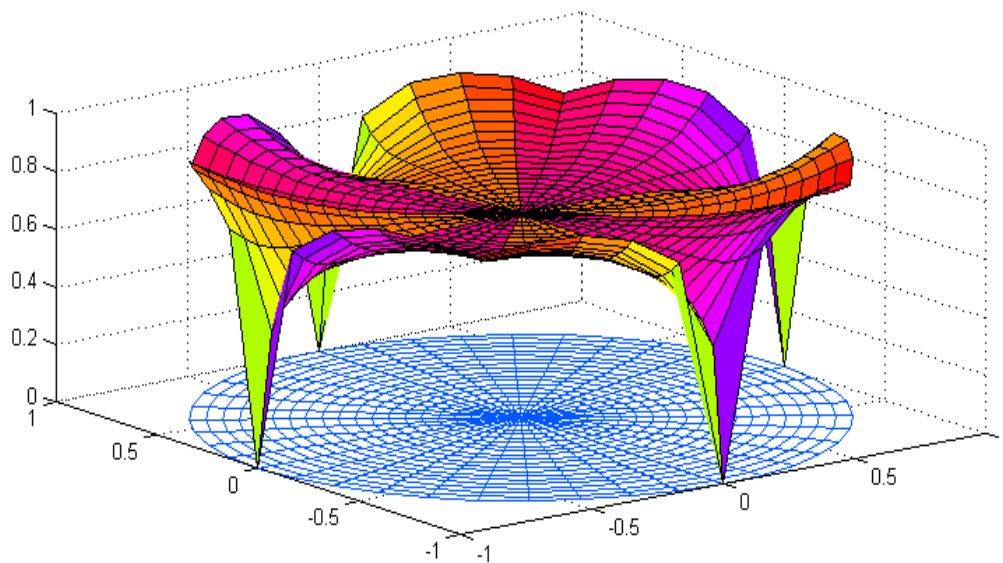


# **B**arekeng

**jurnal ilmu matematika dan terapan**

ISSN 1978-7227





## PENELITIAN

<b>KARAKTERISASI DAERAH DEDEKIND</b> <i>Characterization of Dedekind Domain</i>	Elvinus R. Persulesy Novita Dahoklory	1-10
<b>IDENTIFIKASI BASIS GRÖBNER DALAM IDEAL RING POLINOMIAL</b> <i>Identify Grobner Bases in Ideal of Polynomial Ring</i>	Melky M. Romsery Henry W. M. Patty Mozart W. Talakua	11-20
<b>ANALISIS BILOT PADA PEMETAAN KARAKTERISTIK KEMISKINAN DI PROVINSI MALUKU</b> <i>The Biplot Analysis in Mapping The Characteristics of The Poverty in The Province of Maluku</i>	Zeth A. Leleury Antonia E. Wokanubun	21-31
<b>KONSEP GEOMETRI FRAKTAL DALAM KAIN TENUN TANIMBAR</b> <i>Concept of Fractal Geometry on Patterns of Tanimbar's Woven Fabric</i>	Darma A. Ngilawajan	33-39
<b>PERAMALAN JUMLAH PENGUNJUNG PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS PATTIMURA AMBON MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI</b> <i>Forecasting The Number of Visitors at The Library of Pattimura University Ambon Using Decomposition Method</i>	Sitri Yuni Mozart W. Talakua Yopi A. Lesnussa	41-50
<b>PEMODELAN HARGA SAHAM INDEKS LQ45 MENGGUNAKAN REGRESI LINIER ROBUST M-ESTIMATOR: HUBER DAN BISQUARE</b> <i>Modelling of LQ45 Stock Prices Using Robust Linear Regression of M-Estimator: Huber And Bisquare</i>	Lexi J. Sinay Mozart W. Talakua	51-61
<b>ANALISIS KETIMPANGAN PEMBANGUNAN ANTARA KABUPATEN / KOTA DI PROVINSI MALUKU</b> <i>Analysis of Development Gaps Between Regencies / Cities in The Province of Maluku</i>	Jefri Tipka	63-71
<b>ANALISIS TINGKAT PENGETAHUAN REMAJA TENTANG PERILAKU MEROKOK DI KOTA AMBON</b> <i>The Analysis of Adolescent Knowledge Level about Smoking Behavior in Ambon</i>	Eunike M. Sahetapy Yopi A. Lesnussa Venn Y. I. Ilwuru	73-83



**merupakan Jurnal Ilmu Matematika dan Terapannya sebagai suatu wahana informasi ilmiah yang menyajikan artikel (naskah) hasil penelitian meliputi bidang-bidang sebagai berikut: matematika analisis, aljabar, matematika terapan, statistika, pendidikan matematika dan ilmu komputer. Jurnal ini diterbitkan dua kali dalam setahun yaitu pada bulan Maret dan bulan Desember. Artikel atau naskah-naskah di dalam jurnal ini merupakan hasil-hasil penelitian pribadi ataupun kelompok yang belum pernah diterbitkan di jurnal-jurnal atau majalah ilmiah lainnya.**

---

Diterbitkan oleh:

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Pattimura

Ambon

2015

Copyright © Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI 2015

## KARAKTERISASI DAERAH DEDEKIND

Elvinus R. Persulesy<sup>1</sup>, Novita Dahoklory<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia  
e-mail: <sup>1</sup>richardelvinus@yahoo.com

---

### Abstrak

Suatu daerah integral  $R$  dengan lapangan hasil bagi  $Q(R)$ ,  $R$  dikatakan sebagai Daerah Dedekind jika dan hanya jika  $R$  adalah ring Noetherian, tertutup secara integral di  $Q(R)$  dan setiap ideal prima yang bukan nol adalah ideal maksimal. Penelitian ini akan dibahas karakteristik Daerah Dedekind dan hubungan antara Daerah Dedekind dan Daerah Ideal Utama dengan tahapan sebagai berikut: mengidentifikasi  $R$  yang tertutup secara integral dan ideal fraksional dari  $R$ , Selanjutnya diberikan karakteristik Daerah Dedekind serta kaitan antara Daerah Dedekind dan Daerah Ideal Utama. Hasil penelitian menunjukkan bahwa jika setiap ideal fraksional di  $R$  memiliki invers maka  $R$  daerah Dedekind dan setiap Daerah Ideal Utama memenuhi Daerah Dedekind.

*Kata Kunci:* Daerah Dedekind, ideal fraksional, tertutup secara integral.

## CHARACTERIZATION OF DEDEKIND DOMAIN

### Abstract

An integral domain  $R$  with quotient field  $Q(R)$  is called a Dedekind Domain if and only if  $R$  satisfied Noetherian ring, integrally closed over its quotient field  $Q(R)$ , and every nonzero prime ideal of  $R$  is maximal ideal. In this paper, we discuss about the identification of the characteristic of Dedekind Domain and the relation of Dedekind Domain and principal ideal domain by identifying the integrally closed domain and fractional then determine the characteristic of Dedekind Domain. The result proves that if every fractional ideal in  $R$  is invertible then  $R$  is Dedekind Domain and that every principal ideal domain is a Dedekind Domain.

*Keywords:* Dedekind domain, fractional ideal, integrally closed.

---

### 1. Pendahuluan

Matematika dibagi dalam berbagai rumpun keilmuan, antara lain Aljabar, Analisis, Matematika Terapan, dan Statistik. Dalam aljabar sendiri terbagi dalam berbagai bidang seperti Aljabar Abstrak, Aljabar Linier, Aljabar Geometri dan sebagainya. Aljabar Abstrak merupakan bidang yang mempelajari struktur aljabar antara lain ruang vektor, modul, grup dan ring. Salah satu konsep aljabar abstrak yang telah dipelajari adalah konsep ring. Ring adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dua operasi biner yaitu penjumlahan (+) dan perkalian ( $\cdot$ ) yang memenuhi aksioma-aksioma ring yaitu terhadap operasi penjumlahan merupakan grup abelian, dan terhadap operasi perkalian merupakan semi grup dan memenuhi sifat distributif kiri dan kanan terhadap operasi penjumlahan dan operasi perkalian. Selanjutnya ring yang memenuhi sifat komutatif terhadap perkalian disebut ring komutatif.

Dalam aljabar abstrak, daerah Dedekind merupakan daerah integral dimana setiap ideal tak nolnya dapat difaktorkan menjadi hasil kali dari ideal-ideal prima. Selanjutnya salah satu sifat yang dimiliki oleh ring komutatif secara umum adalah bahwa untuk setiap ideal maksimalnya merupakan ideal prima, sebaliknya belum tentu berlaku. Tetapi dalam daerah Dedekind pada ideal prima yang bukan nol berlaku juga sebaliknya, yaitu untuk setiap ideal prima yang bukan nol adalah ideal maksimal. Daerah Dedekind memiliki banyak karakteristik. Dalam penelitian ini akan dijelaskan karakteristik daerah Dedekind serta kaitan daerah Dedekind dengan daerah ideal utama.

## 2. Tinjauan Pustaka

Daerah Dedekind diperkenalkan oleh Richard Dedekind pada tahun 1879. Dalam aljabar abstrak, daerah Dedekind merupakan daerah integral dimana setiap ideal tak nolnya dapat difaktorkan menjadi hasil kali dari ideal-ideal prima. Dalam [1], Passman menulis bahwa suatu daerah integral  $D$  dengan lapangan hasil bagi  $Q$  merupakan daerah Dedekind jika dan hanya jika (i)  $D$  memenuhi ring noether, (ii)  $D$  tertutup secara integral (*Integrally closed*), dan (iii) setiap ideal prima tak nolnya merupakan ideal maksimal.

Dasar teori mengenai konsep dasar ring diberikan dalam [2] dan ring komutatif, ring *noether*, dan ideal fraksional juga mengacu pada [3]. Selanjutnya untuk teori modul mengacu pada [4]. Untuk menjelaskan kaitan daerah Dedekind dan daerah ideal utama diperlukan beberapa definisi dan teorema pendukung yakni definisi daerah ideal utama, definisi Daerah Faktorisasi Tunggal (DFT) serta teorema pendukung yang merujuk pada [5]. Selanjutnya definisi tertutup secara integral dan pembahasan mengenai karakteristik Daerah Dedekind juga mengacu pada [1].

**Definisi 1.** Suatu ring  $(R, +, \cdot)$  adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma berikut :

- i. Terhadap penjumlahan  $(R, +)$  merupakan grup abelian.
- ii. Terhadap perkalian  $(R, \cdot)$  merupakan semi grup yaitu tertutup dan asosiatif.
- iii. Memenuhi sifat distributif kiri dan kanan, yaitu untuk setiap  $a, b, c \in R$  berlaku :
  - a. Distributif Kiri,  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + b \cdot c$  dan
  - b. Distributif Kanan  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ .

**Definisi 2.** Diberikan  $R$  ring,  $R$  dikatakan sebagai ring komutatif (*commutative ring*) jika operasi perkalian pada  $R$  memenuhi komutatif sedemikian hingga  $(\forall a, b \in R) ab = ba$ .

**Definisi 3.** Ring  $R$  yang memuat elemen satuan dinamakan sebagai ring dengan elemen satuan (dinotasikan dengan  $1_R$ ) pada operasi perkalian  $(\exists 1_R \in R)(\forall a \in R) 1_R a = a 1_R = a$ . Elemen  $1_R$  disebut elemen satuan (*unity element*).

**Definisi 4.** Ring komutatif  $R$  yang memuat elemen satuan disebut sebagai ring komutatif dengan elemen satuan.

**Definisi 5.** Diberikan  $R$  ring komutatif dengan elemen satuan,  $R$  disebut daerah integral jika  $ab = 0$ , berlaku  $a = 0$  atau  $b = 0$ , sehingga  $R$  tidak memuat pembagi nol.

**Definisi 6.** Diberikan  $R$  ring komutatif dengan elemen satuan, suatu elemen  $a \in R$  yang bukan nol disebut unit jika terdapat  $b \in R$  sedemikian hingga  $b = ba = 1_R$ .

**Definisi 7.** Jika  $R$  daerah integral, maka dapat dibentuk suatu lapangan  $Q(R)$  yang memuat semua elemen berbentuk  $ab^{-1}$  dimana  $a, b \in R$  dengan  $b \neq 0_R$ ,  $Q(R)$  disebut lapangan hasil bagi (*quotion field*).

**Definisi 8.** Misalkan  $R$  ring dan  $I \subseteq R$ ,  $I$  disebut ideal dari ring  $R$  jika memenuhi :

- i. Untuk setiap  $a, b \in I$  maka  $a - b \in I$ .
- ii. Untuk setiap  $a \in I$  dan  $r \in R$ , maka  $ar \in I$  dan  $ra \in I$ .

Selanjutnya untuk setiap  $r \in R$ ,  $Ir = \{ar | a \in I\}$  dengan  $Ir \subseteq I$  disebut ideal kanan dan  $rI = \{ra | a \in I\}$  dengan  $rI \subseteq I$  disebut ideal kiri.

**Definisi 9.** Diberikan  $(R, +, \cdot)$  suatu ring, Ideal  $I$  disebut ideal utama jika  $I$  dapat dibangun oleh suatu elemen dalam  $R$  yaitu  $a \in R$  sedemikian hingga  $I = \langle a \rangle$ .

**Definisi 10.** Suatu daerah integral  $R$  dinamakan Daerah Ideal Utama jika setiap ideal di  $R$  merupakan ideal utama.

**Teorema 1.** Diberikan  $R$  daerah integral,  $a, b \in R$ ,  $a$  membagi  $b$  jika dan hanya jika  $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$ .

**Definisi 11.** Misalkan  $R$  suatu ring komutatif dan  $I$  suatu ideal dari  $R$ .  $I$  disebut Ideal Prima jika dalam  $R$ , jika  $AB \in I$ , maka  $A \in I$  atau  $B \in I$ .

**Definisi 12.** Misalkan  $R$  suatu ring dan  $I$  adalah suatu ideal dari  $R$  dengan  $I \neq R$ .  $I$  disebut Ideal Maksimal dari  $R$ , jika tidak ada ideal dari  $R$  yang memuat  $I$  selain  $I$  dan  $R$  sendiri.

**Definisi 13.** Suatu daerah integral  $D$  disebut daerah faktorisasi tunggal atau *Unique Factorization Domain* (UFD) jika memenuhi :

- Jika  $a \in D, a \neq 0$ , maka  $a$  dapat ditulis sebagai perkalian sejumlah hingga elemen-elemen tak tereduksi di  $D$  yaitu  $a = up_1p_2 \dots p_n$  dengan  $p_i$  elemen-elemen tak tereduksi ( $1 \leq i \leq n$ ) dan  $u$  unit di  $D$ .
- Jika  $a \in D$  dan  $a = up_1p_2 \dots p_r = vq_1q_2 \dots q_s$  dengan masing-masing  $p_i$  elemen-elemen tak tereduksi dan  $u, v$  unit di  $D$ , maka  $r = s$  dan  $p_i$  berasosiasi dengan  $q_i$  untuk suatu  $i$  dan ( $1 \leq i \leq r$ ) dan ( $1 \leq j \leq s$ ).

**Definisi 14.** Diberikan ring komutatif  $R$  dengan elemen satuan dan indeterminate  $X$ .

$$R[X] = \{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^1 + a_0x^0 | a_i \in R, n \geq 0\}$$

adalah ring polinomial atas  $R$  dengan indeterminate  $X$  dimana  $n$  adalah bilangan bulat non negatif dan  $a_i$  adalah elemen dari  $R$ .

Dari Definisi 14 diketahui bahwa  $R[x]$  merupakan himpunan dari semua polinomial dengan koefisiennya ada dalam ring  $R$ .

**Definisi 15.** Jika  $f(x)$  adalah polinomial berderajat  $n$ , maka koefisien  $a_n$  disebut sebagai koefisien utama (*leading coefficient*) dari  $f(x)$ . Polinomial  $f(x)$  dikatakan sebagai polinomial monik jika koefisien utamanya adalah 1.

Dari Definisi 15 diketahui bahwa bentuk umum dari polinomial monik yaitu  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x)^i = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^1 + a_0x^0$ , karena koefisien utamanya adalah 1.

**Definisi 16.** Diberikan  $R$  ring komutatif dengan elemen satuan,  $R$  dikatakan memenuhi syarat rantai naik (*ascending chain*) jika setiap rantai naik dari ideal-ideal :

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \subseteq \dots,$$

terdapat suatu bilangan bulat  $k$  sedemikian hingga

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_k = A_{k+1} = A_{k+2} = \dots$$

**Definisi 17.** Diberikan  $R$  ring komutatif dengan elemen satuan dikatakan ring Noetherian jika memenuhi kondisi rantai naik pada idealnya.

**Definisi 18.** Diberikan  $R$  ring dengan elemen satuan dan  $M$  grup abelian terhadap penjumlahan, serta diberikan pula suatu operasi biner (disebut pergandaan skalar)  $\cdot : R \times M \rightarrow M$ . Himpunan  $M$  disebut modul kiri atas ring  $R$  jika memenuhi aksioma perkalian skalar yaitu untuk setiap  $m_1, m_2, m \in M$  dan untuk setiap  $r_1, r_2, r \in R$

- $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$ ;
- $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$ ;
- $(r_1 r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m)$ ;
- $1_R \cdot m = m$ , dengan  $1_R$  merupakan elemen satuan di  $R$ .

**Definisi 19.** Diberikan  $R$  ring dengan elemen satuan dan  $M$  grup abelian terhadap penjumlahan, serta diberikan pula suatu operasi biner (disebut pergandaan skalar)  $\cdot : M \times R \rightarrow M$ . Himpunan  $M$  disebut modul kanan atas ring  $R$  jika memenuhi aksioma perkalian skalar yaitu untuk setiap  $m_1, m_2, m \in M$  dan untuk setiap  $r_1, r_2, r \in R$

- $(m_1 + m_2) \cdot r = m_1 \cdot r + m_2 \cdot r$ ;
- $m \cdot (r_1 + r_2) = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$ ;
- $m \cdot (r_1 r_2) = (m \cdot r_1) r_2$ ;
- $m \cdot 1_R = m$ , dengan  $1_R$  merupakan elemen satuan di  $R$ .

**Definisi 20.** Diberikan  $R$  ring dengan elemen satuan dan  $M$  grup abelian terhadap penjumlahan, jika  $M$  adalah modul kiri dan modul kanan maka  $M$  disebut bimodul.

**Contoh 1.** Diberikan  $R$  daerah integral dengan lapangan hasil bagi  $Q(R)$ , maka  $Q(R)$  merupakan bimodul atas  $R$ .

**Definisi 21.** Misalkan  $M$  modul atas ring  $R$  ring dengan elemen satuan dan  $N \subseteq M$  maka  $N$  adalah submodul dari  $M$  jika dan hanya jika :

- i.  $N$  merupakan subgrup abelian dari  $M$ ;
- ii. Operasi pergandaan skalar pada  $M$  juga berlaku pada  $N$ .

**Contoh 2.** Diberikan  $R$  ring dengan elemen satuan adalah modul atas  $R$  sendiri. Jika  $S$  ideal  $R$ , maka  $S$  merupakan submodul dari  $R$ .

**Definisi 22.** Diberikan  $R$  suatu ring komutatif,  $M$  modul atas  $R$ , jika  $S \subseteq M$ , maka himpunan

$$R\langle S \rangle = \left\{ \sum r_i s_i \mid r_i \in R, s_i \in S \right\}$$

dikatakan sebagai submodul yang dibangun secara berhingga.

### 3. Hasil dan Pembahasan

#### 3.1. Tertutup Secara Integral

**Definisi 23.** Diberikan  $S$  daerah integral dengan  $R$  subring dari  $S$ , suatu elemen  $s \in S$  dikatakan integral atas  $R$  jika terdapat polinomial monik  $f(x)$  di  $R[x]$  berlaku  $f(s) = 0$ .

Secara umum suatu  $s \in S$  dikatakan integral atas  $R$  jika terdapat polinomial monik  $f(x)$  di  $R[x]$  yaitu  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0x^0$ , dimana  $s$  merupakan akar dari polinomial  $f(x)$ , yaitu  $f(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0s^0 = 0$ .

**Definisi 24.** Diberikan daerah integral  $R$  dengan lapangan hasil bagi  $Q(R)$ .  $R$  dikatakan tertutup secara integral jika  $s \in Q(R)$  integral atas  $R$  maka  $s \in R$ .

**Contoh 3.** Daerah integral  $\mathbb{Z}$  dengan lapangan hasil bagi  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Z}$  tertutup secara integral.

*Penyelesaian.* Misalkan suatu  $r = \frac{s}{t} \in \mathbb{Q}$  dengan  $r \in \mathbb{Q}$  yang integral atas  $\mathbb{Z}$  dengan  $(s, t) = 1$ , maka ada suatu polinomial monik  $f(x)$  di  $\mathbb{Z}[x]$  yaitu

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + x^n$$

sedemikian hingga  $r = \frac{s}{t} \in \mathbb{Q}$  yang integral atas  $\mathbb{Z}$  maka

$$f\left(\frac{s}{t}\right) = \sum_{i=0}^n a_i \left(\frac{s}{t}\right)^i = a_0 \left(\frac{s}{t}\right)^0 + a_1 \left(\frac{s}{t}\right)^1 + a_2 \left(\frac{s}{t}\right)^2 + \dots + \left(\frac{s}{t}\right)^n$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f\left(\frac{s}{t}\right) &= \sum_{i=0}^n a_i \left(\frac{s}{t}\right)^i \\ 0 &= \left(\frac{s}{t}\right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{s}{t}\right)^i \\ \left(\frac{s}{t}\right)^n &= -\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{s}{t}\right)^i\right) \\ s^n &= -\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{s}{t}\right)^i\right) t^n = -\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i t^{n-1-i}\right) t \end{aligned}$$

dari persamaan diatas diperoleh  $t|s^n$ , karena  $(s, t) = 1$  akibatnya  $t|s$ , sehingga diperoleh  $\frac{s}{t} \in \mathbb{Z}$ , Jadi  $\mathbb{Z}$  tertutup secara integral di  $\mathbb{Q}$ .

**Proposisi 2.** Diberikan  $R$  suatu daerah integral dengan lapangan hasil bagi  $Q(R)$ , jika  $R$  memenuhi daerah faktorisasi tunggal maka  $R$  tertutup secara integral.

*Bukti.* Misalkan  $s$  elemen dari suatu  $Q(R)$  dan  $s$  integral atas  $R$ . Misalkan  $s = \frac{a}{b}$  dimana  $a \in R, b \in R \setminus \{0\}$  dan  $a$  dan  $b$  saling prima (faktor persekutuan hanya elemen unit) karena  $R$  daerah faktorisasi tunggal maka  $a$  dan  $b$  dapat ditulis sebagai hasil kali elemen-elemen tak tereduksi yaitu

$$a = up_1p_2 \dots p_n$$

$$b = uq_1q_2 \dots q_m$$

dimana  $u$  merupakan elemen unit di  $R$  dan  $p_i, q_j$  merupakan elemen tak tereduksi di  $R$ , karena  $a$  dan  $b$  saling prima maka  $p_i \neq q_j$

Selanjutnya diketahui bahwa  $s = \frac{a}{b}$  integral atas  $R$ , maka terdapat suatu polinomial monik

$$f(x) = s^n + r_{n-1}s^{n-1} + \dots + r_0 = 0$$

sehingga

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + r_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots + r_0 = 0$$

persamaan di atas dikalikan dengan  $b^n$  diperoleh

$$a^n + r_{n-1}ba^{n-1} + \dots + r_0b^n = 0$$

$$a^n = -(r_{n-1}ba^{n-1} + \dots + r_0b^n)$$

$$a^n = -b(r_{n-1}a^{n-1} + \dots + r_0b^{n-1})$$

Sehingga diperoleh  $b$  habis membagi  $a^n$ , kondisi ini dapat berlaku jika  $b$  merupakan unit, sehingga diperoleh  $\frac{a}{b} \in R$ .

Terbukti bahwa suatu daerah faktorisasi tunggal memenuhi tertutup secara integral.

### 3.2. Ideal Fraksional

**Definisi 25.** Diberikan  $R$  daerah integral dengan lapangan hasil bagi  $Q(R)$ , suatu ideal fraksional dari  $R$  adalah suatu  $R$ -submodul yang bukan nol  $A$  dari  $Q(R)$  sedemikian hingga  $dA \subseteq R$ , untuk suatu  $d \in R$  yang bukan nol.

Dari definisi di atas diketahui bahwa  $Q(R)$  merupakan modul atas  $R$  dengan ideal fraksionalnya merupakan suatu submodul yang bukan nol dari  $Q(R)$ . Dari definisi ideal fraksional di atas juga, diketahui bahwa suatu ideal yang bukan nol dalam  $R$  juga merupakan suatu ideal fraksional dengan  $d = 1$ .

**Contoh 4.** Pada daerah integral bilangan bulat  $\mathbb{Z}$  dengan lapangan hasil bagi  $\mathbb{Q}$ , himpunan  $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$  merupakan ideal fraksional dari  $\mathbb{Z}$ .

*Penyelesaian.* Harus dibuktikan terlebih dahulu himpunan  $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$  merupakan  $\mathbb{Z}$ -submodul dari  $\mathbb{Q}$ .

i. himpunan  $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$  merupakan  $\mathbb{Z}$ -submodul dari  $\mathbb{Q}$

1)  $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$  merupakan grup abelian terhadap operasi penjumlahan

2) Operasi pergandaan skalar yang berlaku pada  $\mathbb{Q}$  juga berlaku pada  $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$

a. Ambil sebarang  $a \in \mathbb{Z}$  dan  $\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  dimana  $x, y \in \mathbb{Z}$

$$a\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) = a\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{a(x+y)}{2}\right) = \frac{ax+ay}{2} = \frac{ax}{2} + \frac{ay}{2}$$



b. Ambil sebarang  $a, b \in \mathbb{Z}$  dan  $\frac{1}{2}x \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  dimana  $x \in \mathbb{Z}$

$$(a + b) \frac{1}{2}x = a \frac{1}{2}x + a \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}xa + \frac{1}{2}xb$$

c. Ambil sebarang  $a, b \in \mathbb{Z}$  dan  $\frac{1}{2}x \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  dimana  $x \in \mathbb{Z}$

$$(ab) \cdot \frac{1}{2}x = \left(ab \frac{1}{2}x\right) = a \left(b \frac{1}{2}x\right)$$

d. Ambil sebarang  $\frac{1}{2}x \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$

$$1 \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x \cdot 1 = \frac{1}{2}x$$

ii. Terdapat suatu  $d \in \mathbb{Z}$  yang bukan nol berlaku  $d(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq R$  yaitu  $\{\pm 2, \pm 4, \dots\}$

Dari pembuktian di atas diperoleh  $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$  merupakan suatu ideal fraksional dari  $\mathbb{Z}$ .

**Teorema 3.** Jika  $A$  suatu  $R$ -submodul dari  $Q(R)$  yang dibangun secara berhingga maka  $A$  merupakan suatu ideal fraksional dari  $R$ .

*Bukti.* Misalkan  $A$  suatu  $R$ -submodul dari  $Q(R)$  dibangun secara berhingga oleh  $q_1, q_2, \dots, q_n \in Q(R)$ .  $A$  dapat ditulis sebagai

$$A = q_1 r_i + q_2 r_i + \dots + q_n r_i$$

dengan  $r_i \in R$  dan  $q_i \in Q(R)$  maka  $q_i = \frac{a_i}{b_i}$ , dimana  $a_i \in R$  dan  $b_i \in R \setminus \{0\}$

$$A = \frac{a_1}{b_1} R + \frac{a_2}{b_2} R + \dots + \frac{a_n}{b_n} R$$

Jika  $\frac{a_i}{b_i}$ . Misalkan  $b = b_1 b_2 \dots b_n$  maka diperoleh

$$A = \frac{a_1(b_2 \dots b_n)}{b} r_i + \frac{a_2(b_1 b_3 \dots b_n)}{b} r_i + \dots + \frac{a_n(b_1 \dots b_{n-1})}{b} r_i.$$

Persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$A = \frac{p_1}{b} r_i + \frac{p_2}{b} r_i + \dots + \frac{p_n}{b} r_i$$

Maka diperoleh  $A$  merupakan suatu ideal fraksional yaitu untuk suatu  $b \in R$  yang bukan nol diperoleh  $bA \in R$ . ■

**Definisi 26.**  $R$  daerah integral dengan lapangan hasil bagi  $Q(R)$  dan  $A, B$  ideal-ideal fraksional dari  $R$ , maka hasil kali  $AB$  merupakan himpunan dari penjumlahan berhingga  $\sum_i a_i b_i$  dimana  $a_i \in A, b_i \in B$ .

Sama seperti perkalian pada ideal biasa di  $R$  perkalian dari dua ideal fraksional juga merupakan ideal fraksional, berikut diberikan pembuktiannya dalam teorema berikut.

**Teorema 4.**  $R$  daerah integral dengan lapangan hasil bagi  $Q(R)$  dan  $A, B$  ideal-ideal fraksional dari  $R$ , maka hasil kali  $AB$  merupakan ideal fraksional.

*Bukti.* Diketahui  $A$  dan  $B$  ideal-ideal fraksional dari  $R$  maka terdapat  $r, s \in R$  yang bukan nol sedemikian hingga

$$rA \subseteq R,$$

dan

$$sB \subseteq R.$$

Jika  $rA$  dan  $sB$  dikalikan maka diperoleh

$$(rA)(sB) = (rs)AB \subseteq R$$

Karena  $rs \in R$  bukan nol dan  $AB$  submodul yang bukan nol maka diperoleh  $AB$  ideal fraksional. ■

**Definisi 27.**  $R$  daerah integral dengan lapangan hasil bagi  $Q(R)$  dan  $A$  ideal fraksional dari  $R$ , maka ideal fraksional  $A$  memiliki invers jika terdapat  $B$  suatu ideal fraksional dari  $R$  sedemikian hingga  $AB = R$ .

**Contoh 5.**  $\mathbb{Z}$  daerah integral dengan lapangan hasil bagi  $\mathbb{Q}$ , ideal fraksional  $n\mathbb{Z}$  memiliki invers yaitu  $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ .

*Penyelesaian.* Diketahui  $n\mathbb{Z}$  merupakan suatu ideal fraksional, selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa  $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$  merupakan suatu ideal fraksional dari  $\mathbb{Z}$ , sesuai dengan Teorema 2 maka  $AB$  merupakan suatu ideal fraksional, selanjutnya perkalian dua ideal fraksional  $n\mathbb{Z}$  dan  $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$  diperoleh :

$$(n\mathbb{Z})\left(\frac{1}{n}\mathbb{Z}\right) = \left(n\frac{1}{n}\right)\mathbb{Z} = 1 \cdot \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

Sehingga diperoleh  $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$  merupakan invers dari ideal fraksional  $n\mathbb{Z}$ .

**Teorema 5.** Jika  $A$  memiliki invers maka  $A$  dibangun secara berhingga.

*Bukti.* Diketahui  $A$  memiliki invers, maka terdapat  $A'$  sedemikian hingga  $AA' = R$  sehingga terdapat  $1 \in AA'$  dengan

$$1 = \sum_i a_i a_i' = a_1 a_1' + a_2 a_2' + \dots + a_n a_n'$$

untuk suatu  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$  dan  $a_1', a_2', \dots, a_n' \in A'$ . Jika  $a \in A$  maka

$$a = (aa_1')a_1 + (aa_2')a_2 + \dots + (aa_n')a_n,$$

dimana setiap  $aa_i' \in R$ , sehingga  $A$  dibangun secara berhingga oleh  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sehingga  $A$  dibangun secara berhingga. ■

### 3.3. Daerah Dedekind

Pada bagian ini akan diberikan karakteristik daerah Dedekind yang mencakup definisi daerah Dedekind, dan teorema dalam daerah Dedekind serta kaitan antara daerah Dedekind dan daerah ideal utama.

**Definisi 28. (Passman, 1991)** Daerah integral  $R$  dengan lapangan hasil bagi  $Q(R)$  dikatakan sebagai suatu daerah Dedekind jika memenuhi:

- i.  $R$  merupakan ring Noetherian.
- ii.  $R$  tertutup secara integral.
- iii. Setiap ideal prima bukan nol dari  $R$  adalah ideal maksimal.

**Contoh 6.** Daerah integral bilangan bulat  $\mathbb{Z}$  dengan lapangan hasil bagi  $\mathbb{Q}$  merupakan daerah Dedekind.

*Penyelesaian.*

(i)  $\mathbb{Z}$  ring Noetherian

Diketahui bahwa ideal di  $\mathbb{Z}$  berbentuk  $n\mathbb{Z}$ , yaitu

$$n\mathbb{Z} = \{n\mathbb{Z} | n \in \mathbb{Z}\}$$

Jika suatu rantai di ideal dalam  $\mathbb{Z}$

$$n\mathbb{Z} \subseteq v_1\mathbb{Z} \subseteq v_2\mathbb{Z} \subseteq \dots$$

Berdasarkan Teorema 1 diketahui bahwa jika  $a|b$  maka  $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$ , dari kondisi rantai di atas diketahui bahwa  $v_1|n$  dan  $v_1|v_2$  dan seterusnya

Selanjutnya karena  $n \in \mathbb{Z}$ , maka dapat  $n$  difaktorkan sebagai elemen-elemen tak tereduksi, berikut langkah-langkah faktorisasi dari  $n$

$$\begin{aligned} n &= p_1 v_1 \\ &= p_1 (p_2 v_2) \\ &= (p_1 v_2 (p_3 v_3)) \\ &\quad \vdots \\ &= (p_1 p_2 \dots p_r) v_r \end{aligned}$$

$v_r$  merupakan elemen tak tereduksi sehingga

$$v_r = uv$$

Dimana  $u$  merupakan unit dan  $v$  berasosiasi dengan  $v_r$ , sehingga  $\langle v_r \rangle$  hanya dimuat pada  $\mathbb{Z}$  dan  $\langle v_r \rangle$  sendiri.

maka kondisi rantai di atas akan stasioner pada  $v_r \mathbb{Z}$

$$n\mathbb{Z} \subseteq v_1 \mathbb{Z} \subseteq v_2 \mathbb{Z} \subseteq \dots \subseteq v_r \mathbb{Z}.$$

Jadi setiap koleksi ideal pada ring  $\mathbb{Z}$  memenuhi kondisi rantai naik, sehingga  $\mathbb{Z}$  ring Noetherian

(ii) Pada Contoh 3 telah dijelaskan bahwa  $\mathbb{Z}$  tertutup secara integral.

(iii) Setiap ideal prima bukan nol di  $\mathbb{Z}$  adalah ideal maksimal.

Akan ditunjukkan  $\langle p \rangle$  adalah ideal maksimal.

Diketahui bahwa  $\mathbb{Z}$  merupakan daerah ideal utama sehingga setiap ideal di  $\mathbb{Z}$  berbentuk  $n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$

Misalkan  $\langle p \rangle$  suatu ideal prima utama maka  $p$  merupakan suatu elemen prima.

Karena dalam daerah integral berlaku  $p$  elemen prima maka  $p$  tidak tereduksi sehingga  $p$  dapat ditulis sebagai

$$p = ux$$

dimana  $u$  elemen unit dan  $x$  berasosiasi dengan  $p$ ,

Selanjutnya misalkan  $\langle p \rangle \subseteq \langle r \rangle$

Karena  $R$  daerah ideal utama maka diperoleh  $r|p$ . Sehingga  $r$  merupakan salah satu faktor dari  $p$ , maka  $r$  merupakan unit atau berasosiasi dengan  $p$ , sehingga muncul dua kondisi yaitu

a. Jika  $r$  unit maka diperoleh

$$\langle r \rangle = \mathbb{Z}$$

b. Jika  $r$  berasosiasi dengan  $p$ , maka  $p = ur$  sehingga diperoleh

$$\langle r \rangle = \langle p \rangle$$

Dari kondisi (a) dan (b) diperoleh  $\langle p \rangle$  merupakan ideal maksimal karena ideal yang memuat  $\langle p \rangle$  hanya  $\langle p \rangle$  dan  $\mathbb{Z}$ .

Dari pembuktian (i), (ii), dan (iii) diperoleh  $\mathbb{Z}$  merupakan daerah Dedekind.

Untuk menjelaskan kaitan daerah Dedekind dan daerah ideal utama, diberikan proposisi sebagai berikut:

**Proposisi 6.** Diberikan  $R$  daerah ideal utama maka  $R$  daerah Dedekind.

*Bukti.*

(i) Daerah ideal utama memenuhi ring Noetherian

Diketahui suatu kondisi rantai pada  $R$

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \dots$$

Didefinisikan

$$I = \bigcup_{i \geq 1} I_i$$

maka diperoleh  $I$  ideal di  $R$ , karena  $R$  daerah ideal utama maka  $I$  adalah ideal utama yaitu  $I = \langle d \rangle$ ,  $d \in I$ , sehingga  $d$  dimuat di suatu  $I_i$ , misalkan  $I_n$ , maka diperoleh  $I \subseteq I_n$ .

Karena  $I$  merupakan gabungan dari ideal-ideal  $I_i$  maka  $I_n \subseteq I$  sehingga diperoleh  $I_n = I$ .

