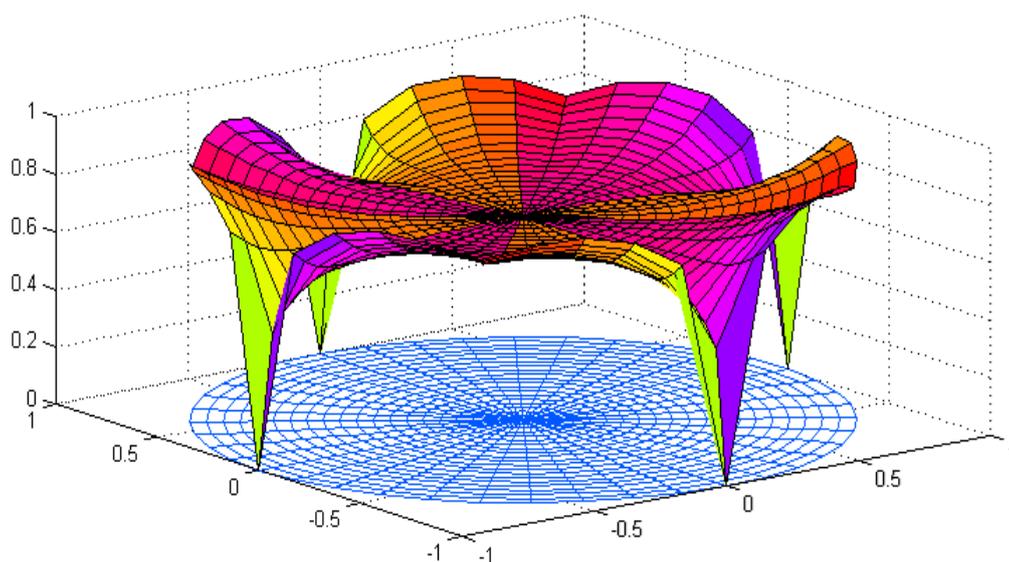


# **B**arekeng

**jurnal ilmu matematika dan terapan**

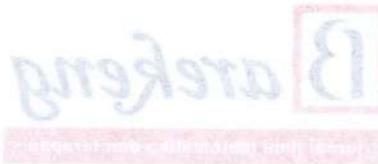
ISSN 1978-7227





### PENELITIAN

Karakteristik Ruang Hausdorff Kompak	M. Tomaso Mozart W. Talakua Lexy J. Sinay Harmanus Batkunde	85 – 88
Algoritma Untuk Menentukan Kekopositifan Matriks Simetris Berukuran $n = 3, 4, 5$	Berny P. Tomasouw	89 – 96
Nilai Total Tak Teratur Total Dari Gabungan Terpisah Graf Roda Dan Graf Buku Segitiga	R. D. S. Rahangmetan M. I. Tilukay F. Y. Rumlawang M. W. Talakua	97 – 102
The Entire Face Irregularity Strength Of A Book With Polygonal Pages	Meilin I. Tilukay Venn Y. I. Ilwaru	103 – 108
Diagnosa Penyakit Saluran Pernapasan Dengan Menggunakan Support Vector Machine (SVM)	Z. A. Leleury Berny P. Tomasouw	109 – 119
Penerapan Logika Fuzzy Metode Sugeno Untuk Menentukan Jumlah Produksi Roti Berdasarkan Data Persediaan Dan Jumlah Permintaan <i>Studi Kasus: Pabrik Roti Sarinda Ambon</i>	Dorteus L. Rahakbauw	121 – 134
Aplikasi Metode Fuzzy C-Means Untuk Pengklasteran Kelayakan Rumah Di Desa Wayame, Ambon	R. P. A. Sormin F. Y. Rumlawang L. J. Sinay	135 – 146
Efektivitas Kinerja Diagram Kontrol G	M. S. N. Van Delzen	147 – 154



**KEPENTINGAN**

83 - 84	M. Tomanan M. W. Tabin L. I. Sani H. M. Tomanan	Karakterisasi Ruang Himpunan Kompatibel
85 - 86	B. F. Tomanan	Algoritma untuk Menentukan Kecepatan Minima Sirkuit Berbasis
87 - 102	R. D. Z. Rahmawati M. I. Tabin F. Y. Rahmawati M. W. Tabin	Nilai Total Tak Terbatas Total Dim Gubahan Terpisah Garis Rata-Rata Garis
103 - 108	M. I. Tabin V. Y. I. Idris	The Exact Face Integrability Property Of A Book With Polygons
109 - 110	N. A. Lailany B. F. Tomanan	Distribusi Probabilitas Sifat-Sifat Partisi dengan Menggunakan Segitiga Pascal
111 - 112	D. S. L. H. H. H.	Penyelesaian Persamaan Diferensial Linear Homogen dan Tak Homogen



merupakan Jurnal Ilmu Matematika dan Terapannya sebagai suatu wahana informasi ilmiah yang menyajikan artikel (naskah) hasil penelitian meliputi bidang-bidang sebagai berikut: matematika analisis, aljabar, matematika terapan, statistika, pendidikan matematika dan ilmu komputer. Jurnal ini diterbitkan dua kali dalam setahun yaitu pada bulan Maret dan bulan Desember. Artikel atau naskah-naskah di dalam jurnal ini merupakan hasil-hasil penelitian pribadi ataupun kelompok yang belum pernah diterbitkan di jurnal-jurnal atau majalah ilmiah lainnya.

Diterbitkan oleh:  
 Jurusan Matematika  
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
 Universitas Pattimura  
 Ambon  
 2015  
 Copyright © Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI 2015

## KARAKTERISTIK RUANG HAUSDORFF KOMPAK

M. Tomaso<sup>1</sup>, H. Batkunde<sup>2</sup>, M. W. Talakua<sup>3</sup>, L. J. Sinay<sup>4</sup>

<sup>1, 2, 3, 4</sup> Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia  
e-mail: <sup>1</sup>alentomasoa@yahoo.co.id, <sup>2</sup>hbatkunde@gmail.com, <sup>3</sup>ocat\_08@yahoo.com,  
<sup>4</sup>lj.sinay@staff.unpatti.ac.id

---

### Abstrak

Misal  $(H, \tau)$  adalah suatu ruang topologi,  $H$  disebut ruang Hausdorff jika untuk setiap  $x, y \in H$  dimana  $x \neq y$  terdapat dua himpunan buka  $U, V \in \tau$  dan  $U \cap V = \emptyset$  sedemikian sehingga  $x \in U$  dan  $y \in V$ . Selanjutnya dengan memanfaatkan sifat kekompakan dalam suatu ruang topologi maka akan ditinjau karakteristik suatu ruang Hausdorff yang dilengkapi oleh sifat kekompakan ini. Lebih lanjut, suatu ruang Hausdorff yang dilengkapi dengan sifat kompak disebut ruang Hausdorff kompak.

*Kata Kunci:* Kekompakan, ruang Hausdorff, ruang topologi.

## THE CHARACTERISTICS OF COMPACT HAUSDORFF SPACE

### Abstract

Let  $(H, \tau)$  is a topology space,  $H$  is said to be a Hausdorff space if for every  $x, y \in H$  where  $x \neq y$ , there are two open sets  $U, V \in \tau$  and  $U \cap V = \emptyset$  such as  $x \in U$  and  $y \in V$ . Moreover by using a compactness property in a topology space, then we will observe some characteristics of a Hausdorff Space which equipped with this compactness. Furthermore, a Hausdorff Space which equipped by this compactness property is said to be a compact Hausdorff space.

*Keywords:* Compactness, Hausdorff space, topology space.

---

### 1. Pendahuluan

Topologi digunakan dalam cabang matematika dan keluarga himpunan untuk menjelaskan tentang himpunan-himpunan buka. Beberapa sifat dari ruang topologi  $X$  bergantung pada himpunan-himpunan buka dalam ruang topologi tersebut. Suatu topologi pada himpunan  $X$  adalah suatu koleksi  $\tau$  yang memuat himpunan-himpunan bagian dari  $X$  yang memenuhi sifat-sifat berikut:

- i.  $\emptyset$  dan  $X$  termasuk dalam  $\tau$ ;
- ii. Gabungan tak hingga dari himpunan elemen-elemen dalam  $\tau$  adalah elemen  $\tau$ ;
- iii. Irisan berhingga dari himpunan elemen dalam  $\tau$  adalah elemen  $\tau$ .

Dalam konsep topologi juga dikenal istilah *cover* (liput). Diberikan  $B$  adalah suatu himpunan. Suatu koleksi  $\mathcal{A}$  disebut *cover* dari  $B$  jika  $B$  termuat dalam gabungan semua himpunan dari  $\mathcal{A}$ . *Subcover* dari  $\mathcal{A}$  untuk  $B$  adalah subkoleksi dari  $\mathcal{A}$  yang juga merupakan *cover* dari  $B$ .

Ruang Topologi  $X$  disebut ruang Hausdorff atau ruang topologi terpisah jika pasangan titik yang berbeda  $a$  dan  $b$  di  $X$  masing-masing termasuk ke dalam himpunan-himpunan buka yang saling lepas. Lebih lanjut, dalam ruang topologi juga dikenal sifat kekompakan. Sifat kekompakan dipakai untuk melihat sifat-sifat dari himpunan yang mirip dengan sifat keterbatasan, di sisi lain dipakai sifat kekompakan karena sifat keterbatasan adalah konsep yang agak sulit ditinjau di dalam ruang topologi.

Suatu ruang Hausdorff yang dilengkapi dengan sifat kekompakan dikenal dengan ruang Hausdorff kompak. Lebih lanjut, dalam penelitian ini akan dibahas karakteristik Ruang Hausdorff secara umum. Lebih khususnya akan dibahas suatu ruang Hausdorff yang kompak.

## 2. Hasil dan Pembahasan

Ruang Hausdorff adalah ruang dimana setiap dua buah elemen yang berbeda dapat dipisahkan oleh dua buah persekitaran yang saling lepas [1]. Berikut adalah definisi formal dari ruang Hausdorff.

**Definisi 1.** [2] Misal  $(X, \tau)$  adalah suatu ruang topologi.  $X$  disebut Ruang Hausdorff jika untuk setiap pasangan  $x_1, x_2 \in X$ , dimana  $x_1 \neq x_2$ , terdapat himpunan buka  $U_1$  dan  $U_2$  sedemikian hingga  $x_1 \in U_1$ ,  $x_2 \in U_2$  dan  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

**Contoh 1.** Diberikan ruang topologi  $(X, \tau)$ , dengan  $X = \{a, b, c, d\}$  dan  $\tau = 2^X$ .

Perhatikan bahwa ruang topologi  $X$  adalah ruang Hausdorff.

Ambil sebarang  $x_1, x_2 \in X$  dan  $x_1 \neq x_2$

Ada  $U_1 = \{x_1\}$ ,  $U_2 = \{x_2\} \subset X$  sedemikian hingga  $x_1 \in \{x_1\} = U_1$ ,  $x_2 \in \{x_2\} = U_2$  dan  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Sehingga berdasarkan Definisi 1 maka  $X$  adalah ruang Hausdorff.

**Contoh 2.** Diberikan ruang topologi  $(M, \tau)$ , dengan  $M = \{a, b, c, d\}$  dan  $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, M\}$ , maka  $M$  bukan ruang Hausdorff.

**Definisi 2.** [2] Sebuah ruang  $X$  dikatakan ruang kompak jika dan hanya jika setiap *cover* buka dari  $X$  mempunyai sebuah *subcover* hingga.

**Contoh 3.** Diberikan suatu ruang topologi  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$  dengan topologi  $\tau = 2^Y$  dan  $X \subset Y$  dimana  $X = \{1, 2, 4\}$ . Misalkan terdapat suatu koleksi  $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ . Berdasarkan definisi himpunan buka di atas maka dapat dikatakan koleksi  $\mathcal{C}$  adalah koleksi himpunan buka.

Misalkan  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$  maka  $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ . Karena  $X = \{1, 2, 4\} \subset \bigcup_{n=1}^4 C_n = \{1, 2, 3, 4\}$  maka dapat dikatakan bahwa  $X$  termuat dalam gabungan dari himpunan-himpunan dalam koleksi  $\mathcal{C}$ . Sehingga  $\mathcal{C}$  adalah *cover* buka dari  $X$ .

Misalkan  $\mathcal{C}_* = \{C_2, C_3\}$  merupakan subkoleksi dari  $\mathcal{C}$ . Karena  $X$  termuat dalam  $C_2 \cup C_3 = \{1, 2, 3, 4\}$  maka  $\mathcal{C}_*$  merupakan *cover* dari  $X$ . Sehingga subkoleksi  $\mathcal{C}_*$  adalah *subcover* hingga dari  $\mathcal{C}$ .

**Teorema 1.** [2] Setiap himpunan tutup  $K$  dalam ruang kompak  $X$  adalah kompak.

**Teorema 2.** Jika  $K$  adalah suatu himpunan kompak dalam ruang Hausdorff  $X$  dan  $p$  adalah sebuah titik di  $X - K$ , maka ada himpunan-himpunan buka  $U$  dan  $V$  yang saling lepas dari  $X$  sedemikian hingga  $K \subset U$  dan  $p \in V$ .

*Bukti.* Diketahui  $X$  adalah ruang Hausdorff. Ambil sebarang  $K \subset X$ , dimana  $K$  himpunan kompak. Misal  $p \in X - K$ . Untuk sebarang  $a \in K$ , karena  $X$  ruang Hausdorff maka ada himpunan-himpunan buka  $U_a$  dan  $V_a$  dari  $X$  sedemikian hingga  $a \in U_a$  dan  $p \in V_a$ .

Misal  $\mathcal{F} = \{U_a | a \in K\}$  dengan  $U_a$  himpunan buka dari  $X$ , maka  $\mathcal{F}$  adalah *cover* dari  $K$ .

Perhatikan bahwa  $K$  kompak, maka  $\mathcal{F}$  memiliki sebuah *subcover* hingga dari  $K$ , yaitu ada berhingga titik  $a_1, a_2, \dots, a_n$  dari  $K$  sedemikian hingga  $K$  termuat dalam  $U$ , yaitu  $K \subset U = U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_n}$ , sehingga  $U$  himpunan buka. Di lain pihak, misalkan  $V = V_{n_1} \cap \dots \cap V_{n_n}$ .

Karena  $p$  termuat dalam  $V_{n_1}, \dots, V_{n_n}$  maka  $V_{n_1}, \dots, V_{n_n}$  buka. Sehingga  $V$  juga buka. Diperoleh  $U$  dan  $V$  adalah himpunan-himpunan buka di  $X$ , sedemikian hingga  $K \subset U$ ,  $p \in V$ , dan  $U \cap V = \emptyset$ . ■

**Akibat 3.** [3] Setiap himpunan kompak  $K$  dalam suatu ruang Hausdorff  $X$  adalah tutup.

Pada Teorema 2 telah dibahas sifat suatu himpunan kompak pada suatu ruang Hausdorff. Sifat ini penting untuk menunjukkan bahwa ruang Hausdorff adalah ruang normal.

**Definisi 3.** [3] Ruang topologi  $X$  dikatakan ruang normal jika untuk setiap himpunan tutup  $A, B \subset X$  yang saling lepas terdapat himpunan-himpunan buka  $U$  dan  $V$  sedemikian hingga  $A \subset U, B \subset V$  dan  $U \cap V = \emptyset$ .

**Contoh 4.** Diberikan  $X = \{a, b, c\}$  dengan topologi  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ . Himpunan-himpunan tutup dari  $X$  adalah  $X, \emptyset, \{b, c\}, \{a, c\}, X$  ruang normal.

### Karakteristik Ruang Hausdorff Kompak

Ruang Hausdorff yang dilengkapi sifat kekompakan dinamakan ruang Hausdorff kompak. Diberikan  $X$  suatu ruang topologi.  $X$  dikatakan ruang Hausdorff kompak jika  $X$  merupakan ruang Hausdorff dan setiap cover buka dari  $X$  memiliki suatu subcover hingga.

**Contoh 5.** Diberikan suatu himpunan  $A = [0,5]$ . Karena  $A \subset \mathbb{R}$ , dimana  $\mathbb{R}$  adalah ruang Hausdorff maka  $A$  juga merupakan ruang Hausdorff.

Berdasarkan Teorema 1 dan Akibat 3 maka diperoleh akibat di bawah ini

**Akibat 4.** Diberikan  $X$  ruang Hausdorff kompak. Suatu subhimpunan  $K$  dari  $X$  dikatakan kompak jika dan hanya jika  $K$  tutup.

*Bukti.* Diketahui  $X$  adalah ruang Hausdorff kompak,  $K \subset X$ . Akan ditunjukkan bahwa  $K$  kompak jika dan hanya jika  $K$  tutup.

Misalkan  $K$  kompak. Akan dibuktikan bahwa  $K$  tutup. Karena  $K \subset X$  dan  $X$  ruang Hausdorff kompak, maka berdasarkan Akibat 1 terbukti bahwa  $K$  tutup. Misalkan  $K$  tutup akan dibuktikan bahwa  $K$  kompak. Karena  $X$  ruang Hausdorff kompak maka  $X$  juga merupakan ruang kompak. Jadi, berdasarkan Teorema 1 maka dapat dikatakan bahwa  $K$  kompak. ■

Ciri khas dari ruang Hausdorff kompak termuat dalam Akibat 4. Jika  $X$  adalah ruang Hausdorff, setiap subhimpunan  $K$  yang kompak pasti tutup, tetapi tidak berlaku sebaliknya. Jika  $X$  adalah ruang kompak, setiap subhimpunan  $K$  yang tutup pasti kompak tetapi tidak berlaku sebaliknya. Tetapi jika  $X$  ruang Hausdorff kompak, berlaku setiap subhimpunan  $K$  yang kompak pasti tutup dan yang tutup pasti kompak.

Berdasarkan Teorema 2 dan Definisi 3, maka hubungan antara ruang Hausdorff, sifat kekompakan dan ruang normal dapat disajikan dalam Teorema berikut.

**Teorema 5.** Setiap ruang Hausdorff kompak adalah normal.

*Bukti.* Misal  $X$  adalah ruang Hausdorff kompak. Akan ditunjukkan bahwa  $X$  normal.

Ambil sebarang  $A, B \subset X$ , dimana  $A, B$  tutup dan  $A \cap B = \emptyset$ . Karena  $X$  kompak maka berdasarkan Teorema 1,  $A$  dan  $B$  juga kompak. Selanjutnya berdasarkan Teorema 2, untuk setiap  $b \in B$  terdapat dua himpunan buka yang saling lepas  $U_b$  dan  $V_b$  dari  $X$  sedemikian hingga  $A \subset U_b$  dan  $b \subset V_b$ .

Misalkan  $\mathcal{F} = \{V_b | b \in B\}$  adalah koleksi dari himpunan-himpunan buka di  $X$ . Karena  $b \in B, b \in V_b$  maka  $B \subseteq \bigcup V_b$  sehingga  $\mathcal{F}$  cover dari  $B$ . Karena  $B$  kompak maka  $\mathcal{F}$  mempunyai sebuah subcover hingga dari  $B$ . Dengan kata lain, ada  $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$  sedemikian hingga  $B$  termuat di dalam  $V$  dimana  $V = V_{b_1} \cup \dots \cup V_{b_n}$ . Karena  $V_b$  buka maka gabungan dari  $V_b$  juga buka sehingga  $V$  buka. Di lain pihak,

misalkan  $U = U_{b_1} \cap \dots \cap U_{b_n}$ . Karena  $U_b$  buka maka irisan dari  $U_b$  juga buka sehingga  $U$  buka. Karena  $U, V$  buka maka berdasarkan definisi ruang normal:

Untuk setiap himpunan tutup  $A, B \subset X$ ,  $A \cap B = \emptyset$ , terdapat  $U, V$  buka di  $X$  sedemikian hingga  $A \subset U, B \subset V$  dan  $U \cap V = \emptyset$ .

Dengan demikian,  $X$  adalah normal. ■

### 3. Kesimpulan

Dalam ruang Hausdorff kompak, jika suatu himpunan kompak maka himpunan tersebut juga tutup dan sebaliknya. Lebih lanjut, Setiap ruang **Hausdorff** kompak adalah normal, artinya, untuk setiap himpunan-himpunan tutup dalam ruang Hausdorff kompak masing-masing memiliki himpunan buka yang saling lepas.

### Daftar Pustaka

- [1] H. M. Bouselina, "On Collectionwise Hausdorff Bitopological Spaces," *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, pp. 137-145, 2012.
- [2] J. R. Munkres, *Topology*, Edisi ke-2, Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.
- [3] S. Lipschutz, *Theory and Problems of General Topology*, New York: McGraw-Hill Book Company, 1965.
- [4] R. G. Bartle, *Introduction to Real Analysis*, Edisi ke-3, New York: John Wiley & Sons Inc., 2000.
- [5] R. F. Dickman dan J. R. Porter, " $\theta$ -Closed Subsets of Hausdorff Spaces," *Pacific Journal of Mathematics*, pp. 407-416, 1975.
- [6] S. T. Hu, *Element of General Topology*, San Fransisco: Holden-Day, 1964.

## ALGORITMA UNTUK MENENTUKAN KEKOPOSITIFAN Matriks Simetris Berukuran $n = 3, 4, 5$

**Berny Pebo Tomasouw**

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia  
e-mail: peboberny@gmail.com

---

### Abstrak

Matriks kositif merupakan matriks simetris yang memenuhi sifat tertentu. Matriks ini dapat digunakan dalam menyelesaikan masalah pemrograman kuadrat, masalah kombinatorik dan persamaan diferensial. Dalam penelitian ini, akan dibentuk beberapa algoritma untuk memeriksa kekospositifan suatu matriks simetris yang berukuran  $n = 3, n = 4$  dan  $n = 5$ .

*Kata Kunci:* Algoritma, matriks kositif, matriks simetris.

## AN ALGORITHM TO DETERMINE THE COPOSITIVITY OF A SYMMETRIC MATRIX OF ORDER $n = 3, 4, 5$

### Abstract

Copositive matrix is a symmetric matrix which satisfy some certain conditions. This matrix can be applied in solving quadratics programming, combinatorial and differential equation. In this paper, some algorithms will be formed to verify the copositivity of a symmetric matrix of order  $n = 3, n = 4$  and  $n = 5$ .

*Keywords:* Algorithm, copositive matrix, symmetric matrix.

---

### 1. Pendahuluan

Teori matriks memainkan peran yang sangat penting baik dari segi pengembangan teori maupun terapannya dalam menyelesaikan masalah matematika. Pada saat ini banyak jenis matriks yang telah dikembangkan dan diteliti. Salah satu contohnya adalah matriks kositif.

Konsep matriks kositif pertama kali dikemukakan oleh Motzkin (1952). Matriks kositif adalah matriks simetris yang memenuhi sifat tertentu. Beberapa penelitian telah dilakukan untuk membahas sifat-sifat dasar dan karakteristik dari matriks kositif. Selain itu dalam beberapa penelitian telah dibahas juga penerapan matriks kositif dalam masalah pemrograman kuadrat, masalah kombinatorik maupun persamaan diferensial [ [1], [2], [3], [4]].

Namun kenyataan yang dihadapi adalah tidaklah mudah menentukan apakah sebuah matriks simetris merupakan matriks kositif atau bukan. Oleh karena itu dalam penelitian ini akan dibentuk algoritma berdasarkan teorema-teorema yang ada untuk memeriksa kekospositifan sebuah matriks.

### 2. Tinjauan Pustaka

Penelitian tentang matriks kositif dimulai oleh Motzkin [5] dalam tulisannya yang berjudul “*Copositive Quadratic Forms*”. Setelah itu banyak penelitian yang dilakukan untuk menentukan kriteria dari sebuah matriks kositif. Salah satunya dilakukan oleh Andersson *dkk.* [6] dalam penelitiannya yang berjudul “*Criteria for copositive matrices using simplices and barycentric coordinates*”. Dalam penelitian ini diberikan teorema yang memuat kriteria untuk memeriksa kekospositifan sebuah matriks.

**Definisi 1.** Matriks  $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  dikatakan simetris jika berlaku  $A = A^T$ .

**Definisi 2.** Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  dikatakan tak negatif jika berlaku  $x_i \geq 0$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Contoh 1.** Vektor  $\mathbf{x} = (2, 1, 0)$  adalah vektor tak negatif.

**Definisi 3.** Diberikan matriks  $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ . Submatriks utama dari  $A$  adalah submatriks yang diperoleh dengan cara menghapus baris ke- $i$  dan kolom ke- $i$  dari matriks  $A$ .

**Contoh 2.** Diberikan matriks  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ . Submatriks utama dari  $A$  adalah

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \text{ dan } A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Definisi 4.** Matriks simetris  $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  dikatakan **kopositif** (*copositive*) jika untuk setiap vektor tak negatif  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  berlaku  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ . Sedangkan  $A$  dikatakan **kopositif tegas** (*strictly copositive*) jika untuk setiap vektor tak negatif  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  berlaku  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ .

Teorema berikut ini dari Hadeler [5] yang memuat kriteria matriks kopositif berukuran  $n = 2$ .

**Teorema 1.** Diberikan matriks simetris  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ . Matriks  $A$  dikatakan kopositif jika dan hanya jika

- i.  $a_{11} \geq 0$  dan  $a_{22} \geq 0$ ;
- ii.  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$  atau  $a_{12} \geq 0$ ;

sedangkan matriks  $A$  dikatakan kopositif tegas jika memenuhi

- i.  $a_{11} > 0$  dan  $a_{22} > 0$ ;
- ii.  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$  atau  $a_{12} \geq 0$ .

**Contoh 3.** Matriks  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$  adalah matriks kopositif tegas, sedangkan matriks  $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  adalah matriks kopositif.

### 3. Hasil dan Pembahasan

Dalam teorema berikut, Anderson [6] membahas syarat yang harus dipenuhi agar matriks simetris berukuran  $n = 3$  dapat dikatakan sebagai matriks kopositif atau kopositif tegas.

**Teorema 2.** Diberikan matriks simetris  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ . Matriks  $A$  dikatakan kopositif jika dan hanya jika

- i.  $a_{ii} \geq 0$  untuk  $i = 1, 2, 3$ ;
- ii.  $y_1 = \sqrt{a_{11}a_{12}} + a_{12} \geq 0$ ,  
 $y_2 = \sqrt{a_{11}a_{33}} + a_{13} \geq 0$  dan  
 $y_3 = \sqrt{a_{22}a_{33}} + a_{23} \geq 0$ ;
- iii.  $\sqrt{a_{11}a_{22}a_{33}} + a_{12}\sqrt{a_{33}} + a_{13}\sqrt{a_{22}} + a_{23}\sqrt{a_{11}} + \sqrt{2y_1y_2y_3} \geq 0$ .

Sedangkan matriks  $A$  dikatakan kopositif tegas jika dan hanya jika

- i.  $a_{ii} > 0$  untuk  $i = 1, 2, 3$ ;
- ii.  $y_1 = \sqrt{a_{11}a_{22}} + a_{12} > 0$ ,  
 $y_2 = \sqrt{a_{11}a_{33}} + a_{13} > 0$  dan  
 $y_3 = \sqrt{a_{22}a_{33}} + a_{23} > 0$ ;
- iii.  $\sqrt{a_{11}a_{22}a_{33}} + a_{12}\sqrt{a_{33}} + a_{13}\sqrt{a_{22}} + a_{23}\sqrt{a_{11}} + \sqrt{2y_1y_2y_3} > 0$ .

Berdasarkan Teorema 2 dapat dibentuk algoritma untuk menentukan apakah matriks simetris merupakan matriks kopositif atau bukan. Algoritma yang dibentuk dalam penelitian ini akan menghasilkan keluaran berupa nilai  $h = 1$ ,  $h = 2$  atau  $h = 3$  dengan penjelasan sebagai berikut:

- i. Jika  $h = 1$  maka matriks simetris yang diperiksa bukanlah matriks kopositif;
- ii. Jika  $h = 2$  maka matriks simetris yang diperiksa adalah matriks kopositif;
- iii. Jika  $h = 3$  maka matriks simetris yang diperiksa adalah matriks kopositif tegas.

### Algoritma 1.

Diberikan matriks simetris  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ .

- 1) Periksa apakah ada elemen diagonal atau  $a_{ii}$  yang bernilai negatif. Jika ada  $a_{ii} < 0$  maka  $h = 1$  dan berhenti. Jika tidak ada  $a_{ii}$  yang negatif maka lanjut ke langkah 2.
- 2) Hitung  
 $y_1 = \sqrt{a_{11}a_{22}} + a_{12}$  ;  
 $y_2 = \sqrt{a_{11}a_{33}} + a_{13}$  ;  
 $y_3 = \sqrt{a_{22}a_{33}} + a_{23}$  ;  
 $\beta = \sqrt{a_{11}a_{22}a_{33}} + a_{12}\sqrt{a_{33}} + a_{13}\sqrt{a_{22}} + a_{23}\sqrt{a_{11}} + \sqrt{2y_1y_2y_3}$  .
- 3) Jika ada salah satu dari nilai  $y_1, y_2, y_3$  dan  $\beta$  yang bernilai negatif maka  $h = 1$  dan berhenti. Jika tidak lanjut ke langkah 4.
- 4) Jika ada salah satu dari nilai  $y_1, y_2, y_3$  dan  $\beta$  yang bernilai nol maka  $h = 2$ . Jika tidak maka  $h = 3$ .

**Contoh 4.**

Diberikan matriks simetris  $A = \begin{bmatrix} 15 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & -2 \\ 1 & -2 & 16 \end{bmatrix}$ .

Dengan menggunakan Algoritma 1 diperoleh keluaran  $h = 3$ . Hal ini berarti  $A$  adalah matriks kopositif tegas.

Untuk matriks simetris dengan ukuran  $n \geq 4$ , Anderson [6] menggunakan pendekatan partisi matriks untuk memeriksa apakah matriks yang diberikan merupakan matriks kopositif atau bukan.

**Teorema 3.**

Diberikan matriks simetris  $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ . Matriks  $A$  dipartisi menjadi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{s}^T \\ \mathbf{s} & A_2 \end{bmatrix}.$$

dan dibentuk matriks  $B = a_{11}A_2 - \mathbf{s}\mathbf{s}^T$ , dengan  $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}$ .

Jika vektor  $\mathbf{s}$  tak negatif ( $\mathbf{s} \geq 0$ ) maka

- i.  $A$  adalah matriks kopositif jika dan hanya jika  $a_{11} \geq 0$  dan  $A_2$  kopositif;
- ii.  $A$  adalah matriks kopositif tegas jika dan hanya jika  $a_{11} > 0$  dan  $A_2$  kopositif tegas.

