r \geq n^2$ .
- 2) Keperiodikan dari perpangkatan matriks persegi  $A^r$ , dapat dihitung untuk  $r \geq T(A)$  dan jika  $k$  diketahui.

**DAFTAR PUSTAKA**

- Bacelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., dan Quadrat, J. P. (2001), *Synchronization and Linearity*, John Wiley & Sons, New York.
- Papadimitriou, C. H., Steiglitz, K., *Combinatorial Optimization: "Algorithms and Complexity"*, Prentice Hall, New Jersey, 1982
- Heidergott, B. (2006), *Max Plus Algebra And Queues*, Vrije Universiteit. Department of Econometrics and Operations Research De Boelelaan 1105, 1081 HV Amsterdam, The Netherlands.
- Gavalec, M., "Linear Matrix Period in Max-Plus Algebra", *Linear Algebra Appl.* 307(2000) 167-182
- Butkovic, P., Cuninghame-Green, R. A., "On matrix powers in max-algebra", *Linear Algebra Appl.*
- Subiono. (2009), *Aljabar Max-Plus*, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya

Sergeev, S., Schneider, H., Butkovic, P. (2009) “On visualization scaling, subeigenvectors and kleene stars in max algebra”, *Linear Algebra Appl.*

**PENDEKATAN MODEL GEOGRAPHICALLY WEIGHTED REGRESSION  
UNTUK MENENTUKAN FAKTOR-FAKTOR YANG MEMPENGARUHI  
JUMLAH RUMAH TANGGA MISKIN DI PULAU BURU**

*Geographically Weighted Regression Model Approach to Determine  
Factors that Influence the Number of Poor Households in Buru Island*

**SALMON NOTJE AULELE**

*Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon  
E-mail: salmon.aulele@yahoo.com*

**ABSTRAK**

Kemiskinan merupakan persoalan yang kompleks, karena tidak hanya berkaitan dengan masalah rendahnya tingkat pendapatan dan konsumsi, tetapi juga berkaitan dengan rendahnya tingkat pendidikan, kesehatan serta ketidakberdayaannya untuk berpartisipasi dalam pembangunan. Tujuan penelitian ini adalah menentukan faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah rumah tangga miskin dengan memperhatikan faktor geografis di Pulau Buru menggunakan model *Geographically Weighted Regression* (GWR), sehingga diperoleh model yang dapat digunakan untuk memperkirakan jumlah rumah tangga miskin 13 Kecamatan di Pulau Buru. Hasil penelitian menunjukkan bahwa variabel yang signifikan mempengaruhi jumlah rumah tangga miskin di tiap kecamatan di Pulau Buru yaitu banyaknya rumah tangga yang tidak punya fasilitas tempat buang air besar atau bersifat umum ( $X_1$ ), banyaknya rumah tangga yang sumber penerangan utama bukan listrik ( $X_2$ ), banyaknya rumah tangga yang sumber air minumannya dari sumur/mata air tak terlindung/sungai ( $X_4$ ), banyaknya rumah tangga yang pengeluaran untuk makanannya lebih besar 80% ( $X_5$ ) serta banyaknya rumah tangga yang pendidikan tertinggi kepala rumah tangganya SD kebawah ( $X_7$ ).

**Kata Kunci :** *Kemiskinan, Faktor Geografis, Geographically Weighted Regression*

**PENDAHULUAN**

Kemiskinan merupakan masalah sosial yang bersifat global dan menjadi perhatian banyak orang di seluruh dunia. Fenomena kemiskinan telah berlangsung sejak lama, walaupun telah dilakukan berbagai upaya dalam menanggulangnya, namun sampai saat ini masih terdapat lebih dari 1,2 milyar penduduk dunia yang hidup dengan pendapatan kurang dari satu dolar perhari dan lebih dari 2,8 milyar penduduk dunia hanya berpenghasilan kurang dari dua dollar perharinya, hal ini masih di bawah tingkat pendapatan riil minimum internasional. Masyarakat miskin sering menderita kekurangan gizi, tingkat kesehatan yang buruk, tingkat kebodohan yang tinggi, lingkungan yang buruk dan ketiadaan akses infrastruktur maupun pelayanan publik yang memadai. Masyarakat

miskin masih mengalami kesulitan dalam memenuhi kebutuhan pangan, hal ini ditandai dengan rendahnya daya beli, ketersediaan pangan yang tidak merata, ketergantungan tinggi terhadap beras dan terbatasnya diversifikasi pangan. Pada bidang kesehatan, masyarakat miskin menghadapi masalah keterbatasan akses layanan kesehatan dan rendahnya status kesehatan yang berdampak pada rendahnya daya tahan mereka untuk bekerja dan mencari nafkah, terbatasnya kemampuan anak untuk tumbuh dan berkembang, dan rendahnya derajat kesehatan ibu.