Berdasarkan rantai ideal di atas maka diperoleh  $I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq I_n$  maka  $I_n = I_{n+1}$ .

Terbukti daerah utama adalah ring Noetherian.

- (ii) Telah diketahui bahwa suatu daerah ideal utama memenuhi daerah faktorisasi tunggal, sehingga dengan menggunakan Proposisi 2 yaitu Daerah faktorisasi tunggal memenuhi tertutup secara integral diperoleh daerah ideal utama memenuhi tertutup secara integral.
- (iii) Setiap ideal prima bukan nol di  $R$  merupakan ideal maksimal

Diberikan  $R$  suatu daerah ideal utama dan  $\langle p \rangle$  suatu ideal prima dari  $R$ , dimana  $p \in R$ . Karena  $R$  merupakan daerah ideal utama sehingga setiap ideal di  $R$  berbentuk  $aR = \langle a \rangle$ .

Misalkan  $\langle p \rangle$  suatu ideal prima maka berdasarkan maka  $p$  merupakan suatu elemen prima maka yang bukan nol dari  $\mathbb{Z}$ , sehingga  $p$  tidak tereduksi, karena  $R$  daerah ideal utama, maka  $p = ux$  dimana  $u$  elemen unit dan  $x$  berasosiasi dengan  $p$ . Selanjutnya misalkan  $\langle p \rangle \subseteq \langle r \rangle$ . Karena  $R$  daerah ideal utama maka diperoleh  $r|p$ . Maka  $p$  dapat ditulis sebagai  $p = ar$ . Karena  $p$  elemen tak tereduksi maka  $p$  hanya memiliki faktor yang berasosiasi dengan  $p$  atau suatu unit, sehingga diperoleh  $r$  merupakan unit atau berasosiasi dengan  $p$ , sehingga muncul dua kondisi yaitu

- Jika  $r$  unit maka diperoleh  $\langle r \rangle = R$ ;
- Jika  $r$  unit berasosiasi dengan  $p$ , maka  $p = ur$  sehingga diperoleh  $\langle r \rangle = \langle p \rangle$ .

Dari kondisi (a) dan (b) diperoleh  $\langle p \rangle$  merupakan ideal maksimal karena  $\langle p \rangle$  hanya di  $\langle p \rangle$  dan  $R$ .

Dari pembuktian (i), (ii), dan (iii) diperoleh ideal utama merupakan daerah Dedekind. ■

**Teorema 7.** Diberikan  $R$  daerah integral, setiap ideal fraksional yang bukan nol di  $R$  memiliki invers maka  $R$  daerah Dedekind.

*Bukti.* Diketahui  $R$  daerah integral, setiap ideal fraksional di  $R$  memiliki invers. Akan dibuktikan  $R$  daerah Dedekind.

i.  $R$  ring Noetherian

Dari Teorema 5, diketahui bahwa Jika  $A$  suatu ideal fraksional memiliki invers maka  $A$  dibangun secara berhingga, karena diketahui ideal yang bukan nol dalam  $R$  juga merupakan ideal fraksional maka diperoleh  $R$  ring Noetherian, karena berlaku jika setiap ideal di  $R$  dibangun secara berhingga maka  $R$  ring Noetherian.

ii.  $R$  tertutup secara integral

Misalkan  $s \in Q(R)$  integral atas  $R$ , maka terdapat polinomial monik  $f(x)$  di  $R[x]$  yaitu

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^1 + a_0x^0,$$

dimana  $s$  merupakan akar dari polinomial  $f(x)$ , sehingga

$$f(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s^1 + a_0s^0 = 0.$$

sehingga  $s^n = -\sum_{i=0}^{n-1} s^i r_i$  dengan  $r_i \in R$ . Asumsikan himpunan

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} s^i r_i$$

Sehingga diperoleh  $X$  merupakan suatu submodul yang bukan nol dari  $Q(R)$  yang dibangun oleh  $\{1, s, s^2, \dots, s^n\}$  dan memuat  $s$ , berdasarkan Teorema 2 maka  $X$  adalah suatu ideal fraksional. Dari rumusan  $s^n$ , juga diperoleh  $X^2 \subseteq X$ . Karena himpunan  $X$  suatu ideal fraksional bukan nol dari  $R$ , maka  $X$  memiliki invers yaitu  $X^{-1}$ , dengan  $XX^{-1} = R$  sehingga diperoleh  $XXX^{-1} \subseteq XX^{-1}$  maka  $X \subseteq R$ . Karena  $X$  memuat  $s$  sehingga diperoleh  $s \in R$  maka berlaku  $R$  tertutup secara integral.

iii. Diberikan  $P$  suatu ideal prima tak nol dan  $I$  ideal sejati dari  $R$  dengan  $P \subset I$  maka

$$P \subseteq PI^{-1} \subseteq II^{-1} = R.$$

Selanjutnya  $(PI^{-1})I \subseteq P$ . Karena  $P$  ideal prima dan  $P \subset I$ , maka diperoleh  $(PI^{-1}) \subseteq P$ . Oleh karena itu,  $PI^{-1} = P$ . Selanjutnya dengan mengalikan persamaan tersebut dengan  $IP^{-1}$  diperoleh  $I = R$ . Jadi  $P$  ideal maksimal.

Dari pembuktian (i), (ii), dan (iii) diperoleh  $R$  memenuhi daerah Dedekind. ■

#### **4. Kesimpulan**

Dari hasil pembahasan, dapat disimpulkan bahwa jika setiap ideal fraksional di  $R$  memiliki invers maka  $R$  suatu daerah Dedekind dan suatu daerah ideal utama memenuhi daerah Dedekind.

#### **Daftar Pustaka**

- [1] D. S. Passman, *A Course in Ring Theory*, California: Wadsworth & Brooks Cole, 1991.
- [2] V. K. Khana dan S. K. Bhambri, *A Course in Abstract Algebra*, Jangpura, New Delhi, 1993.
- [3] D. S. Dummit dan R. M. Foote, *Abstract Algebra*, 2nd penyunt., New York: John William Inc., 1999.
- [4] T. W. Hungerford, *Algebra*, New York: Springer Verlag, 1974.
- [5] J. J. Watkins, *Topics in Commutative Ring Theory*, New Jersey: Princeton University Press., 2007.
- [6] D. Surowski, *Workbook in Higher Algebra*, Manhattan: Kansas State University, 2000.

## IDENTIFIKASI BASIS GRÖBNER DALAM IDEAL RING POLINOMIAL

Melky M. Romsery<sup>1</sup>, Henry W. M. Patty<sup>2</sup>, Mozart W. Talakua<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, KampusUnpatti, Poka-Ambon, Indonesia  
e-mail: <sup>2</sup>henrywmpatty81@gmail.com

---

### Abstrak

Dalam suatu ring atau lapangan, dapat didefinisikan suatu polinomial yang koefisien-koefisiennya merupakan elemen dari ring atau lapangan tersebut.  $R[X]$  dan  $F[X]$  merupakan suatu ring yang disebut ring polinomial. Misalkan  $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle \subseteq F[X]$ , dengan  $f_i \neq 0$  untuk setiap  $i = \{1, 2, 3, \dots, s\}$ . Suatu polinomial  $f \in F[X]$  merupakan elemen di  $I$  jika  $f$  dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari  $f_i$  yaitu  $f = q_1 f_1 + q_2 f_2 + \dots + q_s f_s$  dengan  $q_i \in F[X]$ . Untuk mengubah  $f$  menjadi kombinasi linier, maka dapat digunakan algoritma pembagian polinomial bervariabel banyak tetapi dengan syarat sisa pembagian adalah nol. Pada polinomial bervariabel banyak, sisa pembagiannya tidak tunggal tergantung pada urutan  $f_1, f_2, \dots, f_s$ . Dikatakan tidak tunggal karena jika sisa pembagiannya nol, tetapi setelah merubah urutan  $f_1, f_2, \dots, f_s$  akan dihasilkan sisa pembagian yang bukan nol. Oleh karena itu, untuk menyelesaikan masalah keanggotaan ideal tersebut, maka harus dicari himpunan pembangun yang lain dari  $I$  yang disebut basis Gröbner. Basis Gröbner pada  $I$  adalah himpunan semua polinomial  $\{g_1, g_2, \dots, g_s\}$  dalam  $I$  sedemikian sehingga untuk sebarang  $f \in I$  terdapat  $LT(g_i)$  habis membagi  $LT(f)$  dengan  $i = 1, 2, \dots, s$ . Dari hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa setiap ideal yang merupakan ideal polinomial dalam  $F[X]$  mempunyai basis Gröbner. Untuk mengetahui apakah suatu basis merupakan basis Gröbner maka digunakan kriteria Buchberger. Sedangkan untuk mendapatkan basis Gröbner dari suatu ideal polinomial digunakan algoritma Buchberger.

**Kata Kunci:** Algoritma Buchberger, basis Gröbner, himpunan pembangun, ideal, kriteria Buchberger, ring, ring polinomial.

## IDENTIFY GROBNER BASES IN IDEAL OF POLYNOMIAL RING

### Abstract

In a ring or field, it was able to define a polynomial which all coefficients are elements of the ring or field. The set of all polynomials with indeterminate  $X$  and coefficient in ring  $R$  denoted by  $R[X]$ . It was same with  $F[X]$ , the set of polynomials which coefficient in field  $F$ .  $R[X]$  and  $F[X]$  is a ring which called polynomial ring. Let  $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle \subseteq F[X]$ , with  $f_i \neq 0$  for every  $i = \{1, 2, \dots, s\}$ . A polynomial  $f \in F[X]$  is element in  $I$  if  $f$  could form linier combination of  $f_i$  such that  $f = q_1 f_1 + q_2 f_2 + \dots + q_s f_s$  with  $q_i \in F[X]$ . To transform  $f$  such a linier combination, then used division algorithm for multivariable polynomials with condition Methe reminder must be zero. But, in multivariable polynomials, the reminder is not unique depends the order of  $f_1, f_2, \dots, f_s$ . That is not unique since if the reminder has zero, but after change the order of  $f_1, f_2, \dots, f_s$  will obtain the nonzero reminder. Thus, to solving it, must find another generating set of  $I$  called Grobner bases. Grobner bases in  $I$  is a set of all polynomials  $\{g_1, g_2, \dots, g_s\}$  in  $I$  such that for any  $f \in I$ , there is  $LT(g_i)$  divides  $LT(f)$  with  $i = 1, 2, \dots, s$ . By the result of this research showed that every polynomial ideal has Grobner bases. To know that whether an in ideal has Grober bases then used Buchberger criterion. While to obtain a Grobner bases of an ideal of polynomial ring can use Buchberger algorithm.

**Keywords:** Buchberger algorithm, Buchberger criterion, generating set, Grobner bases, ideal, polynomial ring, ring.

---

## 1. Pendahuluan

Dalam suatu ring atau lapangan, dapat didefinisikan suatu polinomial yang koefisien-koefisiennya merupakan elemen dari ring atau lapangan tersebut. Himpunan semua polinomial dengan *indeterminate*  $X$  dengan koefisien di ring  $R$  dinotasikan dengan  $R[X]$ . Begitu pula dengan  $F[X]$  yang merupakan himpunan semua polinomial dengan koefisien di lapangan  $F$ .  $R[x]$  dan  $F[X]$  merupakan suatu ring yang disebut ring polinomial [1]. Dalam teori ring, terdapat himpunan bagian yang memiliki sifat tertentu yang dikenal dengan sebutan ideal. Jika  $F[X]$  adalah ring polinomial, maka ideal polinomial akan dibangun oleh elemen-elemen  $f_1, f_2, \dots, f_n$  di  $F[X]$  dan dinotasikan dengan  $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ . Elemen-elemen yang membangun ideal tersebut untuk selanjutnya dinamakan basis [2].

Misalkan  $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle \subseteq F[X]$ , dengan  $f_i \neq 0$  untuk setiap  $i = \{1, 2, \dots, s\}$ . Suatu polinomial  $f \in F[X]$  merupakan elemen di  $I$  jika  $f$  dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari  $f_i$  yaitu  $f = q_1 f_1 + q_2 f_2 + \dots + q_s f_s$  dengan  $q_i \in F[X]$ . Untuk mengubah  $f$  menjadi kombinasi linier, maka dapat digunakan algoritma pembagian polinomial bervariasi banyak tetapi dengan syarat sisa pembagian adalah nol. Umumnya pada algoritma pembagian polinomial satu variabel, sisa pembagian selalu tunggal. Hal ini berbeda dengan algoritma pembagian pada polinomial bervariasi banyak dimana sisa pembagiannya tidak tunggal tergantung pada urutan  $f_1, f_2, \dots, f_s$ . Dikatakan tidak tunggal karena jika sisa pembagiannya nol, tetapi setelah merubah urutan  $f_1, f_2, \dots, f_s$  akan dihasilkan sisa pembagian yang bukan nol. Oleh karena itu, untuk menyelesaikan masalah keanggotaan ideal tersebut, maka akan dicari himpunan pembangun yang lain dari  $I$  yang disebut basis Gröbner.

Dalam penelitian ini akan dibahas tentang bagaimana menentukan suatu himpunan pembangun ideal suatu ring polinomial merupakan basis Gröbner dan bagaimana cara mendapatkannya. Akan dibahas beberapa definisi, teorema dan algoritma yang berhubungan dengan basis Gröbner.

## 2. Tinjauan Pustaka

Basis Gröbner pertama kali diperkenalkan oleh Bruno Buchberger dalam tesisnya pada tahun 1970. Nama "Basis Gröbner" dipilih oleh Buchberger sebagai penghargaan terhadap W. Gröbner sebagai pembimbingnya. Untuk mencari basis Gröbner dikembangkan pula suatu algoritma yang dikenal sebagai Algoritma Buchberger. Sampai saat ini berbagai aplikasi dalam bidang matematika abstrak, sains dan teknik yang telah banyak menggunakan teori tentang basis Gröbner.

**Definisi 1.** Suatu grup  $(G, *)$  merupakan himpunan  $G$  bersama dengan satu operasi biner  $*$  yang didefinisikan pada  $G$  dan memenuhi sifat-sifat berikut:

- i. Tertutup :  $a * b \in G$  untuk setiap  $a, b \in G$ ;
- ii. Asosiatif :  $(a * b) * c = a * (b * c)$  untuk setiap  $a, b, c \in G$ ;
- iii. Elemen identitas : terdapat  $e \in G$  sedemikian sehingga  $e * a = a * e = a$  untuk setiap  $a \in G$ ;
- iv. Invers: untuk setiap  $a \in G$  terdapat  $a^{-1} \in G$  sedemikian sehingga  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ .

Suatu grup  $(G, *)$  disebut grup komutatif jika  $a * b = b * a$  untuk setiap  $a, b \in G$ .

**Definisi 2.** Suatu ring  $(R, +, \bullet)$  adalah himpunan tak kosong  $R$  yang dilengkapi dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian yang memenuhi sifat-sifat berikut:

- i.  $(R, +)$  merupakan grup komutatif;
- ii.  $(R, \bullet)$  merupakan semigrup;
- iii. Memenuhi sifat distributif kiri dan kanan, yaitu:
  - a. untuk setiap  $a, b, c \in R$  berlaku  $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$  dan
  - b.  $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$ .

Suatu ring  $R$  disebut ring komutatif apabila pada operasi  $\bullet$  berlaku sifat komutatif yaitu  $a \bullet b = b \bullet a$  untuk semua  $a, b \in R$ . Jika pada  $R$  terdapat  $1 \in R$  sedemikian sehingga  $a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$  untuk setiap  $a \in R$  maka  $R$  disebut ring dengan elemen satuan [3].

**Contoh 1.** Himpunan semua bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan dan perkalian biasa yang dinotasikan dengan  $(\mathbb{Z}, +, \bullet)$  merupakan ring.

**Definisi 3.** Suatu himpunan  $F$  disebut lapangan (*field*) jika memenuhi sifat-sifat berikut:

- $(F, +, \cdot)$  adalah ring komutatif;
- $F$  terhadap operasi pergandaan mempunyai elemen satuan  $e$  dan  $e \neq 0$ ;
- Setiap elemen tak nol di  $F$  mempunyai invers terhadap operasi pergandaan.

**Contoh 2.** Himpunan bilangan-bilangan riil  $\mathbb{R}$  dan himpunan bilangan kompleks  $\mathbb{C}$  merupakan lapangan tetapi himpunan bilangan bulat  $\mathbb{Z}$  bukan suatu lapangan karena setiap elemen di  $\mathbb{Z}$  tidak mempunyai invers terhadap pergandaan.

**Definisi 4.** Misalkan  $R$  suatu ring,  $S \neq \emptyset$ ,  $S \subseteq R$ , disebut subring dari ring  $R$  jika  $S$  terhadap operasi yang sama di  $R$  merupakan ring.

**Sifat 1.** Misalkan  $R$  suatu ring,  $S \neq \emptyset$ ,  $S \subseteq R$ , disebut subring dari ring  $R$  jika memenuhi:

- $a, b \in S \Rightarrow a - b \in S$
- $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$

**Definisi 5.** Misalkan  $I$  subring  $R$ , maka:

- $I$  disebut ideal kanan jika  $a \in I, r \in R$  maka  $ar \in I$ .  
 $I$  disebut ideal kiri jika  $a \in I, r \in R$ , maka  $ra \in I$ .
- $I$  disebut ideal dalam  $R$  jika  $I$  memenuhi ideal kiri dan kanan dalam  $R$ .

**Contoh 3.** Didefinisikan  $S = \{2k | k \in \mathbb{Z}\}$  merupakan subring dari  $\mathbb{Z}$ .

- Ambil  $r \in \mathbb{Z}$  dan  $a \in S$  dengan  $a = 2k, k \in \mathbb{Z}$

$$ra = r(2k) = 2(rk) \in S$$

karena  $r \in \mathbb{Z}$  dan  $k \in \mathbb{Z}$  maka  $rk \in \mathbb{Z}$  maka  $S$  ideal kiri

$$ar = (2k)r = 2(kr) \in S$$

karena  $r \in \mathbb{Z}$  dan  $k \in \mathbb{Z}$  maka  $kr \in \mathbb{Z}$  maka  $S$  ideal kanan

- $S$  disebut ideal karena memenuhi ideal kiri dan ideal kanan

**Definisi 6.** Diketahui  $R$  ring komutatif dengan elemen satuan dan  $P \subseteq R$  dengan  $P \neq 0$ . Himpunan  $I = \left\{ \sum_{i=1}^n p_i r_i \mid p_i \in P, r_i \in R, n \in \mathbb{N} \right\}$  disebut ideal yang dibangun oleh  $P$  dan dinotasikan dengan  $\langle P \rangle$ . Himpunan  $P$  disebut pembangun (*generator*).

**Contoh 4.**

- Untuk sebarang  $R$  ring komutatif dengan elemen satuan, berlaku  $\langle 1_R \rangle = R$
- Diketahui  $\mathbb{R}[X]$  himpunan semua polinomial peubah tunggal dengan *indeterminate*  $X$  atas bilangan riil. Diketahui  $\mathbb{R}[X]$  merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan biasa. Jika dipilih  $\{1, X\} \subset \mathbb{R}[X]$ , maka  $\langle 1, X \rangle = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}[X]$ .

**Definisi 7.** Misalkan  $R$  adalah ring, himpunan semua polinomial dengan *indeterminate*  $X$  atas  $R$  dinotasikan dengan  $R[X]$ . Jika  $(x) \in R[X]$ , maka ditulis  $f(X) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$ ,  $n \geq 0$  dengan  $a_i \in R, i = 0, 1, \dots, n$ . Misalkan  $f(X) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, q(X) = \sum_{i=0}^m b_i x^i \in R[x]$ , maka operasi penjumlahan dan pergandaan pada  $R[x]$  dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$+ : f(X) + q(X) = \sum_{i=0}^{\max(m,n)} c_i x^i, \quad \text{dengan } c_i = a_i + b_i$$

$$\cdot : f(X) \cdot q(X) = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i,$$

dengan  $c_i = a_i b_0 + a_{i-1} b_1 + \dots + a_1 b_{i-1} + a_0 b_i$ , untuk setiap  $i$ .

**Definisi 8.** Diberikan suatu polinomial  $f(X) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$  dengan  $a_n = 1$ , maka  $f(X)$  disebut polinomial monik.



**Contoh 5.** Diberikan ring  $R$  dan  $f(x) = x^2 + 5x + 1$  suku banyak di  $R[x]$ . Polinomial  $f(x)$  disebut polinomial monik karena koefisien utama  $a_n = 1$ .

Jika  $R$  ring dengan indeterminatenya  $x, y$ , maka dapat dibentuk ring  $(R[x])[y]$  yang merupakan ring dari polinomial-polinomial dengan indeterminate  $y$  dan dengan koefisien-koefisien dalam ring polinomial  $R[x]$ . Ring ini juga dapat tulis sebagai ring polinomial dengan indeterminate  $x$  dan koefisien-koefisien dalam ring polinomial  $R[y]$ , yaitu  $(R[y])[x]$ .

## 2.1. Pengurutan Monomial

Suatu monomial dalam  $x_1, \dots, x_n$  adalah suatu perkalian berbentuk  $x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$  dengan  $a = a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . Terdapat tiga cara pengurutan monomial, yaitu:

- Pengurutan Lex (*Lexicographic order*)
- Pengurutan Grlex (*Graded Lexicographic order*)
- Pengurutan Grevlex (*Graded Reverse Lexicographic*)

**Definisi 9.** Diberikan  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  dan  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . Dikatakan  $\alpha >_{lex} \beta$  jika  $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ , entri paling kiri yang tak nol adalah positif. Ditulis  $x^\alpha >_{lex} x^\beta$  jika  $\alpha >_{lex} \beta$ . Pengurutan lexicographic analog dengan pengurutan pada kamus.

### Contoh 6

- $xy^2 >_{lex} y^5z^6$  karena  $\alpha - \beta = (1, -3, -6)$
- $x^2y^3z^5 >_{lex} x^2yz^5$  karena  $\alpha - \beta = (0, 2, 0)$

**Definisi 10.** Misalkan  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . Dikatakan  $\alpha >_{grlex} \beta$  jika

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$$

atau  $|\alpha| = |\beta|$  dan  $\alpha >_{lex} \beta$ .

### Contoh 7.

- $xy^3z^2 >_{grlex} x^4y$  karena  $|(1, 3, 2)| = 6 > |(4, 1, 0)| = 5$ .
- $xy^3z^2 >_{grlex} xyz^4$  karena  $|(1, 3, 2)| = |(1, 1, 4)|$  dan  $(1, 3, 2) >_{lex} (1, 1, 4)$ .

Pengurutan grlex dilakukan berdasarkan total derajat terbesar dan digunakan pengurutan lex ketika ada dua monomial memiliki total derajat yang sama.

**Definisi 11.** Misalkan  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . Dikatakan  $\alpha >_{grevlex} \beta$  jika

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$$

atau  $|\alpha| = |\beta|$  dan entri paling kanan yang tak nol dari  $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$  adalah negatif.

### Contoh 8.

- $x^4y >_{grevlex} xy^3z$  karena  $|(1, 3, 1)| = |(4, 1, 0)|$  dan  $(4, 1, 0) - (1, 3, 1) = (3, -2, -1)$ .
- $xy^3z^2 >_{grevlex} xyz^4$  karena  $|(1, 3, 2)| = |(1, 1, 4)|$  dan  $(1, 3, 2) - (1, 1, 4) = (0, 2, -2)$ .

**Definisi 12.** Diberikan  $f = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \in F[X]$  suatu polinomial yang tak nol dan  $>$  merupakan pengurutan monomial, maka

- Multidegree  $f$

$$\text{multideg}(f) = \max(\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n : a_{\alpha} \neq 0);$$

- Leading koefisien  $f$

$$\text{LC}(f) = a_{\text{multideg}(f)} \in k;$$

- Leading monomial  $f$

$$\text{LM}(f) = x^{\text{multideg}(f)};$$

- Leading term  $f$

$$\text{LT}(f) = \text{LC}(f) \cdot \text{LM}(f).$$

**Contoh 9.** Diberikan polinomial  $f = 4x^2y^2z^3 + 5xy^2z + 2y^3z^4$  dengan pengurutan lex diperoleh:  $\text{multideg}(f) = (2,2,3)$ ,  $\text{LC}(f) = 4$ ,  $\text{LM}(f) = x^2y^2z^3$ , dan  $\text{LT}(f) = 4x^2y^2z^3$ .

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 3.1. Algoritma Pembagian Polinomial Multivariabel

Misalkan  $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$  adalah ideal di  $F[X]$ . Permasalahan yang muncul adalah ketika menentukan apakah suatu  $f \in F[X]$  merupakan elemen di  $I$  atau tidak. Untuk mengatakan bahwa  $f \in I$  maka harus ditunjukkan bahwa  $f$  merupakan kombinasi linier dari himpunan pembangun idealnya. Agar memperoleh kombinasi linier dimaksud maka digunakan algoritma pembagian polinomial multivariabel.

Algoritma pembagian pada polinomial multivariabel umumnya untuk membagi  $f \in F[X]$  oleh  $f_1, f_2, \dots, f_s \in F[X]$  sehingga dapat dinyatakan dalam bentuk  $f = q_1f_1 + q_2f_2 + \dots + q_sf_s + r$  dengan  $q_i, r \in F[X]$  dengan  $r = 0$  atau tidak ada  $\text{LT}(f_i)$  untuk  $i = 1, 2, \dots, s$  yang habis membagi sebarang suku di  $r$ , dimana  $r$  merupakan sisa pembagian.

**Contoh 10.** Diberikan  $f = -xy + y^3$ ,  $I = \langle f_1, f_2 \rangle$  dimana  $f_1 = y - 1$ ,  $f_2 = xy - 1$  dan menggunakan pengurutan lex. Akan ditunjukkan bahwa  $f$  merupakan kombinasi linier dari  $f_1$  dan  $f_2$ .

*Penyelesaian.*

$$\begin{array}{r} q_1 = \\ q_2 = \\ \hline f_1 = y - 1 \quad -xy + y^3 \\ f_2 = xy - 1 \end{array}$$

Karena  $\text{LT}(f_1) = y$  dan  $\text{LT}(f_2) = xy$  keduanya membagi  $\text{LT}(f) = -xy$ , maka langkah awal bagi  $f$  oleh  $f_1$  sehingga diperoleh :

$$\begin{array}{r} q_1 = -x \\ q_2 = 0 \\ \hline f_1 = y - 1 \quad -xy + y^3 \\ f_2 = xy - 1 \quad -xy + x \\ \hline -x + y^3 \end{array}$$

Karena  $\text{LT}(f_1)$  dan  $\text{LT}(f_2)$  tidak membagi  $-x$ , maka dihilangkan sebagai sisa.

$$\begin{array}{r} q_1 = -x \\ q_2 = 0 \\ \hline f_1 = y - 1 \quad -xy + y^3 \\ f_2 = xy - 1 \quad -xy + x \\ \hline y^3 \quad r = -x \end{array}$$

$\text{LT}(f_1)$  dapat membagi  $y^3$  maka diperoleh

$$\begin{array}{r} q_1 = -x + y^2 + y + 1 \\ q_2 = 0 \\ \hline f_1 = y - 1 \quad -xy + y^3 \\ f_2 = xy - 1 \quad -xy + x \\ \hline y^3 \\ y^3 - y^2 \\ \hline y^2 \\ y^2 - y \\ \hline y \\ y - 1 \\ \hline 1 \quad r = -x + 1 \end{array}$$

Karena  $LT(f_1)$  dan  $LT(f_2)$  tidak membagi 1, maka ditambahkan pada sisa pembagian yaitu  $r = -x + 1$ . Jadi diperoleh  $q_1 = -x + y^2 + y + 1$  dan  $q_2 = 0$ .

Jadi,  $f$  dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari  $f_1, f_2$  yaitu

$$f = (-x + y^2 + y + 1)(y - 1) + 0(xy - 1) + (-x + 1)$$

Pada langkah awal, dapat dilihat bahwa  $LT(f_1) = y$  dan  $LT(f_2) = xy$  keduanya dapat membagi  $LT(f) = -xy$ . Apabila pada langkah tersebut  $LT(f_2) = xy$  menggantikan  $LT(f_1) = y$ , maka dengan menggunakan algoritma pembagian maka hasil akhir yang diperoleh adalah

$$f = (y^2 + y + 1)(y - 1) + (-1)(xy - 1).$$

Algoritma pembagian di  $F[X]$  bisa dijadikan cara untuk membuktikan apakah suatu  $f \in F[X]$  merupakan elemen di  $I$  atau bukan, yaitu jika sisa pembagiannya nol. Akan tetapi berdasarkan contoh 10 di atas, dapat dilihat bahwa sisa pembagiannya tidak tunggal (sisa pembagiannya berbeda) tergantung pengurutan elemen di himpunan pembangun idealnya, sehingga tidak dapat ditentukan apakah  $f \in I$ .

Sifat penting pada sisa  $r$  dari algoritma pembagian di  $F[X]$  harus sama, yaitu  $r = 0$ , walaupun diubah urutan dari elemen pada himpunan pembangun idealnya. Contoh berikut ini dapat akan menunjukkan bagaimana memperoleh sisa yang tidak tunggal tersebut jika urutan elemen pembangunnya diubah.

**Contoh 11.** Misalkan  $f = xy^2 - x \in F[X]$  dengan pengurutan lex. Diberikan  $I = \langle f_1, f_2 \rangle$  dimana  $f_1 = xy + 1$ ,  $f_2 = y^2 - 1$ . Dengan membagi  $f$  oleh  $\{f_1, f_2\}$  diperoleh:

$$xy^2 - x = y(xy + 1) + 0(y^2 - 1) + (-x - y)$$

Sedangkan jika dilakukan pembagian  $f$  oleh  $\{f_2, f_1\}$  maka kombinasi liniernya berbentuk

$$xy^2 - x = x(y^2 - 1) + 0(xy + 1) + 0$$

Pada persamaan (1) dapat dilihat bahwa  $r = -x - y$ , sedangkan pada persamaan (2) diperoleh  $r = 0$ .

Secara umum algoritma pembagian polinomial multivariabel tidak akan menghasilkan sisa yang sama yaitu  $r = 0$ . Untuk menyelesaikan masalah tersebut, maka diperlukan himpunan pembangun khusus lain yang masih membangun ideal suatu polinomial. Himpunan pembangun tersebut dinamakan basis Gröbner.

### 3.2. Basis Gröbner

Pada bagian ini akan diberikan definisi dari basis Gröbner dan beberapa teorema yang berkaitan serta beberapa contoh.

**Definisi 13.** Diberikan  $F[X]$  ring polinomial atas lapangan  $F$  dengan suatu pengurutan monomial. Misalkan  $I$  suatu ideal pada  $F[X]$ . Himpunan semua polinomial  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$  dalam  $I$  disebut basis Gröbner jika dan hanya jika untuk setiap polinomial tak nol  $f \in I$ , terdapat  $LT(g_i)$  yang habis membagi  $LT(f)$  untuk suatu  $i = 1, 2, \dots, s$ .

**Contoh 12.** Diberikan polinomial  $y - 1$  dan  $xy - 1$  dengan pengurutan lex. Apakah himpunan  $\{y - 1, xy - 1\}$  adalah suatu basis Gröbner untuk ideal  $I = \langle y - 1, xy - 1 \rangle$ ?

*Penyelesaian.* Misalkan  $f = x - 1 \in I$  karena  $x - 1 = xy - xy + x - 1 = (xy - 1) - x(y - 1)$ . Himpunan  $\{y - 1, xy - 1\}$  bukan suatu basis Gröbner karena berdasarkan definisi basis Gröbner,  $LT(y - 1) = y$  dan  $LT(xy - 1) = xy$  tidak habis membagi  $LT(x - 1) = x$ .

Pada contoh 11 dapat dilihat bahwa permasalahan yang muncul adalah kondisi dimana suatu polinomial  $f$  dapat menjadi elemen suatu ideal. Akan tetapi ketika dilakukan algoritma pembagian untuk membagi  $f$  dengan elemen pembangunnya tidak diperoleh sisa 0 seperti yang diharapkan. Untuk itu teorema berikut ini dapat menjamin sisa pembagian  $f$  oleh suatu basis Gröbner menghasilkan sisa 0.

**Teorema 1.** Diberikan  $F[X]$  suatu ring polinomial atas lapangan  $F$  dengan suatu pengurutan monomial. Misalkan  $I$  ideal pada  $F[X]$  dan  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$  merupakan basis Gröbner untuk  $I$ . Maka suatu polinomial  $f \in F[X]$  ditulis sebagai  $f = q_1g_1 + q_2g_2 + \dots + q_sg_s + r$ , dimana  $r = 0$  atau tidak ada *leading term* untuk suatu  $g_1, g_2, \dots, g_s$  yang habis membagi sebarang suku di polinomial  $r$  diperoleh,  $f \in I$  jika dan hanya jika  $r = 0$ .

*Bukti.*

$\Leftarrow$ ) Diketahui  $r = 0$

Akan ditunjukkan  $f \in I$

Jika  $r = 0$ , maka sesuai algoritma pembagian diperoleh  $f = q_1g_1 + q_2g_2 + \dots + q_sg_s$  yang berarti  $f \in I$ .

$\Rightarrow$ ) Diketahui  $f \in I$

Akan ditunjukkan  $r = 0$

Akan dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan  $r \neq 0$  maka berdasarkan algoritma pembagian

$$f = q_1g_1 + q_2g_2 + \dots + q_sg_s + r$$

$$f - r = q_1g_1 + q_2g_2 + \dots + q_sg_s$$

yang berarti  $f - r \in I$ , maka menurut definisi ideal diperoleh  $r \in I$ . Berdasarkan definisi basis Gröbner, maka terdapat  $LT(g_1)$  yang habis membagi  $LT(r)$  terjadi kontradiksi sehingga seharusnya  $r = 0$ . ■

Teorema 1 di atas dapat digunakan untuk menjawab pertanyaan utama yang diangkat penelitian ini yaitu bagaimana menentukan  $f \in I$ . Jawabannya adalah dapat digunakan algoritma pembagian dengan membagi  $f$  oleh polinomial dalam basis Gröbner. Jika sisa yang dihasilkan adalah nol, maka dapat disimpulkan  $f \in I$  dan sebaliknya. Pada teorema ini hipotesis yang menyatakan  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$  merupakan suatu basis Gröbner hanya digunakan dalam pembuktian. Jadi,  $r = 0$  merupakan syarat yang cukup untuk  $f \in I$ , tetapi basis Gröbner juga merupakan syarat perlu. Hal ini memunculkan teorema berikut yang menjamin bahwa basis Gröbner merupakan himpunan pembangun suatu ideal  $I$ .

**Teorema 2.** Jika  $I$  suatu ideal  $F[X]$  dan  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\} \subset I$  suatu basis Gröbner untuk ideal  $I$ , maka  $\langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle = I$

*Bukti.* Akan ditunjukkan bahwa

i.  $\langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle \subseteq I$ .

Karena  $g_1, g_2, \dots, g_s \in I$  maka jelas bahwa  $\langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle \subseteq I$ .

ii.  $I \subseteq \langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle$ .

Ambil sebarang  $f \in I$

Akan ditunjukkan bahwa  $f \in \langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle$ .

Dengan menggunakan algoritma pembagian untuk membagi  $f$  oleh  $\langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle$  maka  $f$  dapat ditulis dalam bentuk

$$f = q_1g_1 + q_2g_2 + \dots + q_sg_s + r,$$

dimana tidak ada suku di  $r$  yang habis dibagi oleh sebarang  $LT(g_i)$ .

Andaikan  $r \neq 0$  maka

$$f - r = q_1g_1 + q_2g_2 + \dots + q_sg_s \in I,$$

maka, diperoleh  $r \in I$  sehingga terdapat  $LT(g_i)$  habis membagi  $LT(r)$ .

Terjadi kontradiksi dimana  $r$  merupakan sisa pembagian sehingga tidak ada suku di  $r$  yang habis dibagi oleh sebarang  $LT(g_i)$ . Pengandaian salah, maka diperoleh  $r = 0$ , sehingga dapat ditulis  $f = q_1g_1 + q_2g_2 + \dots + q_sg_s + 0 \in \langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle$  yang berarti  $f \in \langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle$ .

Jadi,  $I \subseteq \langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle$

Berdasarkan i) dan ii), maka terbukti bahwa bahwa  $I = \langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle$ . ■

Pada suatu basis Gröbner sisa pembagian  $f \in F[X]$  selalu menghasilkan sisa pembagian yang tunggal yang termuat dalam teorema berikut.

**Teorema 3.** Diberikan  $I$  suatu ideal pada ring polinomial  $F[X]$  dan  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$  suatu basis Gröbner. Misalkan  $f \in F[X]$ , maka pembagian  $f$  oleh polinomial  $G$  menghasilkan sisa  $r$  yang tunggal.