Jika vektor  $\mathbf{s}$  tak positif ( $\mathbf{s} \leq 0$ ) maka

- i.  $A$  adalah matriks kopositif jika dan hanya jika  $a_{11} \geq 0$  dan  $B$  kopositif;
- ii.  $A$  adalah matriks kopositif tegas jika dan hanya jika  $a_{11} > 0$  dan  $B$  kopositif tegas.

Teorema 3 hanya dapat diterapkan pada saat vektor  $\mathbf{s}$  tak negatif atau tak positif. Jika tidak keduanya maka teorema ini tidak dapat diterapkan, seperti terlihat pada contoh berikut.

**Contoh 5.**

Diberikan matriks simetris  $A = \begin{bmatrix} 11 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 15 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & 16 \end{bmatrix}$ .

Matriks  $A$  dipartisi menjadi  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{s}^T \\ \mathbf{s} & A_2 \end{bmatrix}$ , dengan  $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ , dan  $A_2 = \begin{bmatrix} 15 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & -2 \\ 1 & -2 & 16 \end{bmatrix}$ .

Terlihat bahwa  $\mathbf{s}$  bukan vektor tak negatif maupun tak positif sehingga teorema tidak bisa digunakan.

Untuk mengatasi masalah ini maka Anderson memperkenalkan simplex standar dan polihedron yang didefinisikan sebagai berikut.

$$P = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \mathbf{u} = (u_2, \dots, u_n) \geq 0, \sum_{i=2}^n u_i = 1 \right\} \text{ dan } P^{-1} = \{ \mathbf{u} \in P \mid \mathbf{s}^T \mathbf{u} \leq 0 \}.$$

Selanjutnya polihedron  $P^{-1}$  dibagi menjadi simplex  $s^i$  sebanyak  $t$ , masing – masing simplex  $s^i$  memiliki verteks  $V_1^i, V_2^i, \dots, V_{n-1}^i$  misalkan  $V_1^i = \mathbf{e}_k$  dengan  $\mathbf{e}_k$  adalah vektor yang elemen ke- $k$  sama dengan 1 dan bernilai nol untuk elemen lainnya serta verteks lainnya adalah

$$\{V_2^i, V_3^i, \dots, V_{n-1}^i\} = \{V^{k,u_1}, V^{k,u_2}, \dots, V^{k,u_{n-2}}\}$$

maka dapat dibentuk matriks  $W$  sebagai berikut

$$W = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_k \\ V^{k,u_1} \\ \vdots \\ V^{k,u_{n-2}} \end{bmatrix} \text{ dengan } \{u_1, u_2, \dots, u_{n-2}\} \setminus \{k\}.$$

Sedangkan elemen ke- $m$  vektor  $V^{k,u_i}$  dihitung dengan rumus

$$(V^{f,g})_m = \begin{cases} a_{1,g+1}, & \text{jika } m = f; \\ -a_{1,f+1}, & \text{jika } m = g, \text{ dengan syarat } f \neq g; \\ 0, & \text{untuk lainnya.} \end{cases}$$

Dengan menggunakan matriks  $W$  maka dapat diperiksa matriks simetris berukuran  $n = 4$  dan  $n = 5$  yang diperlihatkan dalam dua algoritma berikut ini.

#### Algoritma 2.

Diberikan matriks simetris  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}.$

1) Periksa apakah ada elemen diagonal atau  $a_{ii}$  yang bernilai negatif. Jika ada  $a_{ii} < 0$  maka  $h = 1$  dan berhenti. Jika tidak ada  $a_{ii}$  yang negatif maka lanjut ke langkah 2.

2) Bentuk submatriks utama

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{bmatrix}, \text{ dan } A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

3) Gunakan algoritma 1 untuk memeriksa submatriks  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Jika ada submatriks yang tidak kopsitif maka  $h = 1$  dan berhenti. Jika tidak lanjut ke langkah 4.

4) Partisi matriks  $A$  menjadi  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{s}^T \\ \mathbf{s} & A_2 \end{bmatrix}$  dengan  $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \end{bmatrix}$  dan  $A_2 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$ , serta hitung

banyaknya elemen negatif (dimisalkan dengan  $d$ ) pada vektor  $\mathbf{s}$ .

5) Jika  $d = 0$  maka periksa apakah  $a_{11} = 0$  atau  $A_2$  kopsitif. Jika ya maka  $h = 2$  dan berhenti. Jika tidak maka lanjut ke langkah 6.

6) Jika  $d = 0$ ,  $a_{11} > 0$  dan  $A_2$  kopsitif tegas maka  $h = 3$  dan berhenti. Jika tidak, lanjut ke langkah 7.

7) Jika  $d = 1$  maka tentukan nilai  $k$  berdasarkan posisi elemen yang bernilai negatif yakni  $a_{1,k+1}$ .

a) Bentuk matriks  $W = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_k \\ V^{k,u} \\ V^{k,v} \end{bmatrix}, \{u, v\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{k\}.$

- b) Jika  $W^T B W$  kopositif maka  $h = 2$  dan berhenti.
- c) Jika  $a_{11} > 0$ ,  $W^T B W$  kopositif tegas dan  $A_2$  juga kopositif tegas maka  $h = 3$  dan berhenti. Jika tidak lanjut ke langkah 8.
- 8) Jika  $d = 2$  maka tentukan nilai  $i$  dan  $j$  berdasarkan posisi dua elemen yang bernilai negatif yakni  $a_{1,i+1}$  dan  $a_{1,j+1}$ .
- a) Bentuk matriks
- $$W_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_j \\ V^{i,k} \end{bmatrix} \text{ dan } W_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_j \\ V^{i,k} \\ V^{j,k} \end{bmatrix}.$$
- b) Jika  $W_1^T B W_1$  dan  $W_2^T B W_2$  keduanya kopositif maka  $h = 2$  dan berhenti.
- c) Jika  $a_{11} > 0$  dan matriks  $W_1^T B W_1$ ,  $W_2^T B W_2$ , dan  $A_2$  ketiganya matriks kopositif tegas maka  $h = 3$  dan berhenti. Jika tidak lanjut ke langkah 9.
- 9) a) Jika  $d = 3$  dan  $B$  kopositif maka  $h = 2$ .
- b) Jika  $d = 3$ ,  $a_{11} > 0$  dan  $B$  kopositif tegas maka  $h = 3$ .

### Algoritma 3.

Diberikan matriks simetris  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}.$

- Periksa apakah ada elemen diagonal atau  $a_{ii}$  yang bernilai negatif. Jika ada  $a_{ii} < 0$  maka  $h = 1$  dan berhenti. Jika tidak ada  $a_{ii}$  yang negatif maka lanjut ke langkah 2.
- Hitung banyaknya elemen negatif (dimisalkan dengan  $d$ ) dari baris pertama matriks  $A$ . Jika  $d = 0$ ,  $d = 2$  atau  $d = 4$  maka lanjut ke langkah 4.
- Periksa apakah baris lain yang banyaknya elemen negatif sama dengan 0, 2 atau 4. Jika ada baris ke- $i$  yang memenuhi maka
  - Tukar baris ke- $i$  dengan baris pertama
  - Tukar kolom ke- $i$  dengan kolom pertama
- Bentuk submatriks utama

$$L_1 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}$$

$$L_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{35} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{55} \end{bmatrix}, \quad \text{dan } L_5 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

- Gunakan Algoritma 2 memeriksa submatriks  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5$ . Jika ada submatriks yang tidak kopositif maka  $h = 1$  dan berhenti.

- 6) a) Jika  $d = 0$  dan  $a_{11} = 0$  maka  $h = 2$  dan berhenti.  
 b) Jika  $d = 0$ ,  $a_{11} > 0$  dan  $A_2$  kositif tegas maka  $h = 3$  dan berhenti.
- 7) Jika  $d = 2$  maka tentukan nilai  $i$  dan  $j$  berdasarkan posisi dua elemen yang bernilai negatif yakni  $a_{1,i+1}$  dan  $a_{1,j+1}$ .

a) Bentuk matriks

$$W_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_j \\ V^{i,u} \\ V^{i,v} \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_j \\ V^{i,u} \\ V^{i,v} \\ V^{j,u} \end{bmatrix}, \text{ dan } W_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_j \\ V^{i,v} \\ V^{j,u} \\ V^{j,v} \end{bmatrix}.$$

- b) Jika ada diantara matriks  $W_1^T B W_1$ ,  $W_2^T B W_2$  dan  $W_3^T B W_3$  yang tidak kositif maka  $h = 1$  dan berhenti. Jika ketiganya matriks kositif maka  $h = 2$  dan berhenti. Jika  $a_{11} > 0$  dan ketiganya kositif tegas maka  $h = 3$  dan berhenti.

- 8) a) Jika  $d = 4$  dan  $B$  kositif maka  $h = 2$ .

- b) Jika  $d = 4$ ,  $a_{11} > 0$ ,  $B$  kositif tegas dan  $A_2$  juga kositif tegas maka  $h = 3$ .

### Contoh 5.

Diberikan matriks simetris  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ . Dengan menggunakan algoritma 2, akan diperiksa

apakah matriks kositif atau tidak.

Karena semua elemen  $a_{ii} > 0$  maka dibentuk submatriks utama

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ dan } L_4 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Algoritma 1 dapat diperoleh bahwa  $L_1, L_2, L_3$  dan  $L_4$  kositif tegas.

Karena  $A_2 = L_4$  maka diperoleh bahwa  $A_2$  juga kositif tegas.

Bentuk matriks

$$B = a_{11}A_2 - SS^T \\ = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 7 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Banyaknya elemen negatif pada baris pertama matriks  $A$  adalah  $d = 2$ , dengan elemen-elemen yang bernilai negatif adalah  $a_{12} = -1$  dan  $a_{14} = -3$  sehingga  $i = 1, j = 3$  dan  $k = 2$ .

Selanjutnya, akan dihitung elemen-elemen dari  $V^{1,2}$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} (V^{1,2})_1 &= a_{13}, & (V^{1,2})_2 &= -a_{12} & \text{ dan } & (V^{1,2})_3 &= 0. \\ &= 1, & &= 1 & & & \end{aligned}$$

dan  $V^{3,2}$  sebagai berikut

$$(V^{3,2})_1 = 0, \quad (V^{3,2})_2 = -a_{14} \quad \text{dan} \quad (V^{3,2})_3 = a_{13}$$

$$\qquad \qquad \qquad = 3 \qquad \qquad \qquad = 1$$

Jadi, dapat dibentuk matriks  $W_1$  dan  $W_2$  sebagai berikut

$$W_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_j \\ V^{i,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 \\ V^{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$W_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_3 \\ V^{1,2} \\ V^{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Algoritma 1 dapat diperoleh bahwa matriks  $W_1^T B W_1$  dan  $W_2^T B W_2$  keduanya matriks kopositif tegas. Karena  $a_{11} > 0$  dan matriks  $A_2, W_1^T B W_1, W_2^T B W_2$  ketiganya matriks kopositif tegas maka  $h = 3$ . Hal ini berarti  $A$  adalah matriks kopositif tegas.

#### 4. Kesimpulan

Banyaknya elemen negatif pada vektor  $s$  akan mempengaruhi penentuan kekopositifan sebuah matriks simetris. Selanjutnya Algoritma 1, 2 dan 3 akan dijalankan bersama-sama jika matriks yang diperiksa adalah matriks simetris berukuran  $n = 5$ .

#### Daftar Pustaka

- [1] L. D. Baumert, "Extreme Copositive Quadratic Forms," *Pacific J. Math.*, vol. 19, pp. 197-204, 1966.
- [2] R. W. Farebrother, "Necessary and Sufficient Conditions for a Quadratic Form to be Positive whenever a Set of Linear Constraints is Satisfied," *Linear Algebra Appl.*, vol. 16, pp. 39-42, 1977.
- [3] J. W. Gaddum, "Linear Inequalities and Quadratic Forms," *Pacific J. Math.*, vol. 8, pp. 411-414, 1958.
- [4] D. H. Jacobson, *Extensions of Linear Quadratic Control, Optimization, and Matrix Theory*, New York: Academic, 1977.
- [5] T. S. Motzkin, "Copositive Quadratic Forms," *National Bureau of Standards Report*, pp. 11-22, 1952.
- [6] L. E. Anderson, G. Chang dan T. Elfyng, "Criteria for Copositive Matrices using Simplices and Barycentric Coordinates," *Linear Algebra Appl.*, vol. 220, pp. 9-30, 1995.
- [7] K. P. Hadeler, "On Copositive Matrices," *Linear Algebra Appl.*, vol. 49, pp. 78-89, 1983.

## NILAI TOTAL TAK TERATUR TOTAL DARI GABUNGAN TERPISAH GRAF RODA DAN GRAF BUKU SEGITIGA

R. D. S. Rahangmetan<sup>1</sup>, M. I. Tilukay<sup>2</sup>, F. Y. Rumlawang<sup>3</sup>, M. W. Talakua<sup>4</sup>

<sup>1, 2, 3, 4</sup> Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia  
e-mail: <sup>2</sup>meilin.tilukay@fmipa.unpatti.ac.id

---

### Abstrak

Pelabelan total tak teratur total yang diperkenalkan oleh Marzuki, dkk merupakan kombinasi dari dua jenis pelabelan tak teratur, yaitu pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi. Bilangan bulat positif  $k$  terkecil sedemikian sehingga suatu graf  $G$  memiliki pelabelan  $k$ -total tak teratur total disebut nilai total tak teratur total dari  $G$ , dinotasikan dengan  $ts(G)$ . Pada makalah ini, nilai total tak teratur total dari gabungan terpisah graf roda dan graf buku segitiga ditentukan.

**Kata Kunci:** Pelabelan total tak teratur sisi, pelabelan total tak teratur titik, pelabelan total tak teratur total.

## THE TOTAL IRREGULARITY STRENGTH OF DISJOINT UNION OF WHEEL AND TRIANGULAR BOOK

### Abstract

A totally irregular total labeling which had been introduced by Marzuki, et.al is a combination of two types of irregular labeling, edge irregular total labeling and vertex irregular total labeling. The minimum integer  $k$  for which a graph  $G$  has a totally irregular total  $k$ -labeling is called the total irregularity strength of  $G$ , denoted by  $ts(G)$ . In this paper, we determine the total irregularity strength of disjoint union of wheels and of triangular books.

**Keywords:** edge irregular total labeling, totally irregular total labeling, vertex irregular total labeling.

---

### 1. Pendahuluan

Diberikan  $G$  suatu graf berhingga, sederhana, dan tak berarah, dengan himpunan titik  $V$  dan himpunan sisi  $E$ . Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memetakan elemen-elemen pada graf ke himpunan bilangan (umumnya bilangan bulat positif atau tak negatif).

Pelabelan- $k$  tak teratur (*irregular  $k$ -labeling*) dari suatu graf  $G$ , dengan orde lebih dari 2, adalah suatu fungsi yang memetakan himpunan sisi  $E(G)$  ke himpunan  $\{1, 2, 3, \dots, k\}$  sedemikian sehingga setiap dua titik yang berbeda di  $V(G)$  memiliki bobot yang berbeda. Bilangan bulat positif terkecil  $k$  sedemikian sehingga  $G$  memiliki suatu pelabelan- $k$  tak teratur disebut nilai ketakteraturan (*irregularity strength*) dari  $G$ , dinotasikan dengan  $s(G)$ .

Selanjutnya, Baca, dkk. [1] memperkenalkan pelabelan tak teratur yang divariasikan berdasarkan domain pelabelan yaitu pelabelan total tak teratur sisi dan pelabelan total tak teratur titik. Misalkan  $G = (V, E)$  adalah suatu graf. Pelabelan- $k$  total tak teratur sisi (*edge irregular total  $k$ -labeling*) dari  $G$  adalah suatu fungsi  $f$  yang memetakan himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$  ke himpunan  $\{1, 2, 3, \dots, k\}$  sedemikian sehingga setiap dua sisi yang berbeda di  $E(G)$  memiliki bobot yang berbeda. Bobot sisi  $xy$  di  $E(G)$  terhadap fungsi  $f$  adalah  $w(xy) = f(x) + f(xy) + f(y)$ . Bilangan bulat positif terkecil  $k$  sedemikian sehingga  $G$  memiliki suatu pelabelan- $k$  total tak teratur sisi disebut nilai total ketakteraturan sisi (*total edge irregularity strength*) dari  $G$ , dinotasikan dengan  $tes(G)$ . Sedangkan pelabelan- $k$  total tak teratur titik (*vertex irregular total  $k$ -labeling*) dari  $G$  adalah suatu fungsi  $f$  yang memetakan himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$  ke himpunan  $\{1, 2, 3, \dots, k\}$  sedemikian sehingga setiap dua titik yang berbeda di  $V(G)$  memiliki

bobot yang berbeda. Bobot titik  $x$  di  $V(G)$  terhadap fungsi  $f$  adalah  $w(x) = f(x) + \sum_{xy \in E(G)} f(xy)$ . Bilangan bulat positif terkecil  $k$  sedemikian sehingga  $G$  memiliki suatu pelabelan- $k$  total tak teratur titik disebut nilai total ketakteraturan titik (*total vertex irregularity strength*) dari  $G$ , dinotasikan dengan  $tvs(G)$ .

Baca dkk. [1] telah memberikan batas bawah dan batas atas nilai total ketakteraturan titik  $tvs(G)$  dan nilai total ketakteraturan sisi  $tes(G)$  sebagai berikut.

**Teorema A.** Untuk setiap graf  $G$  dengan  $p$  titik dan  $q$  sisi, dan derajat minimum  $\delta(G)$  serta derajat maksimum  $\Delta(G)$ ,

- i)  $\left\lceil \frac{p+\delta(G)}{\Delta(G)+1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq p + \Delta(G) - 2\delta(G) + 1;$
- ii)  $\left\lceil \frac{|E(G)|+2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E(G)|.$

Selanjutnya, Wijaya dan Slamain [2] telah menentukan nilai  $tes$  dan  $tvs$  untuk graf roda dengan  $n + 1$  titik,  $n \geq 3$ , yaitu  $tes(W_n) = \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$  dan  $tvs(W_n) = \left\lceil \frac{n+3}{4} \right\rceil$ . Nurdin, dkk. [3] telah menentukan nilai  $tes$  untuk graf hasil korona graf lintasan dengan beberapa graf tertentu. Nilai  $tes$  dan  $tvs$  dari graf-graf lainnya dapat dilihat dalam hasil survey pelabelan graf oleh Galian [4].

Marzuki, Salman, dan Miller [5] menggabungkan ide kedua pelabelan total tersebut dengan memperkenalkan pelabelan total tak teratur titik dan sisi. Misalkan  $G = (V, E)$  adalah suatu graf. Pelabelan- $k$  total tak teratur titik dan sisi (*totally irregular total  $k$ -labeling*) pada  $G$  didefinisikan sebagai suatu fungsi  $f$  yang memetakan himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$  ke himpunan  $\{1, 2, 3, \dots, k\}$  sedemikian sehingga setiap dua titik yang berbeda di  $V(G)$  memiliki bobot yang berbeda dan setiap dua sisi yang berbeda di  $E(G)$  memiliki bobot yang berbeda juga. Bilangan bulat positif terkecil  $k$  sedemikian sehingga suatu graf  $G$  memiliki pelabelan- $k$  total tak teratur titik dan sisi disebut nilai ketakteraturan total (*total irregularity strength*) dari  $G$ , dinotasikan dengan  $ts(G)$ . Marzuki, Salman, dan Miller [5] telah memberikan batas atas dari  $ts(G)$ .

**Teorema B.** Untuk sebarang graf  $G$ ,

$$ts(G) \geq \max\{tes(G), tvs(G)\}.$$

Untuk beberapa jenis graf, seperti graf lintasan (*path*), graf lingkaran (*cycle*) [5] graf hasil kali kartesius dari beberapa graf [6], graf kipas, graf roda, graf buku segitiga, dan graf persahabatan [7] juga telah ditentukan nilai total tak teratur totalnya. Dalam [7], Tilukay, dkk telah menentukan nilai total ketakteraturan total dari graf kipas, graf roda, graf buku segitiga, dan graf persahabatan, sebagai berikut.

**Teorema C.** Untuk setiap bilangan bulat  $n \geq 3$  dan  $W_n$  merupakan graf roda dengan  $n + 1$  titik dan  $2n$  sisi. Maka

$$ts(W_n) = \left\lceil \frac{2n + 2}{3} \right\rceil.$$

**Teorema D.** Diberikan  $n \geq 3$  dan  $P_1 \odot S_n$  merupakan graf buku segitiga dengan  $n$  segitiga dengan  $n + 1$  titik dan  $2n - 1$  sisi. Maka

$$ts(P_1 \odot S_n) = \left\lceil \frac{2n + 3}{3} \right\rceil.$$

Dalam penelitian ini, akan dikaji pelabelan total tak teratur total dari gabungan terpisah graf roda dan graf buku segitiga. Permasalahan dibatasi pada gabungan terpisah graf roda ( $mW_n$ ), untuk  $n \equiv 0 \pmod 3$  dan graf buku segitiga ( $m(P_1 \odot S_n)$ ), untuk  $n \equiv 1 \pmod 3$ .

## 2. Hasil dan Pembahasan

Diberikan  $W_n$  suatu graf roda dengan  $n + 1$  titik dan  $2n$  sisi. Graf  $mW_n$  adalah suatu graf yang diperoleh dengan menggabungkan  $m$  graf roda dengan karakteristik yang sama tanpa menghubungkan sebarang pasang titik atau sisi dari dua graf roda berbeda. Graf  $mW_n$  disebut juga gabungan terpisah (*disjoint union*)  $m$  graf roda dan memiliki  $m(n + 1)$  titik dan  $2mn$  sisi.

Tilukay dkk. telah menentukan nilai total tak teratur total dari graf roda  $W_n$ . Dengan memeriksa sifat pelabelan total tak teratur total pada  $W_n$ , dapat diketahui bahwa untuk  $n \equiv 0 \pmod 3$ , bobot sisi  $w(v_{n-n}v_n) = n + 3 + n - 1 = 2n + 2$  merupakan bobot sisi terbesar. Akibatnya dapat dilakukan pelabelan dengan pola serupa pada  $m$ -kopi graf  $W_n$ ,  $n \equiv 0 \pmod 3$ , dengan nilai label yang ditingkatkan berdasarkan kardinalitas himpunan sisi  $E(mW_n)$ .

Hal ini disajikan dalam lema berikut:

**Lema 1.** Misalkan  $n \geq 3$  dan  $m \geq 2$ . Jika  $mW_n$  adalah  $m$ -kopi graf roda dengan  $n$  titik, dimana  $n \equiv 0 \pmod 3$ , maka

$$ts(mW_n) = \frac{2mn}{3} + 1.$$

*Bukti.* Diketahui  $|V(mW_n)| = m(n + 1)$  dan  $|E(mW_n)| = 2mn$ . Berdasarkan Teorema A dan B,  $tes(mW_n) \geq \left\lfloor \frac{|E(mW_n)+2|}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2mn+2}{3} \right\rfloor$  sedangkan  $tvs(mW_n) \geq \left\lfloor \frac{|V(mW_n)+3|}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{mn+m+3}{4} \right\rfloor$  maka telah diperoleh batas bawah nilai  $ts(m(W_n))$ .

Untuk membuktikan bahwa  $\left\lfloor \frac{2mn+2}{3} \right\rfloor$  merupakan batas atas ( $m(W_n)$ ), konstruksikan pelabelan total tak teratur total  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, t_m\}$  sebagai berikut:

Misalkan  $V(mW_n) = \{u_i | 1 \leq i \leq m\} \cup \{v_i^j | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  dan

$$E(mW_n) = \{u_i v_i^j, v_i^j v_i^{j+1}, v_i^n v_i^1 | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Misalkan  $t_i = \left\lfloor \frac{2ni+2}{3} \right\rfloor = \frac{2ni}{3} + 1$  dan  $t_0 = 1$ , diperoleh pelabelan titik sebagai berikut:

$$f(u_i) = t_i - 1, \quad 1 \leq i \leq m;$$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} t_{i-1} + \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor - 1, & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq t_1 - 1; \\ t_i, & 1 \leq i \leq m, t_1 \leq j \leq n; \end{cases}$$

dan pelabelan sisi sebagai berikut:

$$f(u_i v_i^j) = \begin{cases} t_{i-1} + \left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor - 1, & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq t_1 - 1; \\ t_{i-1} + j - t_1 + 2, & 1 \leq i \leq m, t_1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

$$f(v_i^n v_i^1) = t_i - 1, \quad 1 \leq i \leq m.$$

$$f(v_i^j v_i^{j+1}) = \begin{cases} t_{i-1}, & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq t_1 - 2; \\ t_{i-1} + \left\lfloor \frac{t_1}{2} \right\rfloor, & 1 \leq i \leq m, j = t_1 - 1; \\ t_{i-1} + n - 2t_1 + j + 2, & 1 \leq i \leq m, t_1 \leq j \leq n - 1. \end{cases}$$

Dapat dilihat bahwa label terbesar adalah  $f(v_m^n) = t_m$ .

Selanjutnya dengan memberikan label titik-titik dan sisi-sisi graf  $mW_n$  dengan bilangan terbesar  $t_m$ , akan ditunjukkan bahwa bobot setiap titik dan setiap sisi pada  $mW_n$  berbeda.

a. Bobot Sisi

$$w(u_i v_i^j) = f(u_i) + f(u_i v_i^j) + f(v_i^j);$$

$$= \begin{cases} t_i + 2t_{i-1} + \left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor - 3, & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq t_1 - 1; \\ 2t_i + t_{i-1} - t_1 + j + 1, & 1 \leq i \leq m, t_1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

$$w(v_i^j v_i^{j+1}) = f(v_i^j) + f(v_i^j v_i^{j+1}) + f(v_i^{j+1});$$

$$= \begin{cases} \left( (t_{i-1} + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor - 1) + t_{i-1} + (t_{i-1} + \lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor - 1) \right), & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq t_1 - 2; \\ \left( (t_{i-1} + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor - 1) + (t_{i-1} + \lfloor \frac{t_1}{2} \rfloor) + t_i, \right) & 1 \leq i \leq m, j = t_1 - 1; \\ t_i + t_{i-1} + n - 2t_1 + j + 2 + t_i, & 1 \leq i \leq m, t_1 \leq j \leq n - 1. \end{cases}$$

$$w(v_i^n v_i^1) = f(v_i^n) + f(v_i^n v_i^1) + f(v_i^1);$$

$$= 2t_i + t_{i-1} + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor - 2, \quad 1 \leq i \leq m, j = 1.$$

b. Bobot Titik

$$w(u_i) = f(u_i) + \sum_{j=1}^n f(u_i v_i^j);$$

$$= t_i - 1 + (t_1 - 1) \left( t_{i-1} + \lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor - 1 \right) + (n - t_1 + 1)(t_{i-1} + j - t_1 + 2);$$

$$w(v_i^1) = f(v_i^1) + f(v_i^1 v_i^2) + f(v_i^n v_i^1) + f(v_i v_i^1);$$

$$= 3t_{i-1} + t_i + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor + \lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor - 3.$$

$$w(v_i^j) = f(v_i^j) + f(v_i^{j-1} v_i^j) + f(v_i^j v_i^{j+1}) + f(v_i v_i^j);$$

$$= t_i + 3t_{i-1} + \lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor - 3, \quad 1 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq t_1 - 2.$$

$$w(v_i^{t_1-1}) = f(v_i^{t_1-1}) + f(v_i^{t_1-2} v_i^{t_1-1}) + f(v_i^{t_1-1} v_i^{t_1}) + f(u_i v_i^{t_1-1});$$

$$= t_i + 3t_{i-1} + \lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor + \lfloor \frac{t_1}{2} \rfloor - 3, \quad 1 \leq i \leq m, j = t_1 - 1.$$

$$w(v_i^{t_1}) = f(v_i^{t_1}) + f(v_i^{t_1-1} v_i^{t_1}) + f(v_i^{t_1} v_i^{t_1+1}) + f(u_i v_i^{t_1});$$

$$= 3t_{i-1} - 2t_i + 2j + \lfloor \frac{t_1}{2} \rfloor + n + 4, \quad 1 \leq i \leq m, j = t_1.$$

$$w(v_i^j) = f(v_i^j) + f(v_i^{j-1} v_i^j) + f(v_i^j v_i^{j+1}) + f(u_i v_i^j), \quad t + 1 \leq j \leq n - 1;$$

$$= 3t_{i-1} - 3t_i - t_1 + 2n + 3j + 6.$$

$$w(v_i^n) = f(v_i^n) + f(v_i^{n-1} v_i^n) + f(v_i^n v_i^1) + f(u_i v_i^n);$$

$$= 2t_{i-1} + 2j + n - 3 - t_1.$$

Dapat diperiksa bahwa berdasarkan (i), bobot sisi-sisi membentuk barisan  $3, 4, \dots, 2mn + 2$ , dan bobot setiap titik berbeda, yaitu  $w(u_i) > w(v_i^n)$ ;  $w(v_i^j) > w(v_i^{j-1})$ ,  $2 \leq j \leq n$ ; dan  $w(u_i) > w(u_{i-1})$ ,  $2 \leq i \leq m$ . Dengan demikian, diperoleh bahwa  $ts(mW_n) = \lfloor \frac{2mn+2}{3} \rfloor$ . ■

Selanjutnya dengan mengacu pada sifat pelabelan total tak teratur total pada graf buku segitiga,  $P_1 \odot S_n$  dapat di lihat bahwa untuk  $n \equiv 1 \pmod 3$ , nilai  $ts(P_1 \odot S_n) = \lfloor \frac{2n+3}{3} \rfloor$ . Diperoleh bobot sisi  $W(vv_n) = 2n + 3 \equiv 2 \pmod 3$ .

Hal ini mengakibatkan dapat dilakukan pelabelan dengan pola yang serupa pada  $m$ -kopi graf buku segitiga. Pada Lema 2, akan ditentukan nilai total tak teratur total dari  $m$ -kopi graf buku segitiga.

**Lema 2.** Misalkan  $n \geq 3$  dan  $G \cong (P_1 \odot S_n)$  adalah graf buku segitiga dengan  $n$  halaman segitiga. Untuk  $n \equiv 1 \pmod 3$  dan  $m \geq 1$ ,

$$ts(mG) = \lfloor \frac{m(2n + 1) + 2}{3} \rfloor.$$

*Bukti.* Karena  $V(mG) = m(n + 2)$  dan  $E(mG) = m(2n + 1)$ , maka berdasarkan Teorema B dan C, diperoleh  $ts(mG) \geq \lfloor \frac{m(2n+1)+2}{3} \rfloor$ . Misalkan  $t_i = \lfloor \frac{i(2n+1)+2}{3} \rfloor$ , akan ditunjukkan bahwa

$ts(mG) \leq \left\lceil \frac{m(2n+1)+2}{3} \right\rceil$ . Untuk membuktikannya, konstruksikan suatu pelabelan total tak teratur  $f: V \cup E \rightarrow \left\{1, 2, \dots, \left\lceil \frac{m(2n+1)+2}{3} \right\rceil\right\}$ .