Menurut BPS, saat ini Provinsi Maluku berada pada urutan ke-3 provinsi termiskin di Indonesia dengan memiliki persentase tingkat kemiskinan 27,7% dari total penduduk di Maluku. Untuk itu berbagai upaya harus dilakukan baik dari pemerintah provinsi Maluku maupun

seluruh masyarakat yang ada di Maluku untuk menurunkan tingkat kemiskinan. Aulele (2013) melakukan penelitian tentang kemiskinan di Provinsi Maluku dengan unit observasinya yaitu tiap Kabupaten/Kota. Penelitian ini merupakan lanjutan dari penelitian yang dilakukan oleh Aulele (2013), penelitian kali ini akan menggunakan model *Geographically Weighted Regression* (GWR) dengan pembobot fungsi *kernel biquare* untuk menyelidiki variabel-variabel yang berpengaruh terhadap penentuan jumlah penduduk miskin setiap Kecamatan di Pulau Buru yang merupakan salah satu Pulau yang ada di provinsi Maluku dengan memperhatikan faktor geografis dalam mengestimasi parameter modelnya.

**TINJAUAN PUSTAKA**

**1. Model Regresi Global**

Metode regresi merupakan metode yang memodelkan hubungan antara variabel respon (y) dan variabel bebas ( $x_1, x_2, \dots, x_p$ ). model regresi linier secara umum dinyatakan dengan

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p + \varepsilon \quad (1)$$

Jika diambil sebanyak  $n$  pengamatan, maka model di atas dapat ditulis sebagai:

$$y = \beta_0 + \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i \quad (2)$$

dengan  $i = 1, 2, \dots, n$  ;  $\beta_1, \dots, \beta_p$  adalah parameter model dan  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  adalah error yang diasumsikan identik, independen, berdistribusi Normal dengan mean nol dan varians konstan.  $\sigma^2$  Pada model ini, hubungan antara variabel bebas dengan variabel respon dianggap konstan pada setiap lokasi geografis. Estimator dari parameter model di dapat dari persamaan :

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y \quad (3)$$

**2. Model Geographically Weighted Regression (GWR)**

Model GWR merupakan pengembangan dari model regresi global dimana ide dasarnya diambil dari regresi non parametrik (Mei, 2005). Model ini merupakan model regresi linier bersifat lokal (*locally linier regression*) yang menghasilkan penaksir parameter model yang bersifat lokal untuk setiap titik atau lokasi dimana data tersebut dikumpulkan. Dalam model GWR, variabel dependen y diprediksi dengan variabel independen yang masing-masing koefisien regresinya bergantung pada lokasi dimana data tersebut diamati. Model GWR dapat ditulis sebagai berikut :

$$y_i = \beta_0(u_i, v_i) + \sum_{k=1}^p \beta_k(u_i, v_i) x_{ik} + \varepsilon_i \quad (4)$$

dengan :

$y_i$  : Nilai observasi variabel respon ke- $i$

$(u_i, v_i)$  : Menyatakan titik koordinat (*longitude, latitude*) lokasi  $i$

$\beta_k(u_i, v_i)$  : Koefisien regresi ;  $k = 0, 1, \dots, p$

$x_{ik}$  : Nilai observasi variabel prediktor  $k$  pada pengamatan ke- $i$

$\varepsilon_i$  : Error ke- $i$

Dalam pengujian hipotesis ada beberapa asumsi yang digunakan dalam model GWR, asumsi tersebut adalah :

