

PERSEPSI MAHASISWA DALAM MEMVALIDASI BUKTI MATEMATIS

Christi Matitaputty

Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Pattimura
Jalan Ir. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka, Ambon, Indonesia

Program Studi Pendidikan Matematika, Pascasarjana, Universitas Negeri Malang
Jalan Semarang No.5, Sumbersari, Kec. Lowokwaru, Kota Malang, Jawa Timur, Indonesia

e-mail: chmatitaputty@gmail.com;

Submitted: September 3, 2020

Revised: September 23, 2020

Accepted: September 28, 2020

*corresponding author**

Abstrak

Pentingnya menentukan persepsi mahasiswa dalam pembuktian matematis merupakan sebuah langkah awal dalam membantu siswa mengatasi kesulitan menyusun bukti matematis. Penelitian ini bertujuan mendeskripsikan persepsi mahasiswa dalam memvalidasi bukti matematis. Persepsi mahasiswa ini diperhatikan berdasarkan jawaban yang diberikan terhadap pembuktian sebuah teorema. Penelitian ini adalah penelitian kualitatif. Subjek dalam penelitian ini adalah dua orang mahasiswa semester 2 program studi pendidikan matematika Universitas Negeri Malang. Subjek penelitian dipilih secara purposif dengan pertimbangan sebagai berikut: mahasiswa memiliki jawaban yang menarik dan keterampilan komunikasi yang baik sehingga peneliti dapat mengeksplorasi persepsi mahasiswa dalam menulis bukti matematis. Data dikumpulkan dengan menggunakan instrument soal dan kemudian dianalisis hasil pekerjaan menyelesaikan masalah serta dilakukan wawancara mendalam. Hasil penelitian menunjukkan bahwa mahasiswa memiliki persepsi bahwa dengan memberikan beberapa contoh maka bukti disebut valid, satu contoh penyangkal dapat meverifikasi pernyataan menjadi tidak valid dan dengan menggunakan bukti formal sebuah pernyataan dapat dibuktikan valid. Dengan demikian dosen seharusnya lebih banyak memberikan bimbingan, latihan dan mendorong mahasiswa untuk mengerjakan pembuktian matematis sehingga mahasiswa nantinya dapat membuat pembuktian yang valid

Kata Kunci: persepsi, validasi bukti matematis

Abstract

This study aims to describe the perceptions of prospective students in the first year in validating mathematical proof. This student's perception is discussed based on the answers given to the proof of a theorem. This research is a qualitative research. The subjects in this study were three students from the second semester mathematics education study program at a university in East Java. Research subjects were chosen deliberately with the following considerations: prospective teacher students who use examples in making mathematical proof and good communication skills make research can facilitate students' perceptions in writing mathematical proof. The results showed that students had perceptions about who gave several examples so that the proof was called valid, one example of denying it could prove it was invalid and using formal proof that proved it could be proven valid

Keywords: perception, validation mathematical proof

1. Pendahuluan

Kemampuan untuk menyusun bukti dalam matematika adalah keterampilan yang penting untuk setiap matematikawan. Kemampuan ini sering menjadi tujuan utama pembelajaran matematika tingkat lanjut. Namun, kenyataannya kegagalan dalam menyusun bukti matematis merupakan suatu hal umum yang sering dialami oleh mahasiswa dalam melakukan pembuktian matematika tingkat lanjut. Sejumlah penelitian

menunjukkan bahwa mahasiswa memiliki kesulitan dalam menulis dan menyusun bukti matematis oleh karena mereka tidak memiliki pengetahuan yang cukup tentang struktur bukti matematika (Almeida, 2000; Moore, 1994; Stylianides, 2007; Stylianides et al., 2004; Weber, 2001). Ada berapa sumber utama kesulitan yang dialami oleh mahasiswa universitas dalam pengalaman pendidikan matematika dalam membangun bukti diantaranya mahasiswa sulit memahami konsep, bahasa dan notasi matematika



serta memulai sebuah bukti. Persepsi mahasiswa tentang matematika dan bukti sangat mempengaruhi proses pembuktian yang dilakukan (Moore, 1994).