Misalkan  $V(mG) = \{x_i \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_i \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{v_i^j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  dan  $E(mG) = \{x_i y_i, x_i v_i^j, y_i v_i^j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ .

Untuk himpunan titik-titik  $V(mG)$ , definisikan:

$$f(x_i) = t_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq m;$$

$$f(y_i) = t_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq m;$$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} t_{i-1} + j - 1, & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq t_1; \\ t_i, & 1 \leq i \leq m, t_1 + 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Untuk himpunan sisi-sisi  $E(mG)$ , definisikan:

$$f(x_i y_i) = t_i, \quad 1 \leq i \leq m;$$

$$f(x_i v_i^j) = \begin{cases} t_{i-1}, & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq t_1; \\ j - t_1 + t_{i-1}, & 1 \leq i \leq m, t_1 + 1 \leq j \leq n; \end{cases}$$

$$f(y_i v_i^j) = \begin{cases} n - t_1 + t_{i-1} + 1, & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq \frac{t_1}{2}; \\ n - t_1 + t_{i-1} + 2, & 1 \leq i \leq m, \frac{t_1}{2} + 1 \leq j \leq t_1; \\ n - 2t_1 + t_{i-1} + j + 2, & 1 \leq i \leq m, t_1 + 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Dapat dilihat bahwa label terbesar yang digunakan adalah  $t_m$ , yaitu pada

$$f(y_m) = t_m;$$

$$f(x_m y_m) = t_m;$$

$$f(v_m^j) = t_m, \quad t_1 + 1 \leq j \leq n.$$

Selanjutnya, dapat diperoleh bobot setiap titik dan sisi sebagai berikut:

a. Bobot titik-titik:

$$\begin{aligned} w(x_i) &= f(x_i) + f(x_i y_i) + \sum_{j=1}^n f(x_i v_i^j) \\ &= t_{i-1}(t_1 + 1) + t_i + \left(\frac{n-t_1+1+2t_{i-1}}{2}\right)(n - t_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(y_i) &= f(y_i) + f(x_i y_i) + \sum_{j=1}^n f(y_i v_i^j) \\ &= 2t_i - t_1(3n + 1) + nt_{i-1} + \frac{5n+3n^2}{2} + \frac{9t_1^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(v_i^j) &= f(x_i v_i^j) + f(y_i v_i^j) + f(v_i^j) \\ &= \begin{cases} 3t_{i-1} - t_1 + n + j, & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq \frac{t_1}{2}; \\ 3t_{i-1} - t_1 + n + j + 1, & 1 \leq i \leq m, \frac{t_1}{2} + 1 \leq j \leq t_1; \\ t_i + 2t_{i-1} - 3t_1 + n + 2j + 2, & 1 \leq i \leq m, t_1 + 1 \leq j \leq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Dapat diperiksa bahwa bobot setiap titik berbeda.

b. Bobot sisi-sisi:

$$w(x_i y_i) = f(x_i) + f(y_i) + f(x_i y_i) = t_{i-1} + 2t_i.$$

$$\begin{aligned} w(x_i v_i^j) &= f(x_i) + f(y_i) + f(x_i v_i^j); \\ &= \begin{cases} 3t_{i-1} + j - 1, & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq t_1; \\ t_i + 2t_{i-1} - t_1 + j, & 1 \leq i \leq m, t_1 + 1 \leq j \leq n. \end{cases} \end{aligned}$$

$$w(y_i v_i^j) = f(y_i) + f(v_i^j) + f(y_i v_i^j);$$

$$= \begin{cases} t_i + 2t_{i-1} - t_1 + n + j, & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq \frac{t_1}{2}; \\ t_i + 2t_{i-1} - t_1 + n + j + 1, & 1 \leq i \leq m, \frac{t_1}{2} + 1 \leq j \leq t_1; \\ 2t_i + t_{i-1} - 2t_1 + n + j + 2, & 1 \leq i \leq m, t_1 + 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Diperoleh,

- $\{w(x_i v_i^j) | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} = \{3, 4, \dots, t_i + 2t_{i-1} - t_1 + n | 1 \leq j \leq m\}$
- $\{w(y_i v_i^j) | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq \frac{t_1}{2}\} = \{t_i + 2t_{i-1} - t_1 + n + 1, t_i + 2t_{i-1} - t_1 + n + 2, \dots, 2t_i + t_{i-1} - 1 | 1 \leq i \leq m\}$
- $\{w(x_i y_i) | 1 \leq i \leq m\} = \{t_{i-1} + 2t_i | 1 \leq i \leq m\}$
- $\{w(y_i v_i^j) | 1 \leq i \leq m, \frac{t_1}{2} + 1 \leq j \leq t_1\} = \{t_i + 2t_{i-1} - \frac{t_1}{2} + n + 2, t_i + 2t_{i-1} - \frac{t_1}{2} + n + 3, \dots, t_i + 2t_{i-1} + n + 1\}$ .
- $\{w(y_i v_i^j) | 1 \leq i \leq t_1 + 1 \leq j \leq n\} = \{2t_i + t_{i-1} - 2t_1 + n + 3, 2t_i + t_{i-1} - 2t_1 + n + 4, \dots, 2t_i + t_{i-1} - 2t_1 + 2n + 2\}$ .

Dapat diperiksa bahwa himpunan bobot sisi-sisi adalah  $\{3, 4, \dots, m(2n + 1) + 2\}$ .

Dengan demikian, dapat diperiksa bahwa bobot setiap pasang titik maupun setiap pasang sisi berbeda.

Jadi, fungsi  $f$  adalah pelabelan total tak teratur titik dan sisi, sehingga  $ts(mG) = \left\lfloor \frac{m(2n+1)+2}{3} \right\rfloor$ . ■

### 3. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa gabungan terpisah graf roda  $mW_n$ ,  $n \geq 3$ ,  $m \geq 2$  dan  $n \equiv 0 \pmod{3}$ , memiliki pelabelan total tak teratur total, dengan nilai total ketakteraturan total  $ts(mW_n) = \left\lfloor \frac{2mn+2}{3} \right\rfloor$ . Hal serupa pada gabungan terpisah graf buku segitiga,  $(mP_1 \odot S_n)$ ,  $n \geq 3$ ,  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , dan  $m \geq 1$  dengan nilai total ketakteraturan total  $ts(m(P_1 \odot S_n)) = \left\lfloor \frac{m(2n+1)+2}{3} \right\rfloor$ .

### Daftar Pustaka

- [1] M. Baca, S. Jendrol, M. Miller and J. Ryan, "On Irregular Total Labelings," *Discrete Mathematics*, vol. 307, pp. 1378-1388, 2007.
- [2] K. Wijaya and Slamin, "Total Vertex Irregular Labelings of Wheels, Fan, Suns, and Friendship Graphs," 2008.
- [3] Nurdin, A. N. M. Salman and E. T. Baskoro, "The Total Edge Irregular Strength of the Corona Product of Path with Some Graphs," 2008.
- [4] J. A. Galian, "A Dynamic Survey of Graph Labeling," *Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 17, no. #DS6, 2014.
- [5] C. C. Marzuki, A. N. M. Salman and M. Miller, "On The Total Irregularity Strength of Cycles and Paths," *Far East J. Math. Sci.*, vol. 82, no. 1, pp. 1-21, 2013.
- [6] R. Ramdani and A. N. M. Salman, "On The Total Irregularity Strength of Some Cartesian Product Graphs," *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, vol. 10, pp. 199-209, 2013.
- [7] M. I. Tilukay, A. N. M. Salman and E. R. Persulesy, "On The Total Irregularity Strength of Fan, Wheel, Triangular Book, and Friendship Graphs," *Procedia Computer Science*, vol. 74, pp. 124-131, 2015.

## THE ENTIRE FACE IRREGULARITY STRENGTH OF A BOOK WITH POLYGONAL PAGES

Meilin I. Tilukay<sup>1</sup>, Venn Y. I. Ilwaru<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia  
e-mail: <sup>1</sup>meilin.tilukay@fmipa.unpatti.ac.id

---

### Abstract

A face irregular entire labeling is introduced by Baca *et al.* recently, as a modification of the well-known vertex irregular and edge irregular total labeling of graphs and the idea of the entire colouring of plane graph. A face irregular entire  $k$ -labeling  $\lambda: V \cup E \cup F \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  of a 2-connected plane graph  $G = (V, E, F)$  is a labeling of vertices, edges, and faces of  $G$  such that for any two different faces  $f$  and  $g$ , their weights  $w_\lambda(f)$  and  $w_\lambda(g)$  are distinct. The minimum  $k$  for which a plane graph  $G$  has a face irregular entire  $k$ -labeling is called the entire face irregularity strength of  $G$ , denoted by  $efs(G)$ .

This paper deals with the entire face irregularity strength of a book with  $m$   $n$ -polygonal pages, where embedded in a plane as a closed book with  $n$  –sided external face.

*Keywords and phrases:* Book, entire face irregularity strength, face irregular entire  $k$ -labeling, plane graph, polygonal page.

## NILAI KETAKTERATURAN SELURUH MUKA GRAF BUKU SEGI BANYAK

### Abstrak

Pelabelan tak teratur seluruh muka diperkenalkan oleh Baca *et al.* baru-baru ini, sebagai suatu modifikasi atas pelabelan total tak teratur titik dan tak teratur sisi suatu graf serta ide tentang pewarnaan lengkap pada graf bidang. Pelabelan  $k$ - tak teratur seluruh muka  $\lambda: V \cup E \cup F \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  dari suatu graf bidang 2-connected  $G = (V, E, F)$  adalah suatu pelabelan seluruh titik, sisi, dan muka internal dari  $G$  sedemikian sehingga untuk sebarang dua muka  $f$  and  $g$  berbeda, bobot muka  $w_\lambda(f)$  and  $w_\lambda(g)$  juga berbeda. Bilangan bulat terkecil  $k$  sedemikian sehingga suatu graf bidang  $G$  memiliki suatu pelabelan  $k$ -tak teratur seluruh muka disebut nilai ketakteraturan seluruh muka dari  $G$ , dinotasikan oleh  $efs(G)$ .

Kami menentukan nilai eksak dari nilai ketakteraturan seluruh muka graf buku segi- $n$ , dimana pada bidang datar dapat digambarkan seperti suatu buku tertutup.

*Kata Kunci:* Graf bidang, graf buku segi- $n$ , nilai ketakteraturan seluruh muka, pelabelan lengkap  $k$ -tak teratur muka.

---

### 1. Introduction

Let  $G$  be a finite, simple, undirected graph with vertex set  $V(G)$  and edge set  $E(G)$ . A total labeling of  $G$  is a mapping that sends  $V \cup E$  to a set of numbers (usually positive or nonnegative integers). According to the condition defined in a total labeling, there are many types of total labeling have been investigated.

Baca, Jendrol, Miller, and Ryan in [1] introduced a vertex irregular and edge irregular total labeling of graphs. For any total labeling  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ , the *weight of a vertex*  $v$  and the *weight of an edge*  $e = xy$  are defined by  $w(v) = f(v) + \sum_{uv \in E} f(uv)$  and  $w(xy) = f(x) + f(y) + f(xy)$ , respectively. If all the vertex weights are distinct, then  $f$  is called a *vertex irregular total  $k$ -labeling*, and if all the edge weights are distinct, then  $f$  is called an *edge irregular total  $k$ -labeling*. The minimum value of  $k$  for which there exist a vertex (an edge) irregular total labeling  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  is called *the total vertex (edge) irregularity*

strength of  $G$  and is denoted by  $tvs(G)$  ( $tes(G)$ ), respectively. There are several bounds and exact values of  $tvs$  and  $tes$  were determined for different types of graphs given in [1] and listed in [2].

Furthermore, Ivanko and Jendrol in [3] posed a conjecture that for arbitrary graph  $G$  different from  $K_5$  and maximum degree  $\Delta(G)$ ,

$$tes(G) = \max \left\{ \left\lceil \frac{|E(G)| + 2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{\Delta(G) + 1}{2} \right\rceil \right\}.$$

Combining previous conditions on irregular total labeling, Marzuki *et al.* [4] defined a totally irregular total labeling. A total  $k$ -labeling  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  of  $G$  is called a *totally irregular total  $k$ -labeling* if for any pair of vertices  $x$  and  $y$ , their weights  $w(x)$  and  $w(y)$  are distinct and for any pair of edges  $x_1x_2$  and  $y_1y_2$ , their weights  $w(x_1x_2)$  and  $w(y_1y_2)$  are distinct. The minimum  $k$  for which a graph  $G$  has totally irregular total labeling, is called *total irregularity strength* of  $G$ , denoted by  $ts(G)$ . They have proved that for every graph  $G$ ,

$$ts(G) \geq \max\{tes(G), tvs(G)\} \quad (6)$$

Several upper bounds and exact values of  $ts$  were determined for different types of graphs given in [4], [5], [6], and [7].

Motivated by this graphs invariants, Baca *et al.* in [8] studied irregular labeling of a plane graph by labeling vertices, edges, and faces then considering the weights of faces. They defined a face irregular entire labeling.

A *2-connected plane graph*  $G = (V, E, F)$  is a particular drawing of planar graph on the Euclidean plane where every face is bound by a cycle. . Let  $G = (V, E, F)$  be a plane graph.

A labeling  $\lambda: V \cup E \cup F \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  is called a *face irregular entire  $k$ -labeling* of the plane graph  $G$  if for any two distinct faces  $f$  and  $g$  of  $G$ , their weights  $w_\lambda(f)$  and  $w_\lambda(g)$  are distinct. The minimum  $k$  for which a plane graph  $G$  has a face irregular entire  $k$ -labeling is called *the entire face irregularity strength* of  $G$ , denoted by  $efs(G)$ . The *weight* of a *face*  $f$  under the labeling  $\lambda$  is the sum of labels carried by that face and the edges and vertices of its boundary. They also provided the boundaries of  $efs(G)$ .

**Theorema A.** Let  $G = (V, E, F)$  be a 2-connected plane graph  $G$  with  $n_i$   $i$ -sided faces,  $i \geq 3$ . Let  $a = \min\{i | n_i \neq 0\}$  and  $b = \max\{i | n_i \neq 0\}$ . Then

$$\left\lceil \frac{2a + n_3 + n_4 + \dots + n_b}{2b + 1} \right\rceil \leq efs(G) \leq \max\{n_i | 3 \leq i \leq b\}.$$

For  $n_b = 1$ , they gave the lower bound as follow

**Theorema B.** Let  $G = (V, E, F)$  be a 2-connected plane graph  $G$  with  $n_i$   $i$ -sided faces,  $i \geq 3$ . Let  $a = \min\{i | n_i \neq 0\}$ ,  $b = \max\{i | n_i \neq 0\}$ ,  $n_b = 1$  and  $c = \max\{i | n_i \neq 0, i < b\}$ . Then

$$efs(G) \geq \left\lceil \frac{2a + |F| - 1}{2c + 1} \right\rceil.$$

Moreover, by considering the maximum degree of a 2-connected plane graph  $G$ , they obtained the following theorem.

**Theorem C.** Let  $G = (V, E, F)$  be a 2-connected plane graph  $G$  with maximum degree  $\Delta$ . Let  $x$  be a vertex of degree  $\Delta$  and let the smallest (and biggest) face incident with  $x$  be an  $a$ -sided (and a  $b$ -sided) face, respectively. Then

$$efs(G) \geq \left\lceil \frac{2a + \Delta - 1}{2b} \right\rceil.$$

They proved that Theorem B is tight for Ladder graph  $L_n$ ,  $n \geq 3$ , and its variation and Theorem C is tight for wheel graph  $W_n$ ,  $n \geq 3$ . In this paper, we determine the exact value of  $efs$  of a book with  $m$   $n$ -polygonal pages which is greater than the lower bound given in Theorem A - C.

## 2. Main Results

Considering Theorem C,  $efs(W_n)$ , and a condition where every face of a plane graph shares common vertices or edges, our first result provide a lower bound of the entire face irregularity strength of a graph with this condition. This can be considered as generalization of Theorem A, B, and C.

**Lemma 2.1.** Let  $G = (V, E, F)$  be a 2-connected plane graph with  $n_i$   $i$ -sided faces,  $i \geq 3$ . Let  $a = \min\{i | n_i \neq 0\}$ ,  $b = \max\{i | n_i \neq 0\}$ ,  $c = \max\{i | n_i \neq 0, i < b\}$ , and  $d$  be the number of common labels of vertices and edges which have bounded every face of  $G$ . Then

$$efs(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{2a + |F| - d - 1}{2c - d + 1} \right\rceil, & \text{for } n_b = 1, \\ \left\lceil \frac{2a + |F| - d}{2b - d + 1} \right\rceil, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

*Proof.* Let  $\lambda : V \cup E \cup F \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  be a face irregular entire  $k$ -labeling of 2-connected plane graph  $G = (V, E, F)$  with  $efs(G) = k$ . Our first proof is for  $n_b \neq 1$ . By Theorem A, the minimum face-weight is at least  $2a + 1$  and the maximum face-weight is at least  $2a + |F|$ . Since  $G$  is 2-connected, each face of  $G$  is a cycle. It implies that every face might be bounded by common vertices and edges.

Let  $d$  be the number of common labels of vertices and edges which have bounded every face of  $G$  and  $D$  be the sum of all common labels. Then the face-weights  $w_\lambda(f_1), w_\lambda(f_2), \dots, w_\lambda(f_{|F|})$  are all distinct and each of them contains  $D$ , implies the variation of face-weights is depend on  $2a - d + 2 \leq i \leq 2b - d + 1$  labels. Without adding  $D$ , the maximum sum of a face label and all vertices and edges-labels surrounding it is at least  $2a + |F| - d$ . This is the sum of at most  $2b - d + 1$  labels. Thus, we have  $efs(G) \geq \left\lceil \frac{2a + |F| - d}{2b - d + 1} \right\rceil$ .

For  $n_b = 1$ , it is a direct consequence from Theorem B with the same reason as in the result above. ■

This lower bound is tight for ladder graphs and its variation and wheels given in [8].

A book with  $m$   $n$ -polygonal pages  $B_m^n, m \geq 1, n \geq 3$ , is a plane graph obtained from  $m$ -copies of cycle  $C_n$  that share a common edge. There are many ways drawing  $B_m^n$  for which the external face of  $B_m^n$  can be an  $n$ -sided face or a  $(2n - 2)$ -sided face.

By considering that topologically,  $B_m^n$  can be drawn on a plane as a closed book such that  $B_m^n$  has an  $n$ -sided external face, an  $n$ -sided internal face, and  $m - 1$  number of  $(2n - 2)$ -sided internal faces, the entire face irregularity strength of  $B_m^n$  is provided in the next theorem.

**Theorem 2.2.** For  $B_m^n, m \geq 1, n \geq 3$ , be a book with  $m$   $n$ -polygonal pages whose an  $n$ -sided external face, an  $n$ -sided internal face, and  $m - 1$   $(2n - 2)$ -sided internal faces, we have

$$efs(B_m^n) = \begin{cases} 2, & \text{for } m \in \{1, 2\}; \\ \left\lceil \frac{4n + m - 7}{4n - 5} \right\rceil, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

*Proof.* Let  $B_m^n, m \geq 1, n \geq 3$ , be a 2-connected plane graph. For  $m \in \{1, 2\}$ , by Lemma 2.1, we have  $efs(B_m^n) \geq 2$ . Labeling the  $n$ -sided external face by label 2 and all the rests by label 1, then all face-weights are distinct. Thus,  $efs(B_m^n) = 2$ .

Now for  $m > 2$ , let  $z = efs(B_m^n)$ . Since every internal face of  $B_m^n$  shares 2 common vertices,  $a = n$ ,  $b = 2n - 2$ , and  $n_b > 1$ , by Lemma 2.1, we have  $z \geq \left\lceil \frac{2a + |F| - 2}{2b - 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{2n + m - 1}{4n - 5} \right\rceil$ . Consider that  $z = \left\lceil \frac{2n + m - 1}{4n - 5} \right\rceil$  is not valid, since for  $m \leq 2n - 4$ , the maximum label is 1.

Moreover, since  $B_m^n$  has at least 2 face-weights which are contributed by the same number of labels, there must be 2 faces of the same weight. Then the divisor must be at least  $4n - 4$ . Thus we have  $z \geq \left\lceil \frac{4n + m - 7}{4n - 5} \right\rceil$ .

Next, to show that  $z$  is an upper bound for entire face irregularity strength of  $B_m^n$ , let  $B_m^n, m \geq 1, n \geq 3$ , be the 2-connected plane graph with an  $n$ -sided internal face  $f_{int}^n, m - 1$   $(2n - 2)$ -sided internal faces and an external  $n$ -sided face  $f_{ext}^n$ .

Let  $m_1 = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  and  $m_2 = m - m_1$ . Our goal is to have  $m_1$  distinct even face-weights and  $m_2$  distinct odd face-weights such that  $m$   $(2n - 2)$ -sided face-weights are distinct and form an arithmetic progression.

Let  $z = \lfloor \frac{4n+m-7}{4n-5} \rfloor$ . It can be seen that  $B_m^n$  has  $m$  different paths of length  $(n - 1)$ . Next, we divide  $m_1$  paths into  $S = \lfloor \frac{m_1}{4n-5} \rfloor$  parts, where part  $s$ -th consists of  $(4n - 5)$  paths, for  $1 \leq s \leq S - 1$ , and part  $S$ -th consists of  $r_1 = m_1 - (S - 1)(4n - 5)$  paths. Also, we divide  $m_2$  paths into  $T = \lfloor \frac{m_2+1}{4n-5} \rfloor$  parts, where the first part consists of  $(4n - 6)$  paths, part  $t$ -th consists of  $(4n - 5)$  paths, for  $2 \leq t \leq T - 1$ , and part  $T$ -th consists of  $r_2 = m_2 - (T - 1)(4n - 5)$  paths.

Let

$$V(B_m^n) = \{x, y, u(s)_i^{2j}, u(S)_k^{2j}, v(t)_i^{2j} \neq v(1)_1^{2j}, v(T)_l^{2j} \mid 1 \leq s \leq S - 1, 1 \leq t \leq T - 1, 1 \leq i \leq 4n - 5, 1 \leq j \leq 2n - 2, 1 \leq k \leq r_1, 1 \leq l \leq r_2\};$$

$$E(B_m^n) = \{xy\} \cup$$

$$\{u(s)_i^1 = x u(s)_i^2, u(s)_i^{2j-1} = u(s)_i^{2j-2} u(s)_i^{2j}, u(s)_i^{2n-3} = u(s)_i^{2n-4} y \mid 1 \leq s \leq S - 1, 1 \leq i \leq 4n - 5, 2 \leq j \leq n - 2\} \cup$$

$$\{u(S)_i^1 = x u(S)_i^2, u(S)_i^{2j-1} = u(S)_i^{2j-2} u(S)_i^{2j}, u(S)_i^{2n-3} = u(S)_i^{2n-4} y \mid 1 \leq i \leq r_1, 2 \leq j \leq n - 2\} \cup$$

$$\{v(t)_i^1 = x v(t)_i^2, v(t)_i^{2j-1} = v(t)_i^{2j-2} v(t)_i^{2j}, v(t)_i^{2n-3} = v(t)_i^{2n-4} y \mid 1 \leq t \leq T, 1 \leq i \leq 4n - 5, 2 \leq j \leq n - 2\} \cup$$

$$\{v(T)_i^1 = x v(T)_i^2, v(T)_i^{2j-1} = v(T)_i^{2j-2} v(T)_i^{2j}, v(T)_i^{2n-3} = v(T)_i^{2n-4} y \mid 1 \leq i \leq r_2, 2 \leq j \leq n - 2\};$$

$$F(B_m^n) = \{f_{ext}^n, f_{int}^n, u(s)_i^{2n-2}, u(S)_k^{2n-2}, v(t)_i^{2n-2} \neq v(1)_1^{2n-2}, v(T)_j^{2n-2} \mid 1 \leq s \leq S - 1, 1 \leq t \leq T - 1, 1 \leq i \leq 4n - 5, 1 \leq k \leq r_1, 1 \leq l \leq r_2\};$$

Where  $f_{ext}^n$  is bounded by cycle  $xv(1)_2^2 v(1)_2^4 \dots v(1)_2^{2n-4} yx$ ;

$f_{int}^n$  is bounded by cycle  $xu(1)_1^2 u(1)_1^4 \dots u(1)_1^{2n-4} yx$ ;

$u(s)_i^{2n-2}$  is bounded by cycle  $xu(s)_i^2 u(s)_i^4 \dots u(s)_i^{2n-4} y u(s)_{i+1}^{2n-4} u(s)_{i+1}^{2n-6} \dots u(s)_{i+1}^2 x$ , for  $1 \leq s \leq S, i \neq r_1$ ;

$u(S)_{r_1}^{2n-2}$  is bounded by cycle  $xu(S)_{r_1}^2 u(S)_{r_1}^4 \dots u(S)_{r_1}^{2n-4} y v(T)_{r_2}^{2n-4} v(T)_{r_2}^{2n-6} \dots v(T)_{r_2}^2 x$ ; and

$v(t)_i^{2n-2}$  is bounded by cycle  $xv(t)_i^2 v(t)_i^4 \dots v(t)_i^{2n-4} y v(t)_{i+1}^{2n-4} v(t)_{i+1}^{2n-6} \dots v(t)_{i+1}^2 x$ , for  $1 \leq t \leq T, i \neq r_2$ ;

Our notations above imply that, without losing generality, for  $v(t)_i^j$ , we let  $2 \leq i \leq 4n - 5$  for  $t = 1$ . It means that there is no vertex or edge or face  $v(1)_1^j$ .

Now, we divide our labeling of  $B_m^n$  into 2 cases as follows:

**Case 1. For odd  $m$  with  $2 \leq r_2 \leq 2n - 1$  or even  $m$ ;**

Define an entire  $k$ -labeling  $\lambda : V \cup E \cup F \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  of  $B_m^n$  as follows.

$$\lambda(x) = \lambda(y) = \lambda(xy) = \lambda(f_{ext}^n) = 1;$$

$$\lambda(f_{int}^n) = 2;$$

$$\lambda(u(s)_i^j) = \begin{cases} 2s - 1 & \text{for } 1 \leq s \leq S, 1 \leq i \leq \min\{r_1, 2n - 2\} \text{ and } 1 \leq j \leq 2n - i - 1 \\ 2s & \text{for } 1 \leq s \leq S, 1 \leq i \leq \min\{r_1, 2n - 2\} \text{ and } 2n - i \leq j \leq 2n - 2 \\ 2s & \text{for } 1 \leq s \leq S, 2n - 1 \leq i \leq \min\{r_1, 4n - 5\} \text{ and } 1 \leq j \leq 2n - 2 \lfloor \frac{i-2n+2}{2} \rfloor - 2 \\ 2s + 1 & \text{for } 1 \leq s \leq S, 2n - 1 \leq i \leq \min\{r_1, 4n - 5\} \text{ and } 2n - 2 \lfloor \frac{i-2n+2}{2} \rfloor - 1 \leq j \leq 2n - 2 \end{cases}$$

$$\lambda(v(t)_i^j) = \begin{cases} 2t - 1, & \text{for } 1 \leq t \leq T, 1 \leq i \leq \min\{r_2, 2n - 2\} \text{ and } 1 \leq j \leq 2n - i - 2; \\ 2t, & \text{for } 1 \leq t \leq T, 1 \leq i \leq \min\{r_2, 2n - 2\} \text{ and } 2n - i - 1 \leq j \leq 2n - 3; \\ 2t, & \text{for } 1 \leq t \leq T, 2n - 1 \leq i \leq \min\{r_2, 4n - 5\} \text{ and } 1 \leq j \leq 2n - 2 \lfloor \frac{i-2n+2}{2} \rfloor - 3; \\ 2t + 1, & \text{for } 1 \leq t \leq T, 2n - 1 \leq i \leq \min\{r_2, 4n - 5\} \text{ and } 2n - 2 \lfloor \frac{i-2n+2}{2} \rfloor - 2 \leq j \leq 2n - 3; \\ 2t - 2, & \text{for } 1 \leq t \leq T, i = 1 \text{ and } j = 2n - 2; \\ 2t - 1, & \text{for } 1 \leq t \leq T, 2 \leq i \leq \min\{r_2, 2n - 1\} \text{ and } j = 2n - 2; \\ 2t, & \text{for } 1 \leq t \leq T - 1, 2n \leq i \leq 4n - 5 \text{ and } j = 2n - 2. \\ 2t, & \text{for } t = T, 2n - 1 \leq i \leq \min\{r_2 - 1, 4n - 6\} \text{ and } j = 2n - 2 \end{cases}$$

**Case 2. For odd  $m$  with  $r_2 = 1$  or  $2n \leq r_2 \leq 4n - 5$ ;**

Define an entire  $k$ -labeling  $\lambda^* : V \cup E \cup F \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  of  $B_m^n$  as follows.

$$\lambda^*(x) = \lambda^*(y) = \lambda^*(xy) = \lambda^*(f_{ext}^n) = 1;$$

$$\lambda^*(f_{int}^n) = 2;$$

$$\lambda^*(u(s)_i^j) = \lambda(u(s)_i^j)$$

$$\lambda^*(v(t)_i^j) = \begin{cases} 2T - 2, & \text{for } r_2 = 1, t = T, i = 1, j = 1; \\ 2T - 1, & \text{for } r_2 = 1, t = T - 1, i = 4n - 5, j = 2n - 2; \\ \lambda(v(t)_i^j) + 1, & \text{for } r_2 \text{ odd}, 2n \leq r_2 \leq 4n - 5, t = T, i = r_2, j = 1; \\ \lambda(v(t)_i^j) - 1, & \text{for } r_2 \text{ odd}, 2n \leq r_2 \leq 4n - 5, t = T, i = r_2 - 1, j = 2n - 2; \\ \lambda(v(t)_i^j) - 1, & \text{for } r_2 \text{ even}, 2n \leq r_2 \leq 4n - 5, t = T, i = r_2 - 1, j = 2n - 3; \\ \lambda(v(t)_i^j) + 1, & \text{for } r_2 \text{ even}, 2n \leq r_2 \leq 4n - 5, t = T, i = r_2 - 1, j = 2n - 2; \\ \lambda(v(t)_i^j), & \text{for otherwise.} \end{cases}$$

It is easy to check that the labeling  $\lambda$  is an entire  $z$ -labeling. Then we have evaluate the face  $-$ weights set  $\{w(f_{ext}^n), w(f_{int}^n), w(u(s)_i^{2n-2}), w(v(t)_i^{2n-2}) \mid 1 \leq s \leq S, 1 \leq t \leq T, 1 \leq i \leq 4n - 5\}$  as follows.

$$w(f_{ext}^n) = 2n + 1;$$

$$w(f_{int}^n) = 2n + 2;$$

$$w(u(s)_i^{2n-2}) = \begin{cases} (2s - 1)(4n - 5) + 2i, & \text{for } 1 \leq s \leq S - 1, 1 \leq i \leq 4n - 5; \\ (2s - 1)(4n - 5) + 2i, & \text{for } s = S - 1, 1 \leq i \leq r_1; \\ (2s - 1)(4n - 5) + 2r_1, & \text{for even } m, s = S - 1, i = r_1; \\ (2s - 1)(4n - 5) + 2r_1 - 1, & \text{for odd } m, s = S - 1, i = r_1. \end{cases}$$

$$w(v(t)_i^{2n-2}) = \begin{cases} (2t - 1)(4n - 5) + 2i + 1, & \text{for } 1 \leq t \leq T - 1, 1 \leq i \leq 4n - 5; \\ (2T - 1)(4n - 5) + 2i + 1, & \text{for } t = T, 1 \leq i \leq r_2 - 1. \end{cases}$$

Since all face-weights are distinct, then  $\lambda$  is a face irregular entire  $z$ -labeling of  $B_m^n$  where  $m$  is odd with  $2 \leq r_2 \leq 2n - 1$  or  $m$  is even; and  $\lambda^*$  is a face irregular entire  $z$ -labeling of  $B_m^n$  where  $m$  is odd with  $r_2 = 1$  or  $2n \leq r_2 \leq 4n - 5$ . Thus,  $z = \lfloor \frac{4n+m-7}{4n-5} \rfloor$  is the entire face irregularity strength of  $B_m^n$ . ■

Note that our result in Theorem 2.2 show that the  $efs(B_m^n)$  is greater than the lower bound in Lemma 2.1.