- i. Bentuk error  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  diasumsikan independen, identik dan mengikuti distribusi normal dengan mean nol dan varian konstan ( $\varepsilon_i \sim IIDN(0, \sigma^2)$ )
- ii. Misalkan  $\hat{y}_i$  adalah penaksir dari  $y_i$  dilokasi ke- $i$ , maka untuk semua lokasi ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $\hat{y}_i$  adalah penaksir yang tak bias untuk  $E(y_i)$  atau dapat ditulis  $E(\hat{y}_i) = E(y_i)$  untuk semua  $i$

**3. Penaksiran Parameter Model GWR**

Estimasi parameter model GWR menggunakan metode *Weighted Least Squares* (WLS) yaitu dengan memberikan pembobot yang berbeda untuk setiap lokasi dimana data tersebut dikumpulkan. Misalkan pembobot untuk setiap lokasi  $(u_i, v_i)$  adalah  $w_{ij}(u_i, v_i)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  maka persamaan (4) menjadi :

$$w_{ij}^{1/2}(u_i, v_i) y_i = w_{ij}^{1/2}(u_i, v_i) \beta_0(u_i, v_i) + w_{ij}^{1/2}(u_i, v_i) \sum_{k=1}^p \beta_k(u_i, v_i) x_{jk} + w_{ij}^{1/2}(u_i, v_i) \varepsilon_j$$

Jika  $w_{ij}^{1/2}(u_i, v_i) \varepsilon_j = \varepsilon_j^*$  maka  $\varepsilon_j^*$  akan mengikuti distribusi normal dengan mean nol dan varian  $\sigma^2 w_{ij}(u_i, v_i)$  atau ditulis  $\varepsilon_j^* \sim N(0, \sigma^2 w_{ij}(u_i, v_i))$  sehingga :

$$\varepsilon_j^* = w_{ij}^{1/2}(u_i, v_i) (y_j - \beta_0(u_i, v_i) - \beta_1(u_i, v_i) x_{ij} - \dots - \beta_p(u_i, v_i) x_{jp}) \quad (5)$$

Penaksiran parameter model diperoleh dengan meminimumkan jumlah kuadrat error dari persamaan (5) sebagai berikut :

$$\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^{*2} = \sum_{j=1}^n (w_{ij}^{1/2}(u_i, v_i) (y_j - \beta_0(u_i, v_i) - \beta_1(u_i, v_i) x_{j1} - \dots - \beta_p(u_i, v_i) x_{jp}))^2$$

$$\sum_{j=1}^n w_{ij}(u_i, v_i) \varepsilon_j^2 = \sum_{j=1}^n w_j(u_i, v_i) (y_j - \beta_0(u_i, v_i) - \beta_1(u_i, v_i) x_{j1} - \dots - \beta_p(u_i, v_i) x_{jp})^2$$

Misalkan

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\beta(u_i, v_i) = \begin{bmatrix} \beta_0(u_i, v_i) \\ \beta_1(u_i, v_i) \\ \vdots \\ \beta_p(u_i, v_i) \end{bmatrix}$$

$$W(u_i, v_i) = \text{diag} [w_1(u_i, v_i), w_2(u_i, v_i), \dots, w_n(u_i, v_i)]$$

$$\text{dan } \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^T$$

Penyelesaian persamaan diatas dalam bentuk matriks adalah :

$$\varepsilon^T W(u_i, v_i) \varepsilon = [y - X\beta(u_i, v_i)]^T W(u_i, v_i) [y - X\beta(u_i, v_i)]$$

$$= y^T W(u_i, v_i) y - 2\beta^T(u_i, v_i) X^T W(u_i, v_i) y + \beta^T(u_i, v_i) X^T W(u_i, v_i) X \beta(u_i, v_i) \quad (6)$$

Jika persamaan (6) dideferensialkan terhadap  $\beta^T(u_i, v_i)$  dan hasilnya disamakan dengan nol maka diperoleh

$$\hat{\beta}(u_i, v_i) = (X^T W(u_i, v_i) X)^{-1} X^T W(u_i, v_i) y \quad (7)$$

Sehingga persamaan (7) merupakan penaksir parameter untuk model GWR di setiap lokasi.