Dari berbagai masalah diatas, banyak peneliti telah mencoba memberikan solusi agar kesalahan dapat diminimalisir. Pembuktian matematis dapat dilakukan dengan melakukan format dua kolom untuk membangun ide-ide dan bukti sehingga dapat mengakomodir proses pembuktian sehingga para guru diharapkan menunjukkan dan memperhatikan kesalahan proses pembuktian (Herbst, 2002). Selain itu Hazzan dan Zazkis (Hazzan & Zazkis, 2003) menggunakan strategi mimikri bukti dengan bantuan computer yang bertujuan membantu mahasiswa mengurai bukti yang kompleks yang dapat dimanipulasi dengan bantuan komputer. Strategi ini diawali dengan diskusi tentang kesulitan mahasiswa dengan bukti matematika dan memperkenalkan ide mimikri bukti dengan contoh numerik. Dengan demikian mahasiswa memiliki banyak pengalaman dalam menyusun bukti matematis.

Bukti dan pembuktian merupakan suatu aktifitas yang penting bagi matematikawan dan pendidik matematika. Dengan demikian setiap mahasiswa matematika seharusnya mampu memahami dan membangun bukti matematika. Karena mereka akan mendidik selanjutnya generasi, ini menjadi sangat penting bagi seorang mahasiswa (Basturk, 2010). Penelitian-penelitian sebelumnya lebih berfokus pada pemahaman bukti matematika tingkat tinggi pada pembelajaran aljabar, analisis dan geometri. Namun kenyataannya menyusun bukti matematis masih menjadi masalah yang dialami oleh mahasiswa ditahun pertama perguruan tinggi. Hal ini sesuai dengan pengamatan Ball, dkk (Ball et al., 2003) bahwa pengajaran matematika dasar di banyak negara berfokus pada konsep aritmatika dari perhitungan, dan algoritma. Dengan demikian keadaan ini membuat mahasiswa mengalami adanya perubahan dalam proses berpikir akibat transisi matematika sekolah ke pembuktian formal dalam matematika murni perguruan tinggi. Dalam penelitian ini peneliti mencoba untuk menghadirkan masalah menyusun bukti matematis dari salah satu teorema yang berlaku pada bilangan bulat.

Masalah yang diberikan sangat sederhana dan tidak membutuhkan proses pembuktian yang kompleks karena hanya melibatkan konsep bilangan ganjil dan bilangan genap akan tetapi peneliti mengamati bahwa ada kesalahan yang terjadi ketika mahasiswa melakukan proses

pembuktian. Padahal mahasiswa sudah diajarkan bagaimana menyusun bukti matematis dengan berbagai strategi pembuktian namun mahasiswa masih memilih membuktikan dengan menggunakan contoh-contoh dan meyakini bahwa contoh-contoh tersebut adalah bukti yang valid.

Berdasarkan observasi, peneliti menemukan bahwa masih banyak mahasiswa yang memiliki masalah ketika terlibat dalam penyusunan bukti matematis. Peneliti memberikan dua masalah. Soal pertama, apakah kuadrat suatu bilangan yang dikurangi satu akan bernilai genap jika bilangan tersebut adalah bilangan ganjil? Jika benar, apa yang saudara lakukan? Soal kedua, apakah jika jumlah dari dua bilangan bernilai ganjil maka salah satu bilangan tersebut adalah bilangan ganjil. Jika benar, apa yang saudara lakukan? Hal ini ditunjukkan dari presentase mahasiswa yang menjawab benar untuk pertanyaan yang diberikan peneliti. Hasilnya menunjukkan bahwa sebanyak 16% mahasiswa menjawab benar dalam pertanyaan pertama dan kedua.

Berdasarkan pengamatan ini maka peneliti menemukan bahwa mahasiswa mengalami kesulitan jika dihadapkan dengan masalah pembuktian. Peneliti percaya bahwa masih banyak mahasiswa yang mengalami kesalahan dalam menyelesaikan masalah pembuktian. Ketika mahasiswa mengalami kegagalan dalam menyusun bukti matematis maka ada kemungkinan bahwa mereka tidak memiliki pemahaman konseptual yang mendalam. Jika mereka tidak memiliki pemahaman yang kuat, tentu menjadi masalah ketika mereka mulai mengajar sebagai guru matematika, baik di sekolah dasar, menengah dan menengah. pentingnya membuktikan dalam pendidikan matematika tidak bisa diabaikan. Oleh karena itu, langkah pertama dalam membantu siswa mengatasi kesulitan tersebut adalah menentukan persepsi mereka tentang pembuktian. Penting bagi peneliti untuk melakukan penelitian terkait dengan persepsi mahasiswa dalam menyusun bukti matematis (Almeida, 2000; Anapa, 2010; Aylar, 2014; Basturk, 2010; Lesseig et al., 2019; Studies, 2016)