Hence, we propose the following open problem.

## Open Problems

1. Find a class of graph which satisfy a condition where the lower bound in Lemma 2.1 is sharp;
2. Generalize the lower bound for any condition.

## References

- [1] M. Baca, S. Jendrol, M. Miller and J. Ryan, "On Irregular Total Labelings," *Discrete Mathematics*, vol. 307, pp. 1378-1388, 2007.
- [2] J. A. Galian, "A Dynamic Survey of Graph Labeling," *Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 18 #DS6, 2015.
- [3] J. Ivanco and S. Jendrol, "The Total Edge Irregularity Strength of Trees," *Discuss. Math. Graph Theory*, vol. 26, pp. 449-456, 2006.
- [4] C. C. Marzuki, A. N. M. Salman and M. Miller, "On The Total Irregularity Strengths of Cycles and Paths," *Far East Journal of Mathematical Sciences*, vol. 82 (1), pp. 1-21, 2013.
- [5] R. Ramdani and A. N. M. Salman, "On The Total Irregularity Strengths of Some Cartesian Products Graphs," *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, vol. 10 No. 2, pp. 199-209, 2013.
- [6] R. Ramdani, A. N. M. Salman, H. Assiyatun, A. Semanicova-Fenovcikova and M. Baca, "Total Irregularity Strength of Three Family of Graphs," *Math. Comput. Sci*, vol. 9, pp. 229-237, 2015.
- [7] M. I. Tilukay, A. N. M. Salman and E. R. Persulesy, "On The Total Irregularity Strength of Fan, Wheel, Triangular Book, and Friendship Graphs," *Procedia Computer Science*, vol. 74, pp. 124-131, 2015.
- [8] M. Baca, S. Jendrol, K. Kathiresan and K. Muthugurupackiam, "Entire Labeling of Plane Graphs," *Applied Mathematics and Information Sciences*, vol. 9, no. 1, pp. 263-207, 2015.

## DIAGNOSA PENYAKIT SALURAN PERNAPASAN DENGAN MENGGUNAKAN *SUPPORT VECTOR MACHINE* (SVM)

Zeth A. Leleury<sup>1</sup>, Berny P. Tomasouw<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia  
e-mail: <sup>2</sup>peboberny@gmail.com

---

### Abstrak

*Support Vector Machine* (SVM) telah banyak digunakan untuk membantu menyelesaikan berbagai macam permasalahan dalam rangka pengambilan keputusan berdasarkan pelatihan yang diberikan. Aplikasi SVM dapat diterapkan dalam berbagai bidang, salah satunya dalam bidang kesehatan. Dalam penelitian ini, aplikasi SVM digunakan untuk mendiagnosa penyakit saluran pernapasan khususnya pada penyakit Tuberculosis, Asma, Sinusitis, Bronchitis, Pneumonia, dan ISPA berdasarkan gejala-gejala dari penyakit saluran pernapasan tersebut. Data yang digunakan dalam penelitian ini sebanyak 77 data, 56 data untuk pelatihan dan 21 data untuk pengujian. Data di atas diperoleh dari ruang rekam medis RSUD Dr. M. Haulussy Ambon. Dalam penelitian ini, diujicobakan variasi fungsi kernel pada SVM untuk mendapatkan tingkat keakuratan yang terbaik. Tingkat keakuratan terbaik dari pengujian 21 data diperoleh sebesar 80.95%.

*Kata Kunci:* Penyakit saluran pernapasan, SVM.

## A DIAGNOSE OF SOME RESPIRATORY DISEASES USING SUPPORT VECTOR MACHINE (SVM)

### Abstract

Support Vector Machine (SVM) has been widely used to solve various problems in the context of decision making based on the training provided. SVM application can be applied in various fields, one of them is in the health field. In this study, application of SVM is used to diagnose diseases of respiratory tract, especially in Tuberculosis, Asthma, Sinusitis, Bronchitis, Pneumonia, and ISPA diseases based on the symptoms of the respiratory disease. The data used in this study as many as 77 data, the data for the 56 training and 21 data for testing. The above data was obtained from medical records space Hospital Dr. M. Haulussy Ambon. In this study, variations on SVM kernel functions is tested to get the best accuracy. Best accuracy rate of 21 testing data is obtained by 80.95%.

*Keywords:* Respiratory disease, SVM.

---

### 1. Pendahuluan

*Support Vector Machine* (SVM) dikembangkan oleh Boser, Guyon, Vapnik, dan pertama kali dipresentasikan pada tahun 1992 di *Annual Workshop on Computational Learning Theory*. Konsep dasar SVM bermula dari masalah klasifikasi dua kelas yang tergolong dalam masalah linier (*linear problem*). SVM berusaha menemukan *hyperplane* (pemisah) terbaik pada *input space* untuk memisahkan dua kelas tersebut. Selanjutnya SVM dikembangkan agar dapat bekerja pada masalah non-linear, dengan memasukkan konsep fungsi pada ruang kerja berdimensi tinggi.

Dalam mencari *hyperplane* terbaik, SVM akan dihadapkan pada proses mencari solusi dari masalah pemrograman kuadrat. Masalah pemrograman kuadrat sendiri dapat berupa bentuk primal dan bentuk dual. Pada umumnya penelitian yang dikembangkan cenderung memilih menyelesaikan bentuk dual ketimbang bentuk primal karena dianggap lebih mudah. Selain itu performa SVM akan menjadi lebih baik jika dipilih fungsi kernel yang tepat. Dalam bukunya yang berjudul "*Support Vector Machines for Pattern Classification*",

Abe [1] menjelaskan cara menerapkan fungsi kernel dan cara menyelesaikan masalah pengenalan pola dengan banyak kelas (*multi-class*) dengan menggunakan SVM.

### 1.1. Sistem Pernapasan pada Manusia

Sistem pernapasan pada manusia adalah sistem menghirup oksigen dari udara serta mengeluarkan karbon dioksida dan uap air [2]. Dalam proses pernapasan, oksigen merupakan zat kebutuhan utama. Oksigen untuk pernapasan diperoleh dari udara di lingkungan sekitar. Alat-alat pernapasan berfungsi memasukan udara yang mengandung oksigen dan mengeluarkan udara yang mengandung karbon dioksida dan uap air. Tujuan proses pernapasan yaitu untuk memperoleh energi. Pada peristiwa bernapas terjadi pelepasan energi. Sistem pernapasan pada manusia mencakup dua hal, yakni saluran pernapasan dan mekanisme pernapasan.

Saluran pernapasan adalah bagian tubuh manusia yang berfungsi sebagai tempat pertukaran gas yang diperlukan untuk proses pernapasan. Saluran ini berpangkal pada hidung, tekak (*faring*), tenggorokan (*trakea*), cabang tenggorokan (*bronkus*), bronkiolus, alveolus, dan berakhir pada paru-paru. Namun, dalam organ-organ tersebut dapat mengalami gangguan. Gangguan ini biasanya berupa kelainan, penyakit, atau karena ulah manusia itu sendiri (seperti merokok). Penyakit atau gangguan yang menyerang sistem pernapasan ini dapat menyebabkan terganggunya proses pernapasan. Adapun penyakit yang bisa terjadi pada saluran pernapasan berdasarkan beberapa aspek keperawatan yaitu:

#### a. Tuberkulosis

Tuberkulosis (TBC) merupakan infeksi pada paru-paru yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis*. Infeksi biasanya terjadi di bagian atas paru-paru. Gejala Tuberkulosis antara lain:

- 1) Kelelahan;
- 2) Kehilangan berat badan;
- 3) Berkeringat pada malam hari.

Jika infeksi lebih buruk, Gejala Tuberkulosis yang akan timbul yaitu:

- 1) Dada sakit;
- 2) Batuk dengan mengeluarkan dahak atau darah;
- 3) Napas pendek atau sesak nafas.

#### b. Asma

Asma adalah gangguan pada organ pernapasan berupa penyempitan saluran pernapasan akibat reaksi terhadap suatu rangsangan tertentu. Gejala-gejala awal dari serangan asma yaitu:

- 1) Perubahan dalam pola pernapasan;
- 2) Bersin-bersin;
- 3) Perubahan suasana hati;
- 4) Hidung mampat;
- 5) Batuk;
- 6) Gatal-gatal pada tenggorokan;
- 7) Sering merasa capek;
- 8) Lingkaran hitam di bawah mata;
- 9) Susah tidur;
- 10) Turunnya toleransi tubuh terhadap kegiatan olahraga.

Gejala-gejala asma akut memberi indikasi bahwa suatu serangan asma sedang terjadi. Gejalanya meliputi:

- 1) Napas berat;
- 2) Batuk-batuk;
- 3) Napas pendek tersengal-sengal;
- 4) Sesak dada;

Hal-hal di atas menunjukkan bahwa perubahan telah terjadi pada saluran pernapasan dan aliran udara terhambat. Penderita asma mengalami beberapa atau semua gejala di atas pada suatu serangan.

#### c. Sinusitis

Sinusitis merupakan peradangan yang terjadi pada organ sinus. Sinus sendiri adalah rongga udara yang terdapat di daerah wajah yang langsung terhubung dengan hidung. Peradangan pada sinus ini dapat menyebabkan penimbunan lendir pada rongga sinus dan menjadi media bagi pertumbuhan bakteri.

Gejala-gejala yang ditimbulkan penyakit ini adalah:

- 1) Sakit atau nyeri pada wajah dan dahi;

- 2) Ingus keluar dari hidung berwarna kuning atau hijau serta berbau tajam;
- 3) Hidung tersumbat;
- 4) Berkurangnya daya pengecap;
- 5) Kepala yang terasa nyeri;
- 6) Batuk;
- 7) Sakit tenggorokan.

d. Bronkhitis

Penyakit bronkhitis yang menyerang organ paru-paru yang merupakan organ tubuh yang sangat penting bagi kehidupan manusia yang merupakan penyedia udara (napas) bagi manusia, namun sering kali menuai gangguan penyakit yang umumnya diakibatkan oleh kesalahan individu itu sendiri, seperti merokok yang merupakan faktor utama dari kasus penyebab penyakit bronkhitis dan penyakit seputar paru-paru yang banyak menyerang.

Bronkhitis banyak diartikan oleh masyarakat umum sebagai penyakit sesak napas akut terutama bagi mereka yang aktif dalam rokok. Mereka yang menderita bronkhitis umumnya akan menunjukkan gejala umum seperti:

- 1) Batuk berdahak (dahaknya bisa berwarna kemerahan);
- 2) Sesak napas ketika melakukan olahraga atau aktivitas ringan;
- 3) Sering menderita infeksi pernapasan (misalnya flu);
- 4) Napas berat;
- 5) Mudah lelah;
- 6) Pembengkakan di pergelangan kaki, kaki, dan tungkai kaki kiri dan kanan;
- 7) Wajah, telapak tangan atau selaput lendir yang berwarna kemerahan;
- 8) Pipi tampak kemerahan;
- 9) Sakit kepala;
- 10) Gangguan penglihatan.

e. Pneumonia

Pneumonia atau sering disebut paru-paru basah adalah infeksi atau peradangan pada salah satu atau kedua paru-paru, lebih tepatnya peradangan itu terjadi pada kantung udara. Kantung udara akan terisi cairan atau nanah, sehingga menyebabkan sesak nafas, batuk berdahak, demam, menggigil, dan kesulitan bernapas. Infeksi tersebut disebabkan oleh berbagai organisme, termasuk bakteri, virus dan jamur.

Tanda-tanda dan gejala pneumonia bervariasi mulai dari yang ringan hingga yang berat, tergantung pada faktor-faktor seperti jenis kuman penyebab, usia penderita dan kondisi kesehatan secara keseluruhan. Tanda-tanda dan gejala pneumonia yang ringan sering kali mirip dengan flu atau sakit demam dan batuk-pilek, namun tak kunjung sembuh atau bertahan lama.

Ciri-ciri dan gejala pneumonia antara lain:

- 1) Demam, berkeringat dan menggigil;
- 2) Suhu tubuh lebih rendah dari normal pada orang di atas usia 65 tahun, dan pada orang dengan sistem kekebalan tubuh yang lemah;
- 3) Batuk berdahak tebal dan kental (lengket);
- 4) Nyeri dada saat bernapas dalam atau ketika batuk;
- 5) Sesak napas (nafas cepat);
- 6) Kelelahan dan nyeri otot;
- 7) Mual, muntah atau diare;
- 8) Sakit kepala.

Ada banyak kemungkinan penyebab pneumonia, yang paling sering adalah karena infeksi bakteri dan virus dari udara yang kita hirup.

f. Infeksi Saluran Pernapasan Atas (ISPA)

Infeksi saluran pernapasan atas atau sering disebut sebagai ISPA adalah terjadinya infeksi yang parah pada bagian sinus, tenggorokan, saluran udara, atau paru-paru. Infeksi yang terjadi lebih sering disebabkan oleh virus meski bakteri juga bisa menyebabkan kondisi ini.

ISPA akan menimbulkan gejala yang terutama terjadi pada hidung dan paru-paru. Beberapa gejalanya antara lain:

- 1) Hidung tersumbat atau berair;
- 2) Para-paru terasa terhambat;
- 3) Batuk-batuk dan tenggorokan terasa sakit;
- 4) Kerap merasa kelelahan;
- 5) Tubuh merasa sakit.

Apabila ISPA bertambah parah, gejala yang lebih serius akan muncul, seperti:

- 1) Kesulitan bernapas;
- 2) Demam tinggi dan menggigil;
- 3) Tingkat oksigen dalam darah rendah;
- 4) Kesadaran yang menurun dan bahkan pingsan.

## 1.2. Support Vector Machine (SVM)

### a. SVM Linier

Misalkan terdapat  $m$  data *pelatihan*  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)\}$  dimana  $x_i \in \mathbb{R}^n$  adalah sampel data dan  $y_i \in \{1, -1\}$  adalah target atau kelas dari sampel data. Misalkan juga bahwa data untuk kedua kelas terpisah secara linier (*linearly separable*) maka ingin dicari fungsi pemisah (*hyperplane*)

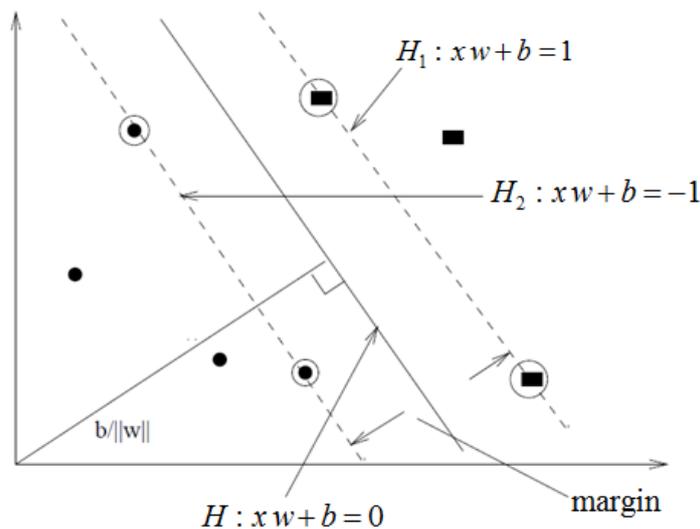
$$f(x) = xw + b = 0,$$

dimana  $w \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  adalah parameter bobot dan  $b \in \mathbb{R}$  adalah parameter bias serta berlaku:

$$x_i w + b > 0 \text{ untuk } y_i = 1;$$

$$x_i w + b < 0 \text{ untuk } y_i = -1.$$

Misalkan  $H : xw + b = 0$  adalah *hyperplane* yang ingin dicari sedangkan  $H_1 : xw + b = 1$  dan  $H_2 : xw + b = -1$  adalah *hyperplane* dari kelas 1 dan kelas -1. Untuk mendapatkan  $H$  yang optimal maka jarak  $H_1$  dan  $H_2$  ke  $H$  haruslah sama dengan syarat bahwa tidak ada sampel data antara  $H_1$  dan  $H_2$  serta jarak  $H_1$  ke  $H_2$  adalah jarak yang maksimal. Untuk memaksimalkan jarak  $H_1$  dan  $H_2$  maka digunakan sampel data positif yang terletak pada  $H_1$  dan sampel data negatif yang terletak pada  $H_2$ . Sampel data ini disebut *support vector* karena fungsinya sebagai penentu dalam mendapatkan *hyperplane* yang optimal.



Gambar 1. Contoh *Hyperplane* Optimal yang Memisahkan 2 Kelas

Masalah mencari parameter  $w$  dan  $b$  yang optimal agar diperoleh *hyperplane* yang optimal merupakan masalah pemrograman kuadrat

$$\min_{w,b} \frac{1}{2} w^T w$$

dengan kendala

$$y_i (x_i w + b) \geq 1 \quad , \quad i = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Solusi dari masalah pemrograman kuadrat di atas didapatkan dengan cara mengubah bentuk primal ke bentuk dual dengan memperkenalkan pengali Lagrange. Misalkan  $\alpha \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  adalah pengali Lagrange maka masalah pemrograman kuadrat (1) di atas berubah menjadi

$$L(w, b, \alpha) = \frac{1}{2} w^T w - \sum_{i=1}^m \alpha_i (y_i (x_i w + b)) + \sum_{i=1}^m \alpha_i.$$

Solusi dari masalah ini harus memenuhi syarat Karush-Kuhn-Tucker (KKT) yakni:

$$\text{i. } \frac{\partial L}{\partial w} = 0 \Rightarrow w - \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i x_i = 0$$

$$\Rightarrow w = \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i x_i;$$

$$\text{ii. } \frac{\partial L}{\partial b} = 0 \Rightarrow 0 - \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i = 0;$$

$$\text{iii. } \alpha_i (y_i (x_i w + b) - 1) = 0;$$

$$\text{iv. } \alpha_i \geq 0.$$

Dengan demikian bentuk dual yang diperoleh adalah

$$\text{Max } L(\alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i x_j^T$$

dengan kendala

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i = 0 \quad \text{dan} \quad \alpha_i \geq 0 \quad \text{dimana } i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

Parameter bobot dan bias dapat dihitung dengan persamaan

$$w = \sum_{i=1}^{N_{SV}} \alpha_i y_i x_i \quad \text{dan} \quad b = \frac{1}{N_{SV}} \sum_{i=1}^{N_{SV}} (y_i - x_i w). \quad (3)$$

$SV$  adalah himpunan *support vector* dan  $i \in SV$  jika  $\alpha_i \neq 0$ .  $N_{SV}$  adalah jumlah *support vector*. Dengan menggunakan persamaan

$$f(x) = x w + b$$

maka data input  $x \in \mathbb{R}^n$  yang baru diklasifikasikan menjadi

$$\begin{cases} \text{klas } +1, & \text{jika } f(x) > 0 \\ \text{klas } -1, & \text{jika } f(x) < 0 \end{cases} \quad (4)$$

Selanjutnya jika terjadi kasus pemisahan yang tidak sempurna, dalam hal ini terdapat data antara  $H_1$  dan  $H_2$ . Untuk mengatasi masalah ini, akan diperkenalkan variabel *slack*  $\mu$  yang tak negatif ( $\mu \geq 0$ ) dan dimasukkan pada fungsi kendala (1) sehingga menjadi

$$y_i(x_i w + b) \geq 1 - \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Sedangkan pada fungsi objektifnya ditambahkan parameter positif  $C$  sehingga menjadi

$$\frac{1}{2} w^T w + C \sum_{i=1}^m \mu_i$$

Secara lengkap, masalah pemrograman kuadrat (1) berubah menjadi

$$\min_{w,b} \frac{1}{2} w^T w + C \sum_{i=1}^m \mu_i$$

dengan kendala

(5)

$$y_i(x_i w + b) \geq 1 - \mu_i, \quad \mu_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Dengan menggunakan pengali Lagrange  $\alpha \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  maka bentuk primal (5) dapat diubah menjadi bentuk dual sebagai berikut

$$\text{Max } L(\alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i x_j^T$$

dengan kendala

(6)

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i = 0 \quad \text{dan} \quad 0 \leq \alpha_i \leq C, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

## b. SVM Non-Linear

Dalam masalah klasifikasi kebanyakan sampel data tidak terpisah secara linier sehingga jika digunakan SVM linier maka hasil yang diperoleh tidak optimal dan mengakibatkan hasil klasifikasi yang buruk. Yang menjadi salah satu keunggulan SVM terletak pada bagian ini, yakni SVM dapat diperluas untuk menyelesaikan masalah non-linier. SVM linier dapat diubah menjadi SVM non-linier dengan menggunakan metode kernel. Metode ini bekerja dengan cara memetakan data input ke ruang *feature* yang dimensinya lebih tinggi menggunakan fungsi sebuah  $\phi$ . Sebagai contoh, misalkan  $u = (u_1, u_2)$  adalah data input pada  $\mathbb{R}^2$  dan  $\phi(u) = (1, \sqrt{2}u_1, \sqrt{2}u_2, u_1^2, u_2^2, \sqrt{u_1} u_2)$  adalah data input pada ruang *feature* yang berdimensi lebih tinggi yakni  $\mathbb{R}^5$ . Diharapkan data input hasil pemetaan ke ruang *feature* akan terpisah secara linier sehingga dapat dicari *hyperplane* yang optimal.

Misalkan  $x \rightarrow \phi(x)$  maka Persamaan (6) dapat ditulis menjadi

$$\text{Max } \psi(\alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \alpha_i \alpha_j y_i y_j \phi^T(x_i) \phi(x_j)$$

dengan kendala

(7)

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i = 0 \quad \text{dan} \quad \alpha_i \geq 0 \quad \text{dimana} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Parameter bobot dan bias dapat dihitung dengan persamaan

$$w = \sum_{i=1}^{N_{SV}} \alpha_i y_i \phi(x_i) \text{ dan } b = \frac{1}{N_{SV}} \sum_{i=1}^{N_{SV}} (y_i - w^T \phi(x_i)); \quad (8)$$

Sedangkan *hyperplane* optimal adalah

$$f(x) = w^T \phi(x) + b = 0. \quad (9)$$

Permasalahan yang muncul adalah jika sampel data input untuk tahap *training* dalam jumlah besar maka perhitungan hasil kali titik  $\phi^T(x_i) \phi(x_j)$  pada (7) akan membuat waktu perhitungan semakin lama. Oleh karena itu diperlukan cara untuk menghitung  $\phi^T(x_i) \phi(x_j)$  tanpa mengetahui fungsi  $\phi$ .

Misalkan  $K$  adalah sebuah fungsi dengan sifat

$$K(u, v) = \phi^T(u) \phi(v)$$

dimana  $u, v \in \mathbb{R}^n$  dan  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $n < m$ . Fungsi  $K$  ini disebut sebagai fungsi kernel. Menurut Shigeo Abe [1] fungsi kernel yang sering digunakan adalah sebagai berikut:

- 1) Kernel linier:  $K(u, v) = u^T v$ .
- 2) Kernel polinomial:  $K(u, v) = (1 + u^T v)^d$ ,  $d \geq 2$ .
- 3) Kernel RBF (Radial Basis Function):  $K(u, v) = \exp(-\gamma \|u - v\|^2)$ ,  $\gamma > 0$ .

Dengan menggunakan konsep fungsi kernel di atas maka Persamaan (7)-(9) berubah menjadi

$$\text{Max } \psi(\alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \alpha_i \alpha_j y_i y_j K(x_i, x_j)$$

dengan kendala

(10)

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i = 0 \text{ dan } \alpha_i \geq 0 \text{ dimana } i = 1, 2, \dots, m.$$

Parameter bias dapat dihitung dengan persamaan

$$b = \frac{1}{N_{SV}} \sum_{i=1}^{N_{SV}} \left( y_i - \sum_{i=1}^{N_{SV}} \alpha_i y_i K(x_i, x_j) \right)$$

sedangkan *hyperplane* optimalnya

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N_{SV}} \alpha_i y_i K(x_i, x) + b. \quad (11)$$

Data input  $x \in \mathbb{R}^n$  yang baru tetap diklasifikasikan berdasarkan syarat pada (4).

### c. *Multi-class SVM*

Baik SVM linier maupun SVM non-linier yang telah dibahas di atas hanya dapat dipakai dalam menyelesaikan masalah klasifikasi dua kelas. Namun kenyataannya bahwa seringkali yang dihadapi adalah masalah klasifikasi *multi-class*. Metode *Pairwise* diterapkan pada SVM sehingga dapat menyelesaikan masalah klasifikasi multikelas.

### d. SVM berbasis *Pairwise*

Misalkan terdapat  $N$  jumlah kelas dari sampel data yang akan diklasifikasi. Metode *Pairwise* bekerja dengan cara membentuk semua kombinasi pasangan dua kelas yakni sebanyak  $N(N-1)/2$  dimana  $N > 2$ . Oleh

karena itu, metode ini juga seringkali disebut sebagai metode satu lawan satu (*one against one*). Misalkan *hyperplane* optimal yang diperoleh dari kelas  $i$  dan kelas  $j$  adalah

$$f_{ij}(x) = w_{ij}^T \phi(x) + b_{ij} \quad (12)$$

dimana  $i = 1, 2, \dots, N-1$  dan  $j = i+1, i+2, \dots, N$  serta berlaku  $f_{ji}(x) = -f_{ij}(x)$ . Data input  $x \in \mathbb{R}^n$  yang baru akan diklasifikasikan berdasarkan hasil *voting* yang dihitung dengan rumus

$$f_i(x) = \sum_{j \neq i, j=1}^N \text{sgn}(f_{ij}(x)), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

dimana

$$\text{sgn}(u) = \begin{cases} 1, & \text{jika } u \geq 0; \\ -1, & \text{jika } u < 0. \end{cases} \quad (14)$$

Kelas ke- $i$  yang memiliki nilai  $f_i$  maksimum yang akan menjadi pemenang dan data input  $x$  akan ditetapkan sebagai anggota kelas ke- $i$ ,

$$\arg \max_{i=1,2,\dots,N} f_i(x) \quad (15)$$

Algoritma metode *Pairwise* secara ringkas adalah sebagai berikut:

- 1) Dapatkan *hyperplane* optimal yakni Persamaan (12) untuk semua kombinasi pasangan dua kelas.
- 2) Untuk data input  $x$  yang baru hitung nilai  $f_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  berdasarkan Persamaan (13) dan (14).
- 3) Data input  $x$  diklasifikasikan menggunakan Persamaan (15).

## 2. Hasil dan Pembahasan

### 2.1. Variabel Yang Digunakan

Berdasarkan gejala klinisnya, penyakit saluran pernapasan yaitu Tuberculosis, Asma, Sinusitis, Bronchitis, Pneumonia, dan ISPA memiliki 16 gejala yang selanjutnya menjadi variabel input pada jaringan saraf tiruan. Gejala-gejala tersebut adalah batuk, sesak nafas, nyeri dada, mual dan muntah, demam, nyeri kepala, nyeri ulu hati, menggigil, berkeringat dingin, susah tidur, pilek, keluar secret/ingus, mudah lelah, kekakuan sendi, lidah berjamur dan hidung tersumbat.

Data-data yang diproses tersebut diambil secara acak, mulai dari anak-anak sampai dewasa pada tahun 2013 sampai dengan tahun 2015. Jumlah data sebanyak 77, dimana digunakan 56 data untuk pelatihan, dan 21 data untuk pengujian keakuratan sistem yang digunakan untuk mengenali pola masukan.