#### a. Pembobotan Model GWR

Pada analisis spasial, penaksiran parameter disuatu titik  $(u_i, v_i)$  akan lebih dipengaruhi oleh titik-titik yang dekat dengan lokasi  $(u_i, v_i)$  dari pada titik-titik yang lebih jauh. Salah satu metode yang bisa digunakan untuk menentukan besarnya pembobot untuk masing-masing lokasi yang berbeda pada model GWR yaitu Fungsi Kernel (*kernel function*). Pembobot yang terbentuk dengan menggunakan fungsi kernel ini adalah fungsi jarak Gauss (*Gaussian Distance Function*), dan fungsi *Bisquare*. Dimana fungsi pembobotnya masing-masing dapat ditulis sebagai berikut :

a. Fungsi Kernel Gauss :

$$w_{ij}(u_i, v_i) = \exp(-(d_{ij}/h)^2) \quad (8)$$

b. Fungsi Bisquare :

$$w_{ij}(u_i, v_i) = \begin{cases} (1 - (\frac{d_{ij}}{h})^2)^2, & \text{untuk } d_{ij} \leq h \\ 0, & \text{untuk } d_{ij} > h \end{cases} \quad (9)$$

dengan  $d_{ij} = \sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2}$  jarak euclid antara lokasi  $(u_i, v_i)$  ke lokasi  $(u_j, v_j)$  dan  $h$  adalah parameter non negatif yang diketahui dan biasanya disebut parameter penghalus (*bandwidth*). Jika pembobot yang digunakan adalah fungsi kernel maka pemilihan *bandwidth* ini sangatlah penting oleh karena *bandwidth* merupakan pengontrol keseimbangan antara kesesuaian kurva terhadap data dan kelulusan data. Metode yang digunakan untuk memilih *bandwidth* optimum adalah metode *Cross Validation* (CV). Metode ini secara matematis didefinisikan sebagai berikut:

$$CV(h) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{\neq i}(h))^2 \quad (10)$$

Dengan :

$\hat{y}_{\neq i}(h)$  : Nilai penaksir  $y_i$  (*fitting value*) dimana pengamatan dilokasi  $(u_i, v_i)$  dihilangkan dari proses penaksiran

$\hat{y}_i(h)$  : Nilai penaksir  $y_i$  (*fitting value*) dimana pengamatan dilokasi  $(u_i, v_i)$  dimasukkan dalam proses penaksiran

$n$  : Jumlah sampel

### METODOLOGI PENELITIAN

Data yang digunakan dalam penelitian ini bersumber dari BPS yaitu data hasil Survei Sosial Ekonomi Nasional (SUSENAS) dan Survei Peduduk Antar Sensus (SUPAS) Provinsi Maluku tahun 2012. Variabel yang digunakan adalah variabel penentuan rumah tangga miskin yang digunakan dalam Pendataan Sosial Ekonomi (PSE) yang terdapat dalam SUSENAS

dan SUPAS. Pada penelitian ini yang dijadikan unit observasi adalah kecamatan di Pulau Buru. Variabel yang digunakan yaitu Jumlah rumah tangga (rt) yang berada dibawah garis kemiskinan pada tahun 2012 tiap kecamatan di Pulau Buru (Y), Banyaknya rumah tangga yang tidak punya fasilitas tempat buang air besar atau bersifat umum ( $X_1$ ), Banyaknya rumah tangga yang sumber penerangan utama bukan listrik ( $X_2$ ), Banyaknya rumah tangga yang bahan bakar untuk memasaknya dari kayu/minyak tanah ( $X_3$ ), Banyaknya rumah tangga yang sumber air minumannya dari sumur/mata air tak terlindung/sungai ( $X_4$ ), Banyaknya rumah tangga yang pengeluaran untuk makanannya lebih besar 80% ( $X_5$ ), Banyaknya rumah tangga yang lapangan pekerjaan utama kepala rumah tangganya disektor pertanian ( $X_6$ ) serta Banyaknya rumah tangga yang pendidikan tertinggi kepala rumah tangganya SD kebawah ( $X_7$ ), Garis Lintang ( $u_i$ ) dan Garis Bujur ( $v_i$ ). Untuk mendukung proses penelitian digunakan paket program komputer yaitu software R.