*Bukti.* Misalkan dengan menggunakan algoritma pembagian diperoleh dua kombinasi linier dari  $f$  yaitu:

$$f = q_1g_1 + q_2g_2 + \dots + q_sg_s + r$$

$$f = p_1g_1 + p_2g_2 + \dots + p_sg_s + t$$

dengan sisa pembagian  $r$  dan  $t$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $r = t$ . Berdasarkan algoritma pembagian, diperoleh  $r = 0$  atau  $t = 0$  atau tidak ada  $LT(g_i)$  yang habis membagi suku di  $r$  atau  $t$ . Karena  $r - t \in I$ , maka berdasarkan definisi basis Gröbner, jika  $r - t \neq 0$ , maka terdapat suatu  $LT(g_i)$  habis membagi  $LT(r - t)$ . Muncul kontradiksi karena  $r$  dan  $t$  merupakan sisa pembagian sehingga tidak ada  $LT(g_i)$  yang habis membagi suku di  $r$  ataupun  $t$ . Sehingga seharusnya  $r - t = 0$  atau  $r = t$ . ■

**Contoh 13.** Diberikan  $G = \{x + z, y - z\}$  suatu basis Gröbner di lapangan  $F[x, y, z]$  dengan pengurutan lex. Misalkan  $f = xyz \in F[x, y, z]$ . Akan ditunjukkan dengan Teorema 3, pembagian  $f$  oleh  $G$  menghasilkan sisa tunggal.

$$xyz = yz(x + z) - z^2(y - z) - z^3.$$

Selanjutnya jika urutan pembagiannya diubah menjadi  $G = \{g_2, g_1\}$ , maka diperoleh

$$xyz = xz(x + z) + z^2(y - z) - z^3.$$

Jadi, sisa pembagian yang diperoleh adalah  $-z^3$ .

### 3.3. Kriteria Buchberger dan Algoritma Buchberger

Pada bagian ini akan dibahas tentang cara memeriksa apakah suatu basis merupakan basis Gröbner dan bagaimana membentuk suatu basis Gröbner. Tetapi sebelumnya diberikan definisi dari  $S$ -Polinomial berikut ini.

**Definisi 14.** Diberikan  $f, g \in F[X]$  polinomial tak nol, maka  $S$ -Polinomial dari  $f$  dan  $g$  didefinisikan sebagai:

$$S(f, g) = \frac{L}{LT(f)}f - \frac{L}{LT(g)}g$$

dengan  $L = lcm(LM(f), LM(g))$ .

**Contoh 14.** Misalkan  $I = \langle f_1, f_2 \rangle \subset F[x, y]$  dengan  $f_1 = x^2y + x$  dan  $f_2 = xy^3 - y$ .  $S$ -Polinomial dari  $f_1$  dan  $f_2$  adalah:

$$\begin{aligned} S(f_1, f_2) &= \frac{x^2y^3}{x^2y}(x^2y + x) - \frac{x^2y^3}{xy^3}(xy^3 - y) \\ &= xy + xy^2 \end{aligned}$$

Definisi  $S$ -Polinomial di atas dapat digunakan untuk memeriksa apakah suatu himpunan pembangun ideal merupakan basis Gröbner atau tidak. Dikatakan basis Gröbner jika pembagian setiap  $S(g_i, g_j)$  oleh  $G$  menghasilkan sisa nol.

#### 3.3.1. Kriteria Buchberger

Misalkan  $I$  suatu ideal polinomial pada suatu ring polinomial  $F[X]$ . Maka  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$  merupakan basis Gröbner untuk  $I$  jika dan hanya jika untuk semua  $i \neq j$  dengan  $i > j$  berlaku  $\overline{S(g_i, g_j)}^G = 0$ . Dimana  $\overline{S(g_i, g_j)}^G$  adalah sisa pembagian  $S(g_i, g_j)$  oleh  $G$ .

**Contoh 15.** Misalkan  $I = \langle f_1, f_2 \rangle \subseteq F[X]$  dengan  $f_1 = x + z$ ,  $f_2 = y - z$ . Akan ditunjukkan  $I = \langle f_1, f_2 \rangle$  merupakan basis Gröbner dengan menggunakan kriteria Buchberger.

*Penyelesaian.*

$$\begin{aligned} S(f_1, f_2) &= \frac{xy}{x}(x + z) - \frac{xy}{y}(y - z) \\ &= xy + yz - xy + xz \\ &= xz + yz \end{aligned}$$

Karena  $xz + yz = z(x + z) + z(y - z)$  yang berarti sisa pembagiannya nol, maka  $I = \langle f_1, f_2 \rangle$  merupakan suatu basis Gröbner.

Dari contoh 15 dapat dilihat bahwa  $I = \langle f_1, f_2 \rangle$  merupakan basis Gröbner. Pertanyaan selanjutnya adalah bagaimana jika pembagian  $S(g_1, g_2)$  oleh  $G$  menghasilkan sisa tak nol. Untuk itu, salah satu tujuan dari penelitian ini adalah membentuk suatu basis Gröbner dari basis yang bukan Gröbner. Dengan menggunakan algoritma Buchberger berikut, dapat dibentuk basis Gröbner dari suatu ideal  $I$ .

### 3.3.2. Algoritma Buchberger

Diberikan  $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle \neq \{0\}$  suatu ideal polinomial. Maka basis Gröbner pada  $I$  dapat dibentuk dengan cara seperti berikut:

1. Misalkan  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$
2. Hitung  $S$ -polinomial untuk setiap pasangan  $g_i, g_j \in G$  yaitu  $S(g_i, g_j)$  untuk  $i < j$ .
3. Dilakukan pembagian  $S(g_i, g_j)$  dengan  $G$  sehingga diperoleh  $\overline{S(g_i, g_j)}^G$
4. Jika  $\overline{S(g_i, g_j)}^G \neq 0$ , maka tambahkan polinomial  $\overline{S(g_i, g_j)}^G$  ke  $G$
5. Ulangi langkah 2 dengan  $G = G \cup \overline{S(g_i, g_j)}^G$  sampai semua  $S$ -polinomial di  $G$  menghasilkan sisa 0 setelah pembagian dengan  $G$ .

**Contoh 16.** Diketahui ideal  $I = \langle x^2 - x, x - y \rangle \subset F[X]$  dengan  $g_1 = x^2 - x$  dan  $g_2 = x - y$ . Akan dicari basis Gröbner  $G$  untuk  $I$  dengan menggunakan pengurutan lex.

*Penyelesaian.*

1. Misalkan  $G = \{x^2 - x, x - y\}$
2. Hitung  $S$ -polinomial  $g_1$  dan  $g_2$

$$\begin{aligned} S(g_1, g_2) &= \frac{x^2}{x^2}(x^2 - x) - \frac{x^2}{x}(x - y) \\ &= x^2 - x - x(x - y) \\ &= x^2 - x - x^2 + xy \\ &= xy - x \end{aligned}$$

3. Lakukan pembagian  $S(g_1, g_2)$  dengan  $G$

$$xy - x = 0(x^2 - x) + (y - 1)(x - y) + (y^2 - y)$$

Diperoleh

$$\overline{S(g_1, g_2)}^G = y^2 - y$$

4. Karena  $\overline{S(g_1, g_2)}^G = y^2 - y \neq 0$ , maka tambahkan  $\overline{S(g_1, g_2)}^G$  pada  $G$  sebagai pembangun baru  $g_3 = y^2 - y$  sehingga diperoleh  $G$  yang baru yaitu

$$G = \{g_1, g_2, g_3\}$$

5. Hitung nilai  $S$ -polinomial diperoleh

$$\begin{aligned} S(g_1, g_2) &= \frac{x^2}{x^2}(x^2 - x) - \frac{x^2}{x}(x - y) \\ &= x^2 - x - x(x - y) \\ &= x^2 - x - x^2 + xy \\ &= xy - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(g_1, g_3) &= \frac{x^2 y^2}{x^2}(x^2 - x) - \frac{x^2 y^2}{y^2}(y^2 - y) \\ &= x^2 y^2 - x y^2 - x^2 y^2 + x^2 y \\ &= x^2 y - x y^2 \\ &= xy - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(g_2, g_3) &= \frac{x y^2}{x}(x - y) - \frac{x y^2}{y^2}(y^2 - y) \\ &= x y^2 - y^3 - x y^2 + x y \\ &= xy - y^3 \end{aligned}$$

$$= xy - x$$

Lakukan pembagian setiap pasang  $S$ -polinomial dengan  $G = \{g_1, g_2, g_3\}$  diperoleh:

$$S(f_1, f_2) = xy - x = (y - 1)(x - y) + (y^2 - y) = (y - 1)f_2 + f_3 + 0$$

$$S(f_1, f_3) = x^2y - xy^2 = (y)(x^2 - x) + (-x)(y^2 - y) = (y)f_1 + (-x)f_3 + 0$$

$$S(f_2, f_3) = xy - y^3 = (y)(x - y) + (-y)(y^2 - y) = (y)f_2 + (-y)f_3 + 0$$

Karena untuk setiap  $i, j = 1, 2, 3$  berlaku  $\overline{S(g_i, g_j)}^G = 0$ , maka menurut kriteria Buchberger himpunan  $G = \{g_1, g_2, g_3\} = \{x^2 - x, x - y, y^2 - y\}$  merupakan basis Gröbner untuk ideal  $I = \langle x^2 - x, x - y \rangle$ .

#### 4. Kesimpulan

Dari hasil pembahasan dan uraian pada bab-bab sebelumnya maka dapat diambil beberapa kesimpulan antara lain:

- Untuk menunjukkan apakah sebarang  $f \in F[X]$  merupakan elemen di ideal  $I$  maka digunakan algoritma pembagian polinomial multivariabel untuk membagi  $f$  dengan basis Gröbner dari  $I$ . Jika sisa pembagian tersebut adalah nol, maka disimpulkan  $f \in I$ .
- Untuk memeriksa apakah suatu basis dari ideal  $I$  merupakan basis Gröbner  $G$  maka digunakan kriteria Buchberger dimana jika pembagian  $S$ -polinomial oleh  $G$  menghasilkan sisa nol.
- Jika pembagian  $S$ -polinomial oleh  $G$  menghasilkan sisa yang tak nol maka ideal  $I$  bukan suatu basis Gröbner. Untuk membentuk basis Gröbner dari ideal  $I$  tersebut maka digunakan algoritma Buchberger.

#### Daftar Pustaka

- [1] A. Setiawan, Aljabar Abstrak (Teori Grup dan Teori Ring)., Salatiga: PS. Matematika Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Kristen Satya Wacana, 2011.
- [2] D. Cox dan J. Little, Ideals, Varieties, and Algorithm: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, New York: Springer, 2007.
- [3] D. Malik, S. Mordeson dan M. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, McGraw-Hill, 1997.
- [4] J. A. Gallian, Contemporary Abstract Algebra, Heath and Company, 1990.
- [5] J. Gilbert dan L. Gilbert, Elements of Modern Algebra, Brookscole, 1999.
- [6] I. M. Sulandra, Implementasi Basis Grobner dalam menentukan Keanggotaan Ideal di "Cas Singular", Malang: FMIPA UNM, 2009.
- [7] J. Watkins, Topics in Commutative Ring Theory, Colorado Spring, 2006.
- [8] M. Weiss, Computing Grobner Bases in Python with Buchberger's Algorithm, 2010.

## ANALISIS BILOT PADA PEMETAAN KARAKTERISTIK KEMISKINAN DI PROVINSI MALUKU

Zeth A. Leleury<sup>1</sup>, Antonia E. Wokanubun<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia  
e-mail: <sup>1</sup>zetharthur82@gmail.com, <sup>2</sup>orinemily@gmail.com

---

### Abstrak

Kemiskinan merupakan sebuah permasalahan sosial yang sangat kompleks dan harus mendapat penanganan yang tepat. Secara nasional, sesuai hasil rilis BPS tahun 2014, Provinsi Maluku menempati urutan keempat sebagai daerah termiskin di Indonesia. Sementara, berdasarkan hasil analisis Kementerian Pembangunan Desa Tertinggal (PDT) terindikasi terdapat 10 Kabupaten di Provinsi Maluku termasuk daerah rawan kemiskinan dengan berbagai level yang telah ditentukan. Penelitian ini bertujuan memberikan inovasi baru mengenai pemetaan karakteristik kemiskinan di Provinsi Maluku menggunakan analisis biplot agar dapat diketahui keragaman karakteristik kemiskinan dan korelasi antar variabel karakteristik kemiskinan pada setiap kabupaten/kota di Provinsi Maluku sehingga program-program pemerintah dalam mengentaskan kemiskinan lebih tepat sasaran. Analisis Biplot didasarkan pada *singular value decomposition* dan matriks *orthonormal*. Biplot yang dihasilkan dari penelitian ini adalah biplot RPM (*Row Metric Preserving*) atau biplot komponen utama. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa kabupaten/kota di Provinsi Maluku yang memiliki kesamaan karakteristik terbagi menjadi 4 kelompok. Kelompok I yaitu kabupaten Buru dan Buru Selatan, kelompok II yaitu kabupaten SBB dan SBT, kelompok III yaitu kabupaten Maluku Tenggara, Kepulauan Aru, MTB dan MBD, sedangkan kelompok IV yaitu kabupaten Maluku Tengah, kota Tual dan kota Ambon. Karakteristik kemiskinan yang paling dominan di Provinsi Maluku yaitu angka melek huruf. Angka melek huruf dan angka partisipasi sekolah saling mempengaruhi dan berkorelasi positif. Sedangkan tingkat partisipasi angkatan kerja berkorelasi negatif dengan pengeluaran perkapita.

*Kata Kunci:* Analisis biplot, karakteristik kemiskinan, korelasi, *singular value decomposition*.

## THE BILOT ANALYSIS IN MAPPING THE CHARACTERISTICS OF THE POVERTY IN THE PROVINCE OF MALUKU

### Abstract

The poverty are the common problems faced in the each region in the country of Indonesia especially in the province of Maluku. The purpose of this research is to give a new innovation about mapping the characteristics of the poverty in the Province of Maluku, by using the biplot analysis. The biplot analysis is based on the singular value decomposition, orthonormal matrix. The biplot generated from this research is the biplot of RPM (*Row Metric Preserving*) or the biplot of the main components. The regency or the city which are have the same characteristics are divided in 4 group. Group I are the regency of Buru and the regency of South Buru, group II are the regency of West Seram and regency Of East Seram, group III are the regency of southeast Maluku, the regency of Aru, the regency of Southeast West Maluku, and regency of Southwest Maluku, group IV are the regency of central Maluku, the city of Tual and the city of Ambon, the literacy rate ( $x_2$ ) and the school participation rate ( $x_3$ ) are mutual influence and positively correlated.

*Keywords:* The characteristics of the poverty, the singular value decomposition, the biplot analysis

---



## 1. Pendahuluan

Kemiskinan merupakan sebuah permasalahan sosial yang sering dihadapi di setiap daerah di Indonesia yang harus segera mendapat penanganan yang tepat agar dapat segera teratasi. Badan Pusat Statistik (BPS), sebagai salah satu instansi pemerintah yang diberikan kewenangan dalam penyediaan data dan informasi kemiskinan di Indonesia, menggunakan pendekatan kebutuhan dasar (*basic needs approach*) dalam penghitungan penduduk miskin. Dengan pendekatan ini kemiskinan didefinisikan sebagai ketidakmampuan dalam memenuhi kebutuhan dasar atau dengan kata lain kemiskinan dipandang sebagai ketidakmampuan dari sisi ekonomi untuk memenuhi kebutuhan makanan maupun non-makanan yang bersifat mendasar [1]. Berdasarkan pendekatan kebutuhan dasar, indikator yang digunakan adalah *head count index* yaitu persentase penduduk yang berada dibawah garis kemiskinan. Garis kemiskinan itu sendiri dihitung berdasarkan rata-rata pengeluaran makanan dan non-makanan per kapita pada kelompok referensi (*reference population*).

Secara nasional, sesuai hasil rilis BPS tahun 2014, provinsi Maluku menempati urutan keempat sebagai daerah termiskin di Indonesia. Sementara, berdasarkan hasil analisis Kementerian Pembangunan Desa Tertinggal (PDT) terindikasi terdapat 10 Kabupaten di Provinsi Maluku termasuk daerah rawan kemiskinan. Untuk mengatasi tingkat kemiskinan maka diperlukan pemetaan karakteristik kemiskinan. Karakteristik kemiskinan yang digunakan merupakan data kemiskinan makro. Data kemiskinan makro menunjukkan jumlah dan presentasi penduduk miskin di setiap daerah berdasarkan estimasi. Data ini digunakan untuk perencanaan dan evaluasi program kemiskinan dengan target geografis. Oleh karena itu, perlu dilakukan pemetaan karakteristik kemiskinan pada kabupaten/kota di Provinsi Maluku. Salah satu metode yang dapat digunakan pada pemetaan karakteristik kemiskinan adalah analisis biplot. Analisis biplot merupakan teknik statistik deskriptif dimensi ganda dengan menyajikan secara visual dan simultan sejumlah objek pengamatan dan variabel dalam suatu grafik. Penelitian ini bertujuan untuk menerapkan metode analisis biplot untuk mengklasifikasikan kabupaten/kota yang memiliki kemiripan karakteristik kemiskinan dengan kabupaten/kota yang lainnya sekaligus untuk mengetahui keragaman karakteristik kemiskinan dan korelasi antar variabel karakteristik kemiskinan pada setiap kabupaten/kota di Provinsi Maluku sehingga program-program pemerintah dalam mengentaskan kemiskinan lebih tepat sasaran.

## 2. Tinjauan Pustaka

Pada bagian ini dikaji pustaka yang memuat tentang gambaran singkat dari beberapa literatur mengenai pokok dari masalah yang dibahas dan kajian teori tentang analisis biplot, penguraian nilai singular, parameter  $\alpha$  dan ukuran kelayakan biplot sebagai dasar awal dari pembahasan yang akan dikemukakan selanjutnya.

### 2.1. Analisis Biplot

Analisis biplot adalah suatu metode multivariat yang menggunakan baris dan kolom dalam suatu grafik. Metode ini digunakan untuk menampilkan objek dan variabel-variabel dengan objek yang diteliti. Biplot merupakan teknik statistik deskriptif dimensi ganda yang dapat menyajikan secara simultan segugus objek pengamatan dan variabel dalam suatu grafik pada suatu bidang datar sehingga ciri-ciri variabel dan objek pengamatan serta posisi relatif antara objek pengamatan serta posisi relatif antara objek pengamatan dengan variabel dapat dianalisis.

Analisis biplot merupakan salah satu teknik peubah ganda yang menyajikan plot pengamatan  $n$  dan variabel  $p$  secara bersamaan dalam bidang dua dimensi. Penyajian plot pengamatan  $n$  dan variabel  $p$  secara bersamaan dapat memberikan tambahan informasi yang lebih baik tentang hubungan antara variabel dan pengamatan [2]. Biplot adalah salah satu upaya mengambatkan data-data yang ada pada tabel ringkasan dalam grafik berdimensi dua. Informasi yang diberikan oleh biplot mencakup objek dan variabel dalam satu gambar [3]. Berdasarkan tampilan biplot yang disajikan secara visual dan simultan sejumlah objek pengamatan dan variabel dalam suatu grafik, maka ada empat hal penting yang bisa diperoleh, yakni kedekatan antar objek yang diamati, keragaman variabel, korelasi antar variabel dan nilai variabel pada suatu objek [4]. Penjelasan secara lengkap terkait empat hal penting yang bisa di peroleh dari tampilan biplot antara lain:

i. Kedekatan antar objek yang diamati.

Kedekatan antar objek diinterpretasikan sebagai kemiripan sifat dua objek. Semakin dekat letak dua objek maka kemiripan sifat dua objek tersebut semakin tinggi.

## ii. Keragaman variabel

Keragaman variabel bisa dilihat dari panjang vektor variabel. variabel dengan nilai keragaman kecil akan digambar sebagai vektor pendek sedangkan variabel dengan nilai keragaman yang tinggi akan digambarkan sebagai vektor panjang.

## iii. Korelasi antar variabel.

Dua variabel dikatakan memiliki korelasi positif apabila digambarkan sebagai dua buah vektor yang membentuk sudut lancip. Dua variabel dikatakan memiliki korelasi negatif apabila digambarkan sebagai dua buah vektor yang membentuk sudut tumpul. Sedangkan dua variabel dikatakan tidak memiliki korelasi apabila digambarkan sebagai dua buah vektor yang membentuk sudut siku-siku.

## iv. Nilai variabel pada suatu objek.

Objek yang terletak searah dengan arah dari vektor variabel, memiliki nilai di atas rata-rata. Sebaliknya, objek yang terletak berlawanan dengan arah vektor variabel, memiliki nilai di bawah rata-rata. Nilai variabel pada suatu objek digunakan untuk melihat variabel penciri dari setiap objek. Nilai variabel pada suatu objek dapat dilihat dengan melakukan proyeksi ortogonal dari objek ke vektor peubah.

## 2.2. Penguraian Nilai Singular (*Singular Value Decomposition*)

Analisis biplot pertama kali diperkenalkan oleh Gabriel [5], menurut Jolliffe [2], analisis ini didasarkan pada *Singular Value Decomposition* (SVD). SVD bertujuan menguraikan matriks  $X$  berukuran  $n \times p$  dimana  $n$  adalah banyaknya objek pengamatan dan  $p$  adalah banyaknya variabel, menjadi 3 buah matriks. Persamaan yang digunakan adalah matriks berukuran  $n \times p$  yang berisi  $n$  objek dan  $p$  variabel, dapat ditulis:

$$X = ULA' \quad (1)$$

dimana:

$X$  = Matriks data berukuran  $n \times p$

$U$  = Matriks berukuran  $n \times r$  yang kolom-kolomnya disebut vektor singular kolom .

$L$  = Matriks diagonal berukuran  $r \times r$  dengan unsur diagonal utamanya adalah nilai singular matriks  $X$ , yaitu akar kuadrat dari nilai eigen matriks  $X'X$

$A$  = Matriks berukuran  $p \times r$  yang kolom-kolomnya adalah vektor eigen dari matriks  $X'X$

$U$  dan  $A$  adalah matriks orthonormal, dimana  $U'U = A'A = IX'X = I$  dan  $X'X = I$ ,  $U$  adalah kolom dari  $A'$  berisi eigen vektor dari matriks  $X'X$  dan matriks diagonal dari  $L$  yang berisi akar kuadrat dari nilai eigen  $X'X$  atau  $XX'$ , sehingga  $\sqrt{\lambda_1} \geq \sqrt{\lambda_2} \geq \dots \geq \sqrt{\lambda_r}$  unsur-unsur diagonal matriks  $L$  disebut nilai singular dari matriks  $X$ .

Dan kolom-kolom matriks  $A$  adalah vektor eigen dari  $X'X$  atau  $XX'$  yang berpadanan dengan  $\lambda$ .  $L^\alpha$  untuk  $0 \leq \alpha \leq 1$  merupakan matriks diagonal berukuran  $r \times r$  dengan unsur-unsur diagonalnya  $\lambda_1^{\alpha/2}, \lambda_2^{\alpha/2}, \dots, \lambda_r^{\alpha/2}$ . Definisi  $L^\alpha$  berlaku juga untuk  $L^{1-\alpha}$ , sehingga diperoleh unsur-unsur diagonalnya  $\lambda_1^{1-\alpha/2}, \lambda_2^{1-\alpha/2}, \dots, \lambda_r^{1-\alpha/2}$ . Misalkan  $UL^\alpha$  dan  $H' = L^{1-\alpha}A'$  dengan  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Persamaan (1) dapat ditulis menjadi (Jolliffe, 2002).

$$X = UL^\alpha L^{1-\alpha} A' = GH'$$

Matriks  $G$  skor komponen utama yang merupakan titik-titik koordinat dari  $n$  objek dan matriks  $H$  memuat vektor eigen yang merupakan titik – titik koordinat dari  $p$  peubah. Gambaran biplot dari matriks data  $X$  diperoleh dengan mengambil dua kolom pertama dari matriks  $G$  dan dua kolom pertama dari matriks  $H$ .

## 2.3. Parameter $\alpha$

Ada dua nilai  $\alpha$  yang digunakan untuk mendefinisikan  $G = UL^\alpha$  dan  $H' = L^{1-\alpha}A'$  yaitu  $\alpha = 0$  dan  $\alpha = 1$ . Jika  $\alpha = 0$ , maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$G = U \text{ dan } H' = LA'$$

Secara keseluruhan pemilihan  $\alpha = 0$ , akan memberikan kesesuaian untuk data keragaman. Tampilan biplot akan lebih mampu menggambarkan keragaman variabel, hubungan antar variabel sekaligus mendapatkan informasi mengenai pola objek. Jika  $\alpha = 0$  yang digunakan, maka hasil pemfaktoran disebut  $GH$  atau *CPM biplot*.

Jika  $\alpha = 1$ , maka diperoleh persamaan berikut:

$$G = UL \text{ dan } H' = A'$$

Dengan menggunakan  $\alpha = 1$ , tampilan biplot akan lebih memberikan gambaran jarak antara pasangan barisan sehingga baik digunakan untuk melihat kedekatan objek-objek. Jika  $\alpha = 1$  yang digunakan, maka hasil pemfaktoran disebut *RMP biplot (Row Metric Preserving)*.

## 2.4. Ukuran Kelayakan Biplot

Biplot adalah upaya membuat gambar di ruang berdimensi banyak menjadi gambar di ruang dimensi dua. Informasi data yang disajikan dalam biplot ditentukan berdasarkan nilai  $\rho^2$ , semakin mendekati nilai satu berarti biplot yang diperoleh dari matriks pendekatan berdimensi dua akan memberikan penyajian data yang semakin baik mengenai informasi yang terkandung pada data yang sebenarnya. Gabriel [5] mengemukakan ukuran pendekatan matriks  $X$  dengan biplot dalam bentuk:

$$\rho^2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sum_{k=1}^r \lambda_k}$$

dengan  $\rho^2$  adalah ukuran kelayakan biplot dua dimensi untuk nilai  $\alpha$  bersesuaian,  $\lambda_1$  adalah nilai eigen terbesar pertama,  $\lambda_2$  adalah nilai eigen terbesar kedua, dan  $\lambda_k$  adalah nilai eigen terbesar ke- $k$  dengan  $k = 1, 2, \dots, r$ . Apabila  $\rho^2$  mendekati nilai satu ( $\geq 70\%$ ), maka biplot memberikan penyajian yang semakin baik mengenai informasi data yang sebenarnya [4].

## 3. Metodologi Penelitian

### 3.1. Sumber data

Sumber data dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Maluku. Data yang digunakan yaitu data karakteristik kemiskinan Provinsi Maluku tahun 2013 [6], [7]. Data tersebut kemudian dipergunakan sebagai peubah dalam metode analisis biplot.

### 3.2. Variabel Penelitian

Data yang digunakan yaitu data karakteristik kemiskinan Provinsi Maluku tahun 2013, terdiri dari 11 kabupaten/kota yang merupakan objek penelitian dan 7 karakteristik kemiskinan. Objek penelitian meliputi Kabupaten Buru, Kabupaten Buru Selatan (Bursel), Kabupaten Kepulauan Aru, Kabupaten Maluku Barat Daya (MBD), Kabupaten Maluku Tengah (Malteng), Kabupaten Maluku Tenggara (Malra), Kabupaten Maluku Tenggara Barat (MTB), Kabupaten Seram Bagian Barat (SBB), Kabupaten Seram Bagian Timur (SBT), Kota Tual dan Kota Ambon.

Variabel penelitian merupakan karakteristik kemiskinan meliputi jumlah penduduk miskin ( $x_1$ ), angka melek huruf ( $x_2$ ), angka partisipasi sekolah ( $x_3$ ), tingkat partisipasi angkatan kerja ( $x_4$ ), ketersediaan air bersih ( $x_5$ ), pengeluaran perkapita untuk makanan ( $x_6$ ), luas lantai perkapita  $< 50 m^2$  ( $x_7$ ).

### 3.3. Prosedur Penelitian

Analisis biplot dikerjakan dengan menggunakan bantuan *software minitab* dan *software matlab*. Langkah-langkah untuk memperoleh gambar biplot adalah sebagai berikut:

- a. Penguraian nilai singular (*singular value decomposition*)
  - 1) Menyusun data pengamatan dalam bentuk matriks  $X^*$ ;
  - 2) Transformasi matriks  $X^*$  menjadi matriks  $X$ ;
  - 3) Menghitung matriks  $X'X$ ;
  - 4) Menghitung nilai eigen dari  $X'X$  dan memilih 2 nilai eigen terbesar;
  - 5) Mencari matriks matriks  $U$ ,  $L$  dan  $A$ ;
  - 6) Menghitung ukuran kelayakan biplot dari dua nilai eigen terbesar bila nilainya cukup besar ( $\geq 70\%$ ) maka pendekatan biplot dapat digunakan untuk memberikan penyajian visual bagi matriks data  $X$ .

## b. Analisis biplot

- 1) Menyusun matriks baris  $G$  dan matriks kolom  $H$ ;
- 2) Membuat gambar biplot berdasarkan vektor baris  $g_i$  dan vektor kolom  $h_j$  dimana sumbu  $x$  adalah komponen utama pertama dan sumbu  $y$  adalah komponen utama kedua;
- 3) Interpretasi gambar.

## 4. Hasil dan Pembahasan

### 4.1. Deskripsi Data Penelitian

Tabel berikut ini menyajikan informasi mengenai karakteristik kemiskinan pada setiap kabupaten/kota di Provinsi Maluku. Dari data yang diperoleh pengeluaran perkapita untuk makanan ( $x_6$ ) satuan pengukurannya dalam ribuan rupiah dan keenam variabel lain datanya berupa presentasi dari masing-masing karakteristik kemiskinan.

**Tabel 1. Data Penelitian**

Kabupaten / Kota	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
MTB	29,75	99,94	99,34	70,82	12,69	606,50	65,26
Malra	25,06	99,60	100,00	69,20	13,86	608,71	53,09
Malteng	22,15	99,15	98,92	57,13	16,40	624,30	43,52
Buru	18,51	92,87	93,63	66,57	0,11	617,56	45,57
Aru	27,34	99,16	98,39	64,52	20,33	607,65	66,15
SBB	24,49	98,33	99,01	67,07	0,22	608,75	37,78
SBT	24,49	98,21	99,60	59,89	0,00	599,09	43,50
MBD	29,25	98,60	100,00	75,46	0,00	590,54	58,71
Bursel	17,05	89,80	98,14	63,40	5,15	632,97	45,14
Ambon	4,42	99,67	98,97	58,46	30,21	647,46	44,81
Tual	23,28	99,78	99,87	59,82	9,25	667,54	41,00
<b>Rata-Rata</b>	22,34	97,73	98,71	64,75	9,83	619,19	49,50

### 4.2. Penguraian Nilai Singular

Ketika data karakteristik kemiskinan dari setiap kabupaten/kota diperoleh maka disusun dalam matriks  $X^*$  berikut.

$$X^* = \begin{bmatrix} 29,75 & 99,94 & 99,34 & 70,82 & 12,69 & 606,50 & 65,26 \\ 25,06 & 99,60 & 100,00 & 69,20 & 13,86 & 608,71 & 53,09 \\ 22,15 & 99,15 & 98,92 & 57,13 & 16,40 & 624,30 & 43,52 \\ 18,51 & 92,87 & 93,63 & 66,57 & 0,11 & 617,56 & 45,57 \\ 27,34 & 99,16 & 98,39 & 64,52 & 20,33 & 607,65 & 66,15 \\ 24,49 & 98,33 & 99,01 & 67,07 & 0,22 & 608,75 & 37,78 \\ 24,49 & 98,21 & 99,60 & 59,89 & 0 & 599,09 & 43,50 \\ 29,25 & 98,60 & 100,00 & 75,46 & 0 & 590,54 & 58,71 \\ 17,05 & 89,80 & 98,14 & 63,40 & 5,15 & 632,97 & 45,14 \\ 4,42 & 99,67 & 98,97 & 58,46 & 30,21 & 647,46 & 44,81 \\ 23,28 & 99,78 & 99,87 & 59,82 & 9,25 & 667,54 & 41,00 \end{bmatrix}$$

Transformasi matriks  $X^*$  menjadi matriks  $X$  dengan cara standarisasi data. Dalam analisis biplot, perhitungan jarak Euclidean dan juga korelasi sangat rentan terhadap perbedaan satuan pengukuran antar variabel. Karena satuan pengukuran yang digunakan dalam penelitian ini tidak sama maka data yang digunakan perlu distandarisasi terlebih dahulu. Standarisasi data dilakukan dengan bantuan *software minitab* yang hasilnya adalah sebagai berikut.

$$X = \begin{bmatrix} 1,019 & 0,669 & 0,347 & 1,059 & 0,286 & -0,562 & 1,607 \\ 0,505 & 0,566 & 0,715 & 0,776 & 0,403 & -0,464 & 0,366 \\ -0,040 & 0,429 & 0,114 & -1,333 & 0,658 & 0,226 & -0,610 \\ -0,547 & -1,479 & -2,830 & 0,317 & -0,975 & -0,072 & -0,401 \\ 0,683 & 0,432 & -0,181 & -0,042 & 1,052 & -0,511 & 1,698 \\ 0,286 & 0,180 & 0,164 & 0,404 & -0,964 & -0,462 & -1,196 \\ 0,286 & 0,144 & 0,492 & -0,851 & -0,986 & -0,890 & -0,612 \\ 0,949 & 0,262 & 0,715 & 1,870 & -0,986 & -1,269 & 0,939 \\ -0,750 & -2,412 & -0,320 & -0,237 & -0,470 & 0,611 & -0,445 \\ -2,510 & 0,587 & 0,142 & -1,101 & 2,042 & 1,253 & -0,479 \\ 0,118 & 0,621 & 0,642 & -0,863 & -0,059 & 2,142 & -0,867 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh matriks  $X$  maka dihitung matriks  $X'X$  dan nilai eigen yang hasilnya masing-masing sebagai berikut.

$$X'X = \begin{bmatrix} 10,000 & 2,805 & 2,961 & 5,809 & -4,552 & -6,068 & 5,033 \\ 2,805 & 10,000 & 6,336 & -0,079 & 4,321 & -0,608 & 2,546 \\ 2,961 & 6,336 & 10,000 & 0,233 & 2,085 & -0,268 & 1,270 \\ 5,809 & -0,079 & 0,233 & 10,000 & -4,093 & -6,435 & 5,777 \\ -4,552 & 4,321 & 2,085 & -4,093 & 10,000 & 4,054 & 2,495 \\ -6,068 & -0,608 & -0,268 & -6,435 & 4,054 & 10,000 & -4,874 \\ 5,033 & 2,546 & 1,270 & 5,777 & 2,495 & -4,874 & 10,000 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0,4621 \\ 2,8702 \\ 3,4805 \\ 3,9513 \\ 10,1014 \\ 20,0603 \\ 29,0743 \end{bmatrix}$$

Dengan dua nilai eigen yang terbesar adalah 29,0743 sebagai  $\lambda_1$  dan 20,0603 sebagai  $\lambda_2$ .

Penguraian nilai singular matriks  $U$  yang berukuran  $n \times p$  menjadi  $U$  berukuran  $n \times r$ , matriks  $L$  berukuran  $r \times r$  dan matriks  $A$  berukuran  $r \times p$ , yang dapat ditulis menjadi:

$$X_{(11 \times 7)} = U_{(11 \times 11)} L_{(11 \times 7)} A'_{(7 \times 7)}$$

dengan bantuan *software matlab* diperoleh matriks  $U$ ,  $L$  dan  $A$  sebagai berikut:

$$U = \begin{bmatrix} -0,38 & 0,20 & 0,24 & -0,13 & 0,17 & -0,05 & 0,11 & -0,37 & 0,39 & 0,64 & -0,05 \\ -0,20 & 0,19 & -0,00 & -0,09 & -0,17 & -0,09 & -0,51 & -0,22 & 0,54 & -0,53 & 0,04 \\ 0,21 & 0,17 & -0,12 & 0,38 & 0,17 & 0,22 & -0,38 & 0,54 & 0,36 & 0,32 & -0,16 \\ 0,11 & -0,68 & 0,34 & 0,26 & 0,22 & -0,40 & 0,07 & 0,04 & 0,34 & -0,07 & 0,09 \\ -0,20 & 0,23 & 0,44 & 0,19 & 0,32 & 0,29 & -0,02 & 0,12 & -0,14 & -0,16 & 0,65 \\ -0,07 & -0,15 & -0,42 & 0,13 & -0,22 & -0,29 & -0,37 & -0,12 & -0,15 & 0,36 & 0,58 \\ -0,04 & -0,06 & -0,41 & 0,44 & -0,13 & 0,37 & 0,50 & -0,24 & 0,35 & -0,12 & 0,16 \\ -0,51 & -0,04 & -0,07 & -0,24 & -0,30 & -0,16 & 0,29 & 0,65 & 0,18 & -0,02 & 0,12 \\ 0,23 & -0,42 & 0,07 & -0,54 & -0,14 & 0,58 & -0,13 & 0,01 & 0,19 & 0,14 & 0,21 \\ 0,56 & 0,37 & 0,32 & 0,01 & -0,50 & -0,23 & 0,23 & 0,03 & 0,19 & 0,10 & 0,22 \\ 0,29 & 0,20 & -0,40 & -0,40 & 0,58 & -0,25 & 0,20 & 0,07 & 0,21 & -0,10 & 0,24 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 5,392 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,479 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,178 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,988 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,866 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,694 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,680 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0,510 & 0,030 & -0,268 & 0,030 & 0,658 & 0,170 & -0,452 \\ -0,136 & 0,608 & -0,182 & 0,406 & 0,092 & -0,588 & 0,243 \\ -0,139 & 0,521 & -0,483 & -0,429 & -0,372 & 0,388 & 0,054 \\ -0,494 & -0,148 & 0,163 & -0,479 & -0,309 & -0,568 & -0,244 \\ 0,232 & 0,522 & 0,520 & 0,044 & -0,083 & 0,086 & -0,622 \\ 0,489 & 0,131 & -0,051 & -0,624 & 0,518 & -0,271 & 0,099 \\ -0,406 & 0,216 & 0,601 & -0,167 & 0,221 & 0,266 & 0,528 \end{bmatrix}$$

### 4.3. Ukuran Kelayakan Biplot

Sebelumnya telah diperoleh nilai  $\lambda_1$  sebesar 29,0743 dan  $\lambda_2$  20,0603 sehingga perhitungan nilai  $\rho^2$  adalah:  $\rho^2 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{\sum_{k=1}^7 \lambda_k} = \frac{49,1346}{70,0001} = 0,70$

Karena nilai  $\rho^2$  yang diperoleh mendekati 1, maka biplot yang dihasilkan sangat baik. Informasi yang diberikan oleh biplot sebesar 70 % dari keseluruhan informasi yang terkandung dalam data.