Agar data dapat dikenali oleh SVM, maka data harus diubah kedalam bentuk numerik, baik variabel maupun isinya, yaitu:

**Tabel 1. Gejala Penyakit dan Nilainya [3]**

Gejala-gejala	Variabel	Nilai
Batuk ( $X_1$ )	Tidak	0
	Kering	0.25
	Berdahak	0.5
	Berdahak berdarah	1
Sesak Nafas ( $X_2$ )	Tidak	0
	Jarang terjadi	0.5
	Terus menerus	1
Nyeri Dada ( $X_3$ )	Tidak	0
	Jarang terjadi	0.5
	Sering Terjadi	1
Mual dan Muntah ( $X_4$ )	Tidak	0
	Mual	0.25
	Muntah	0.5
	Mual dan muntah	1
Demam ( $X_5$ )	Tidak	0
	Jarang terjadi	0.5
	Sering Terjadi	1
Nyeri Kepala ( $X_6$ )	Tidak	0
	Ya	1
Nyeri Ulu Hati ( $X_7$ )	Tidak	0
	Ya	1
Menggigil ( $X_8$ )	Tidak	0
	Ya	1
Berkeringat Dingin ( $X_9$ )	Tidak	0
	Sering	0.5
	Sering pada malam hari	1
Susah Tidur ( $X_{10}$ )	Tidak	0
	Ya	1
Pilek ( $X_{11}$ )	Tidak	0
	Ya	1
Keluar Sekret/ingus ( $X_{12}$ )	Tidak	0
	Ya	0.5
	Ya dan berbau	1
Mudah Lelah ( $X_{13}$ )	Tidak	0
	Ya	1
Kekakuan Sendi ( $X_{14}$ )	Tidak	0
	Ya	1
Lidah Berjamur ( $X_{15}$ )	Tidak	0
	Ya	1
Nyeri pada Hidung ( $X_{16}$ )	Tidak	0
	Ya	0.5
	Ya dan terasa nyeri	1

Sedangkan rancangan penetapan keluaran (output) adalah:

- 1) Diberi nilai "1" untuk pasien yang didiagnosa penyakit tuberculosis.
- 2) Diberi nilai "2" untuk pasien yang didiagnosa penyakit asma.
- 3) Diberi nilai "3" untuk pasien yang didiagnosa penyakit sinusitis.
- 4) Diberi nilai "4" untuk pasien yang didiagnosa penyakit bronchitis.
- 5) Diberi nilai "5" untuk pasien yang didiagnosa penyakit pneumonia.
- 6) Diberi nilai "6" untuk pasien yang didiagnosa penyakit ISPA.

## 2.2. Hasil Penelitian

Dalam penelitian ini diasumsikan bahwa data gejala penyakit yang digunakan sebagai input tidak linier sehingga metode yang digunakan adalah SVM non-linier. Pada tahap pelatihan akan diujicobakan variasi fungsi kernel sehingga bisa dipilih fungsi kernel yang memberikan hasil terbaik. Fungsi kernel inilah yang selanjutnya akan digunakan dalam sistem diagnosa.

Data pada tahap pelatihan akan digunakan lagi sebagai data tahap pengujian sehingga bisa dilihat fungsi kernel yang memberikan hasil terbaik. Tabel berikut memperlihatkan hasil pelatihan dengan variasi fungsi kernel.

**Tabel 2. Perbandingan Hasil Pelatihan**

Fungsi Kernel	Tingkat Akurasi
Kernel Linier	91.07 %
Kernel Polinomial	90.03 %
Kernel RBF	90.07 %

Pada tabel di atas, terlihat bahwa fungsi kernel yang memberikan hasil terbaik adalah kernel linier dengan tingkat keakuratan 91.07 %.

Selanjutnya, *hyperplane* yang diperoleh dari fungsi kernel linier akan digunakan dalam tahap pengujian. Hasil tahap pengujian dari 21 data dapat dilihat dalam tabel berikut.

**Tabel 3. Hasil Tahap Pengujian**

Pasien	Kelas	Hasil Pengujian
1	1	1
2	1	1
3	1	1
4	1	1
5	1	1
6	1	1
7	1	1
8	1	1
9	2	2
10	2	4
11	2	2
12	2	2
13	2	2
14	2	1
15	3	3
16	4	4
17	4	1
18	5	5
19	5	4
20	6	4
21	6	6

Berdasarkan tabel di atas, dapat dilihat bahwa dari 21 data testing diperoleh hasil yaitu 17 pasien memiliki karakter yang dapat dikenali atau diagnosa dengan menggunakan program sama dengan hasil diagnosa dari dokter dan 4 pasien (pasien ke-10,14,17,19 dan 20) yang tidak sesuai. Pasien ke-10 memiliki diagnosa penyakit Asma, namun setelah dilakukan proses diagnosa menggunakan program, pasien tersebut didiagnosa memiliki penyakit Bronchitis. Sehingga dapat disimpulkan bahwa tingkat keberhasilan metode SVM dengan fungsi kernel linier untuk dapat mengenali pola dengan benar sebesar 80.95%.

### 3. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian maka dapat disimpulkan bahwa sistem yang dibuat mampu untuk mendiagnosa penyakit saluran pernapasan secara optimal dengan dengan fungsi Kernel Linier serta diperoleh tingkat keberhasilan pengujian pelatihan sebesar 80,95%.

### Daftar Pustaka

- [1] S. Abe, Support Vector Machines for Pattern Classification, Second penyunt., London: Springer-Verlag, 2010.
- [2] H. Sasrawan, “Kehidupan Awal Masyarakat Indonesia,” 2 Januari 2013. [Online]. Available: <http://hedisasrawan.blogspot.co.id/2013/01/kehidupan-awal-masyarakat-indonesia.html?m=1>. [Diakses 5 November 2015].
- [3] N. I. Pradasari, F. T. P. W. dan D. Triyanto, “Aplikasi Jaringan Saraf Tiruan untuk memprediksi Penyakit Saluran Pernapasan dengan Metode Backpropagation,” *Jurnal Coding Sistem Komputer Untan*, vol. 1, no. 1, 2013.
- [4] L. Fausett, Fundamentals of Neural Network: Architectures, Fundamentals, and Applications, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1994.

# **PENERAPAN LOGIKA FUZZY METODE SUGENO UNTUK MENENTUKAN JUMLAH PRODUKSI ROTI BERDASARKAN DATA PERSEDIAAN DAN JUMLAH PERMINTAAN (STUDI KASUS: PABRIK ROTI SARINDA AMBON)**

**Dorteus Lodewyik Rahakbauw**

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Maluku  
e-mail: lodewyik@gmail.com

---

## **Abstrak**

Keuntungan yang maksimal diperoleh dari penjualan yang maksimal. Apabila jumlah produk yang diproduksi oleh perusahaan kurang dari jumlah permintaan maka perusahaan akan kehilangan peluang untuk mendapatkan keuntungan yang maksimal dan sebaliknya. Oleh karena itu, perencanaan jumlah produk dalam Pabrik Roti Sarinda sangatlah penting. Agar dapat memenuhi permintaan pasar dengan tepat dan dengan jumlah yang sesuai. Faktor-faktor yang perlu diperhatikan dalam menentukan jumlah produk, antara lain: jumlah persediaan dan jumlah permintaan. Penulisan dan pembahasan pada penelitian ini adalah tentang sistem inferensi Fuzzy Metode Sugeno, penerapan sistem inferensi Fuzzy Metode Sugeno untuk menentukan jumlah produksi berdasarkan jumlah permintaan dan data persediaan yang dimana data dari penulisan ini didapat dari Pabrik Roti Sarinda dengan menggunakan Matlab. Untuk membuat rancangan program yang bisa diharapkan dapat diaplikasikan dan dipakai, sehingga membantu proses penentuan jumlah produksi berdasarkan data persediaan dan jumlah permintaan pada Pabrik Roti Sarinda. Logika Fuzzy Metode Sugeno dalam menentukan jumlah produksi roti berdasarkan data persediaan dan jumlah permintaan yang telah dibangun dapat digunakan untuk membantu perusahaan dalam mengambil sebuah keputusan dengan nilai kebenaran mencapai 86.92165%.

*Kata Kunci:* Logika Fuzzy, permintaan, persediaan, produksi.

## **APPLICATION OF FUZZY LOGIC METHOD SUGENO TO DETERMINE THE TOTAL PRODUCTION OF BREAD, BASED ON SUPPLIES AND TOTAL DEMAND DATA (CASE STUDY: BREAD FACTORY SARINDA AMBON)**

## **Abstract**

The maximum benefit is obtained from the maximum sales. If the number of products manufactured by the company is less than the demand, then the company will lose the opportunity to gain the maximum profit and vice versa. Therefore, planning the number of products in the Bread Factory Sarinda very important. In order to meet market demand appropriately and by a corresponding amount. Factors to consider in determining the amount of the product, among other things: the amount of supply and demand. Writing and discussion in this study is about the inference system Fuzzy Sugeno method, application of the inference system Fuzzy Sugeno method to determine the amount of production based on the number of request and inventory data where the data of this paper obtained from the Bread Factory Sarinda and processed using Matlab. To making a program that can be expected to be applied and used, thus helping the process of determining the amount of production based on inventory data and the number of request at the Bread Factory Sarinda Sugeno Fuzzy Logic method in determining the amount of bread production based on inventory data and the number of requests that have been built can be used to assist companies in taking a decision with the truth value reaching 86.92165%.

*Keywords:* Demand, fuzzy logic, production, supply.

---

## 1. Pendahuluan

Pada era globalisasi saat ini persaingan pasar dalam dunia industri sangat kompetitif sehingga dibutuhkan kemampuan pengelola perusahaan yang profesional agar dapat memenangkan persaingan dalam pasar global. Pada bidang produksi kemampuan itu antara lain adalah kemampuan merencanakan atau menentukan jumlah produksi barang. Hal ini agar dapat memenuhi permintaan pasar dengan jumlah yang sesuai dengan memperhatikan persediaan barang sehingga bisa mendapatkan keuntungan yang maksimal.

Keuntungan yang maksimal diperoleh dari penjualan yang maksimal. Dimana penjualan yang maksimal artinya dapat memenuhi semua permintaan yang ada, apa bila jumlah produk yang di produksi oleh perusahaan kurang dari permintaan maka perusahaan akan kehilangan peluang untuk mendapatkan keuntungan yang maksimal. Sebaliknya apabila perusahaan memproduksi produk lebih banyak dari jumlah permintaan maka perusahaan akan mengalami kerugian. Oleh karena itu, perencanaan jumlah produksi dalam suatu perusahaan sangatlah penting agar dapat memenuhi permintaan pasar yang tepat dan dengan jumlah yang sesuai. Faktor-faktor yang perlu diperhatikan dalam menentukan jumlah produksi, antara lain: jumlah persediaan dan jumlah permintaan.

Logika Fuzzy merupakan ilmu yang mempelajari mengenai ketidakpastian. Logika Fuzzy juga mampu untuk memetakan suatu ruang input kedalam suatu ruang output dengan tepat. Dalam teori sistem Fuzzy dikenal suatu konsep sistem Fuzzy yang digunakan dalam proses prediksi pada umumnya terdiri atas empat tahap, yaitu fuzzifikasi (proses pengubahan bilangan tegas kedalam bentuk bilangan Fuzzy), pembentukan *rule basis* (basis aturan Fuzzy), sistem inferensi atau penalaran Fuzzy, defuzzifikasi (proses pengubahan bilangan Fuzzy hasil dari sistem inferensi Fuzzy ke dalam bilangan tegas). Salah satu metode dalam sistem Fuzzy yang dapat dipakai dalam memprediksi adalah metode Sugeno, metode ini hampir sama dengan metode Mamdani hanya saja output (konsekuen) bukan merupakan himpunan Fuzzy tetapi berupa konstanta atau persamaan linier.

Dengan adanya masalah tersebut maka untuk menentukan jumlah produksi dalam memenuhi permintaan konsumen yang fluktuatif diperlukan suatu alternatif pemecahan masalah tanpa menambah fasilitas yang ada, yaitu dengan mengaplikasikan Metode Fuzzy Sugeno menggunakan tool box Matlab. Penerapan Metode Fuzzy Sugeno menggunakan tool box Matlab dalam perencanaan jumlah produksi, diharapkan perusahaan dapat mengatasi fluktuasi permintaan konsumen dengan biaya produksi yang minimal. Maka, pada penelitian ini akan diterapkan Logika Fuzzy Metode Sugeno untuk menentukan jumlah produksi barang berdasarkan data persediaan dan jumlah permintaan pada Pabrik Roti Sarinda.

## 2. Tinjauan Pustaka

### 2.1. Logika Fuzzy

Konsep tentang logika Fuzzy diperkenalkan oleh Prof. Lotfi Astor Zadeh pada 1962. Logika Fuzzy adalah metodologi sistem kontrol pemecahan masalah, yang cocok untuk diimplementasikan pada sistem, mulai dari sistem yang sederhana, sistem kecil, *embedded system*, jaringan PC, *multichannel* atau *workstation* berbasis akuisisi data, dan sistem kontrol. Metodologi ini dapat diterapkan pada perangkat keras, perangkat lunak, atau kombinasi keduanya. Dalam logika klasik dinyatakan bahwa segala sesuatu bersifat biner, yang artinya adalah hanya mempunyai dua kemungkinan, “Ya atau Tidak”, “Benar atau Salah”, “Baik atau Buruk”, dan lain-lain. Oleh karena itu, semua ini dapat mempunyai nilai keanggotaan 0 atau 1. Akan tetapi, dalam logika Fuzzy kemungkinan nilai keanggotaan berada diantara 0 dan 1. Artinya, bisa saja suatu keadaan mempunyai dua nilai “Ya dan Tidak”, “Benar dan Salah”, “Baik dan Buruk” secara bersamaan, namun besar nilainya tergantung pada bobot keanggotaan yang dimilikinya.

### 2.2. Konsep Dasar Himpunan Fuzzy

Jika  $X$  adalah sebuah koleksi obyek-obyek yang dinotasikan dengan  $x$ , maka himpunan Fuzzy  $\tilde{A}$  dalam  $X$  adalah sebuah himpunan pasangan berurutan  $\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x) | x \in X\}$ . Notasi  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  disebut fungsi keanggotaan atau derajat keanggotaan  $x$  dalam  $\tilde{A}$  yang memetakan  $X$  ke ruang keanggotaan  $M$  yang terletak pada rentang  $[0, 1]$ , bila  $M$  hanya memuat dua titik 0 dan 1, maka  $\tilde{A}$  adalah bukan Fuzzy dan  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  serupa dengan karakteristik fungsi himpunan non Fuzzy. [1]

### 2.3. Penalaran Fuzzy Metode Sugeno

Penalaran dengan metode Sugeno hampir sama dengan penalaran Mamdani, hanya saja output (konsekuen) sistem tidak berupa himpunan Fuzzy, melainkan berupa konstanta atau persamaan linear. Michio Sugeno mengusulkan penggunaan *singleton* sebagai fungsi keanggotaan dari konsekuen. *Singleton* adalah sebuah himpunan Fuzzy dengan fungsi keanggotaan yang pada titik tertentu mempunyai sebuah nilai dan 0 di luar titik tersebut. Ada 2 model Fuzzy metode Sugeno yaitu sebagai berikut:

#### a. Model Fuzzy Sugeno Orde-Nol

Secara umum bentuk model Fuzzy Sugeno Orde Nol adalah:

IF  $(x_1 \text{ is } A_1) \circ (x_2 \text{ is } A_2) \circ (x_3 \text{ is } A_3) \circ \dots \circ (x_N \text{ is } A_N)$  THEN  $z = k$  dengan  $A_i$  adalah himpunan Fuzzy ke- $i$  sebagai antesenden, dan  $k$  adalah suatu konstanta sebagai konsekuen.

#### b. Model Fuzzy Sugeno Orde-Satu

Secara umum bentuk model Fuzzy Sugeno Orde-Satu adalah:

IF  $(x_1 \text{ is } A_1) \circ (x_2 \text{ is } A_2) \circ (x_3 \text{ is } A_3) \circ \dots \circ (x_N \text{ is } A_N)$  THEN  $z = p_1 * x_1 + \dots + p_N * x_N + q$  dengan  $A_i$  adalah himpunan Fuzzy ke- $i$  sebagai antesenden, dan  $p_i$  adalah suatu konstanta ke- $i$  dan  $q$  juga merupakan konstanta dalam konsekuen.

Berdasarkan model Fuzzy tersebut, ada tahapan-tahapan yang harus dilakukan dalam implementasi metode Sugeno yaitu sebagai berikut:

##### 1) Pembentukan himpunan Fuzzy

Pada tahapan ini variabel input dari system Fuzzy ditransfer ke dalam himpunan Fuzzy untuk dapat digunakan dalam perhitungan nilai kebenaran dari premis pada setiap aturan dalam basis pengetahuan. Dengan demikian tahap ini mengambil nilai-nilai tegas dan menentukan derajat di mana nilai-nilai tersebut menjadi anggota dari setiap himpunan Fuzzy yang sesuai.

##### 2) Aplikasi fungsi implikasi

Tiap-tiap aturan (proposisi) pada basis pengetahuan Fuzzy akan berhubungan dengan suatu relasi Fuzzy. Bentuk umum dari aturan yang digunakan dalam fungsi implikasi adalah sebagai berikut: IF  $x$  is  $A$  THEN  $y$  is  $B$  dengan  $x$  dan  $y$  adalah skalar, dan  $A$  dan  $B$  adalah himpunan Fuzzy. Proposisi yang mengikuti IF disebut sebagai antesenden sedangkan proposisi yang mengikuti THEN disebut konsekuen. Proposisi ini dapat diperluas dengan menggunakan operator Fuzzy seperti, IF  $(x_1 \text{ is } A_1) \circ (x_2 \text{ is } A_2) \circ (x_3 \text{ is } A_3) \circ \dots \circ (x_N \text{ is } A_N)$  THEN  $y$  is  $B$  dengan  $\circ$  adalah operator (misal: OR atau AND). Secara umum fungsi implikasi yang dapat digunakan yaitu sebagai berikut:

- Min (*minimum*) Fungsi ini akan memotong output himpunan Fuzzy.
- Dot (*product*) Fungsi ini akan menskala output himpunan Fuzzy.

Pada metode Sugeno ini, fungsi implikasi yang digunakan adalah fungsi min.

#### c. Defuzzifikasi ( *Defuzzification* )

Input dari proses defuzzifikasi adalah himpunan Fuzzy yang dihasilkan dari proses komposisi dan output adalah sebuah nilai. Untuk aturan IFTHEN Fuzzy dalam persamaan  $RU(k) = \text{IF } x_1 \text{ is } A_{1k} \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } A_{nk} \text{ THEN } y \text{ is } B_k$ , dimana  $A_{1k}$  dan  $B_k$  berturut-turut adalah himpunan Fuzzy dalam  $U_i R$  ( $U$  dan  $V$  adalah domain fisik),  $i = 1, 2, \dots, n$  dan  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) U$  dan  $y V$  berturut-turut adalah variabel input dan output (linguistik) dari sistem Fuzzy. Defuzzifier pada persamaan di atas didefinisikan sebagai suatu pemetaan dari himpunan Fuzzy  $B$  ke dalam  $V R$  (yang merupakan output dari inferensi Fuzzy) ke titik tegas  $y * V$ . [2]. Pada metode Sugeno *defuzzification* dilakukan dengan perhitungan *Weight Average* (WA):

$$WA = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \dots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n}$$

Keterangan:

WA= Nilai rata-rata,  $\alpha_n$  = nilai predikat aturan ke- $n$ , dan  $z_n$  = indeks nilai output (konstanta) ke- $n$ .

### 2.4. Fungsi Keanggotaan

Fungsi keanggotaan adalah grafik yang mewakili besar dari derajat keanggotaan masing-masing variabel input yang berada dalam interval antara 0 dan 1. Derajat keanggotaan sebuah variabel  $x$  dilambangkan dengan simbol  $\mu(x)$ . Aturan-aturan (*Rules*) menggunakan nilai keanggotaan sebagai faktor bobot untuk menentukan pengaruhnya pada saat melakukan inferensi dalam menarik kesimpulan. Ada

beberapa fungsi yang bisa digunakan namun dalam penelitian ini peneliti memakai fungsi keanggotaan kurva bahu dan kurva segitiga.

### a. Representasi Kurva Bahu

Fungsi keanggotaan yang merepresentasikan kurva bahu kiri:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$

Fungsi keanggotaan yang merepresentasikan kurva bahu kanan:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq b; \\ \frac{x-b}{c-b}, & b \leq x \leq c; \\ 1, & x \geq c. \end{cases}$$

### b. Representasi kurva segitiga

Fungsi keanggotaan yang merepresentasikan kurva segitiga adalah

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \text{ atau } x \geq c; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b; \\ \frac{c-x}{c-b}, & b < x < c. \end{cases}$$

#### Keterangan :

$a$  = nilai domain terkecil yang mempunyai derajat keanggotaan nol;

$b$  = nilai domain yang mempunyai derajat keanggotaan satu;

$c$  = nilai domain terbesar yang mempunyai derajat keanggotaan nol;

$x$  = nilai input atau output yang akan diubah ke dalam bilangan Fuzzy.

Fungsi untuk memetakan kembali nilai Fuzzy menjadi nilai *crisp* yang menjadi output/nilai solusi permasalahan.

## 2.5. Galat Presentasi

Dalam banyak situasi peramalan, ketepatan dipandang sebagai kriteria penolakan untuk memilih suatu peramalan. Galat persentase merupakan suatu ukuran ketepatan peramalan, dalam penelitian ini peneliti memakai nilai tengah galat persen atau MPE (Mean Percentage Error) bentuk persamaannya seperti berikut.

$$\text{MPE} = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{(Y_t - \hat{Y}_t)}{Y_t} \times 100\%}{n}$$

## 3. Hasil dan Pembahasan

### 3.1. Data

Bahan penelitian yang dipakai berupa data sekunder yang hanya terdiri dari data persediaan minimal (600 bks) maksimal (900 bks), jumlah permintaan minimal (1000 bks) maksimal (1600 bks), dan jumlah produksi minimal (1950 bks) maksimal (2600) dalam satu hari. Dengan data-data tersebut, kemudian peneliti menggunakan Microsoft Excel 2010 untuk memanggil data secara random untuk mendapatkan data

persediaan, permintaan, dan produksi perhari dalam jangka waktu satu bulan, untuk bulan Januari 2016 dapat dilihat pada Tabel berikut.

**Tabel 1. Data Permintaan, Persediaan dan Produksi**

Tgl	Nama Roti	Pmn	Prs	Prd
02/01/2016	Roti Kaya	1415	622	2400
04/01/2016	Roti Kaya	1145	865	2210
05/01/2016	Roti Kaya	1264	783	2118
06/01/2016	Roti Kaya	1295	736	2098
07/01/2016	Roti Kaya	1324	854	2565
08/01/2016	Roti Kaya	1589	806	2579
09/01/2016	Roti Kaya	1279	679	2282
11/01/2016	Roti Kaya	1239	873	2339
12/01/2016	Roti Kaya	1398	877	2541
13/01/2016	Roti Kaya	1090	888	1996
14/01/2016	Roti Kaya	1064	894	2167
15/01/2016	Roti Kaya	1384	722	2362
16/01/2016	Roti Kaya	1315	766	2417
18/01/2016	Roti Kaya	1355	607	2341
19/01/2016	Roti Kaya	1156	730	2218
20/01/2016	Roti Kaya	1241	680	2309
21/01/2016	Roti Kaya	1570	653	2437
22/01/2016	Roti Kaya	1297	629	2229
23/01/2016	Roti Kaya	1366	697	2373
25/01/2016	Roti Kaya	1185	728	2208
26/01/2016	Roti Kaya	1089	736	2093
27/01/2016	Roti Kaya	1519	618	2258
28/01/2016	Roti Kaya	1030	616	2157
29/01/2016	Roti Kaya	1376	662	2301
30/01/2016	Roti Kaya	1555	863	2488

### 3.2. Proses Perhitungan Logika Fuzzy Metode Sugeno

#### a. Pembentukan Himpunan Fuzzy (fuzzifikasi)

Pada metode Fuzzy sugeno, baik variabel input maupun output dibagi menjadi satu atau lebih himpunan Fuzzy. Dalam penentuan jumlah produksi barang berdasarkan data persediaan dan jumlah permintaan, variabel input dibagi menjadi dua yaitu variabel persediaan dan permintaan sedangkan yang menjadi variabel output adalah jumlah produksi produksi. Penentuan variabel yang digunakan dalam penelitian ini, terlihat pada Tabel 2.

**Tabel 2. Semesta pembicaraan untuk semua variabel Fuzzy**

Fungsi	Nama Variabel	Semesta Pembicaraan
Input	Permintaan	[1000-1600]
	Persediaan	[600-900]
Output	Jumlah Produksi	[1950-2600]

Dari tabel di atas yang menjadi semesta pembicaraan adalah data permintaan minimal dan maksimal, persediaan minimal dan maksimal, dan produksi minimal dan maksimal dalam satu hari, sedangkan yang akan menjadi domain untuk komposisi aturan Fuzzy adalah data random yang telah dibuat pada Tabel.1 Berdasarkan data tersebut dilihat kembali nilai minimal dan maksimal dari variabel input maupun variabel output seperti terlihat pada Tabel 3.

**Tabel 3. Nilai Minimal dan Maksimal dari Variabel Input Output Pada Data Random**

Fungsi	Nama Variabel	Domain
Input	Permintaan	[1030-1589]
	Persediaan	[607-894]
Output	Jumlah Produksi	[1996-2579]

### b. Pembentukan Fuzzy Rule

Pada tahap ini, nilai keanggotaan himpunan permintaan dan persediaan saat ini dicari menggunakan fungsi keanggotaan himpunan Fuzzy berdasarkan data. Pembentukan Aturan Fuzzy, Dari dua variabel input dan sebuah variabel output yang telah didefinisikan, dengan melakukan analisa data terhadap batas tiap-tiap himpunan Fuzzy pada tiap-tiap variabelnya maka terdapat 9 aturan Fuzzy yang akan dipakai dalam sistem ini, dengan susunan aturan IF permintaan IS ... AND persediaan IS ... THEN produksi IS ..., hasilnya dapat dilihat pada Tabel 4, yaitu:

**Tabel. 4 Aturan Fuzzy**

No	Variabel		
	Input		Output
	Permintaan	Persediaan	Produksi
1	Kecil	Sedikit	Sedikit
2	Kecil	Sedang	Sedikit
3	Kecil	Banyak	Sedikit
4	Sedang	Sedikit	Sedikit
5	Sedang	Sedang	Sedang
6	Sedang	Banyak	Sedang
7	Besar	Sedikit	Sedikit
8	Besar	Sedang	Sedang
9	Besar	Banyak	Banyak

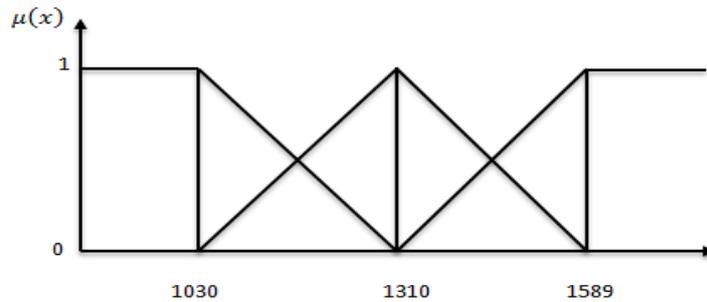
Berikut adalah cara untuk mendapatkan nilai keanggotan berdasarkan variabel linguistik dan variabel numerik yang digunakan:

- Fungsi keanggotaan himpunan Fuzzy KECIL, SEDANG, dan BESAR dari variabel Permintaan

$$\mu[x]_{KECIL} = \begin{cases} 1, & x \leq 1030; \\ \frac{1310 - x}{1310 - 1030}, & 1030 \leq x \leq 1310; \\ 0, & x \geq 1310. \end{cases}$$

$$\mu[x]_{SEDANG} = \begin{cases} 0, & x \leq 1030 \text{ atau } x \geq 1589; \\ \frac{x - 1310}{1310 - 1030}, & 1030 \leq x \leq 1310; \\ \frac{1589 - x}{1589 - 1310}, & 1310 \leq x \leq 1589. \end{cases}$$

$$\mu[x]_{BESAR} = \begin{cases} 0, & x \leq 1310; \\ \frac{x - 1310}{1589 - 1310}; & 1310 \leq x \leq 1589; \\ 1, & x \geq 1589. \end{cases}$$



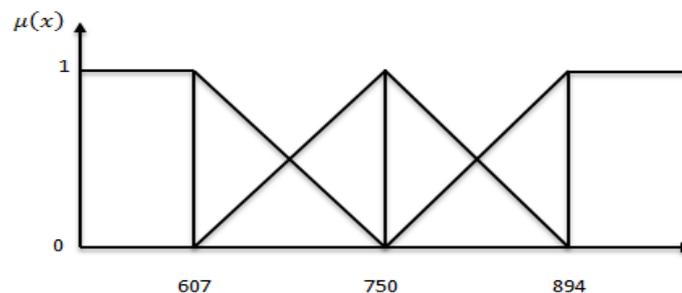
**Gambar 1. Himpunan Fuzzy dari Variabel Permintaan**

- Fungsi keanggotaan himpunan Fuzzy SEDIKIT, SEDANG, dan BANYAK dari variabel Persediaan

$$\mu[y]_{\text{SEDIKIT}} = \begin{cases} 1, & y \leq 607; \\ \frac{750 - x}{750 - 607}, & 607 \leq x \leq 750; \\ 0, & x \geq 750. \end{cases}$$

$$\mu[y]_{\text{SEDANG}} = \begin{cases} 0, & y \leq 607 \text{ atau } x \geq 894; \\ \frac{x - 750}{750 - 607}, & 607 \leq x \leq 750; \\ \frac{894 - x}{894 - 750}, & 750 \leq x \leq 894. \end{cases}$$

$$\mu[y]_{\text{BANYAK}} = \begin{cases} 0, & y \leq 750; \\ \frac{x - 750}{894 - 750}, & 750 \leq x \leq 894; \\ 1, & x \geq 894. \end{cases}$$



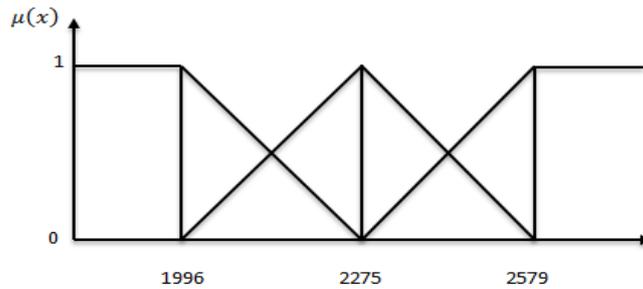
**Gambar 2. Himpunan Fuzzy dari Variabel Persediaan**

- Fungsi keanggotaan himpunan Fuzzy SEDIKIT, SEDANG, dan BANYAK dari variabel Produksi

$$\mu[y]_{\text{SEDIKIT}} = \begin{cases} 1, & y \leq 1996; \\ \frac{2275 - x}{2275 - 1996}, & 1996 \leq x \leq 2275; \\ 0, & x \geq 2579. \end{cases}$$

$$\mu[y]_{\text{SEDANG}} = \begin{cases} 0, & y \leq 1996 \text{ atau } x \geq 2579; \\ \frac{x - 2275}{2275 - 1996}, & 1996 \leq x \leq 2275; \\ \frac{2579 - x}{2579 - 2275}, & 2275 \leq x \leq 2579. \end{cases}$$

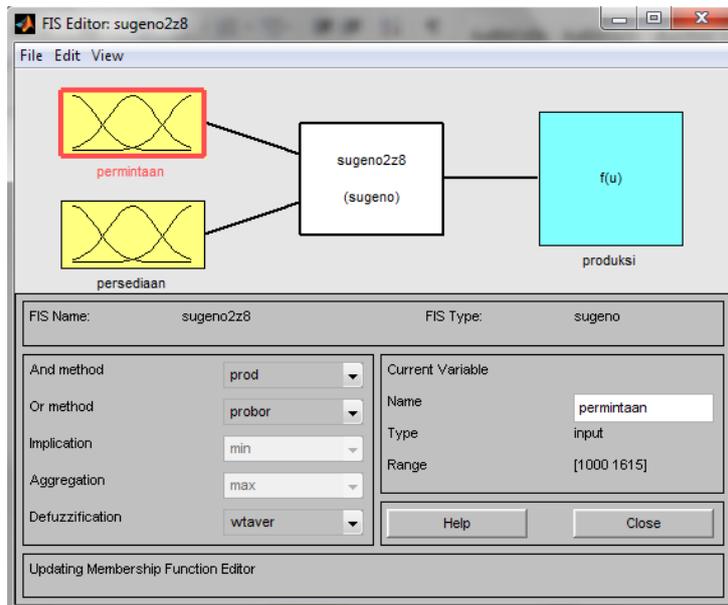
$$\mu[y]_{\text{BANYAK}} = \begin{cases} 0, & y \leq 2579; \\ \frac{x - 2275}{2579 - 2275}, & 2275 \leq x \leq 2579; \\ 1, & x \geq 2579. \end{cases}$$



Gambar 3. Himpunan Fuzzy dari Variabe Produksi

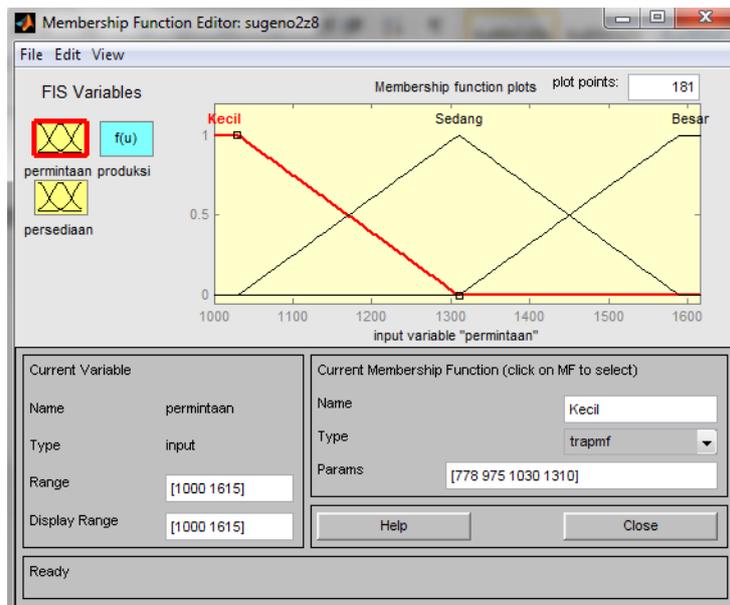
### 3.3. Implementasi Program

Program yang dipakai dalam pembahasan ini adalah MATLAB yang bertujuan untuk membantu menghitung banyaknya produksi roti khususnya pada tahapan defuzzifikasi pada Pabrik Roti Sarinda berdasarkan data permintaan dan persediaan.