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Pulau Buru merupakan salah satu pulau yang terdapat di provinsi Maluku. Pulau Buru terdiri dari 2 Kabupaten dan 13 Kecamatan. Pada penelitian ini aplikasi model GWR diterapkan pada kasus kemiskinan di Pulau Buru pada tahun 2012. Variabel yang diteliti yaitu jumlah rumah tangga yang berada di bawah garis kemiskinan pada tahun 2012 tiap Kecamatan di Pulau Buru sebagai variabel respon (Y) serta tujuh variabel prediktor (X). Berikut deskriptif dari masing-masing variabel :

Tabel 1 Deskriptif Data Kemiskinan di Pulau Buru

Variabel	N	Mean	Minimum	Maximum
Y	13	523	223	803
$X_1$	13	1209	1012	1388
$X_2$	13	750	355	981
$X_3$	13	2668	1029	4201
$X_4$	13	916	639	1101
$X_5$	13	12	2	21
$X_6$	13	1555	1010	2129
$X_7$	13	1371	787	2152

Tabel 1 menunjukkan bahwa rata-rata jumlah rumah tangga yang berada di bawah garis kemiskinan tiap kecamatan di Pulau Buru pada tahun 2012 adalah 523 rumah tangga dimana jumlah rumah tangga miskin terendah berada pada Kecamatan Namrole yaitu sebanyak 223 rumah tangga sedangkan jumlah rumah tangga miskin tertinggi berada pada Kecamatan Lolonguba yaitu sebanyak 803 rumah tangga. Rata-rata banyaknya rumah tangga yang tidak punya fasilitas tempat buang air besar atau bersifat umum tiap kecamatan di Pulau Buru pada tahun 2012 adalah 1.209 rumah tangga, dimana Kecamatan Namlea memiliki jumlah rumah tangga terendah dan Kecamatan Venavavan tertinggi.

Langkah pertama untuk membangun model GWR adalah dengan menentukan letak geografis tiap kecamatan di Pulau Buru, setelah diperoleh letak geografis maka langkah selanjutnya yaitu memilih *bandwidth* optimum. Nilai *bandwidth* yang diperoleh dari hasil iterasi adalah q:

0,9999279 dengan nilai kriteria CV: 150262. Untuk setiap lokasi pusat akan diperoleh nilai bandwidth optimum yang berbeda-beda. Hasil iterasi diperoleh bandwidth optimum untuk tiap kecamatan di Pulau Buru sebagai berikut :

Tabel 2 Nilai Bandwidth Optimum

Daerah	Bandwidth
Kecamatan Namlea	4,9665
Kecamatan Waoeapo	6,7548
Kecamatan Batabual	6,6584
Kecamatan Venaleisela	4,2007
Kecamatan Lolonguba	5,4307
Kecamatan Air Buaya	4,3032
Kecamatan Wailo	6,7537
Kecamatan Waoplau	5,0311
Kecamatan Kapala Mada	4,4685
Kecamatan Leksula	4,9175
Kecamatan Namrole	5,4088
Kecamatan Venavavan	5,2324
Kecamatan Waisama	4,4422

Setelah mendapatkan nilai bandwidth optimum, maka langkah selanjutnya adalah mendapatkan matriks pembobot, dimana dalam penelitian ini akan digunakan pembobot fungsi kernel bisquare. Misalkan matriks pembobot di lokasi  $(u_1, v_1)$  adalah  $W(u_1, v_1)$  maka langkah awal sebelum mendapatkan matriks pembobot ini adalah dengan mencari jarak euclid lokasi  $(u_1, v_1)$  yaitu Kecamatan Namlea ke semua lokasi penelitian.

Tabel 3 Jarak Euclid dan Pembobot di Kecamatan Namlea

Daerah	Jarak Euclid	Pembobot Bisquare
Kecamatan Namlea	0	1
Kecamatan Waoeapo	4,967735903	2,47763E-07
Kecamatan Batabual	1,841765457	0,743870711
Kecamatan Venaleisela	0,787146746	0,950392041
Kecamatan Lolonguba	0,508035432	0,979182001
Kecamatan Air Buaya	2,47145706	0,5660589
Kecamatan Wailo	1,945867416	0,716551938
Kecamatan Waoplau	3,251215157	0,32656746
Kecamatan Kapala Mada	0,503587132	0,979543089
Kecamatan Leksula	0,863133825	0,940505505
Kecamatan Namrole	3,716180835	0,19370806
Kecamatan Venavavan	3,573247822	0,232673967
Kecamatan Waisama	0,52497619	0,977778402