### 4.4. Konstruksi Biplot

Setelah penguraian nilai singular pada matriks  $X$ , pengkonstruksian biplot dilakukan dengan membuat matriks  $G$  dan  $H$  dengan menggunakan  $\alpha = 1$  maka  $G = UL$  dan  $H' = A'$ . Dari pendekatan matriks pada dimensi dua matriks  $G$  dan  $H$  diperoleh dengan cara mengambil dua kolom pertama dari matriks  $G$  dan dua baris pertama dari matriks  $H$ . Matriks  $G^*$  dan  $H'^*$  yang diperoleh adalah sebagai berikut

$$G^* = \begin{bmatrix} -2,044 & 0,885 \\ -1,099 & 0,846 \\ 1,116 & 0,757 \\ 0,618 & -3,041 \\ -1,057 & 1,044 \\ -0,357 & -0,678 \\ -0,229 & -0,286 \\ -2,774 & -0,194 \\ 1,243 & -1,883 \\ 3,005 & 1,644 \\ 1,578 & 0,906 \end{bmatrix}$$

$$H'^* = \begin{bmatrix} -0,510 & -0,136 & -0,139 & -0,494 & 0,232 & 0,489 & -0,406 \\ 0,030 & 0,608 & 0,521 & -0,148 & 0,522 & 0,131 & 0,216 \end{bmatrix}$$

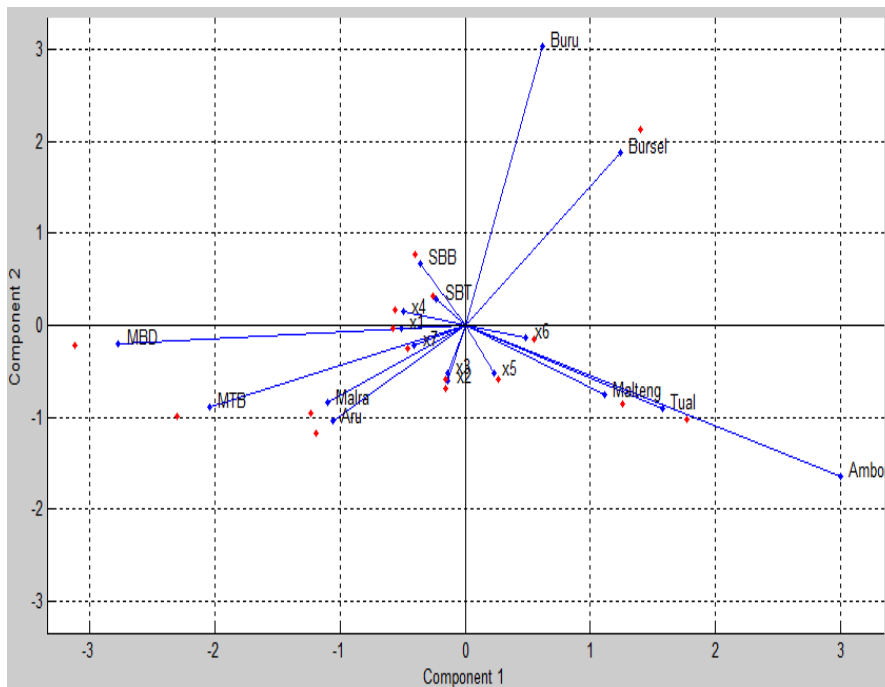
Dari matriks  $G^*$  yang merupakan titik koordinat dari 11 kabupaten/kota dan matriks  $H'^*$  yang merupakan titik koordinat dari 7 variabel dapat dibentuk koordinat  $Z$  yang merupakan gabungan dari matriks  $G^*$  dan  $H'^*$ .

$$Z = \begin{bmatrix} -2,044 & 0,885 \\ -1,099 & 0,846 \\ 1,116 & 0,757 \\ 0,618 & -3,041 \\ -1,057 & 1,044 \\ -0,357 & -0,678 \\ -0,229 & -0,286 \\ -2,774 & 0,194 \\ 1,243 & -1,883 \\ 3,005 & 1,644 \\ 1,578 & 0,906 \\ -0,510 & 0,030 \\ -0,136 & 0,608 \\ -0,139 & 0,521 \\ -0,494 & -0,148 \\ 0,232 & 0,522 \\ 0,489 & 0,131 \\ -0,406 & 0,216 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks  $Z$ , langkah selanjutnya ialah memasukan elemen-elemen matriks  $Z$  ke dalam program matlab untuk menghasilkan biplotnya.

#### 4.5. Hasil Analisis Biplot

Berdasarkan prosedur analisis biplot diperoleh hasil berupa biplot seperti pada gambar berikut:



**Gambar. 1 Grafik Biplot Pemetaan Karakteristik Kemiskinan di Provinsi Maluku**

Pada penelitian ini dihasilkan grafik biplot dengan  $\alpha = 1$ , alasan terpilihnya biplot dengan  $\alpha = 1$  yaitu hasil kali matriks koordinat objek ( $G$ ) dan matriks koordinat variabel ( $H$ ) sama dengan elemen-elemen pada

matriks data awal. Sehingga biplot dalam penelitian ini merupakan biplot RPM (*Row Metric Preserving*) atau biplot komponen utama. Biplot RPM ini digunakan untuk menduga jarak Euclidean secara optimal.

### a. Kedekatan antar Objek

Informasi ini dijadikan paduan untuk mengetahui kabupaten/kota yang memiliki kemiripan karakteristik dengan kabupaten/kota lainnya. Kabupaten/kota yang berada pada kuadran yang sama dikatakan memiliki kesamaan karakteristik kemiskinan yang cukup dekat jika dibandingkan dengan kabupaten/kota yang berada pada kudran yang berbeda. Pada Gambar 1 terlihat kabupaten/kota yang berada pada kuadran yang sama yaitu:

- i. Kuadran ke I, diantaranya kabupaten Buru dan Buru Selatan dengan jarak euclidean sebesar 1,3158 yang berarti kabupaten Buru dan Kabupaten Buru Selatan memiliki kemiripan karakteristik kemiskinan pada angka melek huruf ( $x_2$ ) dan angka partisipasi sekolah ( $x_3$ ) yang rendah.
- ii. Kuadran ke II, diantaranya kabupaten Seram Bagian Barat dan Seram Bagian Timur dengan jarak euclidean sebesar 0,9724 yang berarti kedua kabupaten tersebut memiliki kemiripan karakteristik kemiskinan pada tingkat partisipasi angkatan kerja ( $x_4$ ) yang banyak dan ketersediaan air bersih ( $x_5$ ) yang kurang memadai.
- iii. Kuadran ke III, diantaranya kabupaten Maluku Tenggara, Kepulauan Aru, Maluku Tenggara Barat dan Kabupaten Maluku Barat Daya. Dengan jarak euclidean antara Kabupaten Maluku Tenggara dan Kabupaten Kepulauan Aru sebesar 0,2029, jarak euclidean Kepulauan Aru dan Kabupaten Maluku Tenggara Barat adalah 0,9998. Dengan demikian dapat dikatakan keempat kabupaten/kota tersebut memiliki kemiripan karakteristik kemiskinan pada jumlah penduduk miskin ( $x_1$ ), angka melek huruf ( $x_2$ ), angka partisipasi sekolah yang rendah ( $x_3$ ) dan luas lantai perkapita  $< 50 m^2$  ( $x_7$ ).
- iv. Kuadran ke IV, diantaranya kabupaten Maluku Tengah, kota Tual dan Ambon. Dengan jarak euclidean kabupaten Maluku Tengah dan Kota Tual sebesar 0,4851 dan jarak euclidean kota Tual dan Ambon sebesar 1,6072. Dapat dikatakan ketiga kabupaten atau kota tersebut memiliki kemiripan karakteristik kemiskinan pada ketersediaan air bersih ( $x_5$ ) yang memadai dan pengeluaran perkapita untuk makanan ( $x_6$ ) yang tinggi.

### b. Interpretasi Nilai Variabel Pada Suatu Objek

Informasi ini digunakan untuk menentukan karakteristik kemiskinan di setiap wilayah (kabupaten/kota). Suatu wilayah yang terletak searah dengan vektor karakteristik kemiskinan menunjukkan tingginya nilai karakteristik kemiskinan untuk wilayah tersebut atau dapat diinterpretasikan bahwa karakteristik kemiskinan untuk wilayah tersebut mempunyai nilai di atas rata-rata seluruh kabupaten/kota. Sebaliknya, jika suatu wilayah terletak berlawanan arah dengan vektor karakteristik kemiskinan maka nilai karakteristik kemiskinannya rendah atau dibawah rata-rata seluruh kabupaten/kota. Sedangkan wilayah yang hampir berada di tengah-tengah berarti wilayah tersebut memiliki nilai karakteristik kemiskinan yang dekat dengan rata-rata. Berdasarkan pada Gambar 1 diperoleh bahwa:

- i. Kabupaten Maluku Barat Daya searah dengan dengan arah vektor variabel ( $x_1$ ). Sesuai dengan data asli, dimana jumlah penduduk miskin di kabupaten tersebut sebesar 29,25 % di atas rata-rata keseluruhan yakni 22,34%.
- ii. Variabel ( $x_3$ ) dan ( $x_2$ ) berlawanan arah dengan kabupaten Buru dan Buru Selatan yang berarti angka melek huruf dan angka partisipasi sekolah berada di bawah rata-rata seluruh kabupaten/kota.
- iii. Variabel ( $x_5$ ) berlawanan arah dengan kabupaten Seram Bagian Timur dan Seram Bagian Barat yang berarti ketersediaan air di kedua kabupaten tersebut berada di bawah rata-rata seluruh kabupaten/kota.

### c. Keragaman Variabel ( Karakteristik Kemiskinan)

Informasi ini digunakan untuk melihat keragaman karakteristik kemiskinan setiap kabupaten/kota. Dengan ini, bisa diperkirakan pada karakteristik kemiskinan yang secara strategi harus ditingkatkan dalam rangka menurunkan angka kemiskinan, dan juga sebaliknya. Dalam biplot nantinya komponen-komponen dengan keragaman yang besar digambarkan sebagai vektor yang panjang. Berdasarkan Gambar 1 dan perhitungan panjang vektor diperoleh bahwa vektor peubah terpanjang pada variabel  $x_2$  yaitu angka melek huruf. Hal ini berarti angka melek huruf merupakan keragaman paling besar dan dapat dikatakan karakteristik kemiskinan yang paling dominan di Provinsi Maluku yaitu angka melek huruf sedangkan vektor peubah



terpendek adalah  $x_7$  yaitu luas lantai perkapita  $< 50m^2$  yang berarti luas lantai perkapita  $< 50m^2$  mempunyai keragaman yang kecil.

#### d. Korelasi Antar Variabel

Korelasi atau hubungan saling mempengaruhi antar karakteristik kemiskinan dapat diinterpretasikan dari penyajian grafik biplot. Pada grafik biplot karakteristik kemiskinan digambarkan sebagai garis berarah.

**Tabel 2. Besar sudut  $\theta$  antara masing-masing variabel kemiskinan**

Variabel	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_1$	$90^\circ$						
$x_2$	$73,9^\circ$	$90^\circ$					
$x_3$	$71,6^\circ$	$2,29^\circ$	$90^\circ$				
$x_4$	$29,9^\circ$	$94,0^\circ$	$91,7^\circ$	$90^\circ$			
$x_5$	$110,6^\circ$	$36,6^\circ$	$38,9^\circ$	$130,6^\circ$	$90^\circ$		
$x_6$	$161,6^\circ$	$87,6^\circ$	$89,9^\circ$	$178,5^\circ$	$50,9^\circ$	$90^\circ$	
$x_7$	$24,6^\circ$	$49,4^\circ$	$47,1^\circ$	$44,6^\circ$	$86,0^\circ$	$137,0^\circ$	$90^\circ$

Sudut yang dibentuk antara dua karakteristik kemiskinan merupakan nilai cosinus. Berdasarkan perhitungan maka diperoleh besar sudut  $\theta$  dari tiap-tiap variabel seperti yang disajikan pada Tabel 2 di atas. Selanjutnya dari Gambar 1 dan Tabel 2 maka diperoleh:

- i. Angka melek huruf ( $x_2$ ) dan angka partisipasi sekolah ( $x_3$ ) saling mempengaruhi dan berkorelasi positif. Hal tersebut ditentukan dari sudut yang terbentuk sebesar  $2,29^\circ$ . Karena banyaknya angka melek huruf maka angka partisipasi sekolah semakin bertambah.
- ii. Tingkat partisipasi angkatan kerja ( $x_4$ ) berkorelasi negatif dengan pengeluaran perkapita ( $x_6$ ) dengan sudut yang terbentuk sebesar  $178,45^\circ$  semakin banyak tingkat partisipasi angkatan kerja maka pengeluaran perkapita semakin sedikit.

#### 5. Kesimpulan

Dari pembahasan pada bagian sebelumnya, maka dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

- a. Wilayah yang memiliki kesamaan karakteristik terbagi menjadi 4 bagian yaitu:
  - Kelompok I : Kabupaten Buru dan Buru Selatan memiliki kemiripan karakteristik kemiskinan pada angka melek huruf ( $x_2$ ) dan angka partisipasi sekolah ( $x_3$ ) yang rendah.
  - Kelompok II : Kabupaten SBB dan SBT. Kedua kabupaten tersebut memiliki kemiripan karakteristik kemiskinan pada tingkat partisipasi angkatan kerja ( $x_4$ ) yang banyak dan ketersediaan air bersih ( $x_5$ ) yang kurang memadai.
  - Kelompok III : Kabupaten Maluku Tenggara, Kepulauan Aru, MTB dan MBD. Dapat dikatakan keempat kabupaten/kota tersebut memiliki kemiripan karakteristik kemiskinan pada jumlah penduduk miskin ( $x_1$ ), Angka melek huruf ( $x_2$ ) dan angka partisipasi sekolah yang rendah ( $x_3$ ) dan luas lantai perkapita  $< 50 m^2$  ( $x_7$ )
  - Kelompok IV : Kabupaten Maluku Tengah, kota Tual dan Ambon. Dapat dikatakan ketiga kabupaten/kota tersebut memiliki kemiripan karakteristik kemiskinan pada ketersediaan air bersih ( $x_5$ ) yang memadai dan pengeluaran perkapita untuk makanan ( $x_6$ ) yang tinggi.
- b. Karakteristik kemiskinan yang paling dominan di Provinsi Maluku yaitu angka melek huruf.
- c. Angka melek huruf ( $x_2$ ) dan angka partisipasi sekolah ( $x_3$ ) saling mempengaruhi dan berkorelasi positif. Sedangkan tingkat partisipasi angkatan kerja ( $x_4$ ) berkorelasi negatif dengan pengeluaran perkapita ( $x_6$ ). Semakin banyak tingkat partisipasi angkatan kerja maka pengeluaran perkapita semakin sedikit.

## Daftar Pustaka

- [1] S. Hidayat, “Pemodelan Desa Tertinggal di Jawa Barat Tahun 2005 dengan Pendekatan MARS,” Surabaya, 2008.
- [2] I. T. Jolliffe, *Principal Component Analysis*, New York: Springer-Verlag, 2002.
- [3] E. Fitria, H. Diyah and A. Yasin, “Analisis Principal Component Biplot pada Bank Umum Persero yang Beroperasi di Jawa Tengah,” in *Prosiding Seminar Nasional Statistika*, 2013.
- [4] A. A. Matjik, I. Sumertajaya and M. Sidik, *Peubah Ganda dengan Menggunakan SAS*, Bogor: IPB Press, 2011.
- [5] K. R. Gabriel, “The Biplot Graphic Display of Matrices with Application to Principal Component Analysis,” *Biometrika*, vol. 58, pp. 453-467, 1997.
- [6] BPS Provinsi Maluku; *Statistik Daerah Provinsi Maluku*, 2014.
- [7] BPS Provinsi Maluku; *Maluku dalam Angka*, 2014.

## KONSEP GEOMETRI FRAKTAL DALAM KAIN TENUN TANIMBAR

**Darma Andreas Ngilawajan**

Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia  
e-mail: dngilawajan@gmail.com

---

### Abstrak

Geometri Fraktal adalah cabang geometri yang bertumpu pada dua hal, yaitu kemiripan diri sendiri (*self-similarity*) dan ukuran (*dimension*). Dari dua hal dasar tersebut maka sebuah objek dapat diproyeksi dalam berbagai ukuran secara berulang sehingga terbentuk suatu pola yang unik. Kain tenun Tanimbar merupakan salah satu produk budaya dari Kabupaten Maluku Tenggara Barat yang telah ada sejak ratusan tahun lalu. Kain tenun ini adalah hasil kerajinan tangan penduduk lokal yang dapat diolah untuk dijadikan pakaian adat, maupun digunakan sebagai kelengkapan dalam berbagai upacara adat di Kepulauan Tanimbar. Kain tenun Tanimbar memiliki pola yang menjadi ciri khas tersendiri dari kain tenun tersebut. Jika diteliti secara seksama, maka pola dari kain tenun Tanimbar dihasilkan dari gambar-gambar yang dibuat berulang yang menyerupai konsep dasar dari geometri fraktal. Tulisan ini akan mengkaji konsep geometri fraktal dalam pola-pola yang terbentuk pada kain tenun Tanimbar. Selain itu pula, untuk mengenalkan salah satu produk budaya dari pulau Tanimbar melalui matematika.

*Kata Kunci:* Geometri, geometri fraktal, kain tenun Tanimbar.

## CONCEPT OF FRACTAL GEOMETRY ON PATTERNS OF TANIMBAR'S WOVEN FABRIC

### Abstract

Fractal Geometry is a branch of geometry which emphasized on two things, which are self-similarity and dimension. The two basic things which made an object to various in size so then those various sizes of the object can be formed to a unique pattern. Tanimbar's woven fabric is one of various cultural products of South East Maluku Regency which has been invented since hundred years ago. Woven fabric is a handy product of local people that can be formed to local fashion which used in daily life and as a feature in traditional ceremonials in Tanimbar Island. Tanimbar's woven fabric has unique characteristic in its pattern. If we take a look precisely, the pattern is formed by iteration of a figure which similar to fractal geometry. This paper intended to discuss about the concept of fractal geometry on patterns of Tanimbar's woven fabric. In addition, it also intended to introduce one of Tanimbar's cultural products through mathematics.

*Keywords:* Geometry, fractal geometry, Tanimbar's woven fabric.

---

### 1. Pendahuluan

Geometri sebagai salah satu cabang dari matematika, saat ini telah mengalami perkembangan yang signifikan. Indikasi dari perkembangan tersebut terlihat dari lahirnya beberapa cabang geometri di era tahun 70-an yang merupakan pengembangan dari konsep geometri terdahulu, dimana cabang-cabang baru dari geometri tersebut lebih berasosiasi dengan dunia nyata. Salah satu cabang geometri tersebut adalah geometri fraktal.

Geometri fraktal, yang dicetuskan pertama kali oleh Benoit Mandelbrot, memiliki karakteristik tersendiri karena objek kajiannya bukan hanya hasil buatan manusia seperti halnya objek pada geometri Euclidian, tetapi sebagian besar merupakan bentuk-bentuk objek di alam. Dengan kata lain, geometri fraktal merupakan cara alami untuk merepresentasi bentuk-bentuk objek di alam. Mengacu pada karakteristik

tersebut, maka konsep geometri fraktal hampir selalu dapat kita temukan di lingkungan sekitar kita, misalnya bentuk awan, daun, atau pohon.

Produk fisik dari suatu bentuk kebudayaan merupakan salah satu contoh objek yang dapat kita jumpai dalam keseharian kita, misalnya rumah adat, seni ukiran, patung, kerajinan anyaman, tenunan kain dan sebagainya. Jika dilihat secara seksama, produk-produk fisik dari kebudayaan tersebut memiliki pola khusus yang menjadi ciri khas dari budaya yang menempel pada produk tersebut.

Kain tenun Tanimbar merupakan salah satu produk fisik dari kebudayaan masyarakat di kepulauan Tanimbar, kabupaten Maluku Tenggara Barat. Kain tenun Tanimbar jika dilihat secara teliti maka terlihat suatu pola pada kain tersebut yang terbentuk dari pengulangan suatu bentuk abstrak. Pengulangan suatu objek dalam berbagai ukuran sehingga membentuk suatu pola merupakan konsep dasar dari geometri fraktal, sehingga pola dari kain tenun Tanimbar tentunya dapat dihubungkan dengan konsep geometri fraktal.

Konsep geometri fraktal dalam tulisan ini tidak akan diulas secara mendalam, tetapi dibatasi hanya pada konsep dasar, yaitu definisi dan contoh-contohnya serta kaitannya dengan pola yang ada pada kain tenun Tanimbar.

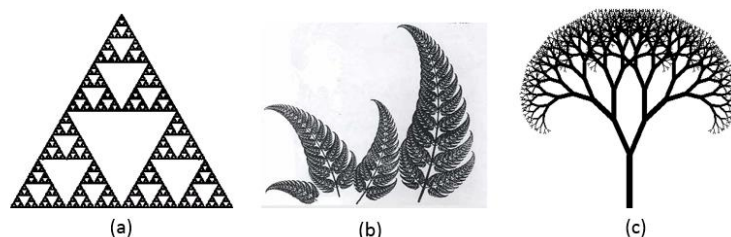
## 2. Tinjauan Pustaka

### 2.1. Geometri Fraktal

Kata fraktal diadaptasi dari bahasa Inggris, yaitu *fractal*. Kata *fractal* sendiri sebenarnya berasal dari bahasa latin, yaitu *fractus*, yang artinya “patah” atau “rusak”. Gaddis dan Zyda dalam [1] menyatakan bahwa Geometri Euclid yang telah ada sebelumnya tidak dapat memuaskan sebagai model untuk menggambarkan objek-objek di alam. Sebagai contoh, jika siapa pun mencoba membuat gambar sebuah objek non reguler pada layar komputer (misalkan sebuah pohon) dengan menggunakan geometri Euclid maka dipastikan hasilnya tidak akan sesuai dengan bentuk pohon yang sebenarnya. Hal ini yang menjadi alasan bagi Mandelbrot untuk menciptakan jenis geometri baru yang dapat memenuhi kebutuhan untuk merepresentasi bentuk dari objek-objek di alam.

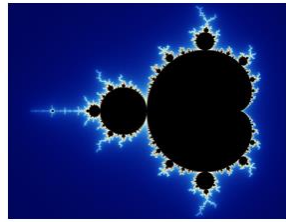
Selanjutnya Gaddis dan Zyda dalam [1] menyatakan bahwa kekuatan dari temuan Mandelbrot adalah penelitiannya terhadap teori-teori para matematikawan sebelumnya dan pengembangan dari penerapan teori-teori tersebut. Pada tahun 1975, Mandelbrot menciptakan istilah *fractal* untuk mendeskripsikan sekelompok fungsi yang pertama kali ditemukan oleh Cantor (*Cantor's Dust* = debu Cantor), Koch (*Koch's Curve* = kurva Koch), dan Peano (*Peano's Curve* = kurva Peano). Mandelbrot melihat bahwa fungsi-fungsi tersebut meletakkan dasar-dasar pemikiran yang sangat bernilai sehingga dapat digunakan untuk membuat kreasi dari objek-objek di alam, sebagai contoh garis pantai dan pegunungan. Mandelbrot kemudian memperkenalkan istilah geometri fraktal untuk tipe-tipe objek tersebut. Meskipun Mandelbrot tidak menciptakan teori-teori yang mendasari geometri faktal, namun pemikirannya dalam meramu teori-teori tersebut sehingga menghasilkan suatu model yang akurat untuk mendeskripsikan objek-objek di alam sehingga dia dianggap sebagai tokoh yang menciptakan geometri fraktal.

Mandelbrot dalam [2] mendefinisikan fraktal sebagai suatu fenomena alam atau himpunan matematika yang menunjukkan pengulangan pola yang ditampilkan pada setiap ukuran yang berbeda. Dari pendapat Mandelbrot, maka dapat dikatakan bahwa fraktal dikonstruksi berdasarkan dua hal, yaitu kemiripan diri sendiri (*self-similarity*) dan ukuran (*dimension*). Dengan kata lain, fraktal adalah objek yang memiliki kemiripan dirinya sendiri namun dalam skala atau ukuran yang berbeda. Hal ini berarti bahwa suatu objek dikategorikan fraktal jika bagian-bagian dari objek tersebut akan tampak sama dengan dirinya sendiri bila dilihat secara keseluruhan. Gambar-gambar berikut adalah contoh dari fraktal.



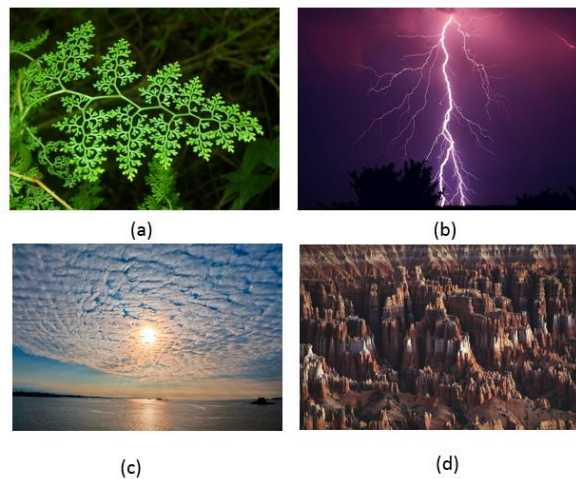
Gambar 1. (a) Segitiga Sierpinski, (b) Daun Pakis Barnsley, (c) Pohon Fraktal

Mandelbrot kemudian membuat penjelasan matematis dari fraktal, yang dikenal sebagai *Mandelbrot Set* (himpunan Mandelbrot), yaitu himpunan bilangan kompleks  $c$  sehingga  $f_c(Z) = Z^2 + c$  tidak berbeda ketika diiterasi dari  $Z = 0$ . Secara geometris, himpunan Mandelbrot ditunjukkan dalam gambar berikut.



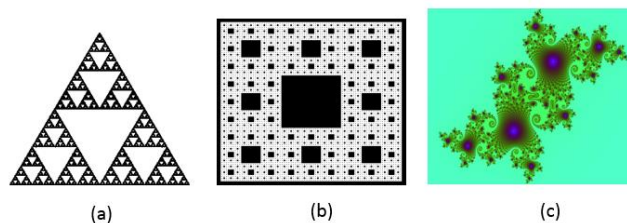
**Gambar 2. Himpunan Mandelbrot**

Selanjutnya, Mandelbrot dalam [2] menyebutkan bahwa berdasarkan sumber terbentuknya, maka objek fraktal dapat dibedakan sebagai objek alam dan objek hasil ciptaan manusia. Merujuk pada pendapat tersebut, maka disimpulkan bahwa meskipun ide awal lahirnya geometri fraktal adalah untuk merepresentasi objek-objek di alam, namun objek fraktal tidak selalu merupakan objek-objek di alam, tetapi dapat juga merupakan hasil ciptaan manusia. Contoh sebagian objek fraktal di alam ditunjukkan dalam gambar berikut:



**Gambar 3. Contoh sebagian objek alam yang merupakan fraktal**  
(a) Bentuk daun, (b) Cahaya petir, (c) Awan, (d) Pegunungan

Sedangkan objek buatan manusia yang merupakan fraktal, ditunjukkan dalam gambar berikut:



**Gambar 4. Contoh sebagian objek buatan manusia yang merupakan fraktal**  
(a) Segitiga Sierpinski, (b) Karpas Sierpinski, (c) Himpunan Julia

## 2.2. Kain Tenun Tanimbar

Pulau Tanimbar atau dikenal dengan nama lain Pulau Yamdena adalah salah satu pulau yang terletak di wilayah kabupaten Maluku Tenggara Barat. Pulau Tanimbar memiliki beragam corak budaya yang ditunjukkan melalui sejumlah produk budaya dalam berbagai bentuk, diantaranya adalah kain tenun.

Dalam [3], Van Vuuren menyatakan bahwa sejarah menenun pakaian di pulau Tanimbar telah ada sejak jaman dulu. Awalnya para leluhur orang Tanimbar membuat anyaman dari daun lontar untuk membuat pakaian sebagai penutup tubuh. Dari sini maka disimpulkan bahwa leluhur orang Tanimbar tidak menggunakan cawat seperti daerah lain di Maluku. Selanjutnya, Van Vuuren mengatakan pula bahwa teknik menganyam daun

lontar sebagai pakaian inilah yang menjadi awal dari teknik menenun kain. Seiring dengan ditemukannya kapas sebagai bahan dasar untuk membuat kain, maka teknik anyaman pada daun lontar ditransformasikan ke teknik menenun pada kain, yang lebih dikenal dengan nama tenun ikat Tanimbar.

Joseph dalam [4] mengatakan bahwa pekerjaan menenun kain merupakan ketrampilan yang diwariskan secara turun-temurun pada kaum wanita Tanimbar. Ketrampilan menenun, selain sebagai sumber untuk mencari nafkah, juga merupakan keharusan adat kepada generasi wanita sebelum memasuki jenjang perkawinan. Sehingga dapat dikatakan bahwa keterampilan menenun merupakan warisan dari orang tua kepada anaknya, dimana sebelumnya ketrampilan menenun yang dimiliki orang tua juga diwariskan dari generasi sebelumnya.

Selain sebagai penutup tubuh, kain tenun Tanimbar juga memiliki banyak fungsi yang terkait dengan adat istiadat di Tanimbar. Van Vuuren dalam [3] menyatakan bahwa fungsi kain tenun Tanimbar bukan saja sebagai bahan untuk pakaian, tetapi lebih banyak digunakan dalam upacara-upacara adat, misalnya pada upacara perkawinan, pemujaan arwah leluhur, upacara kematian, dan sebagainya. Pada upacara-upacara tersebut, kain tenun digunakan sebagai persembahan atau sebagai objek pelengkap dalam ritual adat yang dilakukan.

Menurut Joseph [4] corak atau pola yang ada pada kain tenun Tanimbar bukan cuma sebagai motif hiasan, tetapi memiliki nilai dan arti tertentu. Corak atau pola pada kain tenun merupakan hal-hal yang digemari dan dialami oleh para leluhur selama mereka masih hidup. Pola yang ada pada kain tenun pada umumnya merupakan corak dekoratif dan berfungsi sebagai pemujaan terhadap roh-roh tertentu, atau juga menceritakan kehidupan para leluhur yang diciptakan secara simbolik dalam bentuk-bentuk abstrak. Bentuk-bentuk abstrak dalam kain tenun Tanimbar umumnya berupa ragam hias tumbuhan, manusia dan ikan. Ragam hias dalam bentuk-bentuk abstrak pada kain tenun Tanimbar ditunjukkan dalam gambar-gambar berikut:



**Gambar 5. Contoh-contoh pola kain tenun Tanimbar**

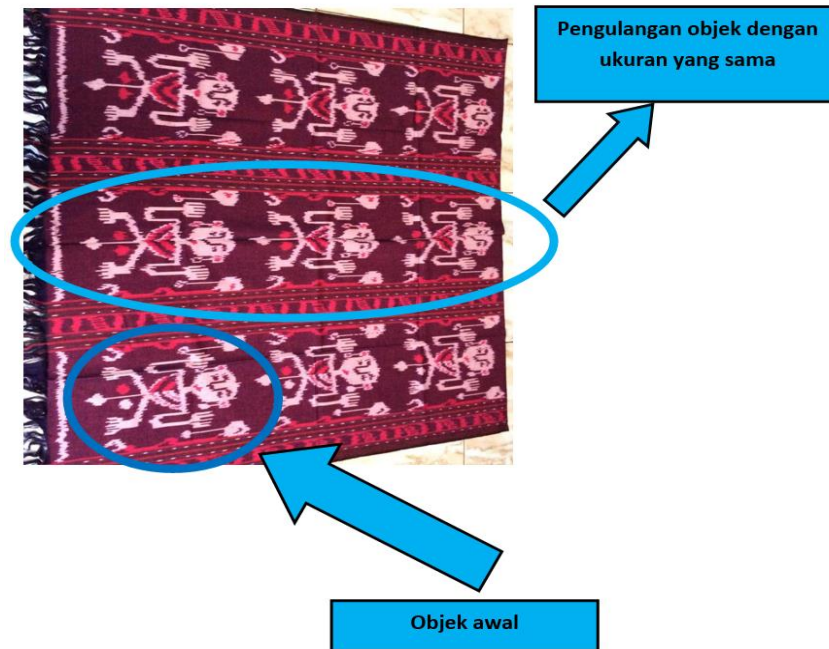
Van Vuuren dalam [3] mengatakan bahwa motif dari gambar manusia pada kain tenun Tanimbar melambangkan para leluhur atau roh tertentu yang disembah oleh masyarakat lokal. Motif tumbuhan atau bunga melambangkan alam sekitarnya. Sedangkan motif ikan melambangkan hasil laut yang menjadi salah satu makanan pokok dan juga simbol dari mata pencarian sebagian besar masyarakat Tanimbar yang tinggal di pesisir pantai yang berprofesi sebagai nelayan.

### 3. Hasil dan Pembahasan

#### 3.1. Konsep Geometri Fraktal Dalam Kain Tenun Tanimbar

Pada bagian ini akan dikaji konsep geometri fraktal dalam pola yang terbentuk pada kain tenun Tanimbar. Kajian tersebut ditunjukkan dalam gambar-gambar yang disertai penjelasan.

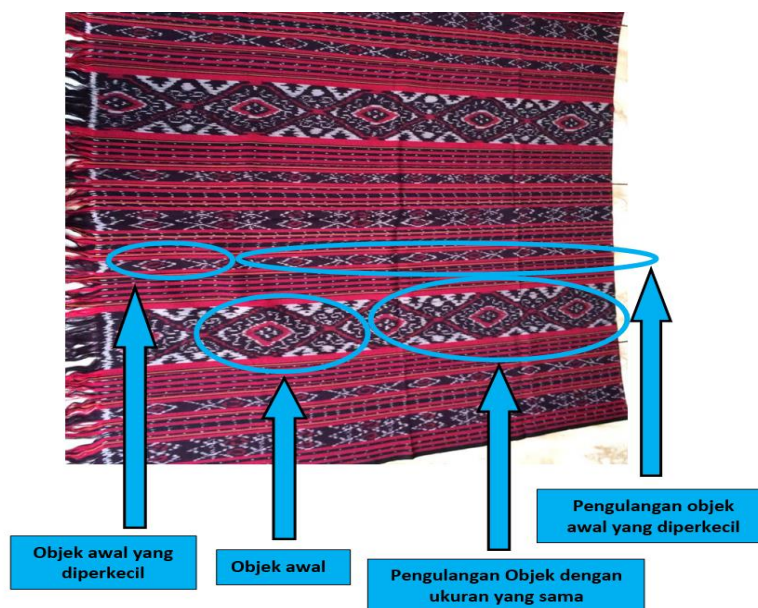
##### a. Pola yang terbentuk dari motif gambar manusia



Gambar 6. Pola bentuk abstrak gambar manusia yang terbentuk dari pengulangan objek dengan ukuran yang sama

Dari gambar 6, terlihat bahwa objek dasar pada kain tenun tersebut merupakan bentuk abstrak dari manusia. Objek tersebut diproyeksikan berulang dengan ukuran yang sama sehingga terbentuk suatu pola. Teknik proyeksi objek yang dilakukan pada kain tenun mirip dengan konsep dasar dari geometri fraktal, yaitu kemiripan diri sendiri dan ukuran.