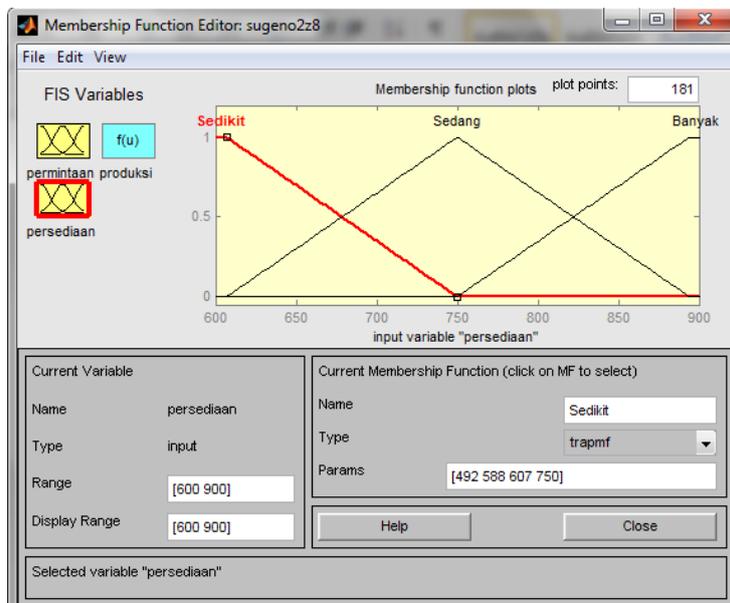


Gambar 4. Penerapan masalah ke dalam Aplikasi

Pada Gambar 4 ini adalah tahap pembentukan variabel input dan output. Dapat dilihat ada dua input yang berwarna kuning yaitu permintaan dan persediaan kemudian yang berwarna biru adalah output yaitu produksi. Tahap selanjutnya pembentukan himpunan Fuzzy dan fungsi keanggotaan. Pada Gambar 1 pilih input permintaan untuk dibuat fungsi keanggotaan yang lebih detail, yaitu untuk fungsi keanggotaan, KECIL, SEDANG dan BESAR range adalah [1000-1600] untuk fungsi keanggotaan KECIL tipe variabelnya adalah trapmf dengan parameternya [778 975 1030 1310], SEDANG tipe variabelnya adalah trimf dengan parameternya [1030 1310 1589] sedangkan fungsi keanggotaan BANYAK tipe variabelnya trapmf dengan parameternya [1310 1589 1695 1796] hasilnya ditampilkan pada Gambar 2.



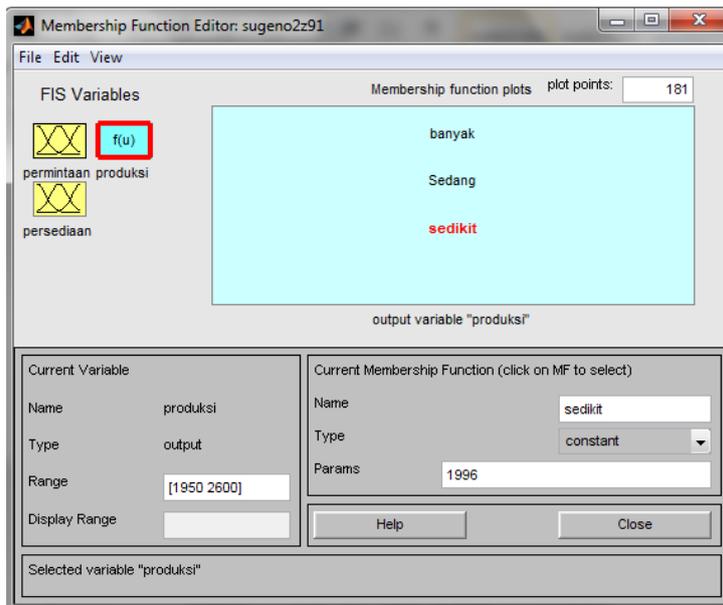
**Gambar 5. Fungsi Keanggotaan Variabel Input Permintaan**



**Gambar 6. Fungsi Keanggotaan Variabel Input Persediaan**

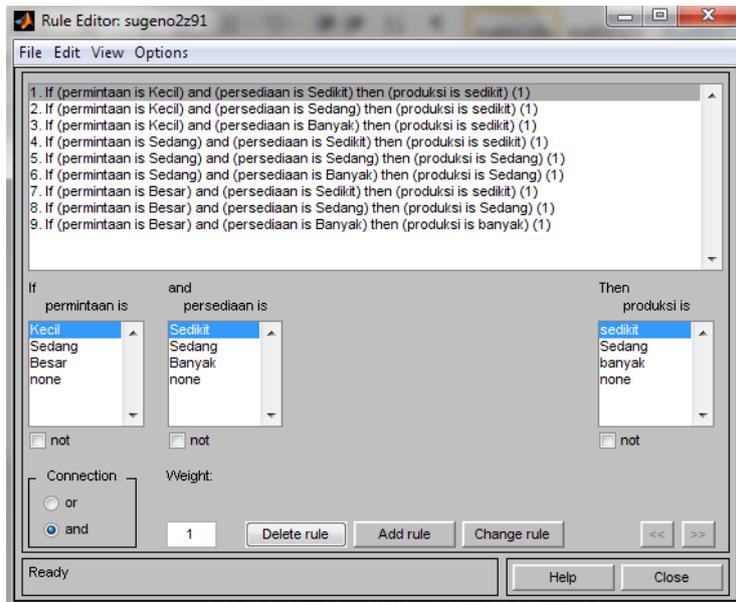
Pada Gambar 5 di atas pula, dipilih input persediaan untuk dibuat fungsi keanggotaan yang lebih detail, yaitu untuk fungsi keanggotaan **SEDIKIT**, **SEDANG** dan **BANYAK** mempunyai range [600-900]. Untuk fungsi keanggotaan **SEDIKIT** tipe variabelnya adalah trapmf dengan parameteranya [492 588 607 750], untuk fungsi keanggotaan **SEDANG** tipe variabelnya adalah trimf dengan parameteranya [607 750 894] sedangkan fungsi keanggotaan **BANYAK** tipe variabelnya adalah trapmf dengan parameteranya [750 894 912 1008] hasilnya ditampilkan pada Gambar 6.

Demikian pula untuk output produksi dari Gambar 1 di atas dipilih output produksi untuk dibuat fungsi keanggotaan lebih detail, yaitu untuk fungsi keanggotaan **SEDIKIT**, **SEDANG** dan **BANYAK** rangenya adalah [1950-2600]. Untuk fungsi keanggotaan **SEDIKIT**, **SEDANG** dan **BANYAK** tipe variabelnya adalah *constant* dengan parameteranya [1996], [2275] dan [2579].



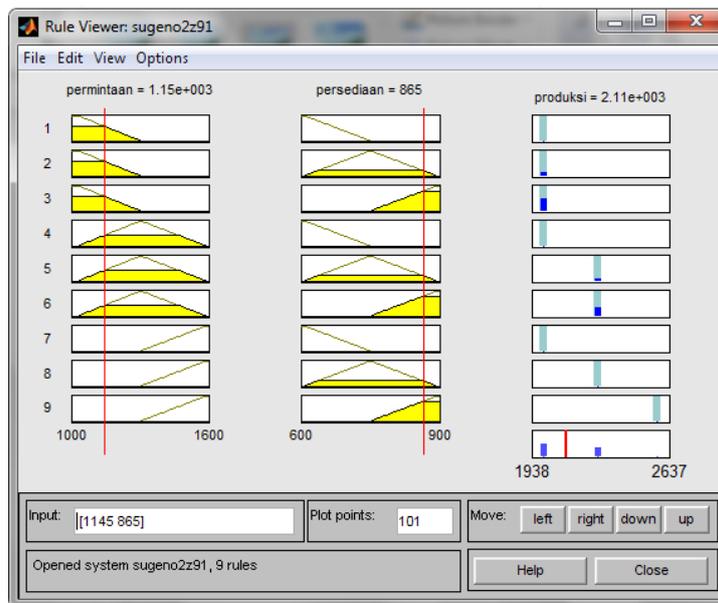
**Gambar 7. Fungsi Keanggotaan Variabel Output Produksi**

Dengan menyusun aturan Fuzzy seperti pada Tabel 4 ke dalam tollbox Matlab maka hasilnya adalah:



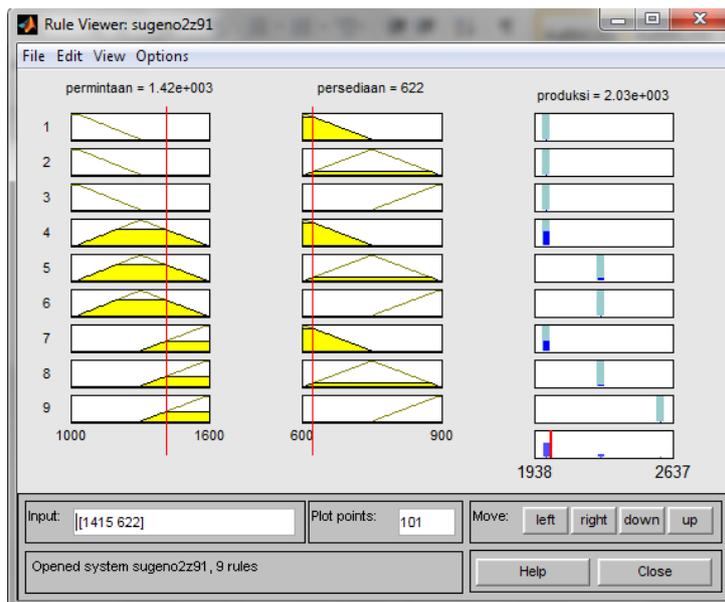
**Gambar 8. Aturan Fuzzy berdasarkan Variabel Linguistik**

Berdasarkan *rule* yang ada diperoleh *rule view* untuk simulasi hasil yang ingin diperoleh pada Gambar 9.



**Gambar 9. Rule view (Hasil Optimasi/ Defuzzifikasi)**

Pada Gambar 6 kita bisa mengoptimasi beberapa data permintaan dan jumlah persediaan yang ada maka kita akan mengetahui berapa jumlah produk yang harus diproduksi. Misalnya kita mengoptimasi input permintaan sebanyak 1415 dan input persediaan yang ada sebanyak 625 maka jumlah produk yang harus diproduksi oleh sistem pengambilan keputusan Sugeno ini adalah 2030 produk, hasil tampilannya terlihat pada Gambar 10.



**Gambar 10. Hasil Optimasi dengan Jumlah Permintaan 1415 dan Persediaan 622**

**Tabel 5. Jumlah Produk yang Harus di Produksi Berdasarkan Input Permintaan dan Persediaan (Fuzzy sugeno)**

No	Tgl	Prm	Prs	Prd	Fuzzy
1	2	1415	622	2400	2030
2	4	1145	865	2210	2110
3	5	1264	783	2118	2240
4	6	1295	736	2098	2240
5	7	1324	854	2565	2290
6	8	1589	806	2579	2390
7	9	1279	679	2282	2120
8	11	1239	873	2339	2210
9	12	1398	877	2541	2360
10	13	1090	888	1996	2060
11	14	1064	894	2167	2030
12	15	1384	722	2362	2220
13	16	1315	766	2417	2280
14	18	1355	607	2341	2000
15	19	1156	730	2218	2110
16	20	1241	680	2309	2110
17	21	1570	653	2437	2090
18	22	1297	629	2229	2040
19	23	1366	697	2373	2170
20	25	1185	728	2208	2130
21	26	1089	736	2093	2050
22	27	1519	618	2258	2020
23	28	1030	616	2157	2000
24	29	1376	662	2301	2030
25	30	1555	863	2488	2490

Dari hasil penerapan Logika Fuzzy (Sugeno) pada tollbox Matlab maka didapat hasil perbandingan penilaian logika Fuzzy (Sugeno) dengan produksi Pabrik Roti Sarinda Ambon, menggunakan persentase rata-rata atau Mean Percentage Error (MPE) dapat dilihat pada Tabel dibawah ini.

**Tabel 6. Perbandingan Penerapan Logika Fuzzy Metode Sugeno**

No	Tgl	$Y_t$ (Prd)	$\hat{Y}_t$ (Fuzzy)	Error	$\left  \frac{(Y_t - \hat{Y}_t)}{Y_t} \times 100\% \right $
1	2	2400	2030	370	26.14841
2	4	2210	2110	100	8.733624
3	5	2118	2240	122	9.651899
4	6	2098	2240	142	10.96525
5	7	2565	2290	275	20.77039
6	8	2579	2390	189	11.89427
7	9	2282	2120	162	12.66615
8	11	2339	2210	129	10.41162
9	12	2541	2360	181	12.94707
10	13	1996	2060	64	5.87156
11	14	2167	2030	137	12.87594
12	15	2362	2220	142	10.26012
13	16	2417	2280	137	10.41825
14	18	2341	2000	341	25.16605
15	19	2218	2110	108	9.342561
16	20	2309	2110	199	16.03546
17	21	2437	2090	347	22.10191
18	22	2229	2040	189	14.57209
19	23	2373	2170	203	14.86091
20	25	2208	2130	78	6.582278
21	26	2093	2050	43	3.948577
22	27	2258	2020	238	15.6682
23	28	2157	2000	157	15.24272
24	29	2301	2030	271	19.69477
25	30	2488	2490	2	0.128617

**Tabel 7. Perhitungan MPE Metode Sugeno**

$\sum_{t=1}^n \left  \frac{(Y_t - \hat{Y}_t)}{Y_t} \times 100\% \right  = 326.9587$
$\left( \frac{\sum_{t=1}^n \left  \frac{(Y_t - \hat{Y}_t)}{Y_t} \times 100\% \right }{n} \right) = 13.07835$
$100 - 13.1916 = 86.92165$

Sehingga didapat hasil perhitungan rata-rata persentase kesalahan dari Logika Fuzzy Metode Sugeno yang digunakan adalah 13.07835 sedangkan tingkat kebenaran dari hasil perhitungan tersebut adalah 86.92165 maka dapat disimpulkan bahwa hasil dari perhitungan Logika Fuzzy Metode Sugeno yang digunakan pada sistem ini dapat digunakan untuk prediksi jumlah produksi pada Pabrik Roti Sarinda Ambon.

#### 4. Kesimpulan

Berdasarkan rumusan masalah, hasil penelitian dan pembahasan mengenai penentuan jumlah produksi roti berdasarkan jumlah persediaan dan permintaan dapat diambil beberapa kesimpulan, yaitu :

- a. Untuk menentukan jumlah produksi dapat memasukan nilai pada kolom input pada Gambar 10 sesuai dengan data yang ada atau dengan data yang lain yang masih berada pada nilai domain fungsi.
- b. Dari hasil perbandingan, Logika Fuzzy Sugeno dapat dipakai sebagai alat peramalan dalam menentukan jumlah produksi berdasarkan jumlah permintaan dan persediaan Pabrik Roti Sarinda Ambon dengan nilai kebenaran mencapai 86.92 %.

#### Daftar Pustaka

- [1] Zimmermann, Fuzzy Set Theory and Its Application, Massachusetts: Kluwer Academic Publisher, 1991.
- [2] L. Fauset, Fundamentals of Neural Networks, New Jersey: Prentice Hall, 1994.
- [3] S. Kusumadewi, Membangun Jaringan Syaraf Tiruan Menggunakan Matlab dan Excel Link, Yogyakarta: Graha Ilmu, 2004.
- [4] S. Kusumadewi, Analisis dan Desain Sistem Fuzzy Menggunakan Tool Box Matlab, Yogyakarta: Graha Ilmu, 2002.
- [5] S. Kusumadewi and H. Purnomo, Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan, Yogyakarta: Graha Ilmu, 2004.
- [6] M. Arhami, Konsep Dasar Sistem Pakar Jilid 1, Yogyakarta: Penerbit Andi, 2005.
- [7] Sukandy, M. Dwi, T. Basuki and S. Puspasari, Penerapan Metode Fuzzy Mamdani untuk Memprediksi Jumlah Produksi Minyak Sawit Berdasarkan Data Persediaan dan Jumlah Permintaan (Studi Kasus PT Perkebunan Mitra Ogan Baturaja), Baturaja, 2014.
- [8] M. Yunus and W. Atim, "Penerapan Logika Fuzzy (Mamdani) untuk Menentukan Jumlah Produksi Roti Berdasarkan Data Persediaan dan Jumlah Produksi Minyak Sawit Berdasarkan Data Persediaan dan Jumlah Permintaan (Studi Kasus: PT. Bosinda Cahaya Anugrah)," *Jurnal Teknoinfo*, vol. 10, no. 1, pp. 1-8, 2014.

## **APLIKASI METODE *FUZZY C-MEANS* UNTUK PENGLASTERAN KELAYAKAN RUMAH DI DESA WAYAME, AMBON**

**R. P. A. Sormin<sup>1</sup>, F. Y. Rumlawang<sup>2</sup>, L. J. Sinay<sup>3</sup>**

<sup>1, 2, 3</sup> Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia  
e-mail: <sup>3</sup>lj.sinay@staff.unpatti.ac.id

---

### **Abstrak**

Pengklasteran adalah proses pengelompokan data ke dalam kluster berdasarkan parameter tertentu sehingga obyek-obyek dalam sebuah kluster memiliki tingkat kemiripan yang tinggi satu sama lain dan sangat tidak mirip dengan obyek yang lain pada kluster yang berbeda. Algoritma *Fuzzy C-Means* termasuk salah satu teknik pengklasteran data yang mana keberadaan pada setiap titik data dalam suatu kluster ditentukan oleh derajat keanggotaan. Pada penelitian ini Algoritma *Fuzzy C-Means* digunakan untuk menentukan kelayakan rumah. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa masih banyak rumah yang tidak layak di Desa wayame yang harus lebih diperhatikan.

*Kata Kunci:* *C-Means*, *fuzzy*, kelayakan, pengklasteran.

## **APPLICATION OF FUZZY C-MEANS ALGORITHM FOR CLUSTERING HOUSE FEASIBILITY IN WAYAME VILLAGE, AMBON**

### **Abstract**

Clustering is a process of organizing objects into groups whose members are similar in a cluster but different with members of other cluster. Fuzzy C-Means Algorithm is a data clustering technique in which a dataset is grouped into clusters with every data point in the data sets belonging to every cluster to a certain degree. In this research Fuzzy C-Means Algorithm is used to determine house feasibility. The result shows that there are many houses which are not feasible and need to get more attention.

*Keywords:* C-means, clustering, fuzzy, feasibility.

---

### **1. Pendahuluan**

Secara garis besar kelayakan merupakan tahap dimana pantas atau tidaknya sesuatu berada pada tempat tertentu. Penentuan kelayakan merupakan hal yang sangat penting dilakukan dalam mempertimbangkan dan mengambil sebuah keputusan. Masalah penentuan kelayakan seringkali menjadi masalah yang sangat rumit dan kompleks, sehingga membutuhkan solusi yang sangat tepat dan sesuai. Sehingga output yang dihasilkan sesuai dengan yang diharapkan.

Penentuan kelayakan bisa terjadi dalam berbagai kasus, salah satunya adalah penentuan kelayakan kelayakan rumah hunian. Menurut Peraturan Menteri Negara Perumahan Rakyat Republik Indonesia nomor: 22/Permen/M/2008 tentang standar pelayanan minimal bidang perumahan rakyat daerah provinsi dan daerah kabupaten/kota menyatakan bahwa rumah layak huni adalah rumah yang memenuhi persyaratan keselamatan bangunan dan kecukupan minimum luas bangunan serta keselamatan penghuninya.

Beberapa kriteria sudah ditentukan untuk melihat rumah yang layak huni, sehingga diperlukan pengujian untuk mengetahui yang layak dan mana yang tidak layak untuk dihuni oleh masyarakat. Metode pengklasteran dengan algoritma *Fuzzy C-Means* akan digunakan untuk menentukan kelayakan rumah tersebut.

Pada penelitian ini, kelayakan rumah masyarakat di Desa Wayame ditentukan menggunakan Metode pengklasteran dengan algoritma *Fuzzy C-Means* berdasarkan kriteria-kriteria yang telah ditentukan. Dengan demikian, tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan kelayakan rumah masyarakat di Desa Wayame menggunakan Metode Pengklasteran dengan algoritma *Fuzzy C-Means* berdasarkan kriteria-kriteria yang telah ditentukan.

## 2. Tinjauan Pustaka

*Fuzzy C-Means* (FCM) adalah suatu teknik pengklasteran data yang mana keberadaan tiap-tiap titik data dalam suatu klaster ditentukan oleh derajat keanggotaan. Teknik ini pertama kali diperkenalkan oleh Jim Bezdek pada tahun 1981. *Fuzzy C-Means* memungkinkan pengelompokan dimana kelompok data tidak terdistribusi secara jelas [1].

Pengelompokan data dengan metode ini sebelumnya sudah dibuat dan digunakan, namun dengan aplikasi yang berbeda bahkan menggunakan program yang dapat mempermudah. Beberapa yang pernah dibuat adalah:

Metode Klastering dengan Algoritma Fuzzy C-Means untuk Rekomendasi pemilihan bidang keahlian pada program studi teknik informatika [2]. Dalam penelitian ini Algoritma Fuzzy C-Means untuk rekomendasi penjurusan dapat diterapkan dengan manfaat penentu mahasiswa masuk kelompok mana dan setiap kelompok diidentifikasi sebagai jurusan apa.

Kemudian Analisis Penyandang Masalah Kesejahteraan Sosial di Indonesia Menggunakan Metode Fuzzy C-Means Klastering dan Biplot [3]. Dalam penelitian ini Fuzzy C-Means pengklasteran digunakan untuk mengelompokkan data ke dalam klaster tertentu sedangkan biplot untuk memberikan penerangan ke dalam plot.

### 2.1. Definisi Pengklasteran

Pengklasteran adalah suatu metode pengelompokan berdasarkan ukuran kedekatan (kemiripan). Pengklasteran membagi data menjadi kelompok-kelompok atau klusters berdasarkan suatu kemiripan atribut-atribut diantara data tersebut. Karakteristik tiap klaster tidak ditentukan sebelumnya, melainkan tercermin dari kemiripan data yang terkelompok di dalamnya. Beberapa teknik pengklasteran dalam data mining meliputi: skalabilitas, kemampuan untuk menangani tipe atribut yang berbeda, menangani data yang mengandung *noise*, mampu menangani dimensionalitas yang tinggi, dan dapat diterjemahkan dengan mudah. Pengklasteran beda dengan grup, kalau grup berarti kelompok yang sama, kondisinya kalau tidak ya pasti bukan kelompoknya. Tetapi kalau klaster tidak harus sama akan tetapi pengelompokannya berdasarkan pada kedekatan dari suatu karakteristik sampel yang ada.

### 2.2. Fuzzy C-Means

Ada beberapa algoritma klastering data, salah satu diantaranya adalah Fuzzy C-Means (FCM). Fuzzy C-Means (FCM) adalah suatu teknik pengklasteran data yang mana keberadaan tiap-tiap titik data dalam suatu klaster ditentukan oleh derajat keanggotaan. Teknik ini pertama kali diperkenalkan oleh Jim Bezdek pada tahun 1981. Fuzzy C-Means memungkinkan pengelompokan dimana kelompok data tidak terdistribusi secara jelas.

Fuzzy berarti sesuatu yang bersifat kabur dan tidak jelas, dimana logika fuzzy itu sendiri berarti mengalokasikan nilai kebenaran dari sebuah variabel ke dalam rentang nilai 0 dan 1 agar berbeda dengan logika tradisional yang mengalokasikan nilai kebenaran tepat pada nilai 0 atau 1. C disini berarti banyaknya konstanta klaster yang diinginkan, oleh sebab itu pada algoritma ini banyaknya jumlah klaster yang ingin digunakan harus ditentukan di awal. Means diartikan sebagai nilai rerata dalam suatu kelompok data, dalam hal ini didefinisikan sebagai klaster. Secara harafiah jika ketiganya digabungkan maka dapat diartikan bahwa algoritma ini menghitung nilai rerata.

Konsep dasar Fuzzy C-Means (FCM), pertama kali adalah menentukan pusat klaster, yang akan menandai lokasi rata-rata untuk tiap-tiap klaster. Pada lokasi awal, pusat klaster ini masih belum akurat. Tiap-tiap titik data memiliki derajat keanggotaan untuk tiap-tiap klaster. Dengan cara memperbaiki pusat klaster dan derajat keanggotaan tiap-tiap titik data secara berulang, maka akan dapat dilihat bahwa pusat klaster akan

bergerak menuju lokasi yang tepat. Perulangan ini didasarkan pada minimisasi fungsi obyektif yang menggambarkan jarak dari titik data yang diberikan ke pusat kluster yang terbobot oleh derajat keanggotaan titik data tersebut.

### 2.3. Algoritma Fuzzy C-Means

Algoritma Fuzzy C-Means (FCM) adalah sebagai berikut.

- a. Input data yang akan dikluster  $X$ , berupa matriks berukuran  $n \times m$  ( $n$  = jumlah sampel data,  $m$  = atribut setiap data).  $X_{ij}$  = data sampel ke- $i$ , atribut ke- $j$ .

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

- b. Tentukan:

- 1) Jumlah kluster =  $c$
- 2) Pangkat =  $w$
- 3) Maksimum iterasi = MaxIter
- 4) Error terkecil yang diharapkan =  $\xi$
- 5) Fungsi obyektif awal =  $P_0 = 0$
- 6) Iterasi awal =  $t = 1$ .

- c. Bangkitkan bilangan random  $\mu_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, 2, \dots, c$ ; sebagai elemen-elemen matriks partisi awal  $U$ . Dengan nilai  $\mu_{ik}$  diantara 0 dan 1 dan jumlah setiap barisnya sama dengan 1.

Hitung jumlah setiap kolom:

$$Q_i = \sum_{k=1}^c \mu_{ik},$$

dengan  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Hitung :  $\mu_{ik} = \frac{\mu_{ik}}{Q_i}$

- d. Hitung pusat kluster ke- $k$ :  $V_{kj}$ , dengan  $k = 1, 2, \dots, c$ ; dan  $j = 1, 2, \dots, m$ .

$$V_{kj} = \frac{\sum_{i=1}^n ((\mu_{ik})^w * X_{ij})}{\sum_{i=1}^n (\mu_{ik})^w}$$

- e. Hitung fungsi obyektif pada iterasi ke- $t$ ,  $P_t$ .

$$P_t = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^c \left( \left[ \sum_{j=1}^m (X_{ij} - V_{kj})^2 \right] (\mu_{ik})^w \right)$$

- f. Hitung perubahan matriks partisi:

$$\mu_{ik} = \frac{\left[ \sum_{j=1}^m (X_{ij} - V_{kj})^2 \right]^{\frac{-1}{w-1}}}{\sum_{k=1}^c \left[ \sum_{j=1}^m (X_{ij} - V_{kj})^2 \right]^{\frac{-1}{w-1}}}$$

dengan  $i = 1, 2, \dots, n$  dan  $k = 1, 2, \dots, c$ .

- g. Cek kondisi berhenti:

- 1) Jika  $(|P_t - (P_t - 1)| < \xi)$  atau  $(t > \text{MaxIter})$  maka berhenti;
- 2) Jika tidak :  $t = t + 1$  , ulangi langkah ke-4 (langkah d).

## 2.4. Kelayakan Rumah

Rumah adalah tempat untuk tumbuh dan berkembang, baik secara jasmani, rohani dan sosial. Definisi ini membawa banyak konsekuensi yakni bahwa selain kualitas rumah yang harus baik, diperlukan pula segala fasilitas yang dibutuhkan untuk tumbuh dan berkembang. Fasilitas itu misalnya fasilitas pendidikan, pasar/toko, tempat kerja, fasilitas air bersih dan sanitasi.

Berdasarkan Undang-Undang No. 4 Tahun 1992 tentang Perumahan dan Permukiman [4], disebutkan bahwa permukiman adalah bagian dari lingkungan hidup diluar kawasan hutan lindung, baik yang berupa kawasan perkotaan maupun pedesaan yang berfungsi sebagai lingkungan tempat tinggal atau lingkungan hunian dan tempat kegiatan yang mendukung perikehidupan dan penghidupan. Dan berdasarkan Peraturan Pemerintah No. 80 tahun 1999 tentang kawasan siap bangun dan lingkungan siap bangun berdiri sendiri [5], rumah layak huni adalah rumah yang memenuhi persyaratan kesehatan, keselamatan dan kenyamanan. Menurut Johan Silas, rumah disebut layak bila memenuhi aspek sehat, aman, terjamin, dapat dicapai dan mampu dibayar, termasuk kebutuhan dasar, bebas diskriminasi dan kepastian kepemilikannya. Rumah akan menjadi tempat tinggal yang aman dan nyaman, bila memiliki kualitas bangunan yang baik, lengkap dengan fasilitasnya, serta berada dalam lingkungan yang bersih dan sehat. Semakin baik kondisi dan kualitas rumah yang ditempati menunjukkan semakin baik keadaan sosial ekonomi rumah tangga.

Secara umum rumah dapat dikatakan layak huni apabila memiliki jenis lantai, dinding dan atap yang memenuhi syarat atau memiliki kualitas yang baik, serta mempunyai luas lantai yang mencukupi. Selain itu, rumah layak huni juga ditentukan oleh fasilitas penerangan, air minum, dan tempat pembuangan akhir kotoran/tinja.

Belum ada kriteria khusus untuk menentukan rumah dikatakan layak, namun menurut Kementerian Pekerjaan Umum dan Perumahan Rakyat, definisi rumah tidak layak huni adalah sebagai berikut:

1. Bahan lantai berupa tanah atau kayu kelas IV
2. Bahan dinding berupa bilik bambu/kayu/rotan atau kayu kelas IV
3. Bahan atap berupa daun atau genteng plentong yang sudah rapuh
4. Rusak berat, dan/atau
5. Rusak sedang dan luas bangunan tidak mencukupi standar minimal luas per anggota keluarga yaitu 9m<sup>2</sup>

Pada penelitian ini, yang akan menjadi kriteria penilaian rumah hunian yang layak yaitu ukuran rumah, jenis lantai, jenis dinding, jenis atap, kepemilikan rumah, sumber air minum, sumber penerangan dan keberadaan jamban.

Berdasarkan [6], untuk menentukan kelayakan digunakan persamaan:

$$\text{Kelayakan} = \left( \frac{\left( \frac{\sum \text{nilai yang mendekati layak}}{\sum \text{nilai per cluster}} \right) \times 100\%}{\sum \text{kriteria}} \right)$$

## 2.5. Validitas Fuzzy C-Means

Bezdek [1] mengusulkan validitas dengan menghitung koefisien partisi atau *partition coefficient* (PC) sebagai evaluasi nilai keanggotaan data pada setiap kluster. Nilai PC Index (PCI) hanya mengevaluasi nilai derajat keanggotaan, tanpa memandang nilai vektor (data) yang biasanya mengandung informasi geometrik (sebaran data). Nilainya dalam rentang [0,1], nilai yang semakin besar (mendekati 1) mempunyai arti bahwa kualitas kluster yang didapat semakin baik. Berikut formula untuk menghitung PC Index:

$$PCI = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K u_{ij}^2 \right)$$

dimana  $N$  merupakan jumlah data dalam set data,  $K$  merupakan jumlah kluster, sedangkan  $u_{ij}$  menyatakan nilai keanggotaan data ke- $i$  pada kluster ke- $j$ .

Bezdek [7] sebelumnya telah mengusulkan validitas dengan menghitung entropi partisi atau *partition entropy* (PE). Nilai PE Index (PEI) mengevaluasi keteracakan data dalam kluster. Nilainya dalam rentang [0,1],

nilai yang semakin kecil (mendekati 0) mempunyai arti bahwa kualitas kluster yang didapat semakin baik. Berikut formula untuk menghitung PE Index:

$$PEI = -\frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K u_{ij} \times \log_2 u_{ij} \right).$$

Kedua metrik PCI dan PEI memiliki kecenderungan monotonik terhadap K. Modifikasi nilai PCI (MPCI) dilakukan oleh Dave (1996) terhadap kecenderungan monotonik tersebut. Formula yang digunakan seperti berikut:

$$MPCI = 1 - \frac{K}{K-1} (1 - PCI).$$

Nilai MPCI yang didapat adalah  $0 \leq MPCI \leq 1$ . Nilai MPCI ekuivalen dengan Non-Fuzziness Index (NFI).

Fukuyama dan Sugeno [8] mengusulkan validitas dengan formula seperti pada persamaan berikut:

$$FSI = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^N u_{ij}^m \times d(x_i, c_j)^2 - \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^N u_{ij}^m \times d(c_j, \bar{x})^2 = J_m(u, c) - K_m(u, c);$$

dimana  $m$  merupakan bobot pangkat (*weighting exponent*), nilainya  $m > 1$ .  $d(x_i, c_j)$  merupakan jarak antara data ke- $i$  terhadap centroid kluster ke- $j$ .  $c_j$  adalah centroid kluster ke- $j$ .  $d(c_j, \bar{x})$  merupakan jarak antara centroid hasil klustering terhadap rata-rata semua data.  $J_m(u, c)$  adalah nilai fungsi obyektif yang mengukur kohesi, sedangkan  $K_m(u, c)$  adalah nilai obyektif yang mengukur nilai separasi. Secara umum nilai Fukuyama Sugeno Index (FSI) yang semakin kecil mempunyai arti bahwa kualitas kluster yang didapat semakin baik [9].

Validitas untuk mengevaluasi kluster yang dimodifikasi oleh Pal dan Bezdek [10] diberikan oleh formula berikut:

$$XBI = \frac{\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^N u_{ij}^m \times d(x_i, c_j)^2}{N \times \min_{i,j} (d(c_i, c_j)^2)} = \frac{J_m(u, c)}{Sep(c)}$$

$J_m(u, c)$  adalah ukuran kohesi, sedangkan  $Sep(c)$  adalah ukuran separasi.

Secara umum, nilai yang terbaik untuk Xie Beni Index (XBI) adalah nilai index yang semakin kecil. Nilai XBI yang semakin kecil mempunyai arti kualitas hasil pengelompokkan yang semakin baik [9].

Wu dan Yang [9] mengusulkan cara mengevaluasi kluster dengan menghitung *Partition Coefficient and Exponential Separation* (PCAES) Index. PCAES Index (PCAESI) untuk kluster ke- $i$  didefinisikan sebagai gabungan antara kohesi dan separasi kluster tersebut. Ukuran kohesi kluster ke- $j$  relatif terhadap kohesi keseluruhan kluster diukur terhadap  $u_M$ , seperti pada persamaan berikut:

$$Koh_j = \sum_{i=1}^N \frac{u_{ij}^2}{u_M}$$

Sementara  $u_M$  didapatkan dari persamaan berikut:

$$u_M = \min_{1 \leq j \leq K} \left\{ \sum_{i=1}^N u_{ij}^2 \right\}$$

Separasi kluster ke- $j$  terhadap kluster lain yang terdekat relatif terhadap separasi semua kluster diukur terhadap  $\beta_T$ , seperti pada persamaan berikut:

$$Sep_j = \exp \left( \frac{\min_{k \neq j} \{d(c_j, c_k)^2\}}{\beta_T} \right), \text{ untuk } k = 1, \dots, K$$

Untuk  $\beta_T$  dinyatakan oleh persamaan berikut:

$$\beta_T = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K d(c_j, \bar{x})^2;$$

Untuk menghitung PCAESI pada kluster ke- $j$  dirumuskan sebagai berikut:

$$PCAESI_j = Koh_j - Sep_j.$$

Nilai  $PCAESI_j$  yang besar berarti kluster ke- $j$  bersifat kohesif (kompak) didalam dan terpisah dari (K-1) kluster yang lain. Nilai yang kecil atau negatif menunjukkan bahwa kluster ke- $j$  dikenali sebagai kluster yang kurang baik [9].

Nilai kohesi total semua kluster didapatkan dengan menjumlahkan semua nilai kohesi dari setiap kluster, seperti pada persamaan berikut:

$$Koh = \sum_{j=1}^K Koh_j;$$

Sementara separasi total semua kluster didapatkan dengan menjumlahkan semua nilai separasi dari setiap kluster seperti pada persamaan berikut:

$$Sep = \sum_{j=1}^K Sep_j.$$

Validitas total dalam PCAES Index didefinisikan oleh persamaan berikut:

$$PCAESI = \sum_{j=1}^K PCAESI_j = Koh - Sep = \sum_{j=1}^K Koh_j - \sum_{j=1}^K Sep_j$$

Nilai PCAESI yang besar berarti K kluster bersifat kohesif (kompak) dan terpisah satu sama lain. Nilai PCAESI yang kecil berarti ada beberapa K kluster yang tidak kompak atau terpisah dari yang lain. Nilai maksimal PCAESI, yaitu K, dapat digunakan untuk mendeteksi struktur kluster data dengan partisi kompak dan terpisah dengan baik [9].

### 3. Metode Penelitian

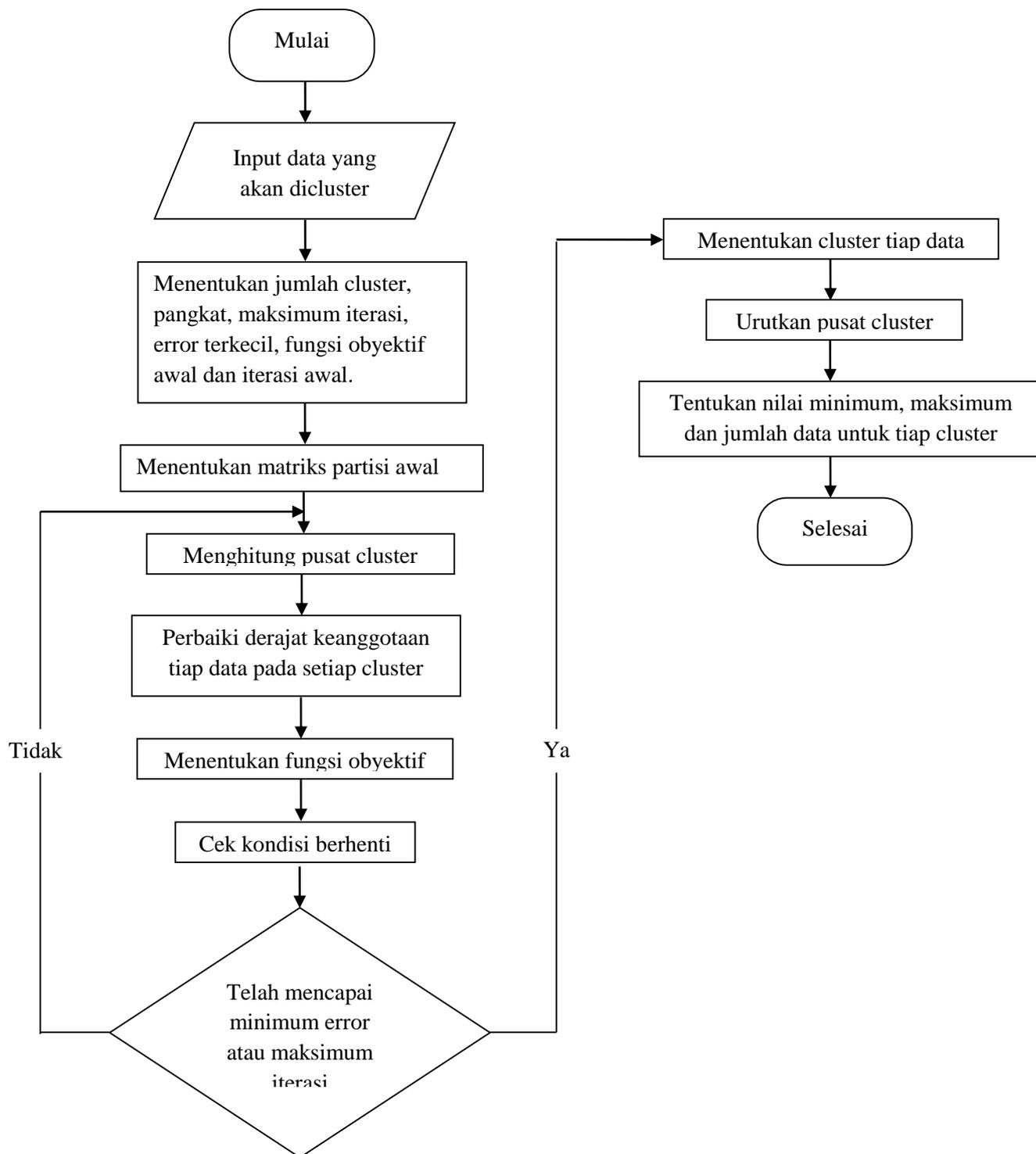
Penelitian ini menggunakan studi kasus yaitu dengan menerapkan metode pengklasteran dengan Algoritma Fuzzy C-Means berdasarkan kriteria-kriteria yang mempengaruhi kelayakan rumah hunian. Pada penelitian ini yang dijadikan unit observasi adalah Desa Wayame, Kota Ambon.

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data primer yang diambil secara random dari rumah masyarakat setempat. Dalam penelitian ini variabel yang digunakan untuk penentuan kelayakan rumah hunian menggunakan algoritma Fuzzy C-Means adalah sebagai berikut:

- a.  $X_1$  : Atap rumah
- b.  $X_2$  : Dinding rumah
- c.  $X_3$  : Lantai rumah
- d.  $X_4$  : Keberadaan jamban
- e.  $X_5$  : Kepemilikan rumah
- f.  $X_6$  : Ukuran rumah
- g.  $X_7$  : Sumber air minum
- h.  $X_8$  : Sumber penerangan

#### 4. Prosedur Penelitian

Prosedur yang dilakukan dalam penelitian ini berkaitan dengan tujuan penelitian adalah menentukan kelayakan rumah hunian berdasarkan kriteria-kriteria yang telah ditetapkan dengan langkah-langkah sebagai berikut:



**Gambar 1.** Diagram Alur Algoritma Fuzzy C-Means

## 5. Hasil dan Pembahasan

Bagian ini memuat tentang analisis data dan hasil pengklasteran menggunakan metode Fuzzy C-Means dengan menggunakan software MATLAB. Data yang digunakan dalam penelitian ini, diambil secara random pada masyarakat di Desa Wayame (dua dusun yaitu dusun Keranjang dan Dusun Waringin Cap). Untuk menentukan kelayakan rumah, prosesnya dimulai dari pengumpulan data rumah yang didasarkan atas kriteria-kriteria penilaian rumah. Kriteria-kriteria yang digunakan untuk melakukan penilaian tersebut adalah:

### a. Jenis Atap

Jenis atap terluas yang digunakan pada rumah tersebut dibagi atas tiga kategori yaitu: Daun/rumbia (1), Seng/abses (2), dan genteng (3).

### b. Jenis dinding

Jenis dinding dibagi atas tiga kategori yaitu: Tidak permanen (1), semi permanen (2) dan permanen (3).

### c. Jenis Lantai

Jenis lantai dibagi atas tiga kategori yaitu: Lantai masih tanah (1), lantai menggunakan semen atau papan (2) dan lantai menggunakan ubin (3).

### d. Keberadaan Jamban

Keberadaan pada tiap rumah huni dibagi atas tiga kategori yaitu: jamban umum (1), jamban bersama (2) dan jamban sendiri (3).

### e. Status Kepemilikan rumah

Status kepemilikan rumah dibagi atas dua kategori yaitu: bukan pemilik (1) dan pemilik (2).

### f. Luas bangunan rumah

Luas bangunan rumah ( $m^2$ ) tidak dikategorikan.

### g. Sumber air minum

Sumber air minum dibagi atas 3 kategori yaitu air hujan/air sungai (1), sumur/pompa (2), dan ledeng/kemasan (3).

### h. Sumber penerangan

Sumber penerangan dibagi atas 3 kategori yaitu lampu minyak (1), genset/disel (2), dan listrik (3).

Berdasarkan hasil pengumpulan data dari 8 kriteria di atas, ternyata hanya 5 kriteria yang berpengaruh dalam proses pengklasteran. Kelima kriteria tersebut yaitu jenis atap, jenis dinding, jenis lantai, keberadaan jamban dan luas bangunan rumah. Dengan demikian, kriteria sumber penerangan, sumber air minum dan kepemilikan rumah tidak berpengaruh karena hasil yang diperoleh saat menggunakan 8 kriteria di atas sama dengan hasil yang diperoleh menggunakan 5 kriteria (jenis atap, jenis dinding, jenis lantai, keberadaan jamban dan luas bangunan rumah). Hal ini dapat terjadi karena semua observasi memiliki kesamaan dalam 3 kriteria tersebut (sumber penerangan, sumber air minum dan kepemilikan rumah).

Langkah awal dari proses pengklasteran ini adalah menentukan parameter awal yang akan digunakan untuk menyelesaikan masalah dengan algoritma Fuzzy C-means. Parameter-parameter tersebut adalah

- |   |             |
|---|-------------|
| a. Jumlah klaster (c)                       | = 2         |
| b. Pangkat (w)                              | = 2         |
| c. Maksimum iterasi (MaxIter)               | = 100       |
| d. Error terkecil yang diharapkan ( $\xi$ ) | = $10^{-5}$ |
| e. Fungsi objektif awal ( $P_0$ )           | = 0         |

Beberapa hal penting yang diperoleh dalam proses pengklasteran ini adalah nilai fungsi obyektif selama iterasi, pusat klaster serta derajat keanggotaan rumah setiap klaster pada iterasi terakhir.

**Tabel 1. Nilai obyektif selama 14 iterasi**

Iterasi ke-	Nilai Obyektif
1	7440,00566
2	6148,68789
3	4827,08567
4	2986,68849
5	2631,28815
6	2614,98795
7	2614,48678
8	2614,45738
9	2614,45252
10	2614,45142
11	2614,45116
12	2614,45110
13	2614,45109
14	2614,45108

Nilai fungsi obyektif yang diperoleh dalam penelitian ini didasarkan atas proses iterasi. Pada Tabel 1, dapat dilihat bahwa pada iterasi pertama diperoleh nilai fungsi obyektif 7440,00566. Proses iterasi ini terus berjalan hingga iterasi ke-14 sehingga diperoleh nilai fungsi obyektif adalah 2614,45108. Proses iterasi berhenti pada iterasi ke-14 dimana nilai  $|P_t - P_{t-1}| < \xi$ .

Setelah diperoleh nilai fungsi obyektif, maka dapat diperoleh nilai pusat kluster atau *centriod* yang akan digunakan. Pada iterasi terakhir (iterasi ke-14), diperoleh nilai-nilai pusat kluster yang diberikan dalam bentuk matriks  $V_{kj}$ . Untuk  $k = 1, 2$  dan  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ , nilai pusat kluster adalah

$$V_{kj} = \begin{pmatrix} 1,9989 & 2,9812 & 2,5257 & 2,9378 & 68,2309 \\ 1,8341 & 2,3606 & 2,0676 & 2,3933 & 36,5991 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan hasil pengolahan data maka dapat diberikan derajat keanggotaan tiap observasi untuk masing-masing kluster pada iterasi terakhir (iterasi ke-14).

**Tabel 2. Derajat Keanggotaan pada Iterasi 14**

Observasi ke-i	$\mu_{i1}$	$\mu_{i2}$
1	0,0291	0,9709
2	0,2414	0,7586
3	0,0025	0,9975
4	0,5982	0,4018
5	0,0293	0,9707
6	0,9970	0,0030
7	0,9620	0,0380
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
42	0,9970	0,0030

Dari derajat keanggotaan pada iterasi terakhir tersebut dapat diperoleh informasi mengenai kecenderungan untuk setiap observasi masuk ke kluster mana. Derajat keanggotaan terbesar menunjukkan bahwa kecenderungan tertinggi observasi untuk masuk mejadi anggota kluster tertentu.

Pada observasi pertama, nilai derajat keanggotaan untuk kluster pertama 0,0291 sedangkan nilai derajat keanggotaan untuk kluster kedua 0,9709. Dari nilai tersebut observasi pertama masuk dalam kluster kedua. Hal itu dikarenakan observasi pertama mempunyai derajat keanggotaan tertinggi di kluster kedua daripada kluster pertama.

Selanjutnya, pada observasi kedua nilai derajat keanggotaan untuk kluster pertama 0,2414 sedangkan nilai derajat keanggotaan untuk kluster kedua 0,7586. Dari nilai tersebut observasi kedua masuk dalam kluster kedua.

Penentuan berlanjut hingga observasi ke-42, dengan nilai derajat keanggotaan untuk kluster pertama 0,9970 sedangkan nilai derajat keanggotaan untuk kluster kedua 0,0030. Dari nilai tersebut observasi ke-42 masuk dalam kluster pertama. Kecenderungan kluster secara keseluruhan dapat dilihat dalam Tabel 3.

**Tabel 3. Kecenderungan Kluster**

Observasi ke-	Kluster 1	Kluster 2	Observasi ke-	Kluster 1	Kluster 2
1		*	22	*	
2		*	23	*	
3		*	24		*
4	*		25		*
5		*	26		*
6	*		27	*	
7	*		28	*	
8	*		29		*
9	*		30	*	
10	*		31		*
11		*	32	*	
12	*		33	*	
13		*	34		*
14	*		35		*
15	*		36	*	
16	*		37		*
17	*		38	*	
18	*		39	*	
19		*	40	*	
20		*	41		*
21		*	42	*	

Setelah didapatkan kluster, maka dilanjutkan dengan memasukkan bobot yang akan menentukan persentase kelayakan, berikut langkah-langkahnya:

- 1) Jenis atap = 2-3
- 2) Jenis dinding = 3
- 3) Jenis lantai = 3
- 4) Keberadaan jamban = 3
- 5) Luas rumah = 45m<sup>2</sup>

$$\text{Kelayakan} = \left( \frac{\left( \frac{\sum \text{nilai yang mendekati layak}}{\sum \text{nilai per cluster}} \right) \times 100\%}{\sum \text{kriteria}} \right)$$

Pada kluster pertama, perhitungan persentase untuk menentukan kelayakan rumah untuk setiap kriteria yaitu: berdasarkan jenis atap 100%, berdasarkan jenis dinding 95,833%, berdasarkan jenis lantai 54,167%, berdasarkan keberadaan jamban 91,667%, berdasarkan luas rumah 100%. Rata-rata persentase pada kluster pertama adalah 90,278%. Sehingga persentase kelayakan rumah hunian yang termasuk pada kluster pertama yaitu 90,278%.

Sedangkan pada klaster kedua, perhitungan persentase untuk menentukan kelayakan rumah untuk setiap kriteria yaitu: berdasarkan jenis atap 83,333%, berdasarkan jenis dinding 44,444%, berdasarkan jenis lantai 5,556%, berdasarkan keberadaan jamban 50%, berdasarkan luas rumah 16,667%. Rata-rata persentase pada klaster kedua adalah 50%. Sehingga persentase kelayakan rumah hunian yang termasuk pada klaster kedua yaitu 50%.

Dari hitungan di atas, diambil nilai persentase yang terbesar untuk mendapatkan kelayakan rumah hunian. Sehingga yang termasuk ke dalam kategori layak adalah klaster 1 dengan kelayakan 90%. Dengan hasil lengkap dari pengklasteran rumah layak dan tidak layak dapat dilihat pada Tabel 4.

**Tabel 4. Hasil Pengklasteran**

Klaster	Observasi ke-
1 (kelayakan 90%)	4,6,7,8,9,10,12,14,15,16,17,18,22,23,27,28,30,32,33,36,38,39,40,42
2 (kelayakan 50%)	1,2,3,5,11,13,19,20,21,24,25,26,29,31,34,35,37,41

Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa masih terdapat 18 rumah dengan kelayakan 50% dari 42 rumah yang menjadi observasi. Dengan persentase rumah yang masuk klaster 1 adalah 57,14% dan yang masuk klaster 2 adalah 42,86%. Sehingga masih diperlukannya perhatian khusus untuk melihat kondisi perumahan di daerah tersebut.

### Validitas Pengklasteran Menggunakan Fuzzy

Metode pengelompokan yang menggunakan konsep fuzzy, sebuah data bisa menjadi anggota di semua klaster dengan nilai derajat keanggotaan yang dimilikinya. Semakin tinggi nilai derajat keanggotaan pada sebuah klaster maka semakin besar kecenderungan menjadi anggota klaster tersebut.

Dari pengolahan data menggunakan Matlab diperoleh hasil validitas Fuzzy seperti pada Tabel 5.

**Tabel 5. Validitas dengan Jarak *Euclidean* dan *City Block***

Jarak	<i>Euclidean</i>	<i>City Block</i>
PCI	0,8614	0,8614
PEI	0,3408	0,3408
MPCI	0,7229	0,7229
FSI	-6,3955e+003	-6,8651e+003
XBI	0,0622	0,0679
PCAESI	1,1452 dan 0,9810	1,1452 dan 0,9810
PCAESI total	2,1262	2,1262

Dari hasil validasi, dapat dilihat bahwa nilai yang didapat dengan kedua jarak yang digunakan hampir sama. Dengan penjelasan:

- Nilai PCI (*partition coefficient index*) yaitu 0,8614 (mendekati 1) sama pada kedua jarak mempunyai arti bahwa kualitas klaster yang didapat baik.
- Nilai PEI (*partition entropy index*) yaitu 0,3408 (mendekati 0) sama pada kedua jarak mempunyai arti bahwa kualitas klaster yang didapat baik.
- Nilai MPCI yaitu 0,7229 (mendekati 1) sama pada kedua jarak yang digunakan mempunyai arti bahwa kualitas klaster yang didapat baik`
- Nilai FSI hampir sama pada kedua jarak yaitu -6,3955e+003 untuk *Euclidean* dan -6,8651e+003 untuk *City Block*, mempunyai arti bahwa kualitas klaster yang didapat baik.
- Nilai XBI yaitu 0,0622 untuk *Euclidean* dan 0,0679 untuk *City Block*, mempunyai arti bahwa kualitas hasil pengelompokan baik.

- Nilai PCAESI untuk klaster ke 1 dan klaster ke 2 yaitu 1,1452 dan 0,9810, karena nilainya cukup besar dan tidak negatif maka berarti masing-masing klaster bersifat kohesif (kompak) di dalam dan terpisah dari klaster yang lain.
- Nilai PCAESI total yaitu 2,1262 untuk kedua jarak yang digunakan, mempunyai arti bahwa klaster bersifat kohesif (kompak) dan terpisah dari klaster yang lain.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa 2 klaster baik untuk digunakan pada pengelompokan data untuk menentukan kelayakan rumah.

## 6. Kesimpulan

Algoritma *Fuzzy C-Means* merupakan salah satu teknik pengklasteran data yang mana keberadaan tiap-tiap titik data dalam suatu klaster ditentukan oleh derajat keanggotaannya. Dalam penelitian ini dilakukan pengklasteran terhadap 42 sampel rumah dari dua dusun di desa Wayame. Berdasarkan pengklasteran yang dilakukan diperoleh 2 klaster. Dari kedua klaster tersebut diketahui bahwa klaster pertama merupakan klaster yang beranggotakan rumah yang tidak layak yaitu 18 rumah terdiri atas 9 rumah pada Dusun Keranjang dan 9 rumah pada Dusun Waringin Cap, sedangkan klaster kedua merupakan klaster yang beranggotakan rumah yang layak yaitu 24 rumah terdiri atas 13 rumah pada dusun Keranjang dan 11 rumah pada Dusun Waringin Cap.

## Daftar Pustaka

- [1] J. C. Bezdek, *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*, New York: Plenum, 1981.
- [2] M. Mirza and Faisal, "Metode Klastering dengan Algoritma Fuzzy C-Means untuk Rekomendasi Pemilihan Bidang Keahlian Pada Program Studi Teknik Informatika," 2013.
- [3] U. Fadilah, "Analisis Penyandang Masalah Kesejahteraan Sosial di Indonesia Menggunakan Metode Fuzzy C-Means Klastering dan Biplot," 2011.
- [4] Undang-Undang Nomor 4 Tahun 1992 Tentang Perumahan dan Permukiman.
- [5] Peraturan Pemerintah No. 80 tahun 1999 Tentang Kawasan Siap Bangun dan Lingkungan Siap Bangun Berdiri Sendiri.
- [6] R. Putra, N. Nasution and Yummastian, "Aplikasi E-Zakat dan Penyaluran Menggunakan Fuzzy C-Means (Studi Kasus: LAZISMU Pekanbaru)," 2015.
- [7] J. C. Bezdek, "Cluster Validity with Fuzzy Set," *J. Cybernet*, vol. 3, no. 3, pp. 58-72, 1974.
- [8] Y. Fukuyama and M. Sugeno, "A New Method Measurements in Taxonomic Problems," *Annals of Eugenics*, vol. 7, no. 11, pp. 179-188, 1989.
- [9] K. L. Wu and M. S. Yang, "A Cluster Validity Index for Fuzzy Clustering," *Pattern Recognition Letters*, vol. 26, pp. 1275-1291, 2005.
- [10] N. R. Pal and J. C. Bezdek, "On Cluster Validity for Fuzzy C-Means Model," *IEEE Transactions of Fuzzy Systems*, vol. 3, no. 3, pp. 370-379, 1995.

## EFEKTIVITAS KINERJA DIAGRAM KONTROL G

**Marlon Stivo Noya Van Delsen**

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura  
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia  
e-mail: marlonnvd@gmail.com

---

### Abstrak

*Statistical Proses Control (SPC)* merupakan metode dalam ilmu statistika yang bertujuan untuk mengontrol suatu proses. Dalam mencapai tujuan SPC maka metode yang dapat digunakan adalah Diagram Kontrol (*Control Chart*). Diagram kontrol merupakan sebuah grafik yang memberi gambaran tentang perilaku sebuah proses. Diagram kontrol dapat dibagi menjadi dua berdasarkan banyaknya karakteristik kualitas yang diamati, yaitu diagram kontrol univariat dan diagram kontrol multivariat. Dalam memonitor proses membutuhkan dua hal penting, yaitu memonitor mean proses dan memonitor variabilitas proses [1]. Kinerja dari suatu diagram kontrol dapat dilihat dari seberapa cepat suatu diagram kontrol dapat mengidentifikasi sinyal *out of control*. Salah satu metode untuk melihat kinerja diagram kontrol adalah *Average Run Length (ARL)*. Noya Van Delsen dan Mashuri dalam [2], membandingkan kinerja diagram kontrol G dan diagram kontrol yang berdasar pada ARL. Namun penelitian tersebut dibatasi pada jumlah karakteristik kualitas yang digunakan. Sehingga penelitian ini bertujuan untuk meninjau kinerja diagram kontrol G yang berdasar pada ARL, dengan jumlah karakteristik kualitas yang bervariasi. Hasil simulasi ARL menunjukkan bahwa kinerja diagram kontrol G sangat efisien walaupun menggunakan jumlah karakteristik karakteristik yang bervariasi. Ini dibuktikan dengan interval nilai ARL yang saling mendekati.

*Kata Kunci: Average Run Length, Diagram Kontrol G, Statistical Proses Control.*

## THE PERFORMANCE EFFECTIVITY OF G CONTROL CHART

### Abstract

Statistical Proses Control (SPC) is a statistical method that useful for monitoring process. In achieving the goals of the SPC, the method of control chart is used. Control chart is a chart that gives an overview of the behavior of a process. Based on the number of quality characteristics which observed, control chart is divided into univariate control chart and multivariate control chart. In monitoring process, it requires two important things, which are monitoring mean process and variability process [1]. The performance of a control chart can be seen from how fast a control chart can identify the signal out of control. A method to see performance of control chart is called the Average Run Length (ARL). Noya Van Delsen and Mashuri in [2] compared the performance of G control chart with control chart that based on the ARL. But their research is limited to the number of quality characteristic. So this research aims to look at the performance of G control chart with a varied of quality characteristics. The results of ARL show that the performance of G control chart is efficient even only use a varied of quality characteristics. This is proved by interval of ARL values which are approaching each other.

*Keywords: Average Run Length, G Control Chart, Statistical Process Control.*

---

### 1. Pendahuluan

*Statistical Proses Control (SPC)* merupakan metode dalam ilmu statistika yang bertujuan untuk mengontrol suatu proses. Tujuan dari SPC sendiri adalah untuk menganalisis dan memperbaiki proses. Dalam mencapai tujuan SPC maka metode yang dapat digunakan adalah diagram control (*Control Chart*). Diagram kontrol merupakan sebuah grafik yang memberi gambaran tentang perilaku sebuah proses. Diagram kontrol dapat dibagi menjadi dua berdasarkan banyaknya karakteristik kualitas yang diamati, yaitu diagram kontrol univariat dan diagram kontrol multivariat. Dalam memonitor proses membutuhkan dua hal penting, yaitu

memonitor mean proses dan memonitor variabilitas proses [1]. Sehingga dikembangkan diagram kontrol multivariat untuk memonitor variabilitas proses, sebagai pendamping diagram kontrol multivariat untuk memonitor mean proses. Diagram kontrol multivariat untuk memonitor variabilitas proses pertama kali dikembangkan oleh Alt [3], yang memberikan dua prosedur untuk memonitor variabilitas proses pada kasus multivariat. Prosedur pertama merupakan pengembangan *likelihood ratio test*,  $W$ , yang disebut diagram kontrol  $W$ . Prosedur yang kedua berdasar pada *sample generalized variance*,  $|S|$ , yang disebut diagram kontrol  $|S|$ . Setelah itu, Levinson, dkk. [4] juga mengembangkan diagram kontrol multivariat untuk memonitor variabilitas proses, dengan memperluas konsep statistik  $G$ , yang dikenal sebagai diagram kontrol  $G$ . Diagram kontrol  $G$  tersebut dapat digunakan untuk memonitor proses pada pengamatan subgrup. Kemudian Djauhari [5] mengembangkan diagram kontrol  $|S|$  untuk pengamatan subgrup, yang dikenal dengan diagram kontrol *improved generalized variance (Improved |S|)*.

Perkembangan diagram kontrol untuk variabilitas proses, bukan tanpa memperhatikan kinerja dari diagram-diagram kontrol tersebut. Kinerja dari suatu diagram kontrol dapat dilihat dari seberapa cepat suatu diagram kontrol dapat mengidentifikasi sinyal *out of control*. Salah satu metode untuk melihat kinerja diagram kontrol adalah *Average Run Length (ARL)*. Noya Van Delsen dan Mashuri [2] mengembangkan kinerja diagram kontrol  $G$  yang berdasar pada  $ARL$ . Namun pada penelitian tersebut dibatasi pada jumlah karakteristik kualitas yang digunakan. Sehingga penelitian ini bertujuan untuk melihat kinerja diagram kontrol  $G$  yang berdasar pada  $ARL$ , dengan jumlah karakteristik kualitas yang bervariasi.

## 2. Tinjauan Pustaka

Keterbatasan penggunaan diagram kontrol univariat untuk kasus multivariat, sehingga dikembangkanlah diagram kontrol multivariat sebagai solusi masalah tersebut. Beberapa diagram kontrol multivariat yang khusus digunakan untuk mengontrol variabilitas proses juga telah dikembangkan. Diantaranya, diagram kontrol multivariat berdasarkan statistik *Likelihood Ratio Test* dan diagram kontrol multivariat yang berdasar pada *sample generalized variance* [3], kemudian diagram kontrol multivariat berdasarkan statistik  $G$  yang dikenal dengan diagram kontrol  $G$  [4], serta pengembangan dari diagram kontrol yang berdasar pada *sample generalized variance*, yang dikenal dengan *improved generalized variance* [5].

Menurut Montgomery [1], diagram kontrol multivariat dapat bekerja dengan baik jika jumlah karakteristik kualitas tidak terlalu besar, yakni tidak lebih dari 10. Ini dikarenakan jika jumlah karakteristik kualitas lebih dari 10, maka kinerja diagram kontrol multivariat akan kehilangan efisiensi dalam mendeteksi pergeseran yang terjadi. Noya Van Delsen dan Mashuri [2], mengembangkan kinerja diagram kontrol  $G$  dengan menggunakan  $ARL$  dan jumlah karakteristik kualitas yang digunakan adalah 3.

### 2.1. Diagram Kontrol G

Levinson, dkk. dalam [4] mengembangkan diagram kontrol multivariat untuk mengontrol variabilitas proses dengan berdasar pada statistik  $G$ , yang disebut diagram kontrol  $G$ . Levinson, Holmes dan Mergen memperluas statistik  $G$  untuk membuat diagram kontrol  $G$ . Diagram kontrol  $G$  dikhususkan untuk mengontrol variabilitas proses multivariat pada pengamatan subgrup.

Untuk mendeskripsikan diagram kontrol  $G$  dari masing-masing subgrup ke- $m$ , dengan ukuran masing-masing subgrup  $n$ , Levinson, dkk. [4] mendeskripsikan diagram kontrol  $G$  sebagai berikut

$$G = M \times m = \ln \left[ \frac{|S|^{v_1+v_2}}{|S_1|^{v_1} |S_{2,i}|^{v_2}} \right] \times \left( 1 - \left[ \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1+v_2} \right] \times \left[ \frac{2p^2+3p-1}{6(p+1)} \right] \right)$$

dimana

$$S = \frac{v_1 S_1 + v_2 S_{2,i}}{v_1 + v_2}$$

$$S_{2,i} = \begin{bmatrix} s_{i,1}^2 & s_{i,12} & \cdots & s_{i,1j} & \cdots & s_{i,1p} \\ & s_{i,2}^2 & \cdots & s_{i,2j} & \cdots & s_{i,2p} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & s_{i,j}^2 & \cdots & s_{i,jp} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & s_{i,p}^2 \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p.$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_{i,1}^2 & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_{i,12} & \cdots & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_{i,1j} & \cdots & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_{i,1p} \\ & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_{i,2}^2 & \cdots & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_{i,2j} & \cdots & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_{i,2p} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_{i,j}^2 & \cdots & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_{i,jp} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_{i,p}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{2,i}$$

dengan

$$s_{i,j}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{ij})^2;$$

$$s_{i,jj^*} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{ij})(x_{ij^*k} - \bar{x}_{ij^*}), j \neq j^*;$$

$$v_1 = m(n-1);$$

$$v_2 = n-1.$$

Keterangan:

$p$  = banyaknya karakteristik kualitas

$m$  = banyaknya subgrup

$n$  = banyaknya data pada setiap subgrup

$S_{2,i}$  = matriks kovarian subgrup ke- $i$

$S_1$  = rata-rata dari matriks kovarian subgrup

$v_1$  = derajat bebas untuk  $S_1$

$v_2$  = derajat bebas untuk  $S_{2,i}$

$s_{i,j}^2$  = variansi variabel ke- $j$  pada subgrup ke- $i$

$s_{i,jj^*}$  = kovariansi antara variabel ke- $j$  dengan variabel ke- $j^*$

$x_{ijk}$  = merupakan data ke- $k$  variabel ke- $j$  pada subgrup ke- $i$

$\bar{x}_{ij}$  = merupakan rata-rata variabel ke- $j$  pada subgrup ke- $i$

Menurut Kramer dan Jensen [6] statistik  $G$  berdistribusi chi-square dengan derajat kebebasan  $\frac{p(p+1)}{2}$ .

Sehingga diagram kontrol  $G$  mengikuti distribusi chi-square dengan derajat kebebasan  $\frac{p(p+1)}{2}$ . Maka batas kontrol untuk diagram kontrol  $G$  adalah:

$$[LCL, UCL] = \left[ \chi_{\frac{p(p+1)}{2}, \frac{\alpha}{2}}^2, \chi_{\frac{p(p+1)}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}}^2 \right]$$

dengan  $\alpha$  adalah taraf kepercayaan yang diinginkan. Menurut Levinson, dkk. [4] jika statistik  $G$  yang diperoleh berada di atas UCL atau di bawah LCL, maka dapat disimpulkan proses produksi tidak terkendali.

Diagram kontrol G digunakan secara khusus untuk mengontrol apakah terjadi perubahan dalam matriks kovarian. Perubahan proses pada matriks kovarian ditunjukkan dengan adanya pengamatan yang berada di luar batas kontrol oleh diagram kontrol G. Sehingga mengakibatkan proses produksi tidak terkontrol.

## 2.2. Average Run Length (ARL)

ARL merupakan rata-rata pengamatan yang harus diplot pada diagram kontrol sebelum sampai terindikasi kondisi *out of control*. Berdasarkan definisi ini maka ARL berfungsi untuk mengukur efektivitas kinerja diagram kontrol dalam mendeteksi perubahan pada suatu proses. Penentuan ARL dapat dilakukan dengan 3 pendekatan, yaitu integral, simulasi dan Rantai Markov. Nilai ARL terbagi menjadi 2 yaitu  $ARL_0$  (*ARL in control*) dan  $ARL_1$  (*ARL out of control*) dengan rumus sebagai berikut:

$$ARL_0 = \frac{1}{P(\text{Tolak } H_0 | H_0 \text{ benar})} = \frac{1}{\alpha}$$

$$ARL_1 = \frac{1}{P(\text{Terima } H_0 | H_0 \text{ Benar})} = \frac{1}{1 - \beta}$$

dengan  $H_0$  merupakan proses dalam kondisi *in control*. Sehingga  $\alpha$  disebut tipe kesalahan I pada uji hipotesis, yang berarti probabilitas memutuskan bahwa proses dalam kondisi *out of control* namun kenyataannya proses dalam kondisi *in control*. Sedangkan  $\beta$  adalah tipe kesalahan II pada uji hipotesis, yang berarti probabilitas memutuskan bahwa proses dalam kondisi *in control* namun pada kenyataannya proses dalam kondisi *out of control*, sehingga  $1 - \beta$  adalah probabilitas yang memutuskan bahwa proses dalam kondisi *out of control* sebagai proses yang *out of control*.

Maka  $ARL_0$  dapat diartikan sebagai rata-rata titik pengamatan yang harus diplot sampai ditemukannya pengamatan yang *out of control*, pada saat proses berada pada kondisi *in control*. Sedangkan  $ARL_1$  dapat diartikan sebagai rata-rata titik pengamatan yang diplot sampai ditemukannya pengamatan yang *out of control* pada proses dalam kondisi *out of control*. Nilai ARL yang diperoleh dengan pendekatan hasil simulasi yang didefinisikan sebagai nilai rata-rata *Run Length* (RL) dari semua replikasi dalam simulasi. RL merupakan jumlah titik pengamatan hingga ditemukannya *out of control* yang pertama untuk masing-masing replikasi. Sehingga jika nilai ARL yang dihasilkan semakin kecil, maka sampel yang dibutuhkan untuk memberikan sinyal perubahan proses pun semakin kecil atau dengan kata lain semakin kecil nilai ARL maka semakin cepat pula diagram diagram kontrol dapat mendeteksi perubahan proses, sehingga diagram kontrol tersebut semakin efektif untuk mendeteksi perubahan proses.

## 3. Hasil dan Pembahasan

### 3.1. Diagram Kontrol G

Diagram kontrol G pertama kali diperkenalkan oleh Levinson, dkk pada tahun 2002, sebagai pendamping diagram kontrol  $T^2$  dalam meningkatkan kinerja diagram kontrol untuk mendeteksi perubahan yang terjadi dalam matriks kovarian. Pendekatan yang digunakan pada diagram G analog dengan pendekatan yang digunakan pada diagram kontrol univariat [4].

Dalam mengkontruksi diagram kontrol G, Levinson, dkk memperluas konsep statistik G yang diusulkan oleh Kramer dan Jensen [6]. Kramer dan Jensen mengusulkan statistik G untuk menguji kesamaan dua matriks kovarian sampel ( $S_1$  dan  $S_2$ ). Sehingga Levinson, dkk memperluas konsep statistik G ini pada penerapan *Statistical Proses Control* (SPC) dengan pertanyaan apakah matriks kovarian proses berubah dari waktu ke waktu atau tidak. Sehingga dalam mengkontruksi diagram kontrol G, Levinson, dkk mengusulkan langkah-langkah sebagai berikut:

- a. Menghitung matriks kovarian dari masing-masing subgrup ( $S_{2,i}$ ).

$$S_{2,i} = \begin{bmatrix} S_{i,1}^2 & S_{i,12} & \cdots & S_{i,1j} & \cdots & S_{i,1p} \\ & S_{i,2}^2 & \cdots & S_{i,2j} & \cdots & S_{i,2p} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & S_{i,j}^2 & \cdots & S_{i,jp} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & S_{i,p}^2 \end{bmatrix}$$

dengan,

$$S_{i,j}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{ij})^2$$

$$S_{i,jj^*} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{ij}) (x_{ij^*k} - \bar{x}_{ij^*})$$

- b. Menghitung rata-rata matriks kovarian subgrup ( $S_1$ ), yang elemen-elemennya merupakan rata-rata dari setiap elemen pada semua matriks kovarian subgrup.

$$S_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{i,1}^2 & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{i,12} & \cdots & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{i,1j} & \cdots & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{i,1p} \\ & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{i,2}^2 & \cdots & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{i,2j} & \cdots & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{i,2p} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{i,j}^2 & \cdots & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{i,jp} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{i,p}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{2,i}$$

dimana,  $m$  = banyaknya subgrup.

- c. Hitung bobot dari  $S_1$  dan  $S_2$ .

$$S_i = \frac{v_1 S_1 + v_2 S_{2,i}}{v_1 + v_2}$$

dimana  $v_1 = m(n-1)$  merupakan derajat kebebasan dari  $S_1$  dan  $v_2 = n-1$  merupakan derajat kebebasan dari  $S_2$ .

- d. Hitung nilai M sebagai berikut:

$$M_i = (v_1 + v_2) \ln |S_i| - v_1 \ln |S_1| - v_2 \ln |S_{2,i}|$$

$$= \ln \left[ \frac{|S_i|^{v_1 + v_2}}{|S_1|^{v_1} |S_{2,i}|^{v_2}} \right]$$

- e. Hitung nilai t sebagai berikut:

$$t = 1 - \left[ \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1 + v_2} \right] \times \left[ \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)} \right]$$

- f. Menetapkan batas kontrol untuk diagram kontrol G berdasarkan distribusi statistik G. Jika  $S_1$  dan  $S_2$  merupakan estimasi yang independen untuk matriks kovarian maka statistik G akan mengikuti distribusi *Chi-Square*. Karena itu statistik G yang diusulkan oleh Kramer dan Jensen [6] dengan mengasumsikan bahwa  $S_1$  dan  $S_2$  merupakan estimasi yang independen untuk matriks kovarian, maka distribusi statistik G akan mengikuti distribusi *Chi-Square* dengan derajat bebas  $\frac{p(p+1)}{2}$ . Maka batas kontrol untuk diagram G akan mengikuti distribusi statistik G yang ditentukan sebagai berikut:

$$[LCL, UCL] = \left[ \chi^2_{\frac{p(p+1)}{2}, \frac{\alpha}{2}}, \chi^2_{\frac{p(p+1)}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}} \right]$$

dimana  $\frac{p(p+1)}{2}$  merupakan derajat bebas dan  $\alpha$  merupakan taraf kepercayaan yang diinginkan.

- g. Menghitung statistik G dengan rumus berikut:

$$G_i = t(M_i) \\ = \left( 1 - \left[ \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1 + v_2} \right] \times \left[ \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)} \right] \right) \times \left( \ln \left[ \frac{|S_i|^{v_1 + v_2}}{|S_{1,i}|^{v_1} |S_{2,i}|^{v_2}} \right] \right)$$

- h. Setelah itu plot statistik G bersama-sama dengan UCL dan LCL dalam bentuk diagram kontrol.

Jika  $LCL \leq G_i \leq UCL$ , maka dinyatakan tidak terjadi perubahan dalam matriks kovarian, dan proses dinyatakan *in control*. Sebaliknya, jika  $G_i > UCL$  atau  $G_i < LCL$ , maka dinyatakan telah terjadi perubahan dalam matriks kovarian, dan proses dinyatakan *out of control*.

### 3.2. Kinerja Diagram Kontrol Berdasarkan ARL

Kinerja diagram kontrol dilihat dari seberapa baik diagram kontrol tersebut mendeteksi sinyal *out of control*. Sehingga untuk membandingkan beberapa diagram kontrol sering dilihat dari kinerja diagram-diagram kontrol tersebut. *Average run Length* (ARL) merupakan salah satu cara yang dapat digunakan untuk melihat kinerja dari suatu diagram kontrol. Pada penelitian ini, analisis yang dilakukan menggunakan macro program matlab dengan karakteristik kualitas ( $p$ ) sebanyak 2, 3 dan 4, dan ukuran subgroup ( $n$ ) sebanyak 5. Sedangkan ARL yang digunakan adalah *ARL out of control* ( $ARL_1$ ). Setelah menetapkan banyaknya karakteristik kualitas dan ukuran sampel tiap subgroup, akan ditetapkan alpha, yaitu sebesar 0,0027 dan matriks kovarian yang berupa matriks identitas, dengan ukuran matriks kovarian yang sesuai dengan banyaknya karakteristik kualitas yang digunakan. Skenario yang dilakukan pada penelitian ini bergantung pada banyaknya karakteristik kualitas yang ditentukan. Skenario yang dilakukan di sini adalah dengan melakukan pergeseran varian dari 0,1 sampai 5, dengan besar pergeseran yaitu 0,1.

Proses yang dilakukan untuk mendapatkan nilai  $ARL_1$  diagram kontrol G, yaitu menghitung batas kontrol atas (UCL) dan batas kontrol bawah (LCL) untuk diagram kontrol tersebut. Setelah itu membangkitkan data yang berdistribusi normal, kemudian dilakukan pergeseran varian yang sesuai dengan skenario yang telah ditetapkan. Kemudian menghitung statistik G sampai mengeluarkan sinyal *out of control*. Sinyal *out of control* merupakan keadaan dimana statistik G melebihi UCL atau kurang dari LCL. Pada proses ini akan didapatkan nilai *Run Length out of control* ( $RL_1$ ). Setelah itu didapatkan nilai  $ARL_1$  yang pertama maka proses perhitungan masing-masing statistik akan diulang lagi sebanyak 100 kali. Sehingga akan mendapatkan nilai  $RL_1$  untuk 100 pengulangan, kemudian akan dihitung nilai  $ARL_1$  untuk skenario yang pertama pada pergeseran varian yang pertama. Kemudian proses berlanjut sampai mendapatkan nilai  $ARL_1$  untuk seluruh pergeseran varian pada skenario I, II dan III dengan  $p$  dan  $n$  yang telah ditetapkan.

Sehingga untuk  $p = 2$  akan ada 2 skenario, untuk  $p = 3$  akan ada 3 skenario, sedangkan untuk  $p = 4$  akan ada 4 skenario. Berikut adalah hasil simulasi  $ARL_1$  untuk diagram kontrol G.

**Tabel 1. Grafik ARL Diagram Kontrol G pada  $p = 3$  dan  $n = 5$**

Skenario	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
I			
II			
III	-		
IV	-	-	

Berdasarkan hasil ARL untuk  $p = 2$  dan  $n = 5$  yang ditunjukkan pada Tabel 1 maka dapat kita lihat nilai ARL diagram kontrol G untuk skenario I berkisar antara 1.43 sampai 2.4; pada skenario II nilai ARL berkisar antara 1.04 sampai 2.35. Pada  $p = 3$  dan  $n = 5$  nilai ARL untuk diagram kontrol G untuk skenario I, II dan III masing-masing berkisar antara 1.3 sampai 2.36; 1.17 sampai 2.34 dan 1.01 sampai 2.42. Pada  $p = 4$  dan  $n = 5$  nilai ARL diagram kontrol G untuk skenario I, II, III dan IV berturut-turut berkisar antara 1.12 sampai 2.34; 1.06 sampai 2.35; 1.1 sampai 2.59; dan 1.03 sampai 2.62. Sesuai dengan banyaknya karakteristik kualitas yang digunakan, dapat dilihat bahwa diagram kontrol G mampu dengan cepat mendeteksi sinyal *out of control*, ini dibuktikan dengan nilai ARL yang diperoleh hanya berkisar antara 1 sampai 2.7. Sehingga dapat dikatakan bahwa kinerja diagram kontrol sangat baik dan tidak bergantung pada banyaknya karakteristik kualitas yang dikontrol, dengan syarat jumlah karakteristik kualitas yang dikontrol tidak boleh lebih dari 10.

#### 4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dapat disimpulkan bahwa kinerja diagram kontrol G sangat efisien, walaupun dilakukan untuk jumlah karakteristik kualitas yang beragam. Ini ditunjukkan dengan kisaran nilai ARL diagram kontrol G yang hampir sama untuk setiap jumlah karakteristik kualitas yang dicobakan.

#### Daftar Pustaka

- [1] D. C. Montgomery, *Introduction to Statistical Quality Control*, Edisi ke-6, New York: John Wiley & Sons, 2009.
- [2] M. S. Noya Van Delsen dan M. Mashury, "Perbandingan Kinerja Diagram Kontrol G dan Diagram Kontrol |S| beserta Aplikasinya," dalam *Prosiding Seminar Nasional Manajemen Teknologi XVIII*, Surabaya, 2013.
- [3] F. B. Alt, "Multivariate Quality Control," dalam *Encyclopedia of Statistical Science 6*, New York, John Wiley & Sons, 1985, pp. 110-122.
- [4] W. A. Levinson, D. S. Holmes dan A. E. Mergen, "Variation Chart for Multivariate Processes," *Journal of Quality Engineering*, vol. 14, no. 4, pp. 539-545, 2002.
- [5] M. A. Djauhari, "Improved Monitoring of Multivariate Process Variability," *Journal of Quality Technology*, vol. 37, pp. 32-39, 2005.
- [6] J. Y. Kramer dan D. R. Jensen, "Fundamentals of Multivariate Analysis - Part 2: Inference about Two Treatments," *Journal of Quality Technology*, vol. 1, no. 3, pp. 189-204, 1969.
- [7] T. W. Anderson, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, New York: John Wiley & Sons, 1966.
- [8] R. Johnson dan D. Wichern, *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Edisi ke-2, Prentice-Hall, 1988.
- [9] D. Y. Rakhmawati, *Perbandingan Kinerja Diagram Kontrol Multivariat untuk Variabilitas Berdasarkan Matriks Kovariansi dan Matriks Korelasi*, Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh November, 2011.
- [10] U. Azmi, *Pengontrolan Kualitas Statistika pada Proses Produksi Woven Poly Propolene (WPP) Menggunakan Metode Diagram Kontrol Improved Generalized Variance*, Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh November, 2012.
- [11] M. F. Sindelar, "Multivariate Statistical Process Control for Correlation Matrices," University of Pittsburgh, Pittsburgh, 2007.
- [12] A. B. Yeh, D. K. Lin dan R. N. McGrath, "Multivariate Control Charts for Monitoring Covariance Matrix: A Review," *Journal of Quality Technology and Quantitative Management*, vol. 3, pp. 415-436, 2006.

**βbarekeng** terbit dua kali dalam setahun yaitu Bulan Maret dan Desember. **βbarekeng** menerima naskah dalam bentuk hasil penelitian, catatan penelitian (*note*) atau artikel ulas balik (*review/ minireview*) dan ulasan (*feature*) baik dalam bahasa Indonesia maupun dalam bahasa Inggris yang berkaitan dengan bidang Matematika dan Terapannya. Naskah yang dikirimkan merupakan naskah asli yang belum pernah diterbitkan di media manapun.

## PENGIRIMAN NASKAH

Naskah dikirimkan kepada:

**Redaksi βbarekeng**

**Jurusan Matematika**

**Fakultas MIPA**

**Universitas Pattimura**

**Jl. Ir. M. Putuhena, Poka-Ambon**

Email: [jurnalbarekeng@gmail.com](mailto:jurnalbarekeng@gmail.com)

Naskah yang dikirimkan harus dalam bentuk naskah cetak (*hard copy*) dan naskah lunak (*soft copy*), disertai dengan alamat korespondensi lengkap dan alamat *email* yang dapat dihubungi.

**Naskah cetak (*hard copy*):**

Naskah cetak dikirim sebanyak satu eksemplar dengan format pengetikan menggunakan *Microsoft Word* seperti berikut:

- Naskah diketik 1 spasi pada kertas HVS Ukuran A4 dengan batas tepi 2 cm dan font *Times New Roman* berukuran 11 point.
- Jumlah halaman maksimum 12 halaman termasuk Lampiran (Gambar dan Tabel). Setiap halaman diberi nomor secara berurutan pada tepi kanan atas. Untuk keterangan Lampiran: Tipe huruf Times New Roman berukuran 10 point.
- Persamaan matematika (*equations*) dapat diketik dengan menggunakan *MS Equations* atau *MathType* dengan tipe huruf *Cambria* atau Times New Roman berukuran 11 point.

**Naskah lunak (*soft copy*):**

Naskah lunak harus dalam format *Microsoft Word* dan dikirimkan dalam bentuk disk (CD, DVD), *flashdisk*, atau *attachment email*.

## SUSUNAN NASKAH

- a. Judul ditulis dalam Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris.
- b. Nama Lengkap Penulis (tanpa gelar).
- c. Nama Lembaga atau Institusi, disertai Alamat Lengkap dengan nomor kode pos. Untuk korespondensi dilengkapi No. Telp., fax dan *email*.
- d. Judul Ringkas (*Running Title*) (jika diperlukan).
- e. Abstrak (*Abstract*) dalam Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris.
- f. Kata Kunci (*Keywords*) dalam Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris.
- g. Pendahuluan (*Introduction*) meliputi latar belakang, masalah dan tujuan penelitian.

- h. Tinjauan Pustaka meliputi ulasan (*Review*) penelitian dari beberapa literatur serta teori-teori dasar yang mendukung penelitian.
- i. Metode Penelitian (*Methods and Materials*) meliputi bahan, cara, dan analisis dalam penelitian (jika ada).
- j. Hasil dan Pembahasan (*Results and Discussion*) ditulis secara berkesinambungan dalam satu rangkaian naskah penulisan.
- k. Kesimpulan (*Conclusion*)
- l. Ucapan Terima Kasih (*Acknowledgements*) (Jika diperlukan)
- m. Daftar Pustaka ditulis memakai sistem indeks sesuai *reference style* IEEE. Di bawah ini beberapa contoh penulisan sumber acuan:

**Jurnal:**

- [1] K. R. Gabriel, "The Biplot Graphic Display of Matrices with Application to Principal Component Analysis," *Biometrika*, vol. 58, pp. 453-467, 1997.

**Buku:**

- [2] D. Rosadi, *Ekonometrika & Analisis Runtun Waktu Terapan dengan Eviews* (Aplikasi untuk bidang ekonomi, bisnis, dan keuangan), Yogyakarta: Andi Offset, 2012.

**Skripsi/ Tesis/ Disertasi:**

- [3] M. Apri, "Model Biaya Total Jaringan Pipa Transmisi Gas dan Optimasinya," Departemen Matematika ITB, Bandung, 2002.

**Informasi dari Internet:**

- [4] G. Skye, "Transformation," 8 Desember 2012. [Online]. Available: <http://www.livelove.co.uk/ap/>. [Diakses 4 Oktober 2014].

- n. Lampiran meliputi Gambar dan Tabel beserta keterangannya (jika diperlukan).

## CATATAN (NOTE)

- Naskah harus dikirimkan ke redaksi selambat-lambatnya 2 (dua) bulan sebelum bulan penerbitan jurnal (Maret dan Desember).
- Naskah akan dinilai oleh tim penilai yang relevan sebelum diterbitkan dan tim redaksi berhak merubah struktur naskah tanpa merubah isi naskah.
- Naskah dapat diterima atau ditolak. Naskah ditolak, jika tidak memenuhi kriteria penulisan, pelanggaran hak cipta, kualitas rendah, dan tidak menanggapi korespondensi redaksi. Pengumuman naskah ditolak atau diterima paling lambat 1 (satu) bulan setelah naskah terkirim.
- Penulis atau penulis pertama memperoleh 1 (satu) eksemplar jurnal yang sudah diterbitkan.

**B**arekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan



© Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI 2015