Berdasarkan Tabel 3, maka matriks pembobot yang dibentuk dengan fungsi kernel bisquare pada lokasi  $(u_1, v_1)$  yaitu Kecamatan Namlea adalah :

$$W(u_1, v_1) = \text{diag} \begin{pmatrix} 1 & 2,4776 & 0,7438 & 0,9503 & 0,9791 & 0,5660 & 0,7165 \\ 0,3265 & 0,9795 & 0,9405 & 0,1973 & 0,2326 & 0,9777 \end{pmatrix}$$

Matriks pembobot diatas digunakan untuk menaksir parameter di lokasi  $(u_1, v_1)$ , sedangkan untuk menaksir parameter di lokasi  $(u_2, v_2)$  perlu dicari terlebih dahulu matriks pembobot  $W(u_2, v_2)$  pada lokasi Kecamatan Waoeapo dengan cara yang sama seperti langkah diatas, demikian seterusnya untuk matriks pembobot pengamatan terakhir  $W(u_{13}, v_{13})$  pada lokasi Kecamatan Waisama. Selanjutnya setelah diperoleh matriks pembobot kemudian dihitung estimasi parameter model sebagai berikut :

Tabel 4 Estimasi Parameter Model GWR di Kecamatan Namlea

Parameter	Estimasi	Standar Error	T Hitung
$\beta_0$	-2184,1806	318,7607	-6,85210128
$\beta_1$	1,912901	0,235736	8,114597
$\beta_2$	-0,57991541	0,10566164	-5,48842
$\beta_3$	-0,005885873	0,0193554	-0,30409462
$\beta_4$	0,10157254	0,1523059	0,666898262
$\beta_5$	36,47397	2,856529	12,76863284
$\beta_6$	0,04010685	0,02952413	1,35844308
$\beta_7$	0,18081002	0,04684037	3,860132189

Berdasarkan Tabel 4 didapatkan nilai t hitung untuk semua parameter. Dengan menggunakan  $\alpha$  sebesar 5% diperoleh nilai  $t_{(0,025;5)} = 2,571$ , maka diperoleh 5 parameter yang signifikan yaitu  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_5$  dan  $\beta_7$  karena  $|t_{hit}| > t_{(0,025;5)}$ , sehingga model GWR dengan menggunakan pembobot bisquare yang dibentuk untuk jumlah rumah tangga miskin di Kecamatan Namlea adalah :

$$Y = -2184.1806 + 1.912901X_1 - 0.57991541X_2 + 36.47397X_5 + 0.18081002X_7$$

Model diatas menjelaskan bahwa jumlah rumah tangga miskin di Kecamatan Namlea tahun 2012 akan bertambah sebesar 1,912901 jika variabel  $X_1$  bertambah sebesar satu satuan dengan syarat variabel prediktor yang lain adalah konstan. Hal yang sama juga berlaku untuk variabel  $X_5$  dan  $X_7$ . Sebaliknya jumlah rumah tangga miskin di Kecamatan Namlea akan berkurang sebesar 0,57991541 jika variabel  $X_2$  bertambah sebesar satu satuan dengan syarat variabel prediktor yang lain adalah konstan.

Hal ini tidak berarti bahwa parameter-parameter di atas juga signifikan disetiap Kecamatan di Pulau Buru. Adapapun variabel-variabel yang signifikan di tiap Kecamatan di Pulau Buru yaitu :

Tabel 5 Variabel Yang Signifikan Dalam Model GWR Tiap Kecamatan di Pulau Buru

Daerah	Model GWR
Kecamatan Namlea	$X_1, X_2, X_5, X_7$
Kecamatan Waoeapo	$X_4, X_5$
Kecamatan Batabual	$X_1, X_2, X_5, X_7$
Kecamatan Venaleisela	$X_1, X_2, X_5, X_7$
Kecamatan Lolonguba	$X_1, X_2, X_5, X_7$
Kecamatan Air Buaya	$X_1, X_5$
Kecamatan Wailo	$X_1, X_2, X_5, X_7$
Kecamatan Waoplau	$X_5$
Kecamatan Kapala Mada	$X_1, X_2, X_5, X_7$
Kecamatan Leksula	$X_1, X_2, X_5, X_7$
Kecamatan Namrole	$X_5$
Kecamatan Venavavan	$X_5$
Kecamatan Waisama	$X_1, X_2, X_5, X_7$

Perbandingan model regresi Global dan model GWR dengan menggunakan pembobot fungsi kernel bisquare dilakukan untuk mengetahui model mana yang lebih baik diterapkan untuk jumlah rumah tangga miskin. Kriteria kebaikan model yang digunakan adalah dengan membandingkan nilai  $R^2$  dari kedua model tersebut. Model yang terbaik adalah model dengan nilai  $R^2$  terbesar. Hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut :

Tabel 6 Perbandingan Kesesuaian Model

Model	R <sup>2</sup>
Regresi Global	95,7%
GWR	99,65%

*Provinces*, Seminar in Spatial Econometrics, Rome 25-27 May 2006.