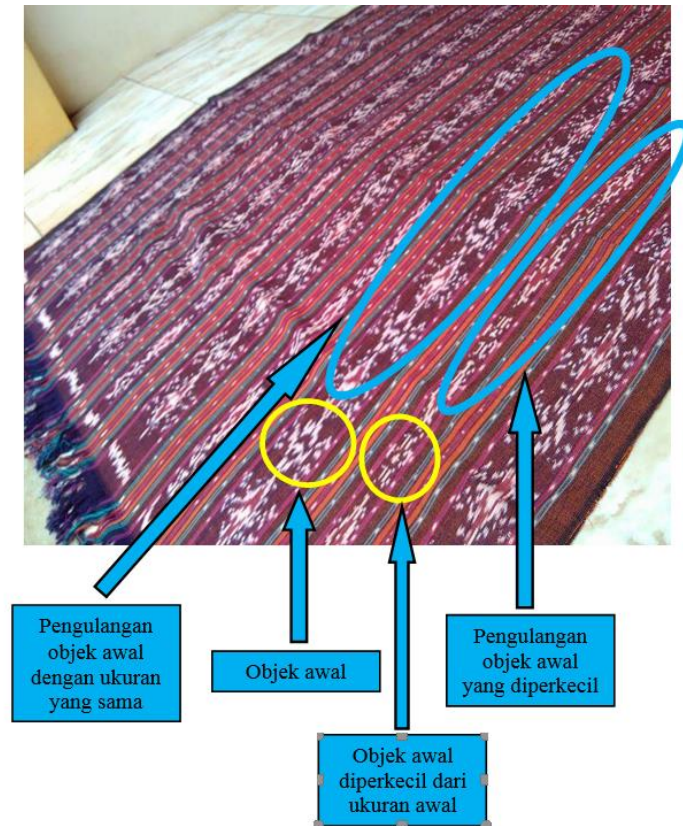
##### b. Pola yang terbentuk dari motif gambar ikan



Gambar 7. Pola kain tenun yang dibuat dari pengulangan bentuk abstrak gambar ikan dengan ukuran yang berbeda

Pada gambar 7, objek dasar dari pola yang terbentuk adalah gambar abstrak dari ikan. Objek dasar tersebut kemudian diproyeksi berulang dengan ukuran yang sama dan ukuran yang diperkecil sehingga membentuk pola yang unik.

### c. Pola yang terbentuk dari motif gambar tumbuhan



**Gambar 8.** Pola kain tenun yang dibentuk dari pengulangan bentuk gambar abstrak dari sejenis bunga

Pada gambar 8, terlihat bahwa gambar pada kain merupakan bentuk abstrak dari sejenis tumbuhan. Objek dasar berupa bentuk abstrak dari tumbuhan kemudian diproyeksi berulang dalam ukuran yang sama dan ukuran yang berbeda pada kain sehingga terbentuk suatu pola.

Dari gambar 6 – 8, dapat dilihat bahwa pola yang ada pada kain-kain tenun dibuat dari suatu objek yang diproyeksi secara berulang dengan ukuran yang sama dan ukuran yang berbeda. Proyeksi yang dilakukan dalam membuat motif gambar pada kain-kain tenun tersebut mengacu pada dua hal dasar, yaitu kemiripan diri sendiri dan ukuran yang sama maupun berbeda. Dua hal dasar yang digunakan dalam membuat pola pada kain tenun Tanimbar tersebut sangat mirip dengan konsep dasar dari geometri fraktal, yaitu kemiripan diri sendiri (*self-similarity*) dan ukuran (*dimension*).

## 4. Kesimpulan

Dari kajian yang telah dilakukan pada pembahasan, maka dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

- Motif yang terbentuk pada kain tenun Tanimbar menunjukkan adanya pengulangan suatu objek dalam ukuran yang sama maupun berbeda sehingga membentuk suatu pola. Pengulangan suatu objek dalam ukuran yang sama atau berbeda menunjukkan kemiripan dengan konsep geometri fraktal.
- Leluhur masyarakat Tanimbar dalam kehidupan sehari-harinya, tanpa mereka sadari, telah menerapkan konsep geometri fraktal. Mereka telah memiliki imajinasi bagaimana membuat suatu objek yang diproyeksi berulang dalam berbagai ukuran sehingga membentuk suatu pola. Imajinasi tersebut tercermin dalam produk kain tenun Tanimbar.



## Daftar Pustaka

- [1] M. E. Gaddis and M. J. Zyda, *The Fractal Geometry of Nature: Its Mathematical Basis and Application to Computer Graphics*, California: Naval Postgraduate School, 1986.
- [2] B. B. Mandelbrot, *Fractals and the Geometry of Nature. Year Book of Science and the Future*, New York: Encyclopedia Britania Inc., 1981.
- [3] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, New York: W. H. Freeman and Co., 1982.
- [4] L. C. Joseph, *Mengenal Tenun Tradisional Daerah Maluku*, Ambon: Proyek Pengembangan Permuseuman Maluku, 1982.
- [5] M. Van Vuuren, *Strengen Naar De Voorouders - Een begin tot Inventarisatie van Ikatmotieven van de Tanimbar-Einlanden*, Den Haag: Cip-Gegevens Koninklijke Bibliotheek, 1995.

## PERAMALAN JUMLAH PENGUNJUNG PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS PATTIMURA AMBON MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI

S. Yuni<sup>1</sup>, Mozart W. Talakua<sup>2</sup>, Yopi A. Lesnussa<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia  
e-mail: <sup>2</sup>ocat\_08@yahoo.com; <sup>3</sup>yopi\_a\_lesnussa@yahoo.com

---

### Abstrak

Perpustakaan merupakan pusat informasi yang harus dikelola dengan baik agar dapat memberikan manfaat semaksimal mungkin. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui fluktuasi dan meramalkan banyaknya pengunjung Perpustakaan Universitas Pattimura (UNPATTI) Ambon menggunakan metode Dekomposisi. Data yang digunakan adalah data sekunder jumlah pengunjung perpustakaan UNPATTI sejak tahun 2011–2014 yang diperoleh dari perpustakaan UNPATTI. Prosedur penelitian dimulai dengan menganalisis komponen-komponen dekomposisi yaitu komponen *trend* ( $T$ ), musiman ( $S$ ), siklis ( $C$ ) dan komponen acak ( $I$ ) kemudian mengalikan nilai dari komponen-komponen tersebut. Hasil prediksi menunjukkan bahwa jumlah pengunjung pada tahun 2015 bulan Januari sebesar 1337 pengunjung, Februari 2932 pengunjung, Maret 3640 pengunjung, April 3791 pengunjung, Mei 4333 pengunjung, Juni 2571 pengunjung, Juli 806 pengunjung, Agustus 920 pengunjung, September 968 pengunjung, Oktober 4187 pengunjung, November 4495 pengunjung dan Desember 2960 pengunjung. Dapat dilihat bahwa jumlah pengunjung meningkat pada bulan Mei dan November.

*Kata Kunci:* Metode dekomposisi, perpustakaan, peramalan.

## FORECASTING THE NUMBER OF VISITORS AT THE LIBRARY OF PATTIMURA UNIVERSITY AMBON USING DECOMPOSITION METHOD

### Abstract

Library is an information center that must be managed properly in order to benefit as much as possible. This study aims to determine fluctuations and forecasting the number of visitors at the Pattimura University (UNPATTI) Library Ambon using Decomposition method. The data used are the secondary data of number visitors at UNPATTI library since 2011-2014 were obtained from the UNPATTI library. Research procedure begins by analyzing the components of the decomposition that is trend component ( $T$ ), seasonal ( $S$ ), cyclical ( $C$ ) and the random component ( $I$ ) and the multiplying the value of these components. Result of forecast showed that the number of visitors in 2015 amounted to 1337,77 visitors of January, 2932,99 visitors on February, 3640,31 visitors of March, 3791,00 visitors on April, 4333,90 visitors on May, 2571,11 visitors on June, 806,00 visitors on July, 920,15 visitors on August, 968,87 visitors on September, 4187,79 visitors on October, 4495,86 visitors November and 2960,10 visitors December. It can be seen that the number of visitors increased on March-May to September–November. One cause of this seasonal pattern of the data is in March-May to September-November is the time when a very active student is learning activities. Meanwhile, in July-August and December-January is the day of rest in college.

*Keywords:* Decomposition method, forecasting, library.

---

### 1. Pendahuluan

Perpustakaan yang terbentuk dari istilah *librarius* yang artinya tentang buku [1], yang mencakup suatu ruangan yang merupakan bagian dari gedung (bangunan) atau gedung tersendiri yang berisi buku-buku koleksi

yang diatur dan disusun sedemikian rupa sehingga mudah untuk dicari dan dipergunakan apabila sewaktu-waktu diperlukan oleh pembaca. Perpustakaan merupakan pusat informasi yang dimana bahan-bahan perpustakaan dikumpulkan, diolah, disimpan, dan dipelihara untuk kemudian disebarluaskan agar dapat dimanfaatkan semaksimal mungkin oleh pengguna perpustakaan [2].

Kegiatan atau jasa utama perpustakaan adalah peminjaman buku dan materi lainnya sehingga salah satu tolak ukur keberhasilan perpustakaan adalah dengan tingkat pinjaman buku atau banyaknya kunjungan masyarakat (mahasiswa, dosen, dan tenaga pendidikan yang ada di lingkungan Universitas Pattimura) di perpustakaan. Pengelola perpustakaan (pustakawan) perlu mengetahui apakah masyarakat memahami pentingnya peranan perpustakaan dalam hal pendidikan. Untuk itu perlu dibuat suatu “ramalan”. Ramalan yaitu memperkirakan sesuatu pada waktu yang akan datang berdasarkan data masa lampau yang dianalisa secara ilmiah, khususnya menggunakan metode statistik [3].

Pada penelitian ini digunakan model Deret Waktu (*Time Series*) yang merupakan bagian dalam peramalan kuantitatif. Dalam hal ini data masa lampau dikumpulkan, dipelajari dan dianalisis dihubungkan dengan perjalanan waktu yang hasilnya dapat menyampaikan sesuatu yang akan terjadi di masa yang akan datang. Dengan demikian seorang pustakawan yang bertanggung jawab penuh untuk mengetahui hasil peramalan akan naik atau turun banyaknya pengunjung tahun depan [4].

Dalam penelitian ini, metode dekomposisi digunakan untuk meramalkan jumlah pengunjung di Perpustakaan Universitas Pattimura Ambon. Metode dekomposisi (pemecahan) biasanya mencoba memisahkan 4 komponen (pola) perubahan. Komponen tersebut adalah faktor *trend* (*T*), fluktuasi musiman (*S*), fluktuasi siklus (*C*), dan perubahan-perubahan yang bersifat acak atau random (*I*). Keunggulan metode ini dalam peramalan adalah pola atau komponen-komponen tersebut dapat dipecah atau didekomposisi menjadi sub pola yang menunjukkan tiap-tiap komponen deret berkala secara terpisah dan pemisah tersebut seringkali membantu meningkatkan ketepatan dalam peramalan dan membantu atas deret data secara lebih baik [5]. Dalam penelitian ini, akan melihat fluktuasi pengunjung pada tahun 2011-2014 di Perpustakaan Universitas Pattimura Ambon serta prediksi banyaknya pengunjung perpustakaan pada tahun 2015.

## 2. Tinjauan Pustaka

Menurut Martika dalam [6], menyatakan bahwa langkah-langkah penggunaan metode Dekomposisi untuk *forecasting* yaitu :

- a. Menyusun data bulanan masing-masing tahun.
- b. Membuat *scatter* diagram garis *trend* linier.
- c. Menghitung besarnya nilai *trend*.

### 2.1. Metode Dekomposisi

Metode dekomposisi termasuk pendekatan peramalan yang tertua. Metode ini digunakan pada awal abad ke-20 oleh para ahli ekonomi untuk mengenali dan mengendalikan siklus ekonomi dan bisnis. Dasar dari metode dekomposisi saat ini muncul pada tahun 1920-an ketika konsep rasio (*trend*) diperkenalkan.

Metode dekomposisi merupakan suatu metode peramalan yang menggunakan empat komponen utama dalam meramalkan nilai masa depan. Keempat komponen tersebut antara lain *trend*, musiman, siklus dan *error*. Metode dekomposisi dilandasi oleh asumsi bahwa data yang ada merupakan gabungan dari beberapa komponen, secara sederhana digambarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Data} &= \text{Pola} + \text{error} \\ &= f(\text{trend, siklus, musiman}) + \text{error} \end{aligned}$$

Asumsi di atas artinya terdapat empat komponen yang mempengaruhi suatu deret waktu, yaitu tiga komponen yang dapat diidentifikasi karena memiliki pola tertentu, yaitu: *trend*, siklus dan musiman. Persamaan umum matematis dari pendekatan dekomposisi adalah:

$$X_t = f(T_t, S_t, C_t, I_t)$$

dimana:

$X_t$  = nilai deret berkala (data aktual) pada periode  $t$ ;

$T_t$  = komponen *trend* (*trend*) pada periode  $t$ ;

$S_t$  = komponen musiman (*seasonal*) pada periode  $t$ ;

$C_t$  = komponen siklus (*cyclic*) pada periode  $t$ ;

$I_t$  = komponen kesalahan tidak beraturan (*irregular*) pada periode  $t$ ;

$t$  = periode (*time*).

Dalam metode dekomposisi terdapat model dekomposisi aditif dan multiplikatif. Model dekomposisi aditif dan multiplikatif dapat digunakan untuk meramalkan faktor *trend*, musiman dan siklus. Metode dekomposisi rata-rata sederhana berasumsi pada model aditif yang secara matematis dapat ditulis:

$$Y_t = T_t + S_t + C_t + I_t$$

sedangkan metode dekomposisi pada data bergerak (dekomposisi klasik) berasumsi bahwa pada model multiplikatif yang secara matematis dapat ditulis:

$$Y_t = T_t \cdot S_t \cdot C_t \cdot I_t$$

## 2.2. Gerak Musim dan Indeks Musiman

Gerakan musim merupakan gerakan yang teratur dalam arti naik-turunnya terjadi pada waktu-waktu yang sama atau sangat berdekatan. Disebut gerakan musim karena mempunyai pola tetap atau berulang-ulang secara teratur. Gerakan lainnya terjadi secara teratur dalam waktu yang singkat juga disebut gerakan musiman.

Untuk keperluan analisis, seringkali data runtun waktu dinyatakan dalam bentuk angka indeks. Indeks musiman merupakan angka yang menunjukkan nilai relatif variabel  $Y$ , dimana  $Y$  adalah data deret waktu selama seluruh bulan dalam satu tahun (dapat lebih dari satu tahun). Rata-rata angka indeks musiman untuk satu periode adalah 100% (tanda % sering dihilangkan atau tidak ditulis). Dengan kata lain indeks musiman adalah suatu angka yang bervariasi terhadap nilai dasar 100.

Ada beberapa metode yang digunakan untuk menghilangkan angka indeks musiman, antara lain:

- Metode rata-rata sederhana data yang ada dicari rata-rata bulanan untuk seluruh tahun, maksudnya angka rata-rata dipakai untuk mewakili bulan Januari, Februari, Maret - Desember.
- Metode rasio terhadap *trend* data asli untuk setiap bulan dinyatakan sebagai presentase dari nilai-nilai *trend* bulanan.

## 2.3. Data Runtut Waktu (*Time Series*)

Data *time series* merupakan data yang dikumpulkan, dicatat atau diobservasi sepanjang waktu secara berurutan. Periode waktu observasi dapat berbentuk tahun. *Time series* dianalisis untuk menemukan pola variasi masa lalu yang dapat dipergunakan untuk memperkirakan nilai masa depan dan membantu dalam membuat perencanaan.

Analisis *time series* dipelajari karena dengan mengamati data *time series* akan terlihat empat komponen yang mempengaruhi suatu pola data masa lalu dan sekarang. Empat komponen yang mempengaruhi suatu pola tersebut, antara lain: *Trend*, Siklus, Musiman (*seasonal*), *Error* (Indeks Gerak Tak Beraturan).

## 2.4. Penyelidikan Pola Data dengan Analisis Autokorelasi

Observasi pada periode waktu yang berbeda sering berhubungan atau berkorelasi. Ukuran yang digunakan dalam korelasi adalah koefisien autokorelasi. Paket komputer MINITAB dapat digunakan untuk menghitung autokorelasi dan menghasilkan korelogram. Korelogram atau fungsi autokorelasi adalah grafik autokorelasi untuk lag yang bervariasi pada suatu waktu. Fungsi autokorelasi dikonstruksikan dengan menggunakan MINITAB menghasilkan dua garis putus-putus menunjukkan pendekatan dengan tingkat kepercayaan 95%. *Ljung-Box Q* (LBQ pada MINITAB) misalnya dalam pemeriksaan, MINITAB mencatat

bahwa autokorelasi untuk waktu pertama ketiga perbedaannya signifikan dari nol, (0.96, 0.92 dan 0.87) dan bahwa nilai itu berangsur-angsur turun menuju ke nol, maka dapat disimpulkan bahwa data berpola *trend*.

## 2.5. Ukuran Ketepatan Peramalan

Jika  $X_i$  merupakan data aktual periode  $i$  dan  $F_i$  merupakan ramalan maka ukuran kesalahan didefinisikan sebagai berikut:

$$e_i = X_i - F_i \quad (2.1)$$

dimana:

$e_i$  = kesalahan periode  $i$

$X_i$  = data aktual untuk periode  $i$

$F_i$  = ramalan (nilai kecocokan atau *fitted value*) untuk periode  $i$

Jika terdapat nilai pengamatan di ramalan untuk  $n$  periode waktu, maka akan terdapat  $n$  buah galat dan ukuran statistik standar dapat di definisikan sebagai berikut:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (e_i)^2 \quad (2.2)$$

Adapun ukuran-ukuran ketepatan yang sering digunakan untuk mengetahui ketepatan suatu metode peramalan dalam memodelkan data deret waktu adalah sebagai berikut:

- MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) merupakan ukuran ketepatan relatif yang digunakan untuk mengetahui presentase penyimpangan hasil peramalan.
- MAD (*Mean Absolute Devotion*) menyatakan penyimpangan ramalan dalam unit yang sama pada data, dengan merata-ratakan nilai *absolute error* (penyimpangan seluruh hasil).
- MSD (*Mean Square Devotion*) merupakan ukuran penyimpangan ramalan dengan merata-ratakan kuadrat *error* (penyimpangan semua ramalan).

Dalam fase peramalan penggunaan MSD dan MAD sebagai suatu ukuran ketepatan peramalan dapat menimbulkan masalah, karena MSD dan MAD merupakan ukuran *absolute* yang sangat bergantung pada skala dari data deret waktu. Karena alasan tersebut, maka dipakailah alternatif sebagai salah satu indikasi ketepatan dalam peramalan yaitu menggunakan MAPE.

## 3. Hasil dan Pembahasan

Perpustakaan Universitas Pattimura Ambon merupakan perpustakaan pusat yang sudah melayani mahasiswa UNPATTI sejak berdirinya perpustakaan dari tahun 1958 sampai dengan sekarang. Dalam rentang selama hampir 57 tahun, sudah banyak mahasiswa UNPATTI yang memanfaatkan ruang perpustakaan sebagai ruang baca. Dari aktifitas kunjungan ini, maka sangat penting untuk meramalkan jumlah pengunjung perpustakaan. Berikut adalah langkah-langkah yang dilakukan dalam peramalan jumlah pengunjung perpustakaan menggunakan metode dekomposisi:

### 3.1. Data Jumlah Pengunjung Perpustakaan dari Tahun 2011-2014

Banyaknya jumlah pengunjung perpustakaan Universitas Pattimura Ambon dari bulan Januari 2011-Desember 2014 disajikan pada Tabel berikut:

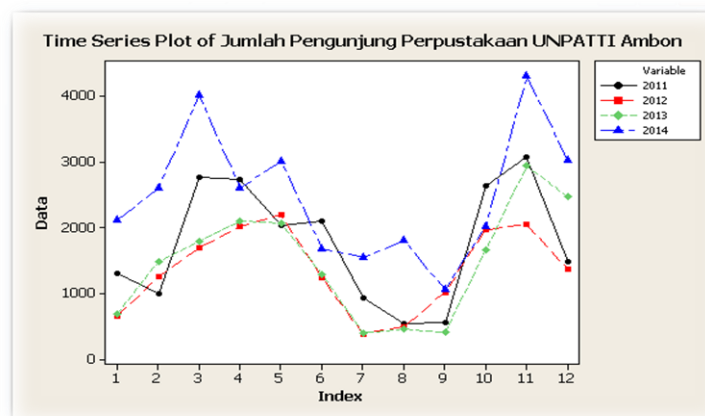
**Tabel 1. Jumlah Pengunjung Perpustakaan dari Tahun 2011- 2014**

Bulan	Jumlah Pengunjung Perpustakaan			
	2011	2012	2013	2014
Januari	1301	655	686	2110
Februari	1002	1256	1486	2603
Maret	2772	1692	1790	4014
April	2740	2013	2103	2603
Mei	2036	2201	2067	3015
Juni	2101	1231	1290	1678
Juli	923	381	359	1542
Agustus	545	491	455	1801
September	557	1019	405	1059
Oktober	2642	1969	1663	2016
November	3079	2051	2939	4304
Desember	1489	1361	2470	3023

Sumber : Data UPT. Perpustakaan 2011-2014.

### 3.2. Plot Data Pengunjung Perpustakaan Universitas Pattimura Ambon

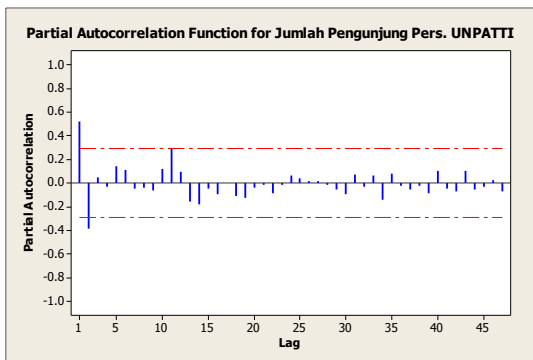
*Time Series Plot* terhadap jumlah pengunjung perpustakaan Universitas Pattimura Ambon dari bulan Januari 2011-Desember 2014 dapat dilihat pada Gambar berikut:



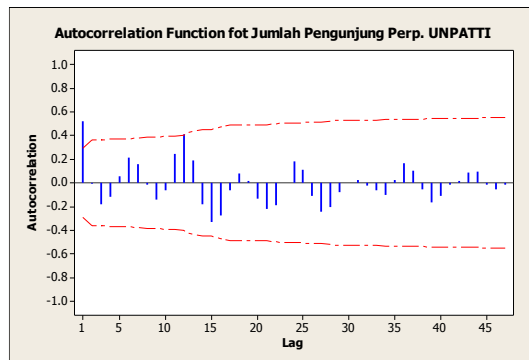
**Gambar 1. Plot Data Jumlah Pengunjung Perpustakaan UNPATTI dari Tahun 2011-2014**

Berdasarkan Gambar 1 di atas dapat dilihat bahwa pola *time series* berulang pada waktu tertentu. Rata-rata jumlah pengunjung meningkat pada bulan Maret, stabil hingga bulan Mei dan kembali mengalami penurunan pada bulan Juni-Agustus. Peningkatan terjadi lagi pada bulan September – November dan kembali menurun pada bulan Desember. Pola ini menunjukkan fluktuasi pola data *time series* musiman.

Untuk lebih jelasnya kita akan melihat dalam bentuk grafik *Autocorrelation Function* (ACF) dan *Partial Autocorrelation Function* (PACF) berikut ini:



Gambar 2. Grafik ACF



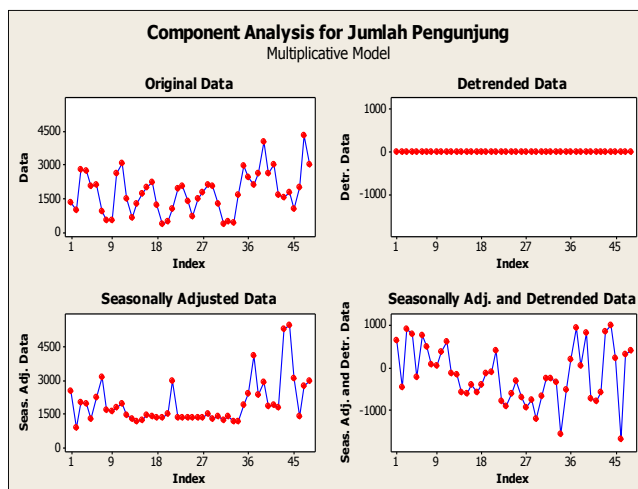
Gambar 3. Grafik PACF

Berdasarkan Gambar 2 dan Gambar 3 di atas dapat dilihat bahwa data runtun waktu (*time series*) tersebut merupakan *trend* karena pengamatan berturut-turut korelasinya tinggi, dan koefisien autokorelasi signifikan berbeda dari nol untuk beberapa lag waktu yang pertama dan kemudian berangsur-angsur turun mendekati nol.

### 3.3. Prediksi menggunakan Metode Dekomposisi

#### a. Analisis *Trend*

Berdasarkan analisis data menggunakan *software* MINITAB 14 diperoleh persamaan *trend* linier untuk data bulanan jumlah pengunjung yaitu:  $Y_t = 21256,25 - 10593,3t$ , dan diperoleh Gambar analisis *Trend* sebagai berikut:

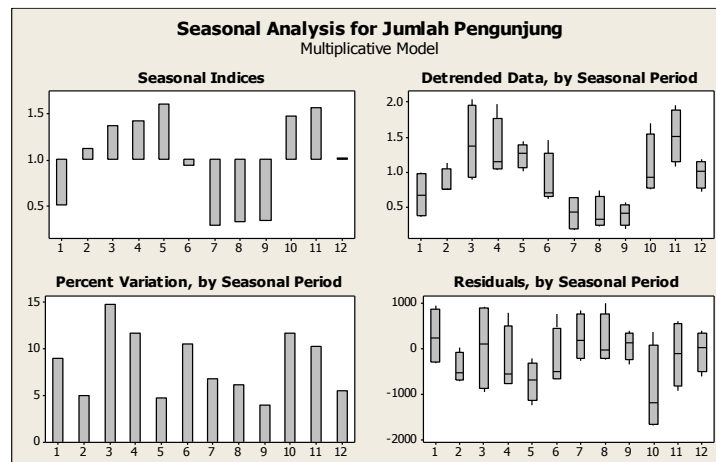


Gambar 4. Analisis Komponen Jumlah Pengunjung Perpustakaan UNPATTI

Berdasarkan Gambar 4 di atas memperlihatkan analisis komponen untuk data aktual (*original data*), data tidak *trend* (*detrended data*), penyesuaian data musiman (*seasonally adjusted data*) dan gabungan antara penyesuaian data musiman dan data tidak *trend* (*seasonally adjusted and detrended data*).

## b. Analisis Musiman

Dengan menggunakan *software* MINITAB 14 diperoleh Gambar analisis musiman sebagai berikut:



**Gambar 5. Analisis Musiman Jumlah Pengunjung Perpustakaan UNPATTI**

Pada Gambar 5 dapat dilihat analisis musiman, dimana rata-rata nilai indeks musim yaitu:

*Periode 1* :  $0,51510 = 51\%$  indeks musim pada bulan pertama.

*Periode 2* :  $1,11775 = 111\%$  indeks musim pada bulan kedua.

*Periode 3* :  $1,37321 = 137\%$  indeks musim pada bulan ketiga.

*Periode 4* :  $1,41567 = 141\%$  indeks musim pada bulan keempat.

*Periode 5* :  $1,60229 = 160\%$  indeks musim pada bulan kelima.

*Periode 6* :  $0,94120 = 94\%$  indeks musim pada bulan keenam.

*Periode 7* :  $0,29217 = 29\%$  indeks musim pada bulan ketujuh.

*Periode 8* :  $0,33032 = 33\%$  indeks musim pada bulan kedelapan.

*Periode 9* :  $0,34448 = 34\%$  indeks musim pada bulan kesembilan.

*Periode 10*:  $1,47485 = 147\%$  indeks musim pada bulan kesepuluh.

*Periode 11*:  $1,56987 = 156\%$  indeks musim pada bulan kesebelas.

*Periode 12*:  $1,02308 = 102\%$  indeks musim pada bulan kedua belas.

Analisis musiman menunjukkan bahwa indikasi musiman memiliki nilai harapan sebesar 100% dan hasil yang kita dapat adalah jumlah pengunjung pada bulan pertama adalah 49% di bawah nilai harapan, bulan kedua adalah 11% di atas nilai rata-rata, bulan ketiga 37% di atas nilai rata-rata, bulan keempat 41% di atas nilai rata-rata, bulan kelima 60% di atas nilai rata-rata, bulan keenam 6% di bawah nilai rata-rata, bulan ketujuh 71% di bawah nilai rata-rata, bulan kedelapan juga 67% di bawah nilai rata-rata, bulan kesembilan 66% di bawah nilai rata-rata, bulan kesepuluh 47% di atas nilai rata-rata, bulan kesebelas 56% di atas nilai rata-rata dan bulan kedua belas 2% di atas rata-rata. Jadi dapat dilihat bahwa bulan kelima memiliki pola musiman yang paling tinggi yaitu 160%, lebih besar 60% dari indeks musim yang diharapkan. Sedangkan bulan ketujuh, kedelapan, dan kesembilan merupakan indeks musim terendah dengan nilai sebesar 29%, lebih kecil 71% dari indeks musim yang diharapkan.

## 3.4. Siklus

Efek siklus didefinisikan sebagai fluktuasi bergelombang di sekitar *trend*. Pola siklus sulit untuk dimodelkan dalam sebuah *time series* karena pola ini secara tipikal tidak stabil/ tetap. Fluktuasi seperti gelombang yang naik-turun di sekitar *trend* jarang terulang di interval waktu yang tetap dan besarnya fluktuasi cenderung bervariasi.

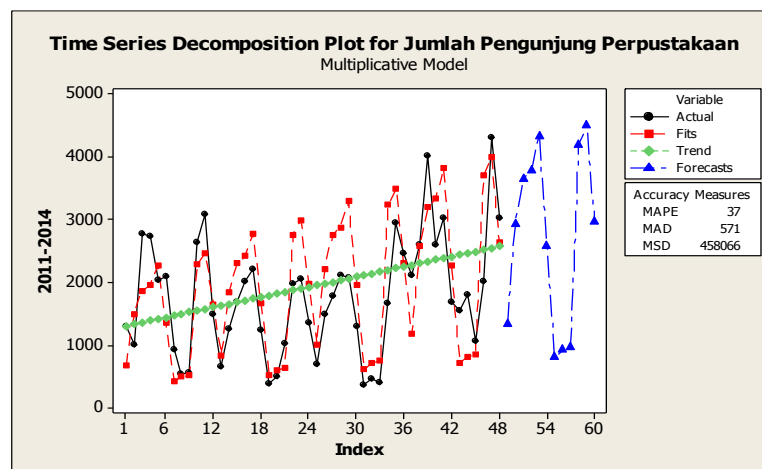


### 3.5. Irregular

Komponen *irregular* menunjukkan adanya keadaan yang bervariasi atau cenderung berubah pada *time series* setelah komponen lain dihilangkan. Komponen ini disebut *residual* atau *error*. Prediksi jumlah pengunjung perpustakaan Universitas Pattimura Ambon untuk bulan pertama sampai dengan bulan kedua belas tahun 2015 adalah dengan mengalikan keempat komponen yaitu *trend*, musiman, siklus dan *irregular* masing-masing bulan sehingga menghasilkan nilai prediksi sebagai berikut:

Januari	2015 = 1337,77 = 1337	pengunjung perpustakaan UNPATTI
Februari	2015 = 2932,99 = 2932	pengunjung perpustakaan UNPATTI
Maret	2015 = 3640,31 = 3640	pengunjung perpustakaan UNPATTI
April	2015 = 3791,00 = 3791	pengunjung perpustakaan UNPATTI
Mei	2015 = 4333,90 = 4333	pengunjung perpustakaan UNPATTI
Juni	2015 = 3571,11 = 3571	pengunjung perpustakaan UNPATTI
Juli	2015 = 806,00 = 809	pengunjung perpustakaan UNPATTI
Agustus	2015 = 920,15 = 920	pengunjung perpustakaan UNPATTI
September	2015 = 968,87 = 968	pengunjung perpustakaan UNPATTI
Oktober	2015 = 4187,77 = 4187	pengunjung perpustakaan UNPATTI
November	2015 = 4495,86 = 4495	pengunjung perpustakaan UNPATTI
Desember	2015 = 2960,10 = 2960	pengunjung perpustakaan UNPATTI

Untuk lebih jelasnya kita lihat Gambar plot data *time series* dekomposisi model multiplikatif berikut:



Gambar 6. Plot Data *Time Series* Dekomposisi Model Multiplikatif

Gambar 6 memperlihatkan hasil prediksi jumlah pengunjung di perpustakaan UNPATTI tahun 2015. Dalam grafik ditunjukkan juga bahwa terbentuk kecocokan antara komponen *trend* dan musiman yang berarti data aktual cukup baik. Dapat kita lihat bahwa rata-rata jumlah pengunjung meningkat pada bulan Maret-Mei dan kembali mengalami penurunan pada bulan Juni-Agustus. Peningkatan terjadi lagi pada bulan September-November dan kembali menurun pada bulan Desember. Salah satu penyebab utama pada pola data musiman ini ialah pada bulan Maret-Mei dan September-November merupakan saat dimana kegiatan perkuliahan mahasiswa sangat aktif. Sedangkan pada bulan Juli-Agustus dan bulan Desember-Januari merupakan hari perhentian saat-saat kuliah.

Hasil prediksi pada tahun 2015 terus meningkat dibanding tahun-tahun sebelumnya. Pada kenyataannya bulan Maret-Mei dan September-November memiliki sifat musiman yang cukup tinggi sehingga prediksi pada bulan Maret-Mei dan September-November mempunyai pola data yang kuat karena hasil prediksi tahun 2015 meningkat pada ke enam bulan tersebut.

### 3.6. Uji Validasi Data Hasil Peramalan Pengunjung Perpustakaan dari Bulan Januari-Desember 2015

Berdasarkan hasil *output* MINTAB diperoleh data aktual ( $X_i$ ) dan data ramalan ( $F_i$ ) disajikan dalam bentuk Tabel berikut :

**Tabel 2. Uji Validasi Data Hasil Peramalan Pengunjung Perpustakaan dari Bulan Januari-Desember 2015**

Bulan	Aktual ( $X_i$ )	Ramalan ( $F_i$ )	Galat/Error $e_i = X_i - F_i$	$e_i^2$
Januari	1337	1337,77	-0,77	0,5929
Februari	2932	2932,99	-0,99	0,9801
Maret	3640	3640,31	-0,31	0,0961
April	3791	3791,00	0	0
Mei	4333	4333,90	-0,9	0,81
Juni	2571	2571,11	-0,11	0,0121
Juli	806	806,00	0	0
Agustus	920	920,15	-0,15	0,0225
September	968	968,87	-0,87	0,7569
Oktober	4187	4187,79	-0,78	0,6241
November	4499	4499,86	-0,87	0,7396
Desember	2960	2960,10	-0,1	0,01
<b>Jumlah</b>	<b>32944</b>	<b>32949,85</b>	<b>-5,85</b>	<b>4,6443</b>

Berdasarkan Tabel 2 di menunjukkan bahwa selisih antara data aktual dan prediksi semakin besar sejak bulan Januari hingga Desember. Sehingga pada bulan Maret-Mei dan September-November memiliki sifat musiman yang cukup tinggi.

### 3.7. Uji Kesesuaian Model

Berdasarkan Tabel 3.2. diperoleh nilai pengamatan ramalan untuk  $n = 12$  periode waktu, maka akan terdapat 12 buah galat dan ukuran statistik standar dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (e_t)^2$$

$$MSE = \frac{(-5,85)^2}{12}$$

$$MSE = \frac{34,2225}{12}$$

$$MSE = 2,8519$$

Karena nilai  $MSE = 2,8519$  lebih kecil dari nilai MAPE, MSD, dan MAD maka MSE (*Mean Square Error*) merupakan model terbaik pada analisis deret waktu.

#### 4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis data dan pembahasan yang telah dilakukan maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

- a. Model persamaan *trend* linier yang didapat dari hasil jumlah pengunjung Perpustakaan Universitas Pattimura Ambon dengan menggunakan data bulanan yaitu  $Y_t = 21256,25 - 10593,3t$ . Indikasi musiman nilai harapannya sebesar 100%. Hasil yang diperoleh untuk periode Januari – Desember 2015, nilai harapannya sebagai berikut: 51%, 111%, 137%, 141%, 160%, 94%, 29%, 33%, 34%, 147%, 156%, 102%.
- b. Jumlah pengunjung Perpustakaan Universitas Pattimura Ambon dengan menggunakan metode dekomposisi model multiplikatif dari Januari – Desember 2015 berturut-turut sebagai berikut: 1337 pengunjung, 2932 pengunjung, 3640 pengunjung, 3791 pengunjung, 4333 pengunjung, 2571 pengunjung, 806 pengunjung, 920 pengunjung, 968 pengunjung, 4187 pengunjung, 4499 pengunjung dan 2960 pengunjung. Prediksi jumlah pengunjung di Perpustakaan Universitas Pattimura Ambon terjadi kenaikan pada Bulan Mei dan November sedangkan pada Bulan Juni sampai Agustus dan Bulan Desember jumlah pengunjung mengalami penurunan.

#### Daftar Pustaka

- [1] A. A. Taufik, “Peramalan Banyaknya Pengunjung Perpustakaan Tahun 2006 dengan Metode Dekomposisi pada Kantor Perpustakaan Kabupaten Pemalang,” Semarang, 2005.
- [2] N. S. Sutarno, *Perpustakaan dan Masyarakat*, Jakarta: Sagung Seto, 2006.
- [3] P. Subagyo, *Forecasting: Konsep dan Aplikasi*, Yogyakarta: BPFE, 1986.
- [4] A. T. Putra, “Forecasting of Sheat Demand Using Time Series Model Autoregressive Integrated Moving Average and Minimization of Forecasting Results of The Total Cost Using Wagner-Within,” *Jurnal Science East Borneo*, 2013.
- [5] S. S. C. Makridakis, D. Wheelwright and V. E. McGee, *Metode dan Aplikasi Peramalan*, 1st ed., vol. 1, Jakarta: Binarupa Aksara, 1993.
- [6] D. Martika, “Peramalan Jumlah Pengunjung dengan Metode Dekomposisi serta Kontribusi Jumlah Pengunjung terhadap Pendapatan Objek Wisata Pantai Purwahamba Indah Tegal,” Semarang, 2007.
- [7] S. Assauri, *Teknik dan Metode Peramalan*, Jakarta: Fakultas Ekonomi UI, 1984.

## PEMODELAN HARGA SAHAM INDEKS LQ45 MENGGUNAKAN REGRESI LINIER ROBUST M-ESTIMATOR: HUBER DAN BISQUARE

Lexy J. Sinay<sup>1</sup>, Mozart W. Talakua<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia  
e-mail: <sup>1</sup>lj.sinay@staff.unpatti.ac.id

---

### Abstrak

Model *ordinary least square* (OLS) menjadi tidak efisien dan bias jika terdapat pelanggaran asumsi klasik. Salah satu penyebab terjadinya hal tersebut adalah terdapat observasi-observasi yang bersifat ekstrim, dimana observasi-observasi tersebut dapat memberi pengaruh (*influence*) pada model seperti outlier. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis model OLS dari harga saham (PRICE) pada indeks LQ45 berdasarkan faktor-faktor fundamental (PER, EPS, BV, ROE dan DER). Kemudian, menggunakan regresi linier robust M-estimator seperti estimator Huber dan bisquare untuk memodelkan model yang bebas outlier (*influence*), serta menganalisis dan mengkomparasi hasil pemodelan yang diperoleh menggunakan kedua metode tersebut untuk memperoleh model terbaik. Dengan demikian, metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Ordinary Least Square* (OLS) dan robust M-estimator. Kedua metode ini digunakan untuk menganalisis data harga saham dan faktor-faktor fundamental indeks LQ45 pada periode Februari 2014. Hasil yang diperoleh adalah model M-estimator yakni estimator Huber dan bisquare dapat mengatasi masalah masalah outlier (*influence*) dan multikolinearitas pada model OLS. Dengan demikian, model regresi linear robust M-estimator dengan pembobot Huber dan bisquare lebih baik dibandingkan model OLS. Hasil perbandingan model Huber dan bisquare berdasarkan nilai-nilai kebaikan model diperoleh bahwa model bisquare lebih baik dibandingkan model Huber. Kemudian, hasil interpretasi model bisquare diperoleh bahwa PER, EPS, BV dan ROE memberi kontribusi positif terhadap harga saham (PRICE) indeks LQ45, sedangkan DER memberi kontribusi negatif terhadap harga saham (PRICE) indeks LQ45.

**Kata Kunci:** Bisquare, harga saham, Huber, indeks LQ45, M-estimator, outlier.

## MODELLING OF LQ45 STOCK PRICES USING ROBUST LINEAR REGRESSION OF M-ESTIMATOR: HUBER AND BISQUARE

### Abstract

Ordinary least square (OLS) models would become inefficient and biased if there is a violation of classical assumptions. One cause of this happening is there are extreme observations, where the observations of them can provide influence in models such as outlier. This study aims to analyze the OLS model of LQ45 stock price based on fundamental factors. Then, using a robust linear regression of M-estimator such as Huber and bisquare estimators to obtain models without outlier (*influence*). From the both, we can analyze and compare the models to obtain the best model. Thus, the method used in this research is OLS and robust M-estimator. Both methods are used to analyze the data of LQ45 index at the period of February 2014 namely the stock price and the fundamental factors. The results is M-estimator models using Huber and bisquare estimators better than the OLS model, because both models can troubleshoot outlier (and influence) and multicollinearity problems on OLS model. The results of comparison models based on the values of kindness is the bisquare model better than the Huber model. Then, interpretation of bisquare model showed that PER, EPS, BV and ROE contribute positively to LQ45 stock prices, while DER give the negative contribution.

**Keywords:** Bisquare, Huber, LQ45 index, M-estimator, outlier, stock price.

---

## 1. Pendahuluan

Indeks LQ45 merupakan indeks yang terdapat dalam Bursa Efek Indonesia, yang terdiri atas 45 saham yang liquid atau saham-saham dengan transaksi terbanyak. Saham-saham yang masuk dalam indeks LQ45 diperbarui setiap 6 bulan sekali yakni dalam periode Februari – Juli dan Agustus – Januari. Selain mempertimbangkan likuiditas saham-saham yang masuk dalam indeks LQ45, ada indikator lain yang dipertimbangkan yaitu kapitalisasi pasar. Indeks LQ45 hadir dalam Bursa Efek Indonesia untuk melengkapi Indeks Harga Saham Gabungan (IHSG) yakni untuk menyediakan sarana yang obyektif dan terpercaya bagi para analisis keuangan, manajer investasi, investor dan pemerhati pasar modal lainnya dalam memonitor pergerakan harga saham-saham yang aktif diperdagangkan. Dengan demikian, sangat penting untuk dilakukan analisis harga saham-saham pada indeks LQ45 berdasarkan analisis fundamental. Salah satu analisis yang dilakukan adalah memodelkan harga saham dalam indeks LQ45 berdasarkan faktor-faktor fundamentalnya. Analisis ini berguna untuk mengetahui faktor-faktor yang signifikan mempengaruhi harga saham.

Salah satu instrumen dalam statistika yang dapat digunakan untuk analisis model harga saham adalah analisis regresi. Analisis regresi bertujuan untuk mengestimasi parameter model yang menyatakan pengaruh hubungan antara variabel prediktor dan variabel respon. Metode estimasi yang umumnya digunakan adalah *Ordinary Least Square* (OLS). Metode ini dapat bekerja efektif apabila semua asumsi regresi terpenuhi. Asumsi yang dimaksud berkaitan dengan koefisien dan residual yang diperoleh model. Asumsi yang harus dihindari oleh koefisien-koefisien model regresi adalah terjadi korelasi yang kuat antar setiap koefisien dalam model atau sering disebut sebagai multikolinearitas. Selain itu, dalam analisis residual model regresi mengatakan bahwa model yang baik merupakan model dengan residual yang tidak mengandung outlier (*influence*). Outlier (*influence*) dapat mengakibatkan pelanggaran terhadap beberapa asumsi klasik, sehingga hasil analisis model regresi menjadi bias dan tidak efisien. Dalam model OLS belum ada cara yang efektif untuk mengatasi outlier, selain membuang observasi yang terindikasi sebagai outlier (*influence*). Salah satu alternatif untuk mengatasi outlier adalah menggunakan metode regresi robust. Regresi robust digunakan untuk mengestimasi parameter model regresi linier yang bertujuan untuk memperoleh parameter regresi yang bersifat robust, sehingga mampu mengatasi atau mengurangi pengaruh dari observasi-observasi ekstrim, seperti outlier atau observasi-observasi yang berperan besar mempengaruhi kestabilan model (*influence*).

Dengan demikian, penelitian ini bertujuan untuk menganalisis model OLS harga saham pada indeks LQ45 berdasarkan faktor-faktor fundamental, apakah mengandung outlier (*influence*). Kemudian, menggunakan regresi linier robust M-estimator dengan pembobot Huber dan bisquare untuk memodelkan model yang bebas outlier (*influence*), serta menganalisis dan mengkomparasi model-model yang diperoleh menggunakan metode M-estimator untuk memperoleh model terbaik.

## 2. Tinjauan Pustaka

Secara spesifik, pemodelan faktor-faktor yang mempengaruhi harga saham pada indeks LQ45 pernah dibahas oleh Dedi Rosadi yakni pada [1] dan [2]. Kedua buku tersebut membahas tentang pemodelan regresi linier menggunakan metode OLS. Pada penelitian ini, selain membahas pemodelan menggunakan OLS, akan membahas pemodelan regresi robust M-estimator. Model yang dimaksud adalah model harga saham (Price) terhadap faktor-faktor fundamental saham.

### 2.1. Analisis Fundamental

Analisis fundamental adalah salah satu analisis tentang kondisi keuangan suatu perusahaan yang bertujuan untuk mengetahui sifat-sifat dasar dan karakteristik operasional dari perusahaan publik. Analisis ini biasanya menggunakan analisis rasio, seperti rasio likuiditas, rasio aktifitas, rasio profitabilitas, rasio solvabilitas dan rasio market (pasar). Analisis fundamental yang digunakan dalam penelitian ini adalah rasio solvabilitas dan rasio market seperti

#### a. *Debt to Equity Ratio* (DER)

DER merupakan perbandingan antara total hutang dengan total modal sendiri, dirumuskan sebagai

$$DER = \frac{\text{total debt}}{\text{total modal}} \times 100\%$$

DER menggambarkan seberapa besar perusahaan menggunakan hutang dalam struktur modalnya.

b. *Price Earning Ratio* (PER)

PER adalah instrument untuk mengukur jumlah uang yang akan dibayar oleh investor untuk setiap rupiah pendapatan perusahaan, yakni merupakan rasio antara harga saham terhadap pendapatan per lembar saham yang dirumuskan sebagai

$$PER = \frac{\text{harga per lembar saham}}{\text{earning per lembar saham}} \times 100\%$$

c. *Earning per Share* (EPS)

EPS merupakan pendapatan bersih dibagi dengan total saham yang beredar dan rasio ini berfungsi sebagai alat ukur profitabilitas

$$EPS = \frac{\text{Profit After Taxation}}{\text{jumlah lembar saham yang beredar}}$$

d. *Book Value* (BV)

BV adalah perbandingan antara harga saham di pasar dengan nilai buku perusahaan tersebut.

$$BV = \frac{\text{modal bersih perusahaan}}{\text{jumlah lembar saham yang beredar}}$$

dimana modal bersih adalah selisih dari total aset suatu perusahaan terhadap kewajibannya.

e. *Return on Equity* (ROE)

ROE adalah rasio yang digunakan untuk mengukur tingkat efektivitas perusahaan di dalam menghasilkan keuntungan dengan memanfaatkan ekuitas (*shareholder's equity*) yang dimiliki. ROE merupakan perbandingan laba setelah pajak dengan total modal. Sehingga ROE merupakan keuntungan bagi pemegang saham.

$$ROE = \frac{\text{pendapatan komprehensif}}{\text{total modal}} \times 100\%$$

## 2.2. Regresi Linier Berganda (Metode OLS)

Model regresi linier berganda dengan  $p$  variabel independen dapat ditulis seperti berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_p X_{ip} + \varepsilon_i \quad (1)$$

dengan:

$Y_i$  adalah nilai variabel dependen observasi ke- $i$

$\beta_0$  dan  $\beta_1, \dots, \beta_p$  adalah parameter koefisien regresi

$X_{ip}$  adalah nilai variabel independen ke- $p$  pada observasi ke- $i$

$\varepsilon_i$  adalah nilai random error dengan asumsi bahwa  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$  dan  $\varepsilon_i$  dan  $\varepsilon_j$  tidak korelasi sehingga nilai  $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$  untuk semua nilai  $i$  dan  $j, i \neq j$  serta  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Dalam bentuk matriks persamaan (1) dapat ditulis sebagai berikut

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

Dengan asumsi bahwa  $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$  dan  $Var(\boldsymbol{\varepsilon}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \sigma^2 \mathbf{I}$ . Estimator kuadrat terkecil  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  dapat diperoleh dengan cara membuat jumlahan kuadrat

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

Kemudian meminimumkan nilai  $\mathbf{L}$  menggunakan

$$\left. \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \boldsymbol{\beta}_j} \right|_{\hat{\boldsymbol{\beta}}} = 0$$

diperoleh

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (3)$$

Estimator ini disebut sebagai estimator OLS.

### 2.3. Regresi Robust M-estimator

Berikut ini akan diberikan hasil analisis model regresi robust M-estimator. Semua pembahasan pada bagian ini bersumber dari [3]. Diketahui model linier (lihat persamaan 1), dapat ditulis bentuk seperti berikut ini.

$$Y_i = \mathbf{X}'_i\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i$$

dimana observasi  $i$  sebanyak  $n$  observasi. Diasumsikan bahwa  $E(Y|\mathbf{X}) = \mathbf{X}'_i\boldsymbol{\beta}$ , namun distribusi error mungkin bersifat *heavy-tailed*, kemungkinan adanya outlier. Diberikan estimator  $\mathbf{b}$  untuk  $\boldsymbol{\beta}$ , model yang sesuai adalah

$$\hat{Y}_i = b_0 + b_1X_{i1} + b_2X_{i2} + \dots + b_pX_{ip} + e_i = \mathbf{X}'_i\mathbf{b}$$

dan residual diberikan oleh

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \mathbf{X}'_i\mathbf{b}$$

Pada  $M$ -estimator, estimator  $\mathbf{b}$  ditentukan dengan cara meminimumkan suatu fungsi objektif semua  $\mathbf{b}$

$$\sum_{i=1}^n \rho(e_i) = \sum_{i=1}^n \rho(Y_i - \mathbf{X}'_i\mathbf{b}) \quad (4)$$

dimana fungsi  $\rho$  memberikan kontribusi setiap residual untuk fungsi objektif. Sifat-sifat dari fungsi  $\rho$  adalah

- $\rho(e) \geq 0$
- $\rho(0) = 0$
- Simetri,  $\rho(e) = \rho(-e)$
- $\rho(e_i) \geq \rho(e_i')$  untuk  $|e_i| \geq |e_i'|$

Meminimumkan fungsi  $\sum_{i=1}^n \rho(e_i)$  dengan cara sebagai berikut

$$0 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \sum_{i=1}^n \rho(Y_i - \mathbf{X}'_i\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n \psi(Y_i - \mathbf{X}'_i\mathbf{b})\mathbf{X}'_i$$

dimana kurva *influence*  $\psi$  didefinisikan sebagai turunan dari  $\rho$ .

Sama seperti *weighted least squared* (WLS), maka didefinisikan fungsi bobot  $w_i = w(e_i) = \psi(e_i)/e_i$ . Persamaan estimasi dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \sum_{i=1}^n w_i(Y_i - \mathbf{X}'_i\mathbf{b}) = 0$$

Ekuivalen dengan WLS maka estimasi tersebut dapat diselesaikan dengan meminimumkan  $\sum w_i^2 e_i^2$ . Pembobot bergantung pada residual, residual bergantung pada koefisien yang diestimasi, dan koefisien yang diestimasi bergantung pada pembobot. Solusi iterasi dari persoalan ini disebut *iteratively reweighted least-squared* (IRLS).

### 2.4. Fungsi objektif

Rangkuman fungsi objektif dari metode OLS, Huber dan Bisquare diberikan dalam Tabel 1 sebagai berikut

**Tabel 1. Fungsi objektif dan fungsi pembobot**

Metode	Fungsi Objektif	Fungsi Pembobot
Least Square	$\rho_{LS}(e) = e^2$	$w_{LS}(e) = 1$
Huber	$\rho_H(e) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^2 & \text{untuk }  e  \leq k \\ k e  - \frac{1}{2}k^2 & \text{untuk }  e  > k \end{cases}$	$w_H(e) = \begin{cases} 1 & \text{untuk }  e  \leq k \\ \frac{k}{ e } & \text{untuk }  e  > k \end{cases}$
Bisquare	$\rho_B(e) = \begin{cases} \frac{k^2}{2} \left\{ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{e}{k} \right)^2 \right]^3 \right\} & \text{untuk }  e  \leq k \\ \frac{k^2}{6} & \text{untuk }  e  > k \end{cases}$	$w_B(e) = \begin{cases} \left[ 1 - \left( \frac{e}{k} \right)^2 \right]^2 & \text{untuk }  e  \leq k \\ 0 & \text{untuk }  e  > k \end{cases}$

Sumber [4]

Nilai  $k$  untuk estimator Huber dan bisquare disebut *tuning constant*. Nilai  $k$  terkecil akan menghalang terbesar untuk outlier, namun pada efisiensi yang kecil bilamana error berdistribusi normal. Nilai  $k$  yang optimal untuk Huber adalah  $1,345\sigma$  dan  $4,685\sigma$  untuk bisquare. Nilai  $k$  tersebut menghasilkan efisiensi sebesar 95% saat error berdistribusi normal. [3]

### 3. Metodologi Penelitian

Penelitian ini menggunakan studi kasus untuk mendeteksi outlier harga saham pada indeks LQ45 dengan menggunakan regresi berbasis estimator parameter robust. Data yang digunakan adalah data harga (PRICE) dan analisis fundamental Emiten Indeks LQ45 pada Bursa Efek Indonesia (PER, EPS, BV, ROE, DER) yang bersumber dari publikasi Bursa Efek Indonesia [5].

Prosedur yang dilakukan dalam penelitian ini bertujuan untuk mengatasi outlier pada model harga saham LQ45 dengan menggunakan model regresi robust M-Estimator. Langkah-langkah dalam penelitian ini ialah sebagai berikut:

- Mengestimasi koefisien parameter model regresi awal menggunakan metode OLS;
- Mendeteksi *outlier* (influence) berdasarkan hasil analisis residual;
- Mengestimasi koefisien parameter regresi robust M-estimator dengan pembobot Huber dan bisquare;
- Seleksi model terbaik, dengan cara menganalisis model Huber dan bisquare berdasarkan nilai-nilai kebaikan model;
- Interpretasi model terbaik yang diperoleh.

### 4. Hasil dan Pembahasan

Bagian ini membahas tentang hasil pengolahan dan analisis data pada indeks LQ45 untuk periode Februari 2014 [5], yakni memodelkan harga saham berdasarkan faktor-faktor fundamental pada indeks LQ45.

#### 4.1. Karakteristik Data

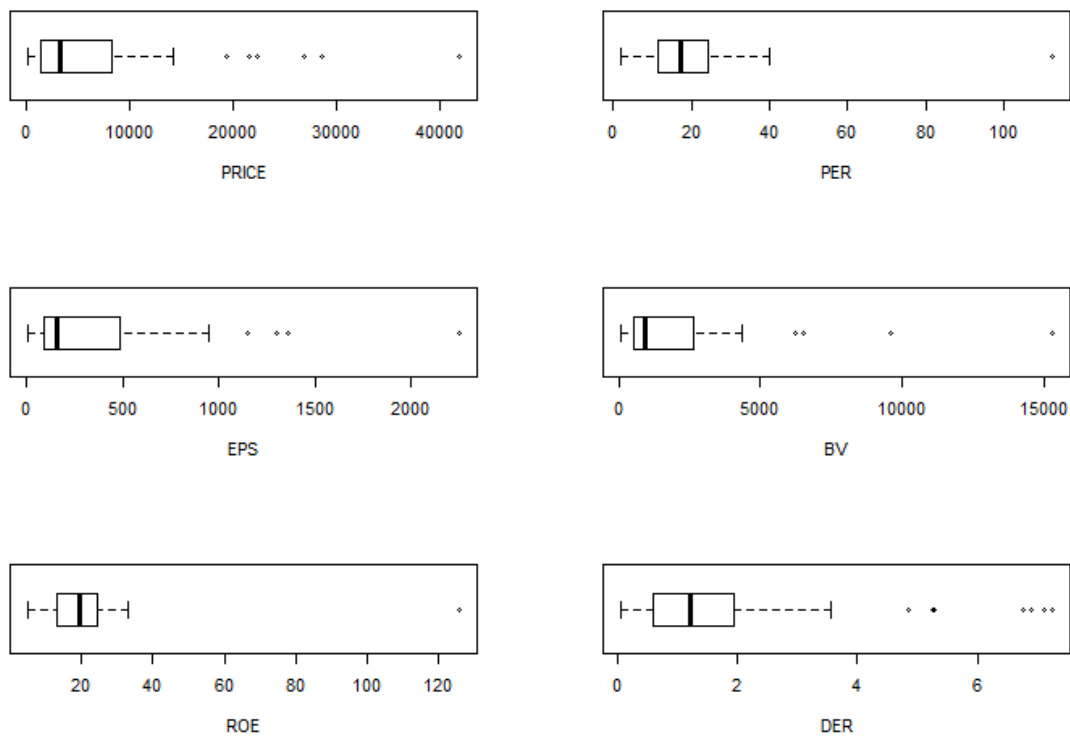
Diketahui bahwa variabel dependen yang digunakan dalam penelitian ini adalah harga saham yang disimbolkan dengan PRICE, dan 5 variabel independen yang disimbolkan dengan PER, EPS, BV, ROE, dan DER (symbol berdasarkan akronim). Pada umumnya saham-saham yang tergabung dalam indeks LQ45 merupakan saham-saham yang memiliki nilai kapitalisasi pasar yang paling liquid di Bursa Efek Indonesia. Dengan demikian, 45 emiten yang tergabung dalam LQ 45 merupakan saham-saham unggulan. Untuk melihat karakteristik data 45 emiten saham dapat dilihat pada Tabel 2.



**Tabel 2. Deskripsi Statistik Setiap Variabel**

Variabel	Minimum	Maksimum	Rata-rata	Standar Deviasi
PRICE	155,00	41.900,00	6.742,133	8.994,64
PER	2,04	112,39	20,16533	16,58524
EPS	6,52	2.249,76	380,3578	462,5026
BV	85,19	15.288,42	2.116,753	2.810,88
ROE	5,07	125,8	21,16556	17,47722
DER	0,05	7,26	1,902222	2,040183

Sumber: Hasil pengolahan data

**Gambar 1. Boxplot data setiap variabel yang digunakan**

Sumber: Hasil pengolahan data

Pada Tabel 2, dapat dijelaskan bahwa deskripsi statistik variabel dependen (PRICE) memiliki nilai rata-rata adalah Rp. 6.742,13. Harga saham tertinggi adalah Rp. 41.900,00 yang dimiliki oleh PT. Gudang Garam Tbk dengan kode emitennya adalah GGRM. Harga saham terendah adalah Rp. 155,00 yang dimiliki oleh PT Sentul City Tbk dengan kode emitennya adalah BKSL. Pada Tabel 1, dapat dilihat bahwa nilai standar deviasi adalah 8.994,64. Nilai standar deviasi tersebut cukup tinggi. Hal ini mengindikasikan bahwa pada data PRICE terdapat observasi yang ekstrim. Hal ini didukung oleh Boxplot PRICE seperti yang diperlihatkan pada Gambar 1. Pada Gambar 1 dapat dilihat bahwa ada beberapa observasi menjadi outlier.

Selain variabel dependen, pada Tabel 2 terdapat deskripsi statistik untuk setiap variabel independen, yakni PER, EPS, BV, ROE dan DER. Pada tabel tersebut dapat dilihat bahwa standar deviasi untuk PER dan ROE relatif lebih kecil. Hal ini mengindikasikan bahwa pada kedua data tersebut memiliki observasi-observasi yang seragam. Sementara itu, variabel EPS, BV dan DER memiliki standar deviasi yang relatif tinggi. Kemudian, berdasarkan Gambar 1, dapat dilihat bahwa ada indikasi terdapat outlier pada kelima variabel independen tersebut.

## 4.2. Model OLS

Langkah awal dalam penelitian ini adalah membuat model regresi dari harga saham (PRICE) terhadap faktor-faktor fundamental yang mempengaruhinya menggunakan metode OLS. Rangkuman hasil pengolahan data model regresi OLS secara lengkap disajikan pada Tabel 3, 4 dan 5. Pada Tabel 3 dapat dilihat koefisien model OLS dan nilai-nilai statistik uji t beserta p valuenya untuk uji signifikansi koefisien parameter model. Sebelum melakukan uji parsial, akan dilakukan keseluruhan model menggunakan uji F, yakni p value uji F adalah 0,000 (lihat Tabel 4). Dengan demikian pada taraf kepercayaan 95% hipotesa  $H_0$  ditolak. Ini berarti bahwa paling sedikit terdapat satu variabel independen (PER, EPS, BV, ROE dan DER) yang mempengaruhi variabel dependen PRICE. Kemudian melakukan uji parsial menggunakan uji t untuk mengetahui koefisien variabel mana yang mempengaruhi PRICE secara signifikan. Berdasarkan Tabel 3 dapat dijelaskan bahwa pada taraf kepercayaan 95%, hanya koefisien variabel BV yang tidak mempengaruhi PRICE secara signifikan, karena p value statistik uji t adalah 0,134 lebih besar dari  $\alpha = 0,05$  (menerima  $H_0$ ). Pada Tabel 4 dapat dilihat bahwa Adjusted R-squared dan R squared yang sangat tinggi yakni melebihi 90%. Dengan demikian, terdapat kolinearitas yang kuat pada koefisien model. Hal ini didukung oleh nilai VIF pada Tabel 5, yang menyatakan bahwa terjadi multikolinieritas dalam model OLS, yakni pada variabel EPS dan BV karena VIF kedua variabel tersebut lebih dari 10.

**Tabel 3. Koefisien model regresi OLS dan uji t**

Variabel	Koefisien	Standar Error	Statistic t	p value of stat. t
C	-3132,663	1031,232	-3,038	0,004
PER	53,021	24,430	2,170	0,036
EPS	12,601	3,258	3,868	0,000
BV	0,817	0,533	1,532	0,134
ROE	156,031	31,835	4,901	0,000
DER	-535,706	201,027	-2,665	0,011

Sumber: Hasil pengolahan data

**Tabel 4. Koefisien determinasi dan uji F**

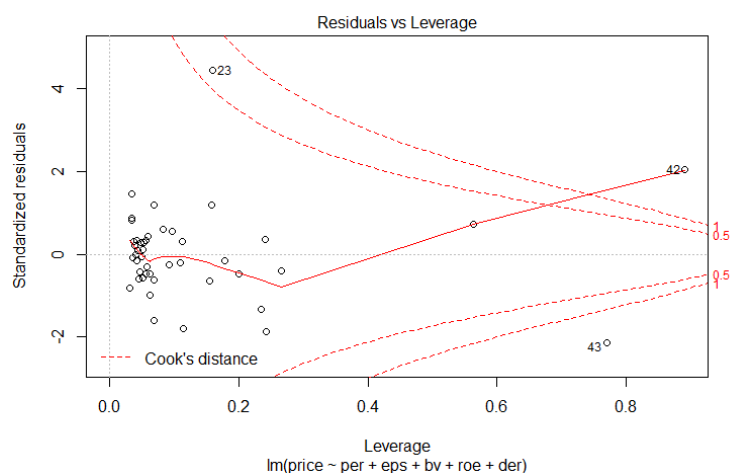
R-squared	0,923
Adjusted R-squared	0,913
F-statistic	93,514
p value (F-statistic)	0,000

Sumber: Hasil pengolahan data

**Tabel 5. Nilai VIF**

Variabel	VIF
PER	1,0280
EPS	14,2161
BV	14,0581
ROE	1,9383
DER	1,0532

Sumber: Hasil pengolahan data



**Gambar 2. Diagnostic plot untuk mendeteksi outlier pada residual**

Sumber: Hasil pengolahan data

Tabel 6. Deteksi influence (outlier) pada koefisien dan residual model OLS

n	DFBTAS C	DFBTAS PER	DFBTAS EPS	DFBTAS BV	DFBTAS ROE	DFBTAS DER	DFFIT	Cov. ratio	Cook distance	Hat Matrix
1	0,0046	0,0308	0,0416	-0,0198	-0,0262	-0,0342	0,1051	1,2990	0,0019	0,1126
2	0,0032	0,0130	0,0107	-0,0063	-0,0107	-0,0623	-0,0779	1,2746	0,0010	0,0918
3	0,0628	-0,0348	-0,0228	0,0150	-0,0145	-0,0160	0,0822	1,2174	0,0012	0,0568
4	0,0717	0,0264	-0,0288	0,0175	-0,0336	0,0018	0,1537	1,0895	0,0040	0,0341
5	-0,0913	0,0432	-0,0277	0,0226	0,0143	0,0611	-0,1458	1,0881	0,0036	0,0312
6	0,0481	-0,0334	-0,0066	-0,0025	-0,0050	-0,0060	0,0621	1,2149	0,0007	0,0493
7	-0,0793	0,0253	0,0936	-0,0750	-0,0807	<b>0,4399</b>	0,5133	1,1190	0,0435	<b>0,1588</b>
8	0,0076	0,0101	0,0029	-0,0041	0,0037	-0,0626	-0,0699	<b>1,4175</b>	0,0008	0,1785
9	-0,0029	0,0510	<b>-0,4030</b>	<b>0,3567</b>	0,2468	<b>-0,4790</b>	<b>-0,7518</b>	1,1508	0,0922	<b>0,2351</b>
10	0,0059	0,0166	0,0360	-0,0382	-0,0116	-0,0558	-0,0756	1,3037	0,0010	0,1101
11	0,1716	-0,0974	0,0215	-0,0436	-0,0634	-0,0712	0,1784	1,2056	0,0054	0,0828
12	0,0360	0,0116	-0,0457	0,0288	0,0400	-0,2028	-0,2415	<b>1,4077</b>	0,0099	0,1998
13	0,0478	0,0354	-0,0225	0,0132	-0,0225	-0,0323	0,1085	1,2064	0,0020	0,0594
14	-0,1006	0,0710	0,0071	0,0072	-0,0073	0,0587	-0,1315	1,1715	0,0029	0,0513
15	-0,0018	-0,0001	0,0000	0,0004	-0,0005	0,0019	-0,0037	1,2180	0,0000	0,0405
16	0,0142	-0,0067	-0,0036	0,0012	-0,0014	-0,0052	0,0185	1,2205	0,0001	0,0436
17	0,0278	0,1404	-0,1520	0,1404	-0,0096	0,0289	0,3241	1,0096	0,0173	<b>0,0694</b>
18	-0,2618	0,0521	-0,2020	<b>0,4023</b>	0,1633	-0,0130	<b>0,8175</b>	<b>2,4658</b>	0,1130	<b>0,5631</b>
19	-0,0504	0,0303	0,0257	-0,0212	-0,0030	0,0341	-0,0745	1,2232	0,0009	0,0580
20	0,1343	0,0715	0,0429	-0,0390	-0,0615	-0,1385	0,2816	0,8676	0,0128	<b>0,0352</b>
21	-0,0348	0,0045	-0,1820	0,1876	0,0983	0,0143	0,2041	<b>1,5086</b>	0,0071	0,2412
22	-0,0793	-0,0087	-0,2030	0,1674	0,1252	0,0939	-0,2472	<b>1,5502</b>	0,0104	0,2659
23	<b>1,3722</b>	<b>-0,4181</b>	<b>2,2300</b>	<b>-1,9870</b>	<b>-1,3100</b>	<b>-1,1650</b>	<b>2,7113</b>	<b>0,0206</b>	<b>0,6230</b>	<b>0,1598</b>
24	0,0675	0,0393	-0,0321	0,0232	-0,0332	-0,0039	0,1626	1,0789	0,0044	0,0347
25	-0,0382	-0,0759	0,0150	0,0018	-0,0173	0,0795	-0,1672	1,1832	0,0047	0,0691
26	0,0515	-0,0113	-0,0070	-0,0019	-0,0170	-0,0152	0,0676	1,1994	0,0008	0,0416
27	-0,0096	0,0015	0,0003	0,0009	0,0029	0,0066	-0,0122	1,2291	0,0000	0,0496
28	-0,0076	0,0043	0,0034	-0,0011	-0,0061	0,0029	-0,0184	1,2108	0,0001	0,0362
29	-0,0952	0,0896	0,0188	-0,0059	-0,0039	0,0282	-0,1247	1,2030	0,0026	0,0632
30	-0,0581	0,0159	0,0056	0,0052	-0,0103	0,0545	-0,0936	1,1932	0,0015	0,0474
31	-0,2529	0,1432	-0,2160	0,2278	0,0167	0,2324	-0,4492	0,8299	0,0322	<b>0,0692</b>
32	<b>-0,3563</b>	0,0973	<b>-0,5280</b>	<b>0,4799</b>	0,2975	<b>0,3022</b>	-0,6663	0,7824	0,0696	<b>0,1139</b>
33	-0,0207	0,0158	-0,0427	0,0293	0,0166	0,1461	0,1777	1,2371	0,0054	0,0977
34	-0,0493	0,0469	0,0465	-0,0297	-0,0497	0,0223	-0,1152	1,1961	0,0023	0,0565
35	-0,1240	0,0085	-0,2290	0,2056	0,1330	0,1176	-0,2703	1,2995	0,0124	<b>0,1551</b>
36	-0,0174	0,0144	0,0081	-0,0034	-0,0068	0,0004	-0,0319	1,2157	0,0002	0,0422
37	-0,1461	0,1643	0,0489	-0,0200	-0,0800	0,0653	-0,2573	1,0672	0,0110	0,0624
38	0,0149	0,0158	-0,0013	-0,0037	-0,0065	-0,0018	0,0412	1,2092	0,0003	0,0398
39	-0,0134	0,0174	-0,0050	0,0016	0,0199	0,0323	0,0627	1,2196	0,0007	0,0524
40	-0,0649	0,0397	0,0373	-0,0229	-0,0454	0,0564	-0,1313	1,1580	0,0029	0,0460
41	0,2301	0,0390	<b>0,5280</b>	<b>-0,7426</b>	<b>-0,3397</b>	0,0643	<b>-1,1004</b>	0,8760	0,1880	<b>0,2433</b>
42	<b>-3,1680</b>	<b>0,9434</b>	<b>-1,0200</b>	<b>1,0427</b>	<b>4,9115</b>	-0,1095	<b>6,0987</b>	<b>5,4488</b>	<b>5,6800</b>	<b>0,8911</b>
43	<b>1,0903</b>	<b>-3,9319</b>	<b>-0,6000</b>	<b>0,6111</b>	<b>0,9675</b>	-0,1585	<b>-4,0983</b>	<b>2,4226</b>	<b>2,5400</b>	<b>0,7704</b>
44	0,0137	0,0062	-0,0130	0,0057	0,0018	0,0247	0,0599	1,1969	0,0006	0,0376
45	0,0035	0,0118	-0,0014	-0,0013	-0,0043	0,0074	0,0243	1,2311	0,0001	0,0523

Baris yang diberi *shading* menunjukkan observasi yang terindikasi sebagai *influence*.

Sumber: Hasil pengolahan data

Persamaan matematika dari model OLS yang diperoleh pada Tabel 3 dapat ditulis seperti berikut ini

$$PRICE = -3132,663 + 53,021PER + 12,601EPS + 0,817BV + 156,031ROE - 535,706DER$$

Kemudian, untuk mendeteksi outlier pada residual model OLS dapat dilakukan secara grafik (*diagnostic plot*) menggunakan plot *Residuals vs Leverage* seperti yang diperlihatkan pada Gambar 1. Pada plot tersebut, terdapat tiga observasi yang ekstrim yakni observasi 23, 42 dan 43. Ketiga observasi tersebut memiliki jangkauan (jarak *Cook*) yang besar. Ketiga observasi ini, merupakan observasi yang berpotensi besar sebagai outlier dan sekaligus menjadi *influence*. Lebih lengkap mengenai deteksi *influence* dapat dilihat pada Tabel 6, dimana terdapat nilai-nilai DFBETAS setiap koefisien, DFFITS, CovRatio, Cook's distance (jarak *Cook*), HatMatrix. Pada Tabel 6, terdapat 16 observasi yang berpotensi besar memberikan pengaruh (*influence*) terhadap model (1). Dengan demikian, model OLS memiliki outlier maupun observasi-observasi yang memberikan *influence* secara statistik terhadap model. Berdasarkan hasil analisis, maka disimpulkan bahwa model OLS bukan merupakan model yang baik.

### 4.3. Model Robust M-estimator

Tabel 7. Rangkuman model robust M-estimator

		Model	
		Huber	Bisquare
C	Koefisien	-4157,728	-4415,874
	Standard Error	799,7178	766,4646*
	statistik <i>t</i> (p value)	-5,199 (0,0000)	-5,761 (0,0000)
PER	Koefisien	71,86	68,547
	Standard Error	18,95	18,158*
	statistik <i>t</i> (p value)	3,793 (0,0001)	3,755 (0,0002)
EPS	Koefisien	8,4746	6,778
	Standard Error	2,5265	2,42*
	statistik <i>t</i> (p value)	3,35 (0,0008)	2,799 (0,0051)
BV	Koefisien	1,4779	1,754
	Standard Error	0,41	0,396*
	statistik <i>t</i> (p value)	3,57 (0,0004)	4,426 (0,0000)
ROE	Koefisien	179,6857	190,1495
	Standard Error	24,688	23,66*
	statistik <i>t</i> (p value)	7,278 (0,0000)	8,036 (0,0000)
DER	Koefisien	-442,1646	-395,2262
	Standard Error	155,896	149,4137*
	statistik <i>t</i> (p value)	-2,84 (0,0046)	-2,645 (0,0082)
Statistik $R_N^2$ (p value)		152,686 (0,0000)	165,631 (0,0000)
$R_W^2$		0,96	0,97*
Adjusted $R_W^2$		0,96	0,97*
AIC		90,68	63,71*
BIC		100,17	76,11*

\*Nilai-nilai terbaik berdasarkan kriteria pemilihan model

Sumber: Hasil pengolahan data

Hasil estimasi pada Tabel 7 merupakan hasil estimasi model robust M-estimator menggunakan pembobot Huber dan Bisquare dengan skala adalah MAD (*zero centered*) [6]. Untuk pembobot Huber tuning yang digunakan adalah 1,345, sedangkan tuning yang digunakan untuk pembobot bisquare adalah 4,685. Pada umumnya, kedua model M-estimator ini merupakan model yang bebas *influence (outlier)*. Kedua model tersebut merupakan model-model yang baik berdasarkan uji keseluruhan model dan uji parsial yang diperlihatkan pada Tabel 7, yakni semua koefisien variabel independen (PER, EPS, BV, ROA, ROE dan DER) mempengaruhi PRICE secara signifikan. Kemudian, nilai-nilai koefisien determinasi robust ( $R_W^2$  dan  $adj R_W^2$ ) yang dimiliki oleh kedua model M-estimator ini cukup tinggi, yakni lebih dari 90%. Dengan koefisien parameter yang signifikan dan nilai koefisien determinasi robust yang tinggi mengindikasikan bahwa tidak terjadi multikolinieritas pada model Huber dan model bisquare yang diperoleh. Berdasarkan hasil analisis tersebut, maka kedua model M-estimator ini (Huber dan Bisquare) lebih baik dibandingkan model OLS yang diperoleh di atas.

Secara matematis, model Huber yang diperoleh pada Tabel 7 dapat ditulis seperti berikut ini

$$PRICE = -4157,728 + 71,862PER + 8,475EPS + 1,478BV + 179,686ROE - 442,165DER$$

dan model bisquare adalah

$$PRICE = -4415,874 + 68,547PER + 6,778EPS + 1,75BV + 190,15ROE - 395,23DER$$

Berdasarkan rangkuman model yang diperlihatkan pada Tabel 7, dapat dilihat bahwa nilai standar error masing-masing estimator pada model Bisquare lebih kecil dibandingkan model Huber. Hal ini mengindikasikan bahwa estimator-estimator yang diperoleh pada model bisquare lebih baik dibandingkan model Huber. Sementara itu, nilai  $R_W^2$  dan  $adj R_W^2$  model bisquare lebih besar dari model Huber. Karena, nilai  $R_W^2$  dan  $adj R_W^2$  adalah koefisien determinasi robust [6], maka disimpulkan bahwa model Bisquare lebih baik dibandingkan model Huber. Kemudian, nilai kriteria informasi robust yang terdapat pada Tabel 7, menyatakan bahwa nilai AIC dan BIC model bisquare lebih kecil dibandingkan model Huber. Berdasarkan hasil analisa ukuran kebaikan model, maka disimpulkan bahwa model bisquare merupakan model regresi linear robust M-estimator terbaik. Model bisquare tersebut dapat diinterpretasikan sebagai berikut:

- Rasio PER meningkat sebesar 1 poin pada indeks LQ 45 memberi kontribusi bagi kenaikan harga saham Indeks LQ45 sebesar Rp. 68,547.
- Kenaikan EPS sebesar 1 poin menunjukkan bahwa setiap kenaikan rasio antara laba bersih setelah pajak dengan jumlah lembar saham pada Indeks LQ45 memberi kontribusi untuk kenaikan harga saham pada indeks LQ 5 sebesar Rp. 6,778.
- Kenaikan BV sebesar 1 poin menunjukkan bahwa rasio nilai buku ekuitas dengan jumlah saham beredar meningkat Rp. 1 akan memberi kontribusi bagi kenaikan harga saham pada Indeks LQ45 sebesar Rp. 1,75.
- Kenaikan ROE sebesar 1 poin akan mengakibatkan harga saham pada indeks LQ 45 mengalami kenaikan sebesar Rp. 190,15. Ini menunjukkan bahwa setiap kenaikan rasio antara laba bersih dengan ekuitas yang dimiliki oleh perusahaan-perusahaan pada indeks LQ 45 memberi kontribusi bagi kenaikan harga saham indeks LQ 45 sebesar Rp. 190,15.
- Kenaikan DER sebesar 1 poin akan mengakibatkan harga saham pada indeks LQ 45 mengalami penurunan sebesar Rp. 395,23. Ini artinya bahwa rasio utang terhadap ekuitas pada indeks LQ 45 memberi kontribusi negatif pada harga saham indeks Indeks LQ45.

## 5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis data dan model regresi harga saham pada Indeks LQ45 periode Februari 2014, maka dapat disimpulkan bahwa model M-estimator dengan pembobot Huber ataupun bisquare dapat mengatasi masalah masalah outlier (*influence*) dan multikolinieritas pada model OLS. Dengan demikian, model regresi linear robust M-estimator dengan pembobot Huber dan bisquare lebih baik dibandingkan model OLS. Kemudian hasil perbandingan kedua model regresi linear robust M-estimator berdasarkan nilai-nilai kebaikan model diperoleh bahwa model bisquare lebih baik dibandingkan model Huber. Hasil interpretasi model Bisquare diperoleh bahwa PER, EPS, BV dan ROE memberi kontribusi positif terhadap harga saham Indeks LQ45. Sementara itu DER memberi kontribusi negatif terhadap harga saham Indeks LQ45.

## Daftar Pustaka

- [1] D. Rosadi, Analisis Ekonometrika & Runtun Waktu Terapan dengan R (Aplikasi untuk bidang ekonomi, bisnis, dan keuangan), Yogyakarta: Andi Offset, 2011.
- [2] D. Rosadi, Ekonometrika & Analisis Runtun Waktu Terapan dengan Eviews (Aplikasi untuk bidang ekonomi, bisnis, dan keuangan), Yogyakarta: Andi Offset, 2012.
- [3] J. Fox and S. Weisberg, An R Companion to Applied Regression, 2nd ed., Thousand Oaks, CA: Sage, 2011.
- [4] P. Huber and E. M. Ronchetti, Robust Statistics, 2nd ed., Hoboken NJ: Wiley, 2009.
- [5] Indonesia Stock Exchange: RESEARCH AND DEVELOPMENT DIVISION, "IDX LQ45," Indonesia Stock Exchange, Jakarta, 2014.
- [6] Eviews, Eviews 8 User's Guide, Irvine CA: IHS Global Inc, 2013.
- [7] R. Andersen, Modern Methods for Robust Regression, Thousand Oaks, CA: Sage, 2007.
- [8] P. J. Huber, "Robust estimation of a location parameter," *The Annals of Mathematical*, vol. 35, no. 1, pp. 73-101, 1964.
- [9] P. J. Rousseeuw and A. M. Leroy, Robust regression and outlier detection, Hoboken, NJ: Wiley, 1987.

## **ANALISIS KETIMPANGAN PEMBANGUNAN ANTARA KABUPATEN/KOTA DI PROVINSI MALUKU**

**Jefri Tipka**

Badan Pusat Statistik Provinsi Maluku  
Jl. Wolter Monginsidi – Passo, Ambon 97323, Indonesia  
e-mail: jefri.tipka@bps.go.id

---

### **Abstrak**

Perbedaan tingkat kuantitas dan kualitas sumber daya alam yang dimiliki suatu wilayah serta perbedaan kuantitas dan kualitas infrastruktur yang dimiliki wilayah, hal inilah yang menjadi salah satu penyebab timbulnya ketimpangan atau kesenjangan antar daerah. Tingkat perbedaan pendapatan masyarakat selain berasal dari faktor internal seperti SDM (sumber daya manusia) juga disebabkan dari faktor eksternal yakni ketimpangan antar wilayah. Adapun tujuan dari penelitian ini untuk mengetahui pola dan struktur ekonomi kabupaten/kota di Provinsi Maluku, untuk mengetahui pengaruh tingkat ketimpangan pembangunan ekonomi terhadap pertumbuhan ekonomi di Provinsi Maluku, dan untuk mengetahui apakah hipotesis Kuznets tentang “U-terbalik” berlaku di Provinsi Maluku. Penelitian ini menggunakan data PDRB dari tahun 2010-2014 Tahun Dasar 2010 = 100, serta jumlah penduduk tahun 2010 – 2014. Teknik analisis dengan Analisis Tipologi Klassen Analisis Indeks Williamson dan Korelasi Pearson.

*Kata Kunci:* Indeks Williamson, ketimpangan pembangunan, kurva U-terbalik, Provinsi Maluku.

## **ANALYSIS OF DEVELOPMENT GAPS BETWEEN REGENCIES/CITIES IN THE PROVINCE OF MALUKU**

### **Abstract**

Differences in the level of quantity and quality of natural resources owned by a region as well as differences in the quantity and quality of infrastructure is owned by the region, it is actually one of the causes of inequality or disparity between regions. The degree of difference other than people's income comes from internal factors such as HR (human resources) is also because of the external factors that imbalances between regions. The aim of the study is to examine the pattern and economic structure of the regency/city in Maluku Province, to determine the effect of Gaps of economic development to economic growth in the province of Maluku, and to determine whether the Kuznets hypothesis about the "inverted-U" applies in Maluku province.

This study uses data the GDRP of the year 2010 - 2014 Base Year 2010 = 100, as well as the total population in 2010 - 2014. Analysis techniques with Klassen Typology Analysis, Analysis Index Williamson and Correlation Pearson.

*Keywords:* Development gaps, index Williamson, inverted-U curve, Province of Maluku.

---

### **1. Pendahuluan**

Ketidakpuasan timbul akibat pengendalian pemerintah terhadap pengendalian pemerintah pusat terhadap pengalihan sumber daya alam di daerah serta kurangnya sensitifnya pemerintah terhadap perbedaan antar daerah. permintaan yang kuat akan pembagian kewenangan ini memunculkan ketidakpuasan. Diperkuat oleh adanya krisis moneter dan pergolakan politik mulai tahun 1997.

Di samping itu, pemberian otonomi kepada daerah sangat perlu untuk memperbesar partisipasi masyarakat di seluruh Indonesia dalam memberikan keputusan yang berdampak langsung kepada daerahnya, sebab sangat tidak realistis Pemerintah Pusat membuat keputusan mengenai pelayanan masyarakat untuk seluruh wilayah negara. Demikian juga diyakini bahwa masyarakat lokal melalui kabupaten/kota memiliki

pengetahuan yang lebih tentang kebutuhan, kondisi dan yang diprioritaskan. Mobilisasi sumber daya lebih dimungkinkan dilakukan oleh masyarakat yang dekat dengan pengambil keputusan di tingkat lokal. Otonomi daerah, anggaran daerah menjadi pintu penting yang paling mungkin setiap daerah mendinamisir kegiatan pembangunan melalui alokasi yang tepat dalam rangka membuat strategi untuk menciptakan kebijakan yang lebih tepat dalam rangka membuat strategi untuk menciptakan kebijakan yang lebih sesuai situasi masing-masing daerah.

Pemerintah daerah tidak perlu lagi harus tergantung pada pusat dalam menentukan kebijakan publik karena daerahlah yang sebenarnya mengetahui secara pasti kebutuhannya. Keikutsertaan masyarakat dalam pembuatan kebijakan publik, membuat mereka merasa memiliki dan mau ikut bertanggung jawab terhadap pembangunan yang berlangsung. Untuk meningkatkan kesejahteraan masyarakat diperlukan pertumbuhan ekonomi yang meningkat dan distribusi pendapatan yang merata. Pertumbuhan ekonomi diukur dengan Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) dan laju pertumbuhannya atas dasar harga konstan. Ekonomi suatu daerah dikatakan mengalami pertumbuhan yang berkembang apabila tingkat kegiatan ekonominya lebih tinggi dari pada apa yang dicapai pada masa sebelumnya.

Pertumbuhan ekonomi merupakan salah satu indikator kesejahteraan masyarakat pada suatu daerah. Apabila pertumbuhan ekonomi suatu daerah meningkat diharapkan pertumbuhan tersebut dapat dinikmati merata oleh seluruh masyarakat. Sejalan dengan Hipotesis Kuznet mengenai kurva U-terbalik, dimana pada tahap-tahap pertumbuhan awal distribusi pendapatan cenderung memburuk, namun pada tahap-tahap berikutnya hal tersebut akan membaik.

Provinsi Maluku sebagai salah satu wilayah dengan sebaran yang cukup tinggi juga mengalami ketidakmerataan dalam percepatan pembangunan antar wilayahnya. Pembangunan yang dilakukan di wilayah bertujuan tidak hanya untuk meningkatkan PDRB per kapita masyarakat, namun juga untuk mengejar ketertinggalan pertumbuhan ekonomi dibandingkan dengan wilayah lain.

Dengan demikian tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui pola struktur ekonomi Kabupaten/Kota di Provinsi Maluku; untuk mengetahui pengaruh tingkat ketimpangan pembangunan ekonomi terhadap pertumbuhan ekonomi di Provinsi Maluku; dan untuk mengetahui apakah hipotesis Kuznets tentang "U terbalik" berlaku di Provinsi Maluku.

## 2. Tinjauan Pustaka

### 2.1. Analisis Tipologi Klassen

Dalam penelitian ini pendekatan yang digunakan adalah pendekatan daerah yaitu empat daerah kuadran dibagi menurut klasifikasi daerah seperti yang ditunjukkan oleh Tabel 1.

**Tabel 1. Klasifikasi Tipologi Klassen Pendekatan Daerah**

PDRB perkapita Laju Pertumbuhan	$ydi > yni$ (+)	$ydi < yni$ (-)
$rdi > rni$ (+)	(I) Daerah maju dan tumbuh cepat	(II) Daerah berkembang cepat tapi tidak maju
$rdi < rni$ (-)	(III) Daerah maju tapi tertekan	(IV) Daerah relatif tertinggal

Keterangan:

- $rdi$  = laju pertumbuhan Kabupaten/Kota  $i$
- $rni$  = laju pertumbuhan total Provinsi Maluku
- $ydi$  = PDRB per kapita Kabupaten/Kota  $i$
- $rni$  = PDRB per kapita Provinsi Maluku

- a. Kuadran I (pertama) yakni daerah cepat maju dan cepat tumbuh (*high income and high growth*) adalah Kabupaten/Kota yang memiliki pertumbuhan ekonomi dan PDRB perkapita yang lebih tinggi dibanding dengan Provinsi Maluku.



- b. Kuadran II (kedua) yakni daerah berkembang cepat tapi tidak maju (*high growth but low income*) adalah Kabupaten/Kota yang memiliki tingkat pertumbuhan tinggi, tetapi tingkat PDRB perkapita lebih rendah dibandingkan dengan Provinsi Maluku.
- c. Kuadran III (ketiga) yakni daerah maju tapi tertekan (*high income but low growth*) adalah Kabupaten/Kota yang memiliki PDRB perkapita lebih tinggi tetapi tingkat pertumbuhannya lebih rendah dibandingkan dengan Provinsi Maluku.
- d. Kuadran IV (keempat) adalah daerah relatif tertinggal (*low growth and slow income*) adalah Kabupaten/Kota yang memiliki tingkat pertumbuhan ekonomi dan PDRB perkapita lebih rendah dibanding dengan Provinsi Maluku.

## 2.2. Analisis Indeks Williamson

Untuk mengetahui ketimpangan antar Kabupaten/Kota yang terjadi Provinsi Maluku dapat dianalisis menggunakan indeks ketimpangan regional (*regional inequality*) yang dinamakan indeks williamson. Indeks ketimpangan regional ini diformulasikan sebagai berikut :

$$IW = \frac{\sqrt{\sum (Y_i - Y)^2 \left(\frac{f_i}{n}\right)}}{Y}$$

Keterangan :

$Y_i$  = PDRB per kapita di Kabupaten/Kota  $i$

$Y$  = PDRB rata-rata per kapita di Provinsi Maluku

$f_i$  = jumlah penduduk Kabupaten/Kota  $i$

$n$  = jumlah penduduk Provinsi Maluku

Formula Indeks Williamson menggunakan PDRB per kapita dan jumlah penduduk dimana nilai yang diperoleh antara nol dan satu ( $0 < W < 1$ ). Dengan indikator bahwa apabila angka indeks ketimpangan Williamson semakin mendekati nol maka menunjukkan ketimpangan yang semakin kecil dan bila angka indeks menunjukkan semakin jauh dari nol maka akan menunjukkan ketimpangan yang makin lebar.

## 2.3. Korelasi Pearson

Hasil korelasi pearson dapat dilihat dari nilai signifikansi, bentuk korelasi positif atau negatif apabila hubungan 2 variabel tersebut menunjukkan adanya korelasi pearson nilainya kurang atau lebih dari nol (0), apabila menunjukkan tidak adanya hubungan maka nilai korelasi adalah nol (0). Nilai korelasi positif berarti arah hubungan antar variabel yang satu dengan variabel yang lain adalah satu arah, dengan kata lain apabila terjadi peningkatan pertumbuhan PDRB maka peningkatan tersebut akan mempengaruhi tingkat kesenjangan pendapatan regional. Hasil dari analisis korelasi pearson ini digunakan untuk mengetahui hubungan antar Indeks Wiliamson dengan PDRB perkapita.

## 2.4. Teori Kuznets tentang Kurva U-terbalik

Simon Kusnetz yang memelopori analisis pola-pola pertumbuhan historis di negara-negara maju mengemukakan bahwa pada tahap awal berikutnya, distribusi pendapatannya cenderung memburuk, namun pada tahap berikutnya, distribusi pendapatannya akan membaik. Observasi ini dikenal secara luas sebagai konsep kurva “U-terbalik”, karena perubahan longitudinal (*time-series*) dalam distribusi pendapatan akan menurun seiring dengan peningkatan PDRB per kapita pada tahap pembangunan selanjutnya. Kemerosotan jangka pendek dalam pertumbuhan PDRB per kapita sering mengakibatkan ketimpangan yang menajam. Hipotesis Kuznets (kurva U-terbalik) dapat dibuktikan dengan membuat PDRB perkapita dan indeks kesenjangan. Grafik tersebut merupakan hubungan antar pertumbuhan PDRB dengan indeks Entropi Theil selama periode pengamatan. Kurva U-terbalik menggambarkan kesenjangan distribusi pendapatan yang meningkat pada tahap awal pembangunan dan menurun pada tahap-tahap berikutnya.

### 3. Metodologi Penelitian

Penelitian ini menggunakan studi kasus pada Provinsi Maluku dengan menggunakan data dari sebelas kabupaten/kota di Provinsi Maluku pada tahun 2010 – 2014 (dalam [1], [2], [3], [4], [5], dan [6]), seperti yang diberikan pada Tabel 2, Tabel 3 dan Tabel 4 berikut ini.

**Tabel 2. PDRB Kabupaten/Kota di Provinsi Maluku Atas Dasar Harga Berlaku Tahun 2010 – 2014  
Seri 2010 = 100 (Juta Rupiah)**

KABUPATEN/KOTA	TAHUN				
	2010	2011	2012	2013*	2014**
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(5)
Maluku Tenggara Barat	980.553,76	1.149.704,39	1.337.538,91	1.502.377,98	1.715.524,32
Maluku Tenggara	1.166.818,03	1.355.192,27	1.569.591,24	1.803.255,71	2.076.123,06
Maluku Tengah	3.532.297,12	4.016.969,03	4.610.749,76	5.191.800,02	5.929.343,28
Buru	954.861,00	1.085.335,38	1.253.404,47	1.407.316,76	1.584.873,68
Kep. Aru	1.348.409,05	1.542.774,74	1.810.038,72	2.082.893,85	2.375.468,56
SeramBagian Barat	1.191.718,35	1.374.817,94	1.576.243,47	1.783.068,71	2.024.154,73
SeramBagianTimur	1.319.256,02	1.723.341,91	1.963.588,08	2.143.076,52	2.444.914,35
Maluku Barat Daya	607.040,67	700.198,76	817.946,50	941.938,41	1.152.228,77
Buru Selatan	536.043,18	607.380,63	691.202,75	790.371,81	901.930,27
Ambon	5.911.770,17	6.795.892,08	7.839.707,29	8.823.016,26	9.948.632,74
Tual	879.817,21	1.016.250,69	1.191.740,02	1.365.347,86	1.580.148,29
<b>Maluku</b>	<b>18.428.584,55</b>	<b>21.367.857,82</b>	<b>24.661.751,22</b>	<b>27.834.463,90</b>	<b>31.733.342,04</b>

*Sumber: Badan Pusat Statistik Provinsi Maluku, PDRB 2010 – 2014*

**Tabel 3. PDRB Per Kapita Pada Kabupaten/Kota di Provinsi Maluku Tahun 2010 – 2014  
Seri 2010=100 (Juta Rupiah)**

KABUPATEN/KOTA	TAHUN				
	2010	2011	2012	2013*	2014**
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(5)
Maluku Tenggara Barat	9,27	10,77	12,40	13,83	15,65
Maluku Tenggara	12,04	13,93	16,05	18,39	21,08
Maluku Tengah	9,73	11,01	12,60	14,14	16,10
Buru	8,74	9,62	10,76	11,71	12,78
Kep. Aru	15,93	17,94	20,70	23,47	26,40
SeramBagian Barat	7,21	8,26	9,42	10,61	11,99
SeramBagianTimur	13,25	16,99	19,03	20,43	22,91
Maluku Barat Daya	8,55	9,85	11,43	13,14	16,00
Buru Selatan	9,93	11,03	12,33	13,82	15,50
Ambon	17,71	19,49	21,55	23,24	25,16
Tual	15,03	16,86	19,19	21,32	23,98
<b>Maluku</b>	<b>11,95</b>	<b>13,60</b>	<b>15,42</b>	<b>17,09</b>	<b>19,15</b>

*Sumber: Badan Pusat Statistik Provinsi Maluku, PDRB 2010 – 2014*

**Tabel 4. Laju Pertumbuhan PDRB pada Kabupaten/Kota di Provinsi Maluku Tahun 2011 – 2014  
Seri 2011=100 (Persen)**

KABUPATEN/KOTA	TAHUN				
	2011	2012	2013*	2014**	Rata-rata
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Maluku Tenggara Barat	7,16	7,30	5,15	6,04	7,16
Maluku Tenggara	5,98	7,07	5,88	6,25	5,98
Maluku Tengah	5,40	6,91	4,46	6,58	5,40
Buru	5,44	5,44	4,42	6,23	5,44
Kep. Aru	5,25	7,84	5,88	6,84	5,25
SeramBagian Barat	5,87	6,39	4,55	6,16	5,87
SeramBagianTimur	8,54	3,94	3,15	8,44	8,54
Maluku Barat Daya	5,65	7,46	5,61	15,35	5,65
Buru Selatan	4,63	5,20	5,37	6,28	4,63
Ambon	7,14	8,33	6,06	5,96	7,14
Tual	5,90	7,90	5,90	6,34	5,90
<b>Maluku</b>	<b>6,34</b>	<b>7,16</b>	<b>5,26</b>	<b>6,70</b>	<b>6,34</b>

Sumber: Badan Pusat Statistik Provinsi Maluku, PDRB 2010 – 2014 (data diolah)

#### 4. Hasil dan Pembahasan

##### 4.1. Tipologi Klassen

Analisis Tipologi Klassen digunakan untuk mengetahui gambaran tentang struktur pertumbuhan ekonomi daerah antar Kabupaten/Kota di Provinsi Maluku tahun 2010-2014. Berdasarkan rangkuman perhitungan Tipologi Klassen maka diperoleh klasifikasi pertumbuhan antar Kabupaten/Kota di Provinsi Maluku seperti tabel 5.

**Tabel 5. Klasifikasi Pertumbuhan Ekonomi  
Kabupaten/Kota di Provinsi Maluku menurut Tipologi Klassen**

PDRB perkapita Laju Pertumbuhan	$y_{di} > y_{ni}$ (+)	$y_{di} < y_{ni}$ (-)
$r_{di} > r_{ni}$ (+)	(I) Daerah maju dan tumbuh cepat : - Kota Ambon - Kota Tal - Kab. Maluku Tenggara - Kab. Kep. Aru	(II) Daerah berkembang cepat tapi tidak maju : - Kab. Maluku Tenggara Barat - Kab. Maluku Barat Daya
$r_{di} < r_{ni}$ (-)	(III) Daerah maju tapi tertekan : - Kab. Seram Bagian Timur	(IV) Daerah relatif tertinggal : - Kab. Maluku Tengah - Kab. Buru - Kab. Seram Bagian Barat - Kab. Buru Selatan

Sumber : Hasil Analisis Tipologi Klassen (data diolah)

Tabel 5 menunjukkan klasifikasi pertumbuhan ekonomi Kabupaten/Kota di Provinsi Maluku, dapat diuraikan bahwa dari lima Kabupaten/Kota yang ada di Provinsi Maluku, dapat diklasifikasikan menjadi empat daerah:

- Daerah yang pertama yakni **daerah maju dan tumbuh cepat** (*high income and high growth*) terdiri dari empat Kabupaten/Kota diantaranya : Kota Ambon, Kota tual, Kabupaten Maluku Tenggara dan Kabupaten Kepulauan Aru.
- Daerah yang kedua yakni **daerah berkembang cepat tapi tidak maju** (*high growth but low income*) terdiri dari dua Kabupaten diantaranya : Kabupaten Maluku Tenggara Barat dan Kabupaten Maluku Barat Daya.
- Daerah yang ketiga yakni **daerah maju tapi tertekan** (*high income but low growth*) terdiri dari satu Kabupaten diantaranya : Kabupaten Seram Bagian Timur.
- Daerah yang ketiga yakni **daerah relatif tertinggal** (*low growth and slow income*) terdiri dari empat Kabupaten diantaranya : Kabupaten Maluku Tengah, Kabupaten Buru, Kabupaten Seram Bagian Barat dan Kabupaten Buru Selatan.

#### 4.2. Analisis Indeks Williamson

Besar kecilnya ketimpangan PDRB Perkapita antar Kabupaten/Kota memberikan gambar tentang kondisi dan perkembangan pembangunan di Provinsi Maluku. Perkembangan pembangunan daerah wilayah Provinsi Maluku akan dibahas pemerataan PDRB per kapita antar Kabupaten/Kota yang dianalisis dengan menggunakan Indeks Williamson. Indeks Williamson merupakan koefisien persebaran dari rata-rata nilai sebaran dihitung berdasarkan estimasi dari nilai PDRB dan penduduk yang berada pada lingkup wilayah dikaji dan dianalisis, hasil analisis indeks Williamson dapat dilihat pada Tabel 6.

**Tabel 6. Indeks Williamson antar Kabupaten/Kota di Provinsi Maluku Tahun 2007 – 2010**

No	Tahun	Indeks Williamson
(1)	(2)	(3)
1.	2010	0,3130
2.	2011	0,3032
3.	2012	0,2922
3.	2013	0,2790
4.	2014	0,2638

*Sumber: Hasil Analisis Indeks Williamson (data diolah)*

Angka indeks williamson semakin kecil atau mendekati nol menunjukkan ketimpangan yang semakin kecil dengan kata lain makin merata, dan bila semakin jauh dari nol menunjukkan ketimpangan yang semakin melebar. Hal ini berarti tidak membuktikan bahwa semakin banyak pembangunan yang dilakukan maka tingkat kemungkinan ketimpangan yang akan terjadi semakin tinggi.

Tabel 6 di atas menjelaskan bahwa pada tahun 2010 angka ketimpangan Indeks Williamson sebesar 0,3130; pada tahun 2011 angka ketimpangan Indeks Williamson turun menjadi 0,3032 dan terus menurun pada tahun 2012 menjadi 0,2922. Tahun 2014 angka ketimpangan Indeks menurun menjadi 02638. Hal ini berarti secara rata-rata PDRB per kapita antar Kabupaten/Kota di Provinsi Maluku relatif merata, atau semakin kecil terjadi ketimpangan pembangunan dari tahun 2010 sampai tahun 2014.

#### 4.3. Hubungan Antara Indeks Williamson Dengan PDRB Per Kapita

Hubungan antara Indeks Williamson dan PDRB per kapita dapat dilihat dari analsis korelasi pearson. Hasil korelasi dapat dilihat dari nilai signifikansinya. Pengolahan data statistik melalui korelasi pearson untuk mengetahui hubungan antara PDRB per kapita dengan Indeks Williamson, hasilnya sebesar -0,952 dengan nilai signifikansi 0,001 yang berarti adalah secara statistik adanya korelasi pearson dan hubungannya adalah negatif.

**Tabel 7. Hasil Analisis Korelasi Pearson**

		Indeks Williamson Provinsi Maluku	PDRB Per Kapita Provinsi Maluku
Indeks Williamson Provinsi Maluku	Pearson Correlation	1	-.952**
	Sig. (2-tailed)		.001
	Sum of Squares and Cross-products	.006	-.635
	Covariance	.001	-.106
	N	7	7
PDRB Per Kapita Provinsi Maluku	Pearson Correlation	-.952**	1
	Sig. (2-tailed)	.001	
	Sum of Squares and Cross-products	-.635	70.920
	Covariance	-.106	11.820
	N	7	7

Sumber: Hasil Analisis Korelasi Pearson (data diolah)

#### 4.4. Hipotesis Kuznets “U-terbalik” di Provinsi Maluku

Hipotesis Kuznets dapat dibuktikan dengan membuat grafik Indeks Williamson dengan PDRB Perkapitadengan data yang dimulai sejak tahun 2008.

**Tabel 8. Indeks Williamson dan PDRB Per Kapita Provinsi Maluku (PDRB seri 2010 = 100) Tahun 2008 – 2014**

No	Tahun	Indeks Williamson	PDRB Per Kapita (Juta Rp)
(1)	(2)	(3)	(4)
1.	2008	0,3598	9,93
2.	2009	0,3310	10,77
3.	2010	0,3130	11,95
4.	2011	0,3032	13,60
5.	2012	0,2922	15,42
6.	2013*	0,2790	17,09
7.	2014**	0,2638	19,15

Sumber: Hasil Analisis Indeks Williamson (data diolah)

Untuk menguji Hipotesis Kuznet dapat digunakan Regresi Non Linier untuk itu digunakan analisis *Regression Curve Estimation*. Sehingga akan diperoleh suatu kurva yang membentuk garis lengkung menurun ( $\beta_1 < 0$ ) atau menaik ( $\beta_2 > 0$ ). Tabel 9 merupakan hasil analisis *Regression Curve Estimation*.

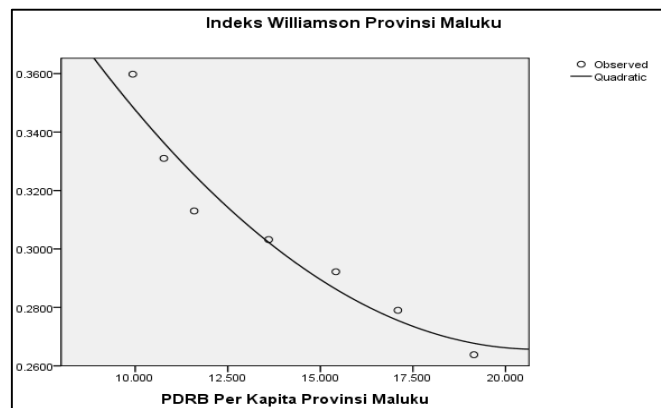
**Tabel 9. Hubungan Angka Indeks Williamson dengan PDRB Per Kapita Provinsi Maluku Tahun 2008 – 2014**

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
PDRB Per Kapita Provinsi Maluku	-.029	.013	-3.080	-2.195	.093
PDRB Per Kapita Provinsi Maluku ** 2	.001	.000	2.135	1.522	.203
(Constant)	.568	.091		6.207	.003

Sumber: Hasil Analisis Korelasi Pearson (data diolah)

Hubungan Angka Indeks Williamson dengan PDRB Per Kapita Provinsi Maluku diperoleh konstanta sebesar 0,568  $\beta_1$  sebesar  $-0,029$  dan nilai  $\beta_2$  sebesar 0,001. Nilai koefisien  $\beta_2$  bernilai positif ( $\beta > 0$ ) menunjukkan akan diperoleh suatu kurva yang membentuk garis melengkung menanjak. Nilai signifikan sebesar 0,093 secara statistik model *Regression Curve Estimation* dapat diterima sehingga persamaan *Regression Curve Estimation* adalah:  $IW = 0,568 - 0,029Y + 0,001Y^2$ .

Pembuktian kurva U-terbalik dilakukan dengan membuat kurva hubungan antara Indeks Williamson dengan PDRB per kapita untuk itu digunakan *Regression Curve Estimation* seperti pada gambar 1.



**Gambar 1. Grafik hubungan antara Indeks Williamson dan PDRB perkapita Provinsi Maluku, Tahun 2008 – 2014**

Gambar 1 merupakan hubungan antara PDRB perkapita dan indeks ketimpangan. Gambar tersebut tidak menunjukkan kurva berbentuk U-terbalik, ini berarti teori Kuznets tentang kurva U-terbalik tidak berlaku di Provinsi Maluku. Ini membuktikan bahwa pada awal terjadinya pertumbuhan ekonomi disertai dengan ketimpangan yang menurun pada masa berikutnya ketimpangan ini akan semakin meningkat pada masa berikutnya.

## 5. Kesimpulan

Pembahasan hasil penelitian secara ringkas dapat disimpulkan sebagai berikut:

- Dari hasil Tipologi Klassen, Provinsi Maluku dapat dibagi menjadi empat klasifikasi. Daerah yang pertama yakni Daerah Maju dan Tumbuh Cepat terdiri dari empat kabupaten/kota yakni Kota Ambon, Kota Tual, Kabupaten Maluku Tenggara dan Kabupaten Kepulauan Aru. Daerah yang kedua yakni Daerah Berkembang Cepat Tapi Tidak Maju terdiri dari Kabupaten Maluku Tenggara Barat dan Kabupaten Maluku Barat Daya. Daerah yang ketiga adalah Daerah Maju Tapi Tertekan yakni Kabupaten Seram Bagian Timur. Daerah keempat merupakan Daerah Relatif Tertinggal yang terdiri dari Kabupaten Maluku Tengah, Kabupaten Seram Bagian Timur, Kabupaten Buru dan Kabupaten Buru Selatan.
- Selama periode pengamatan tahun 2010-2014 angka ketimpangan dihitung dengan Indeks Williamson mengalami penurunan dari tahun ke tahun. Hal ini dapat dikatakan ketimpangan pembangunan di Provinsi Maluku mengalami penurunan dari tahun ke tahun.
- Hipotesis Kuznets tentang kurva U-terbalik di Provinsi Maluku tidak berlaku pada periode penelitian (2008-2014).

## Daftar Pustaka

- [1] Badan Pusat Statistik Provinsi Maluku, Maluku dalam Angka 2009, Ambon, 2010.
- [2] Badan Pusat Statistik Provinsi Maluku, Maluku dalam Angka 2010, Ambon, 2011.
- [3] Badan Pusat Statistik Provinsi Maluku, Maluku dalam Angka 2011, Ambon, 2012.
- [4] Badan Pusat Statistik Provinsi Maluku, Maluku dalam Angka 2012, Ambon, 2013.
- [5] Badan Pusat Statistik Provinsi Maluku, Maluku dalam Angka 2013, Ambon, 2014.
- [6] Badan Pusat Statistik Provinsi Maluku, Produk Domestik Regional Bruto Provinsi Maluku menurut Lapangan Usaha 2010-2014, Ambon, 2015.
- [7] M. Kuncoro, Otonomi Pembangunan Daerah, Jakarta: Erlangga, 2004.
- [8] P. D. K. Sari, “Pertumbuhan Ekonomi dan Ketimpangan antar Kecamatan di Kabupaten Buleleng,” *Jurnal Ekonomi Pembangunan Universitas Udayana*, 2013.
- [9] J. Tipka, “Analisis Ketimpangan Pembangunan antar Kecamatan di Kota Ambon,” *Barekeng*, vol. 8, no. 2, pp. 41-45, 2014.

## ANALISIS TINGKAT PENGETAHUAN REMAJA TENTANG PERILAKU MEROKOK DI KOTA AMBON

Eunike M. Sahetapy<sup>1</sup>, Yopi A. Lesnussa<sup>2</sup>, Venn Y. I. Ilwaru<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Pattimura

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia

e-mail: <sup>2</sup>yopi\_a\_lesnussa@yahoo.com

---

### Abstrak

Pemandangan orang merokok dapat kita temui di dalam kendaraan umum, kantor, pasar, atau tempat umum lainnya, bahkan dalam keluarga sendiri. Pada umumnya seseorang mulai merokok sejak usia remaja. Jumlah perokok laki-laki jauh lebih tinggi dibandingkan perempuan dimana jika diuraikan menurut umur, prevalensi perokok laki-laki paling tinggi pada umur 15-19 tahun. Berdasarkan permasalahan tersebut, dilakukan penelitian untuk mengetahui pengaruh antara usia, status merokok orang tua, komunikasi dengan orang tua, komunikasi dengan teman sepeergaulan, pengetahuan tentang merokok, perokok aktif dan pasif, akses media informasi, dan intensitas melihat iklan rokok dengan tingkat pengetahuan remaja tentang perilaku merokok kemudian melihat model tingkat pengetahuan remaja tentang perilaku merokok dengan menggunakan Model Regresi Logistik Ordinal dan juga untuk mengetahui variabel yang berpengaruh signifikan terhadap tingkat pengetahuan remaja tentang perilaku merokok di Kota Ambon. Dari data yang diperoleh maka dapat disimpulkan bahwa variabel yang berpengaruh signifikan terhadap tingkat pengetahuan remaja tentang perilaku merokok adalah variabel  $x_1$  (Pengetahuan remaja tentang merokok terhadap kesehatan),  $x_4$  (Pengetahuan tentang perokok pasif),  $x_5$  (Pengetahuan tentang perbedaan antara Perokok Pasif dan perokok Aktif),  $x_6$  (Larangan merokok),  $x_8$  (Komunikasi dengan orang tua)  $x_9$  (Komunikasi dengan teman pergaulan),  $x_{10}$  (Status merokok orang tua).

*Kata Kunci:* Perilaku merokok, regresi logistik ordinal.

## THE ANALYSIS OF ADOLESCENT KNOWLEDGE LEVEL ABOUT SMOKING BEHAVIOR IN AMBON

### Abstract

Views of the smokers can be met in public transportation, offices, markets, or other public places, even in our family. In general, a person starts smoking since teenagers. The number of male smokers is higher than of female, for which, if broken down by age, the prevalence of male smokers was highest in the age of 15-19 years. Based on these problems, our research is to determine the effect of age, parents smoking status, communication with parents, communication with friends, knowledge about smoking, active and passive smokers, media access information, and the intensity of seeing cigarette ads with teenager level of knowledge about smoking behavior then look at the model level of knowledge about teenage smoking behavior using Ordinal Logistic Regression Model and also to determine the variables that significantly influence the level of knowledge about teenagers smoking behavior in the city of Ambon. From the data, it can be concluded that the variables that significantly influence the level of knowledge about teenage smoking behavior is variable  $x_1$  (Teenager knowledge about smoking toward health),  $x_4$  (Knowledge of passive smokers),  $x_5$  (Knowledge of the difference between passive smokers and active smokers),  $x_6$  (smoking warning),  $x_8$  (Communication with parents)  $x_9$  (Communication with friends),  $x_{10}$  (smoking status of parents).

*Keywords:* Ordinal logistic regression, smoking behavior.

---



## 1. Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari, seringkali kita menemui orang-orang yang merokok di dalam kendaraan umum, kantor, pasar, atau tempat umum lainnya, bahkan dalam keluarga sendiri. Pada umumnya seseorang mulai merokok sejak usia remaja. Sejumlah studi menemukan penghisapan rokok pertama dimulai saat usia 11-13 tahun [1]. Perilaku merokok diawali oleh rasa ingin tahu dan pengaruh teman sebaya. *Modelling* (meniru perilaku orang lain) menjadi salah satu faktor dalam memulai perilaku merokok. Perilaku merokok pada remaja umumnya semakin lama akan semakin meningkat sesuai dengan tahap perkembangannya yang ditandai dengan meningkatnya frekuensi dan intensitas merokok, dan sering mengakibatkan mereka ketergantungan nikotin (Laventhal dan Cleary dalam Mc Gee, 2005). Jumlah perokok laki-laki jauh lebih tinggi dibandingkan perempuan dimana jika diuraikan menurut umur, prevalensi perokok laki-laki paling tinggi pada umur 15-19 tahun. Yayasan Kanker Indonesia (YKI) menemukan 27,1% dari 1961 responden pelajar pria SMA/SMK, sudah mulai atau bahkan terbiasa merokok. Umumnya siswa kelas satu menghisap satu sampai empat batang perhari, sementara siswa kelas tiga mengonsumsi rokok lebih dari sepuluh batang perhari.

Para ahli kesehatan menyatakan bahwa merokok merupakan perilaku yang berbahaya, karena dapat menimbulkan berbagai macam penyakit. Bahkan pada bungkus rokok sudah terdapat seruan bahwa merokok dapat merugikan kesehatan seperti dapat menyebabkan kanker, impotensi, jantung, gangguan kehamilan dan janin. Rokok mengandung zat-zat yang berbahaya bagi kesehatan diantaranya tar, nikotin (menyebabkan kecanduan/ketergantungan), karbonmonoksida (mampu mengikat Hb/hemoglobin dalam darah), kadmium, akrolein, amoniak, asam format, hidrogenianida, fenol, formaldehid, nitrous oxid, aseltol, hidrogensulfida, piridin, metilklorida, dan metanol.

Berdasarkan permasalahan tersebut, maka penulisan ini dilakukan untuk mengetahui pengaruh antara usia, tingkat pendidikan orang tua, status merokok orang tua, komunikasi dengan ayah, komunikasi dengan ibu, teman sepeergaulan, akses media informasi dan intensitas melihat iklan rokok dengan tingkat pengetahuan remaja tentang perilaku merokok kemudian melihat model tingkat pengetahuan remaja tentang perilaku merokok dengan menggunakan Model Regresi Logistik Ordinal dan juga untuk mengetahui variabel yang berpengaruh signifikan terhadap tingkat pengetahuan remaja tentang perilaku merokok di Kota Ambon.

## 2. Tinjauan Pustaka

### 2.1. Uji Statistik

#### a. Uji Validitas

Validitas dalam bahasa sederhana digunakan untuk mengukur sah atau valid tidaknya suatu kuesioner untuk mengungkapkan sesuatu yang akan diukur.

Validitas dapat diuji dengan beberapa cara, diantaranya:

- i. Melakukan korelasi bivariat antar masing-masing skor dengan total skor variabel.
- ii. Membandingkan nilai  $r$  hitung dengan  $r$  table.
- iii. Conformatory Factor Analysis (CFA).

#### b. Uji Reliabilitas

Reliabilitas secara sederhana adalah alat untuk menguji konsistensi dari waktu ke waktu. Lazimnya dilakukan dengan *One Shot* atau pengukuran sekali saja, dimana bila dengan SPSS diuji melalui cronbach alpha (Uji validitas cara ke-2) dengan ketentuan bila nilai cronbach alpha  $> 0$ , maka variabel tersebut reliabel.

### 2.2. Analisis Regresi Logistik Ordinal

Analisis regresi logistik ordinal merupakan salah satu metode statistik yang menggambarkan hubungan antara suatu variabel respon ( $Y$ ) dengan lebih dari satu variabel prediktor ( $X$ ) dimana variabel respon lebih dari dua kategori dan skala pengukuran bersifat tingkatan (Hosmer dan Lemeshow, 2000).

Model regresi logistik adalah sebagai berikut.

$$\pi(x) = \frac{e^{g(x)}}{1+e^{g(x)}} \quad (2.1)$$

Peluang kumulatif didefinisikan sebagai berikut.

$$P(Y \leq j | x_i) = \frac{\exp(\alpha_j + \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik})}{1 + \exp(\alpha_j + \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik})} \quad (2.2)$$

dengan,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Berikut fungsi distribusi logistik umum

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^x} \quad (2.3)$$

*Cummulative logit models* didapatkan dengan membandingkan peluang kumulatif yaitu peluang kurang dari atau sama dengan kategori respon ke- $j$  pada  $p$  variabel prediktor yang dinyatakan dalam vektor  $x_i$ . Berikut formulasi *cumulative logit models*

$$\text{Logit } P(Y \leq j | x_i) = \log \left( \frac{P(Y \leq j | x_i)}{P(Y > j | x_i)} \right) \quad (2.4)$$

Jika terdapat kategori respon dimana  $j=0, 1, 2$  maka nilai peluang untuk tiap kategori respon sebagai berikut:

$$\phi_1(x) = \frac{e^{g_1(x)}}{1+e^{g_1(x)}} \quad (2.5)$$

$$\phi_2(x) = \frac{e^{g_2(x)} - e^{g_1(x)}}{(1+e^{g_2(x)})(1+e^{g_1(x)})} \quad (2.6)$$

$$\phi_0(x) = 1 - \phi_1(x) - \phi_2(x) = \frac{1}{(1+e^{g_2(x)})} \quad (2.7)$$

Model Proposional pada kejadian  $Y \leq j$  untuk  $x = x_1$  dan  $x = x_2$  adalah

$$\frac{P(Y \leq j | x_1) / P(Y > j | x_1)}{P(Y \leq j | x_2) / P(Y > j | x_2)} = \frac{\exp(\beta_{0j} + x_1' \beta)}{\exp(\beta_{0j} + x_2' \beta)} = \exp(x_1 - x_2) \quad (2.8)$$

Metode kemungkinan nilai maksimum (*Maximum Likelihood Estimator*) merupakan metode yang digunakan untuk menaksir parameter-parameter model regresi logistik dengan dengan memberikan nilai estimasi  $\beta$  dengan memaksimalkan fungsi *Likelihood* (Agresti, 2002).

Berikut fungsi *Likelihood* untuk sampel dengan  $n$  sampel random

$$l(\beta) = \prod_{i=1}^n [\phi_0(x_i)^{y_{0i}} \phi_1(x_i)^{y_{1i}} \phi_2(x_i)^{y_{2i}}] \quad (2.9)$$

dengan  $i = 1, 2, \dots, J$ .

Dari persamaan di atas didapatkan fungsi *ln-Likelihood* sebagai berikut

$$L(\beta) = \sum_{i=1}^N y_{0i} \ln[\phi_0(x_i)] + y_{1i} \ln[\phi_1(x_i)] + y_{2i} \ln[\phi_2(x_i)] \quad (2.10)$$

Maksimum *ln-Likelihood* diperoleh dengan mendefersialkan  $L(\beta)$  terhadap  $\beta$  dan menyamakan dengan nol. *Maximum Likelihood Estimator* (MLE) merupakan metode untuk mengestimasi variansi dan kovariansi dari taksiran  $\beta$  yang diperoleh dari turunan kedua fungsi *ln-Likelihood*. Untuk mendapatkan nilai tersebut digunakan metode iterasi *Newton Raphson* (Agresti, 2002). Formulasi iterasi *Newton Raphson* adalah

$$\beta^{(t+1)} = \beta^{(t)} - (H^{(t)})^{-1} q^t \quad (2.11)$$

Menurut Hosmer dan Lameshow (1989), model yang telah diperoleh perlu diuji kesignifikasiannya, dengan melakukan pengujian statistik. Pengujian yang dilakukan adalah

#### a. Uji Serentak

Uji serentak dilakukan untuk memeriksa keberartian koefisien  $\beta$  secara keseluruhan.

Hipotesis:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_j = 0$$

$$H_1: \text{Minimal ada satu } \beta_j \neq 0, j = 1, 2, \dots, p$$

Statistik Uji:

$$G = -2 \log \left[ \frac{\left(\frac{n_0}{n}\right)^{n_0} \left(\frac{n_1}{n}\right)^{n_1} \left(\frac{n_2}{n}\right)^{n_2}}{\prod_{i=1}^n [\phi_0(x_i)^{y_{0i}} \phi_1(x_i)^{y_{1i}} \phi_2(x_i)^{y_{2i}}]} \right] \quad (2.12)$$

dimana,

$$n_0 = \sum_{i=1}^n y_{0i}, n_1 = \sum_{i=1}^n y_{1i}, n_2 = \sum_{i=1}^n y_{2i},$$

dan  $n = n_0 + n_1 + n_2$

Keterangan:

$n_0$  : banyaknya nilai observasi yang  $Y = 0$

$n_1$  : banyaknya nilai observasi yang  $Y = 1$

$n_2$  : banyaknya nilai observasi yang  $Y = 2$

$n$  : banyaknya observasi

$H_0$  ditolak pada tingkat signifikan sebesar  $\alpha$  bila nilai  $p\text{-value} < \alpha$  atau nilai  $G > X^2_{\alpha, db}$

## b. Uji Parsial

Uji parsial digunakan untuk memeriksa kemaknaan koefisien  $\beta$  secara individu.

Hipotesis :

$$H_0: \beta_j = 0, j = 1, 2, \dots, p$$

$$H_1: \beta_j \neq 0$$

Statistik Uji :

$$W_j = \frac{\hat{\beta}_j}{SE(\hat{\beta}_j)} \sim N(0,1) \quad (2.13)$$

$H_0$  ditolak apabila  $|W_j| > Z_{\alpha/2}$  atau nilai  $p\text{-value} < \alpha$ , dimana  $Z$  menunjukkan nilai variabel random pada tabel distribusi normal standar.

Menurut Hosmer dan Lameshow (1989), terdapat statistik uji yang digunakan untuk menguji kesesuaian model regresi logistik adalah *Goodness of Fit* dengan hipotesis sebagai berikut.

$H_0$ : Model cukup memenuhi

$H_1$ : Model tidak memenuhi

Statistik Uji:

$$X^2 = \sum_{j=1}^J \frac{(y_j - m_j \phi_j)^2}{m_j \phi_j (1 - \phi_j)} \quad (2.14)$$

dengan,  $j = 1, 2, 3, \dots, J$

dimana  $y_j$  = variabel respon ke- $j$

$m_j$  = banyaknya observasi yang memiliki nilai  $\phi_j$

$\phi_j$  = peluang kumulatif

Daerah kritis: Tolak  $H_0$  jika  $X^2_{hitung} > X^2_{(J-2)}$

Menurut Walpole (1995), uji independensi dilakukan untuk mengetahui ada atau tidaknya hubungan antara variabel respon dengan variabel prediktor. Pengujian tersebut dilakukan dengan menggunakan uji *Chi-square*.

Hipotesis:

dengan variabel respon

Statistik Uji:

$$X^2 = \sum_{ij=1}^{rk} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \quad (2.15)$$

dimana,

$$e_{ij} = \frac{(total\ baris\ ke-i) \times (total\ kolom\ ke-j)}{total\ observasi} \quad (2.16)$$

Keterangan;

$r$  = banyaknya baris

$k$  = banyaknya kolom

$o_{ij}$  = frekuensi observasi baris ke- $i$  kolom ke- $j$

$e_{ij}$  = frekuensi harapan baris ke- $i$  kolom ke- $j$

$db$  = derajat bebas =  $(r - 1)(k - 1)$

Daerah kritis: Tolak  $H_0$  jika  $X^2_{hitung} > X^2_{(db,\alpha)}$

### 3. Hasil dan Pembahasan

#### 3.1. Data Tingkat Pengetahuan Remaja tentang Perilaku Merokok

Perilaku merokok merupakan perilaku yang berbahaya bagi kesehatan, tetapi masih banyak yang melakukannya. Bahkan orang mulai merokok ketika mereka masih remaja. Sejumlah studi menegaskan bahwa kebanyakan perokok merokok antara umur 11 dan 13 tahun dan 85% sampai 95% sebelum umur 18 tahun (Laventhal dan Dhuyvettere dalam [1]).

Rokok adalah benda beracun yang berbahaya bagi kesehatan, karena terdapat 4000 bahan kimia dengan 3 komponen utama yaitu nikotin, tar dan karbonmonoksida. Kebiasaan remaja yang sulit dihindari ialah merokok. Kemajuan ilmu pengetahuan seharusnya meningkatkan kesadaran remaja untuk tidak merokok. Namun pada kenyataannya banyak remaja yang terbiasa merokok. Dengan adanya pengetahuan yang baik tentunya juga akan berdampak pada sikap yang positif, begitu pula sebaliknya.

Untuk menunjang penulisan ini penulis mengambil sampel sebanyak 30 responden yang diberi kuesioner untuk memberikan peringkat penilaian. Peringkat yang diberikan dari satu sampai lima. Peringkat satu diberikan apabila responden memilih pilihan yang salah atau memilih pilihan “sangat buruk” sedangkan peringkat lima diberikan untuk responden memilih pilihan yang benar atau memilih pilihan “sangat baik”. Penelitian ini menggunakan 11 variabel yaitu:

$x_1$ : Pengetahuan remaja tentang merokok terhadap kesehatan

$x_2$ : Kerugian merokok

$x_3$ : Istilah perokok pasif

$x_4$ : Pengetahuan tentang perokok pasif

$x_5$ : Pengetahuan tentang perbedaan antara Perokok Pasif dan perokok Aktif

$x_6$ : Larangan merokok

$x_7$ : Intensitas melihat iklan rokok

$x_8$ : Komunikasi dengan orang tua

$x_9$ : Komunikasi dengan teman pergaulan

$x_{10}$ : Status merokok orang tua

$x_{11}$ : Usia responden

**Tabel 1. Pemberian Peringkat Terhadap Pengetahuan Tentang Merokok**

Responden	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{total}$
1	5	5	5	1	1	5	5	5	5	5	4	42
2	5	5	5	1	1	5	5	5	5	5	2	42
3	5	5	5	5	1	5	5	3	5	5	5	44
4	5	5	5	5	1	5	4	3	4	5	5	42
5	5	5	5	5	1	5	4	3	5	1	4	39
6	5	5	5	5	1	5	4	5	5	5	3	45
7	5	5	5	5	1	5	3	5	5	5	4	44
8	5	5	5	5	5	5	5	3	5	5	1	48
9	5	5	5	5	5	5	5	3	5	5	1	48
10	5	5	5	5	5	1	4	5	4	5	4	44
11	5	5	5	5	1	5	5	3	5	5	3	44
12	5	5	5	5	5	5	5	3	5	5	2	48
13	1	5	5	5	5	5	5	5	4	5	5	45
14	5	5	5	5	1	5	5	5	4	5	4	45
15	5	5	5	5	1	5	5	5	4	1	2	41
16	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	1	50
17	5	5	5	5	5	5	5	5	4	1	3	45
18	5	5	5	5	5	5	5	3	4	5	5	47
19	5	5	5	5	1	1	4	3	4	5	2	38
20	5	5	5	5	5	5	5	3	5	5	2	48
21	5	5	5	5	5	5	5	3	5	5	3	48
22	5	5	5	5	5	5	4	3	4	5	1	46
23	5	5	5	5	5	1	5	3	5	5	1	44
24	5	5	5	5	5	5	4	5	4	5	3	48
25	5	5	5	5	5	5	5	5	5	1	5	46
26	1	1	5	1	1	5	4	1	4	1	4	24
27	5	5	5	5	5	5	5	3	5	5	2	48
28	5	5	1	1	1	5	3	3	4	1	4	29
29	1	1	4	1	4	4	4	3	4	5	3	31
30	5	5	5	5	5	5	5	3	4	5	4	47

Dari Tabel 1 di atas dapat dilihat bahwa untuk responden pertama peringkat terendah ada pada  $x_4$  dan  $x_5$ . Variabel lainnya memiliki peringkat tertinggi yaitu 5. Ini menunjukkan bahwa responden pertama memiliki tingkat pengetahuan tentang merokok yang baik.

### 3.2. Uji Kuesioner

#### a. Uji Validitas

Sebelum kita menggunakan Regresi Logistik Ordinal maka terlebih dahulu akan diuji kelayakan kuesioner dengan menggunakan Uji Validitas. Validitas dapat diuji dengan cara melakukan korelasi *bivariate* antar masing-masing skor dengan total skor variable. Dengan melalui 11 pertanyaan yang menjadi indikator dari kepuasan ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{11}$ ), maka hal ini dapat dilakukan dengan membandingkan korelasi  $x_1$  sampai dengan  $x_{11}$  terhadap  $x_{total}$ .

Prosedur:

1. *Analyze – correlate - bivariate*
2. Masukkan semua indikator dari  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{11}, x_{total}$ . OK
3. Bila korelasi masing-masing indikator  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{11}$  terhadap  $x_{total}$  menunjukkan hasil yang signifikan, maka dapat disimpulkan bahwa masing-masing indikator adalah valid. Kemudian dilanjutkan dengan uji reliabilitas.

Berdasarkan hasil analisis di atas didapat nilai korelasi antara  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{11}$  dan  $x_{total}$ . Jika nilai ini dibandingkan dengan nilai  $r$  tabel,  $r$  tabel dicari pada signifikansi 0,05 dengan uji 2 sisi dan jumlah data ( $n$ ) = 30, maka didapat  $r$  tabel sebesar 0,3494.

**Tabel 2. Correlations**

		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$X_{total}$
x1	Pearson Correlation	1	.802**	.076	.447*	-.017	-.028	.126	.224	.356	.111	-.232	.566**
	Sig. (2-tailed)		.000	.691	.013	.929	.884	.506	.235	.053	.559	.217	.001
	N	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
x2	Pearson Correlation	.802**	1	.121	.598**	.100	.015	.246	.424*	.286	.200	-.086	.718**
	Sig. (2-tailed)	.000		.523	.000	.599	.938	.190	.020	.126	.288	.650	.000
	N	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
x3	Pearson Correlation	.076	.121	1	.508**	.189	-.044	.504*	.152	.243	.341	-.124	.537**
	Sig. (2-tailed)	.691	.523		.004	.317	.817	.005	.422	.196	.066	.513	.002
	N	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
x4	Pearson Correlation	.447*	.598**	.508**	1	.372*	-.087	.266	.136	.120	.224	-.111	.739**
	Sig. (2-tailed)	.013	.000	.004		.043	.648	.155	.473	.529	.235	.558	.000
	N	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
x5	Pearson Correlation	-.017	.100	.189	.372*	1	-.084	.388*	-.018	.009	.229	-.310	.547**
	Sig. (2-tailed)	.929	.599	.317	.043		.658	.034	.926	.962	.223	.095	.002
	N	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
x6	Pearson Correlation	-.028	.015	-.044	-.087	-.084	1	.152	.039	.163	-.180	.183	.133
	Sig. (2-tailed)	.884	.938	.817	.648	.658		.424	.838	.389	.341	.332	.482
	N	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
x7	Pearson Correlation	.126	.246	.504**	.266	.388*	.152	1	.076	.318	.190	-.207	.555**
	Sig. (2-tailed)	.506	.190	.005	.155	.034	.424		.690	.086	.316	.271	.001
	N	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
x8	Pearson Correlation	.224	.424*	.152	.136	-.018	.039	.076	1	.016	.030	.103	.376*
	Sig. (2-tailed)	.235	.020	.422	.473	.926	.838	.690		.932	.873	.588	.041
	N	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
x9	Pearson Correlation	.356	.286	.243	.120	.009	.163	.318	.016	1	.200	-.303	.393*
	Sig. (2-tailed)	.053	.126	.196	.529	.962	.389	.086	.932		.288	.104	.032
	N	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
x10	Pearson Correlation	.111	.200	.341	.224	.229	-.180	.190	.030	.200	1	-.224	.509**
	Sig. (2-tailed)	.559	.288	.066	.235	.223	.341	.316	.873	.288		.234	.004
	N	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
x11	Pearson Correlation	-.232	-.086	-.124	-.111	-.310	.183	-.207	.103	-.303	-.224	1	-.260
	Sig. (2-tailed)	.217	.650	.513	.558	.095	.332	.271	.588	.104	.234		.165
	N	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
Xtotal	Pearson Correlation	.566**	.718**	.537**	.739**	.547**	.133	.555*	.376*	.393*	.509*	-.260	1
	Sig. (2-tailed)	.001	.000	.002	.000	.002	.482	.001	.041	.032	.004	.165	
	N	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

\*\* . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

\* . Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

Berdasarkan hasil analisis di atas didapat nilai korelasi untuk  $x_6, x_{11}$  kurang dari 0,3494. Karena koefisien korelasi pada  $x_6$  dan  $x_{11}$  nilainya kurang dari 0,3494 maka dapat disimpulkan bahwa  $x_6, x_{11}$  tidak berkorelasi signifikan dengan skor total (dinyatakan tidak valid).

## b. Uji Reliabilitas

Setelah menggunakan uji validitas maka akan diuji kembali dengan menggunakan Uji Reliabilitas. Setelah diuji didapatkan hasil sebagai berikut.

**Tabel 3. Item-Total Statistics**

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
x1	85.13	122.602	.474	.637
x2	85.00	120.690	.680	.625
x3	84.90	128.093	.488	.649
x4	85.40	112.800	.677	.604
x5	86.50	116.397	.384	.636
x6	85.17	133.868	.054	.676
x7	85.17	129.316	.505	.651
x8	86.00	127.793	.313	.653
x9	85.20	132.786	.329	.662
x10	85.53	120.671	.380	.640
x11	86.67	143.540	-.260	.707
Xtotal	46.40	33.490	.974	.534

Dari output di atas bisa dilihat pada *Corrected Item – Total Correlation*. Nilai ini kemudian kita bandingkan dengan  $r$  tabel,  $r$  tabel dicari pada signifikan 0,05 dengan uji 2 sisi dan jumlah data ( $n$ ) = 12, maka didapat  $r$  tabel sebesar 0,3494 (dilihat pada lampiran tabel  $r$ ).

Dari hasil analisis dapat dilihat bahwa untuk  $x_6, x_8, x_9$ , dan  $x_{11}$  kurang dari 0,3494. Karena koefisien korelasi pada  $x_6, x_8, x_9$ , dan  $x_{11}$  nilainya kurang dari 0,3494 maka kita uji kembali dan mengeluarkan  $x_6, x_8, x_9$ , dan  $x_{11}$ . Setelah dilakukan uji ulang hasilnya sebagai berikut:

**Tabel 4. Item-Total Statistics**

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
x1	69.23	114.047	.484	.688
x2	69.10	112.990	.655	.679
x3	69.00	119.448	.499	.701
x4	69.50	103.914	.709	.650
x5	70.60	105.490	.456	.677
x7	69.27	120.754	.509	.704
x10	69.63	110.654	.433	.686
Xtotal	30.50	29.845	.954	.682

Dari output di atas, dapat kita simpulkan bahwa  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7$  dan  $x_{10}$  valid.

### 3.3. Regresi Logistik Ordinal

Berdasarkan data pada tabel di atas, dengan menggunakan software SPSS, hasil pengujiannya diperoleh nilai signifikansi ( $p$ -value) = 0.000 karena  $p$ -value <  $\alpha$ . Maka kesimpulannya adalah terdapat minimal ada satu variable bebas yang berpengaruh terhadap tingkat pengetahuan remaja tentang perilaku merokok (tolak  $H_0$ ).

#### Hipotesis:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_j = 0$$

$$H_1: \text{Minimal ada satu } \beta_j \neq 0, j = 1, 2, \dots, p$$

Statistik uji:

$$G = -2 \log \left[ \frac{\left(\frac{n_0}{n}\right)^{n_0} \left(\frac{n_1}{n}\right)^{n_1} \left(\frac{n_2}{n}\right)^{n_2}}{\prod_{i=1}^n [\phi_0(x_i)^{y_{0i}} \phi_1(x_i)^{y_{1i}} \phi_2(x_i)^{y_{2i}}]} \right]$$

$$\text{dimana, } n_0 = \sum_{i=1}^n y_{0i}, n_1 = \sum_{i=1}^n y_{1i}, n_2 = \sum_{i=1}^n y_{2i},$$

$$\text{dan } n = n_0 + n_1 + n_2.$$

Keterangan :

$n_0$  : banyaknya nilai observasi yang  $Y = 0$

$n_1$  : banyaknya nilai observasi yang  $Y = 1$

$n_2$  : banyaknya nilai observasi yang  $Y = 2$

$n$  : banyaknya observasi

$H_0$  ditolak pada tingkat signifikan sebesar  $\alpha$  bila nilai  $p$ -value <  $\alpha$  atau nilai  $G > X^2_{\alpha, db}$

Dengan nilai *Pseudo R2* sebesar 1. Pada pengujian parsial terlihat bahwa terdapat tujuh variabel bebas yang berpengaruh secara signifikan ( $p$ -value < 0.05), yaitu  $x_1, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9$ , dan  $x_{10}$ .

**Tabel 5. Pseudo R-Square**

Cox and Snell	.990
Nagelkerke	1.000
McFadden	1.000

Link function: Logit.

*Odds Ratio*,  $x_{10}$  (status merokok orang tua) = 2.2, artinya remaja yang orang tuanya tidak perokok cenderung memiliki tingkat pengetahuan yang lebih tinggi 2.2 kali dari pada remaja yang orang tuanya perokok. *Odds Ratio*,  $x_4$  (kerugian merokok) = 0.333, artinya remaja yang mengetahui tentang kerugian merokok cenderung memiliki tingkat pengetahuan yang lebih tinggi 0.333 kali dari pada remaja yang tidak mengetahui tentang kerugian merokok.



Tabel 6. Parameter Estimates

	Estimate	Std. Error	Wald	df	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
[x1=1]	-13.334	4.419	9.104	1	.003	-21.996	-4.673
[x1=5]	0 <sup>a</sup>	.	.	0	.	.	.
[x2=1]	9.501	13.097	.526	1	.468	-16.167	35.170
[x2=5]	0 <sup>a</sup>	.	.	0	.	.	.
[x3=1]	15.909	9.448	2.835	1	.092	-2.609	34.427
[x3=4]	-12.201	12.110	1.015	1	.314	-35.937	11.534
[x3=5]	0 <sup>a</sup>	.	.	0	.	.	.
[x4=1]	-14.762	4.605	10.275	1	.001	-23.788	-5.736
[x4=5]	0 <sup>a</sup>	.	.	0	.	.	.
[x5=1]	-14.895	3.599	17.133	1	.000	-21.948	-7.842
[x5=4]	0 <sup>a</sup>	.	.	0	.	.	.
[x5=5]	0 <sup>a</sup>	.	.	0	.	.	.
[x6=1]	-15.162	3.810	15.836	1	.000	-22.629	-7.694
[x6=4]	0 <sup>a</sup>	.	.	0	.	.	.
[x6=5]	0 <sup>a</sup>	.	.	0	.	.	.
[x7=3]	-8.556	4.638	3.404	1	.065	-17.646	.533
[x7=4]	-2.524	1.762	2.053	1	.152	-5.978	.929
[x7=5]	0 <sup>a</sup>	.	.	0	.	.	.
[x8=1]	0 <sup>a</sup>	.	.	0	.	.	.
[x8=3]	-7.195	2.264	10.100	1	.001	-11.633	-2.758
[x8=5]	0 <sup>a</sup>	.	.	0	.	.	.
[x9=4]	-4.248	1.671	6.461	1	.011	-7.523	-.972
[x9=5]	0 <sup>a</sup>	.	.	0	.	.	.
[x10=1]	-14.228	3.645	15.239	1	.000	-21.371	-7.085
[x10=5]	0 <sup>a</sup>	.	.	0	.	.	.
[x11=1]	.269	2.052	.017	1	.896	-3.753	4.290
[x11=2]	1.036	2.380	.189	1	.663	-3.629	5.701
[x11=3]	.222	2.025	.012	1	.913	-3.747	4.191
[x11=4]	.466	1.929	.058	1	.809	-3.314	4.246
[x11=5]	0 <sup>a</sup>	.	.	0	.	.	.

Link function: Logit.

a. This parameter is set to zero because it is redundant.

#### 4. Kesimpulan

Variabel yang berpengaruh signifikan terhadap tingkat pengetahuan remaja tentang perilaku merokok adalah variabel  $x_1, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10}$ . Dapat dilihat juga variabel yang paling dominan memengaruhi tingkat pengetahuan remaja tentang perilaku merokok adalah variabel  $x_{10}$  (status merokok orang tua).

#### Daftar Pustaka

- [1] B. Smet, Psikologi Kesehatan, Semarang: PT. Gramedia Pustaka Utama, 1994.
- [2] M. Armstrong, Manajemen Sumber Daya Manusia, Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama, 1990.
- [3] H. Danusanto, Rokok dan Perokok, Jakarta: Aksara, 1991.
- [4] I. B. Januartha, *e-Jurnal Matematika*, vol. I, no. 1, 2012.
- [5] Z. Mu'tadin, Kemandirian sebagai Kebutuhan Psikologi pada Remaja, 2002.
- [6] A. Parrot, "Does Cigarette Smoking Cause Stress?," *Journal of Clinican Psychology*, 2004.
- [7] W. J. S. Poerwadarminta, Kamus Umum Bahasa Indonesia, Jakarta: Balai Pustaka, 1995.
- [8] Siquera, "Smoking Cessation in Adolescents: The Role of Nicotine Dependence, Stress, and Copying.," Chicago, 2004.

**βbarekeng** terbit dua kali dalam setahun yaitu Bulan Maret dan Desember. **βbarekeng** menerima naskah dalam bentuk hasil penelitian, catatan penelitian (*note*) atau artikel ulasan balik (*review/ minireview*) dan ulasan (*feature*) baik dalam bahasa Indonesia maupun dalam bahasa Inggris yang berkaitan dengan bidang Matematika dan Terapannya. Naskah yang dikirimkan merupakan naskah asli yang belum pernah diterbitkan di media manapun.

## PENGIRIMAN NASKAH

Naskah dikirimkan kepada:

**Redaksi βbarekeng**

**Jurusan Matematika**

**Fakultas MIPA**

**Universitas Pattimura**

**Jl. Ir. M. Putuhena, Poka-Ambon**

Email: [jurnalbarekeng@gmail.com](mailto:jurnalbarekeng@gmail.com)

Naskah yang dikirimkan harus dalam bentuk naskah cetak (*hard copy*) dan naskah lunak (*soft copy*), disertai dengan alamat korespondensi lengkap dan alamat *email* yang dapat dihubungi.

**Naskah cetak (*hard copy*):**

Naskah cetak dikirim sebanyak satu eksemplar dengan format pengetikan menggunakan *Microsoft Word* seperti berikut:

- Naskah diketik 1 spasi pada kertas HVS Ukuran A4 dengan batas tepi 2 cm dan font *Times New Roman* berukuran 11 point.
- Jumlah halaman maksimum 12 halaman termasuk Lampiran (Gambar dan Tabel). Setiap halaman diberi nomor secara berurutan pada tepi kanan atas. Untuk keterangan Lampiran: Tipe huruf Times New Roman berukuran 10 point.
- Persamaan matematika (*equations*) dapat diketik dengan menggunakan *MS Equations* atau *MathType* dengan tipe huruf *Cambria* atau Times New Roman berukuran 11 point.

**Naskah lunak (*soft copy*):**

Naskah lunak harus dalam format *Microsoft Word* dan dikirimkan dalam bentuk disk (CD, DVD), *flashdisk*, atau *attachment email*.

## SUSUNAN NASKAH

- Judul ditulis dalam Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris.
- Nama Lengkap Penulis (tanpa gelar).
- Nama Lembaga atau Institusi, disertai Alamat Lengkap dengan nomor kode pos. Untuk korespondensi dilengkapi No. Telp., fax dan *email*.
- Judul Ringkas (*Running Title*) (jika diperlukan).
- Abstrak (*Abstract*) dalam Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris.
- Kata Kunci (*Keywords*) dalam Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris.
- Pendahuluan (*Introduction*) meliputi latar belakang, masalah dan tujuan penelitian.

- Tinjauan Pustaka meliputi ulasan (*Review*) penelitian dari beberapa literatur serta teori-teori dasar yang mendukung penelitian.
- Metode Penelitian (*Methods and Materials*) meliputi bahan, cara, dan analisis dalam penelitian (jika ada).
- Hasil dan Pembahasan (*Results and Discussion*) ditulis secara berkesinambungan dalam satu rangkaian naskah penulisan.
- Kesimpulan (*Conclusion*)
- Ucapan Terima Kasih (*Acknowledgements*) (Jika diperlukan)
- Daftar Pustaka ditulis memakai sistem indeks sesuai *reference style* IEEE. Di bawah ini beberapa contoh penulisan sumber acuan:

**Jurnal:**

- [1] K. R. Gabriel, "The Biplot Graphic Display of Matrices with Application to Principal Component Analysis," *Biometrika*, vol. 58, pp. 453-467, 1997.

**Buku:**

- [2] D. Rosadi, *Ekonometrika & Analisis Runtun Waktu Terapan dengan Eviews* (Aplikasi untuk bidang ekonomi, bisnis, dan keuangan), Yogyakarta: Andi Offset, 2012.

**Skripsi/ Tesis/ Disertasi:**

- [3] M. Apri, "Model Biaya Total Jaringan Pipa Transmisi Gas dan Optimasinya," Departemen Matematika ITB, Bandung, 2002.

**Informasi dari Internet:**

- [4] G. Skye, "Transformation," 8 Desember 2012. [Online]. Available: <http://www.livelove.co.uk/ap/>. [Diakses 4 Oktober 2014].

- Lampiran meliputi Gambar dan Tabel beserta keterangannya (jika diperlukan).

## CATATAN (NOTE)

- Naskah harus dikirimkan ke redaksi selambat-lambatnya 2 (dua) bulan sebelum bulan penerbitan jurnal (Maret dan Desember).
- Naskah akan dinilai oleh tim penilai yang relevan sebelum diterbitkan dan tim redaksi berhak merubah struktur naskah tanpa merubah isi naskah.
- Naskah dapat diterima atau ditolak. Naskah ditolak, jika tidak memenuhi kriteria penulisan, pelanggaran hak cipta, kualitas rendah, dan tidak menanggapi korespondensi redaksi. Pengumuman naskah ditolak atau diterima paling lambat 1 (satu) bulan setelah naskah terkirim.
- Penulis atau penulis pertama memperoleh 1 (satu) eksemplar jurnal yang sudah diterbitkan.

**B**arekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan



© Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI 2015