Berdasarkan Tabel 6 diperoleh bahwa model GWR dengan menggunakan pembobot fungsi kernel bisquare lebih baik digunakan untuk menganalisis jumlah rumah tangga miskin di Pulau Buru tahun 2012 karena memiliki nilai R<sup>2</sup> terbesar.

### KESIMPULAN

Dari hasil analisa data dan pembahasan dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Secara keseluruhan faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah rumah tangga miskin di Pulau Buru berdasarkan model GWR dengan pembobot fungsi bisquare adalah banyaknya rumah tangga yang tidak punya fasilitas tempat buang air besar atau bersifat umum (X<sub>1</sub>), banyaknya rumah tangga yang sumber penerangan utama bukan listrik (X<sub>2</sub>), banyaknya rumah tangga yang sumber air minumnya dari sumur/mata air tak terlindung/sungai (X<sub>4</sub>), banyaknya rumah tangga yang pengeluaran untuk makanannya lebih besar 80% (X<sub>5</sub>) serta banyaknya rumah tangga yang pendidikan tertinggi kepala rumah tangganya SD kebawah (X<sub>7</sub>).
2. Model GWR dengan menggunakan pembobot fungsi kernel bisquare lebih baik digunakan untuk menganalisis jumlah rumah tangga miskin di Pulau Buru tahun 2012 dibandingkan dengan model regresi global karena mempunyai nilai R<sup>2</sup> yang terbesar.

### DAFTAR PUSTAKA

- BPS, 2011, *Metodologi Penentuan Rumah Tangga Miskin 2011*. BPS. Jakarta
- BPS, 2011, *Analisis dan Penghitungan Tingkat Kemiskinan 2011*. BPS. Jakarta.
- Chasco, C. Garcia, I. dan Vicens, J. 2007, *Modeling Spastial Variations in Household Disposable Income with Geographically Weighted Regression*,
- Fotheringham, A.S. Brunsdon, C. dan Charlton, M. 2002, *Geographically Weighted Regression*. John Wiley and Sons, Chichester, UK.
- Mei, C.L. (2005), *Geographically Weighted Regression Technique for Spatial Data Analysis*, School Of Science Xi'an Jiaotong University.
- World Bank, (2006), *Era Baru Dalam Pengentasan Kemiskinan di Indonesia*, Laporan Bank Dunia.
- Yildirim, J.N. dan Ocal, N. (2006), *A Sectoral Analysis of Spatial Regional Employment Dynamics of Turkish*



*Barekeng* terbit dua kali dalam setahun yaitu Bulan Maret dan Desember. *Barekeng* menerima naskah dalam bentuk hasil penelitian, catatan penelitian (*note*) atau artikel ulas balik (*review/ minireview*) dan ulasan (*feature*) baik dalam bahasa Indonesia maupun dalam bahasa Inggris yang berkaitan dengan bidang Matematika dan Terapannya. Naskah yang dikirimkan merupakan naskah asli yang belum pernah diterbitkan di media manapun.

### PENGIRIMAN NASKAH

Naskah dikirimkan kepada:

**Redaksi *Barekeng***

**Jurusan Matematika**

**Fakultas MIPA**

**Universitas Pattimura**

**Jl. Ir. M. Putuhena, Poka-Ambon**

Email: [jurnalbarekeng@gmail.com](mailto:jurnalbarekeng@gmail.com)

Naskah yang dikirimkan harus dalam bentuk naskah cetak (*hard copy*) dan naskah lunak (*soft copy*), disertai dengan alamat korespondensi lengkap dan alamat *email* yang dapat dihubungi.

#### Naskah cetak (*hard copy*):

Naskah cetak dikirim sebanyak satu eksemplar dengan format pengetikan menggunakan *Microsoft Word* seperti berikut:

- Naskah diketik 1 spasi pada kertas HVS Ukuran A4 dengan batas tepi 2 cm dan berbentuk 2 kolom dengan jarak antar kolom 0.5 cm. Tipe huruf *Times New Roman* berukuran 10 point.
- Jumlah halaman maksimum 12 halaman termasuk Lampiran (Gambar dan Tabel). Setiap halaman diberi nomor secara berurutan pada tepi kanan atas. Untuk keterangan Lampiran: Tipe huruf *Times New Roman* berukuran 9 point.
- Persamaan matematika (*equations*) dapat diketik dengan menggunakan *MS Equations* atau *MathType* dengan tipe huruf *Cambria* atau *Times New Roman* berukuran 10 point.

#### Naskah lunak (*soft copy*):

Naskah lunak harus dalam format *Microsoft Word* dan dikirimkan dalam bentuk disk (CD, DVD), *flashdisk*, atau *attachment email*.

### SUSUNAN NASKAH

- Judul dalam Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris untuk artikel berbahasa Indonesia dan Judul dalam Bahasa Inggris untuk artikel berbahasa Inggris.
- Nama Lengkap Penulis (tanpa gelar).
- Nama Lembaga atau Institusi, disertai Alamat Lengkap dengan nomor kode pos. Untuk korespondensi dilengkapi No. Telp., fax dan *email*.
- Judul Ringkas (*Running Title*) (jika diperlukan).

- Abstrak (*Abstract*) dalam Bahasa Inggris atau Bahasa Indonesia.
- Kata Kunci (*Keywords*) dalam Bahasa Inggris atau Bahasa Indonesia.
- Pendahuluan (*Introduction*) meliputi latar belakang, masalah dan tujuan penelitian.
- Tinjauan Pustaka meliputi ulasan (*review*) penelitian dari beberapa literatur serta teori-teori dasar yang mendukung penelitian.
- Metode Penelitian (*Methods and Materials*) meliputi bahan, cara, dan analisis dalam penelitian (jika ada).
- Hasil dan Pembahasan (*Results and Discussion*) ditulis secara berkesinambungan dalam satu rangkaian naskah penulisan.
- Kesimpulan (*Conclusion*)
- Ucapan Terima Kasih (*Acknowledgements*) (Jika diperlukan)
- Daftar Pustaka ditulis memakai sistem nama dan disusun menurut abjad. Di bawah ini beberapa contoh penulisan sumber acuan:

#### Jurnal :

Efron, B. 1983. *Estimating the Error Rate of Prediction Rule: Improvement on Cross-Validation*. J. Amer. Statist. Assoc., 78:316-331.

#### Buku :

Dennis, G. Z., 1986, *Differential Equations with Boundary Value Problems*. Ed ke-2. Boston: Massachusetts. PWS Publishers.

#### Skripsi/Tesis/Disertasi :

Mochamad Apri., *Model Biaya Total Jaringan Pipa Transmisi Gas dan Optimasinya*, Departemen Matematika ITB Bandung, Tugas Akhir, 2002.

#### Informasi dari Internet :

Mallat, Stephane, 1999, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Second Edition, Academic Press 24-28 Oval Road, London NW1 7DX UK, <http://www.hbuk.co.uk/ap/>

- Lampiran meliputi Gambar dan Tabel beserta keterangannya (jika diperlukan).

### CATATAN (NOTE)

- Naskah harus dikirimkan ke redaksi selambat-lambatnya 2 (dua) bulan sebelum bulan penerbitan jurnal (Maret dan Desember).
- Naskah akan dinilai oleh tim penilai yang relevan sebelum diterbitkan dan tim redaksi berhak merubah struktur naskah tanpa merubah isi naskah.
- Naskah dapat diterima atau ditolak. Naskah ditolak, jika tidak memenuhi kriteria penulisan, pelanggaran hak cipta, kualitas rendah, dan tidak menanggapi korespondensi redaksi. Pengumuman naskah ditolak atau diterima paling lambat 1 (satu) bulan setelah naskah terkirim.
- Penulis atau penulis pertama yang akan mendapat 1 (satu) eksemplar jurnal yang sudah diterbitkan.

# **B**arekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan