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk meneskripsikan bagaimana persepsi mahasiswa dalam memvalidasi bukti matematis. Harapannya adalah bahwa penelitian ini dapat digunakan sebagai refleksi, untuk mempersiapkan mahasiswa untuk pemahaman mendalam mereka tentang proses menyusun bukti matematis. Mahasiswa kemudian menjadi guru matematika di sekolah, tentu saja, harus memiliki pemahaman tentang bukti matematis yang mendalam sehingga mereka tidak mengalami banyak gangguan dalam

membangun konsep matematika. Oleh karena itu, pertanyaan penelitian ini adalah "bagaimana persepsi mahasiswa dalam memvalidasi bukti matematis.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini melibatkan 37 mahasiswa dari program Pendidikan Matematika semester kedua, tahun akademik 2019/2020 Universitas Negeri Malang. Semua mahasiswa diberikan dua masalah untuk melihat kemampuan mahasiswa dalam menyusun bukti matematis. Soal yang diberikan tidak langsung menuliskan perintah untuk membuktikan namun memberikan arahan bagaimana mereka harus membuktikan sebuah pernyataan atau teorema yang diberikan. Diharapkan dari kedua soal yang diberikan mahasiswa dapat membuktikan pernyataan atau teorema yang diberikan dengan menggunakan metode pembuktian.

Peneliti memilih subjek dengan mempertimbangkan keterampilan komunikasi dan jawaban dengan beberapa tipe persepsi (Morali et al., 2006) yaitu mahasiswa tipe A menerima dan bekerja dengan bukti formal dan menolak bukti informal. Tipe B lebih memilih menggunakan bukti informal untuk menuju bukti formal; mahasiswa tipe C sebagian besar lebih menyukai bukti informal ketika dibandingkan dengan bukti formal dan mahasiswa tipe D lebih suka bukti formal tetapi mereka tidak bisa mencapai kesimpulan karena menyalahgunakan bahasa matematika dan symbol. Berdasarkan kriteria ini, peneliti memperoleh dua subjek penelitian. Dari dua mahasiswa tersebut, peneliti melakukan wawancara satu per satu untuk mengeksplorasi secara mendalam informasi terkait pekerjaan mereka dan untuk mengetahui bagaimana persepsi mahasiswa dalam memvalidasi bukti matematis. Pada akhirnya, peneliti dapat mengetahui persepsi mahasiswa tentang bukti matematis.

3. Hasil dan Pembahasan

Ketika peneliti mengajukan pertanyaan: (1) apakah kuadrat suatu bilangan yang dikurangi satu akan bernilai genap jika bilangan tersebut adalah bilangan ganjil? Jika benar, apa yang saudara lakukan? (2) apakah jika jumlah dari dua bilangan bernilai ganjil maka salah satu bilangan tersebut adalah bilangan ganjil. Jika benar, apa yang saudara lakukan? Maka ada 84% mahasiswa salah menjawab. Di antara kesalahan-kesalahan ini, sebagian besar mahasiswa menjawab dengan

menggunakan contoh-contoh untuk menyusun bukti dari pernyataan yang diberikan.

Mahasiswa tahun pertama ini sudah menempuh mata kuliah landasan matematika yang mana sudah diberikan cara dan metode menyusun bukti matematis bahkan dalam pembelajaran pun mereka sudah diperingati untuk tidak menggunakan contoh dalam menyusun bukti matematis. Namun, kenyataannya peneliti menemukan masih banyak yang menggunakan contoh-contoh dan meyakini contoh-contoh ini sebagai bukti yang valid. Mahasiswa memahami pernyataan yang diberikan itu benar dan berlaku untuk beberapa bilangan genap atau ganjil yang dipilih.

soal (a-1), $1^2 = 1 - 1 = 0$	(Tidak terbukti)
soal (a-3), $3^2 = 9 - 1 = 8$	(Terbukti)
soal (a-5), $5^2 = 25 - 1 = 24$	(Terbukti)
soal (a-7), $7^2 = 49 - 1 = 48$	(Terbukti)
soal (a-9), $9^2 = 81 - 1 = 80$	(Terbukti)

$1 + 2 = 3$	(Terbukti)
$3 + 2 = 5$	(Terbukti)
$5 + 6 = 11$	(Terbukti)

Gambar 1. Pekerjaan Subjek AD soal no 1(a) soal no 2 (b)

Misalkan, $(2k+1)$ untuk bil. ganjil dan $(2k)$ untuk bil. genap
 Sehingga $n = 2k + 1$, diformulasikan kuadrat maka

$$n^2 = (2k + 1)^2$$

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Asumsikan bahwa kuadrat suatu bilangan jika dikurangi satu bernilai genap
 Sehingga $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1$

$$n^2 - 1 = 4k^2 + 4k$$

$$n^2 - 1 = 2(2k^2 + 2k) \dots (2k^2 + 2k = p)$$

$$n^2 - 1 = 2p$$

Gambar 2. Pekerjaan Subjek EP

Pada Gambar 1, subjek AD memberikan gambaran bahwa bukti adalah sebuah sarana untuk membangun kebenaran matematika dan menunjukkan hasilnya benar tanpa keraguan dalam pandangan mereka. Dengan memisalkan suatu bilangan ganjil dan menggunakan beberapa contoh bilangan maka mahasiswa tersebut merasa bahwa proses pembuktiannya sudah benar. Selain itu, mahasiswa juga memberikan beberapa contoh sehingga memberi keyakinan bahwa bukti yang ditulis sudah cukup dan benar. Begitupula untuk masalah kedua, subjek AD masih menggunakan beberapa contoh untuk memverifikasi pernyataan yang diberikan. Sementara di gambar 2 mahasiswa memiliki persepsi yang lain, subjek EP mampu menuliskan bukti secara formal dengan memisalkan atau menuliskan apa yang diketahui menuju ke kesimpulan yang akan dibuat. Subjek EP menuliskan definisi bilangan ganjil dan genap kemudian berangkat dari definisi menuju apa yang

akan dibuktikan yaitu kuadrat suatu bilangan ganjil yang dikurangi 1 menghasilkan bilangan genap. Dari interpretasi jawaban yang diperoleh maka peneliti maka peneliti melakukan wawancara lebih lanjut untuk menelusuri apa yang menyebabkan mahasiswa tersebut memberikan argument seperti itu.

Penggalan wawancara ditunjukkan dalam wawancara 1

Dialog 1

- Peneliti : Mengapa anda menggunakan contoh untuk membuktikan pernyataan tersebut benar?
- Subjek AD : Yang ada dalam pikiran saya adalah menggunakan contoh bu dan saya rasa dengan contoh bilangan-bilangan yang saya tulis itu sudah cukup untuk membuktikan bahwa pernyataan tersebut benar.
- Peneliti : Apa yang anda ketahui tentang pembuktian?
- Subjek AD : Sesuatu yang harus dibuktikan kebenarannya.
- Peneliti : Apa yang kamu maksudkan dengan sesuatu?
- Subjek AD : Maksudnya, pernyataan bu.
- Peneliti : Apa maksud kamu menuliskan saat $x=1$, $1^2=1-1=0$ (tidak terbukti)?
- Subjek AD : Artinya saat saya mensubstitusi nilai 1 yang dikuadratkan dan dikurangi 1 itu bukan bilangan genap bu, tapi nol.
- Peneliti : Berarti kamu menganggap pernyataan yang diberikan ini salah?
- Subjek AD : Iya bu, salah saat dipilih $x=1$ tapi benar untuk yang lain.
- Peneliti : Mengapa disoal no 2 anda menjawab seperti itu?
- Subjek AD : Karena saya piker dengan memberikan beberapa contoh-contoh bilangan yang sesuai dengan pernyataan maka itu sudah cukup dan benar bu.

Dari wawancara dalam Dialog 1, subjek memahami bahwa meyakini bahwa contoh-contoh tersebut berlaku secara umum dan diyakini benar dapat membuktikan pernyataan dimaksud. Selanjutnya subjek memahami pembuktian sebatas pernyataan yang harus dibuktikan dan belum didukung alasan yang jelas. Masalah pembuktian jarang dikerjakan sehingga mahasiswa tidak punya pengetahuan yang luas tentang pembuktian. Dalam menyelesaikan soal no 2 subjek masih tetap berfokus pada menggunakan contoh-contoh dan diyakini sebagai bukti yang valid. Hal ini menunjukkan bahwa mahasiswa belum memahami bagaimana memulai sebuah bukti dan menyatakan

bukti itu valid secara formal. Hal ini sejalan dengan temuan (Aylar, 2014) bahwa mahasiswa lebih suka memverifikasi bukti dengan contoh-contoh karena mereka mengalami kesulitan dalam memahami dan menerapkan ekspresi aljabar. Temuan penelitian ini mendukung penelitian sebelumnya yang menemukan bahwa banyak mahasiswa yang salah dalam menyusun bukti matematis dan meyakini contoh-contoh sebagai bukti yang valid (Tuba et al., 2014) selain itu pembuktian dengan memberikan contoh penyanggah juga membuat pernyataan menjadi semakin logis (Aylar, 2014). Dengan demikian untuk memahami dan menulis bukti matematis perlu dipahami definisi, sifat-sifat dan aturan-aturan dasar yang berlaku pada operasi bilangan sehingga dalam proses pembuktian dapat berjalan dengan baik (Velleman, 2006).

Peneliti melakukan wawancara dengan Subjek EP mengenai proses pembuktian yang dilakukan. Kutipan wawancara seperti yang ditunjukkan dalam Dialog 2.

Dialog 1

- Peneliti : Mengapa kamu menuliskan seperti ini?
- Subjek EP : Disini saya menuliskan apa yang ada dipikiran saya, saya mencoba melakukan pembuktian langsung. Ketika saya memisalkan bilangan ganjil $2k + 1$ dan bilangan genap itu $2k$. bilangan berapapun yang dikalikan 2 akan selalu genap dan ketika ditambah 1 akan menghasilkan bilangan ganjil. Karena diminta n kuadrat maka kedua ruas dikuadratkan. Kemudian saya asumsikan kuadrat suatu bilangan yang dikurangi satu akan menghasilkan bilangan genap. selanjutnya n kuadrat dikurangi 1 akan sama dengan $4k^2 + 4k + 1$ sehingga diperoleh $n^2 - 1 = 2p$. Jadi kuadrat suatu bilangan yang dikurangi satu akan menghasilkan bilangan genap.
- Peneliti : Mengapa kamu menjawab seperti ini?
- Subjek EP : Saya menjawab seperti itu, karena dengan pembuktian itu akan terlihat secara logis hasil dari pernyataan tersebut.
- Peneliti : Apa yang kamu ketahui tentang pembuktian?
- Subjek EP : Pembuktian itu kan, untuk menyatakan atau mencari pertanyaan/dugaan mengenai suatu hal yang masih patut dipertanyakan bu. So, dengan pembuktian kita bisa menyatakan sesuatu pernyataan tersebut bernilai salah atau benar.
- Peneliti : Apa maksud kata pernyataan/dugaan, apakah pernyataan itu sama dengan dugaan? Mengapa

Subjek : Maaf bu, tidak sama bu, maksud saya EP disini pernyataan/dugaan itu adalah hypothesis bu.
 Peneliti : Ok baik,

Subjek EP memiliki persepsi yang berbeda dengan subjek DA. Jawaban subjek EP menyatakan bahwa bukti yang diberikan mengarah pada verifikasi pernyataan yang menjelaskan mengapa pernyataan itu benar dan dapat diterima dengan logis atau masuk akal. Hal ini sesuai dengan pernyataan (Almeida, 2000) bahwa bukti matematis dari sebuah pernyataan yang pada umumnya dipahami memiliki empat fungsi utama: (i) verifikasi pernyataan, (ii) penjelasan pernyataan, (iii) komunikasi kepada orang lain, (iv) sistematisasi dari pernyataan ke dalam sistem deduktif. Subjek EP sudah memahami soal dan memulai dengan membuat pemisalan atas bilangan ganjil dan bilangan genap. Proses membuktikan berkaitan erat dengan pengetahuan awal yang dimiliki mahasiswa saat mahasiswa punya banyak pengalaman dalam membuktikan pernyataan matematis maka mahasiswa akan dengan mudah menggunakan bukti formal sebagai bukti valid. Selain itu, hasil penelitian (Tuba et al., 2014) menyatakan bahwa terdapat beberapa mahasiswa yang lebih menyukai cara formal dalam proses pembuktian. Bukti matematika memberikan jaminan untuk pengetahuan matematika dan merupakan kegiatan penting dalam melakukan dan memahami matematika. Ketika proses pembuktian teorema dianalisis, ditentukan bahwa mahasiswa yang diketik lebih suka cara formal saat pembuktian.

Dengan demikian persepsi mahasiswa terhadap bukti matematis ini memberikan gambaran bahwa siswa kurang memiliki banyak pengalaman belajar dalam menyelesaikan soal-soal pembuktian, sehingga untuk meningkatkan persepsi mahasiswa dosen secara rutin dapat memberikan banyak latihan dan bimbingan bagi mahasiswa dalam mengerjakan soal-soal pembuktian. Penelitian ini memiliki keterbatasan dengan hanya memotret persepsi dari dua orang mahasiswa dan tidak dapat di generalisasi sehingga diperlukan penelitian lanjutan dengan memperhatikan jumlah subjek penelitian maupun kemampuan matematis lainnya.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan maka dapat disimpulkan persepsi mahasiswa dalam menyusun bukti matematis yaitu mahasiswa memiliki persepsi dalam memverifikasi bukti matematis dengan contoh-contoh karena mereka mengalami

kesulitan dalam memahami dan menerapkan ekspresi aljabar. Selain itu pembuktian dengan memberikan contoh penyanggah juga membuat pernyataan menjadi semakin logis. Persepsi mahasiswa dalam membangun bukti matematis diyakini dengan memahami notasi aljabar sebagai buktinya dan memiliki kecenderungan untuk melakukan cara formal dalam pembuktian matematis.

Daftar Pustaka

- Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications for mathematics education. *31(6)*, 869–890.
- Anapa, P. Ö. (2010). Investigation of undergraduate students' perceptions of mathematical proof. *2*, 2700–2706.
<https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.399>
- Aylar, E. (2014). A Study on the Forms of Perception of 7th Grade Students towards the Concept of Proof. *Journal of Education and Future*, *5*, 39–56.
- Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2003). The teaching of proof. III. <http://arxiv.org/abs/math/0305021>
- Basturk, S. (2010). First-year secondary school mathematics students' conceptions of. *36(3)*, 283–298.
<https://doi.org/10.1080/03055690903424964>
- Hazzan, O., & Zazkis, R. (2003). Mimicry of proofs with computers: The case of Linear Algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34(3)*, 385–402.
<https://doi.org/10.1080/0020739031000108628>
- Herbst, P. G. (2002). Engaging students in proving: A double bind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33(3)*, 176–203.
<https://doi.org/10.2307/749724>
- Lesseig, K., Hine, G., & Na, G. S. (2019). Perceptions on proof and the teaching of proof: A comparison across preservice secondary teachers in Australia, USA and Korea.
<https://doi.org/10.1007/s13394-019-00260-7>
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof*. 249–266.
- Moralı, S., Ugurel, I., Türnüklü, E., & Yeşildere, S. (2006). The views of the mathematics teachers on proving. *Kastamonu Education Journal*, *14(1)*, 147–160.
- Stylianides, I. E. (2016). Preservice Mathematics Teachers' Metaphorical Perceptions towards Proof and Proving. *9(7)*, 88–97.
<https://doi.org/10.5539/ies.v9n7p88>
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38(3)*, 289–321.
- Stylianides, A. J., Stylianides, G. J., & Philippou, G. N. (2004). Undergraduate students' understanding

- of the contraposition equivalence rule in symbolic and verbal contexts. 133–162.
- Tuba, F., Övez, D., & Özdemir, E. (2014). The Investigation of Prospective Mathematics Teachers' Proof Writing Skills and Proof Self-Efficacy. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 116(2010), 4075–4079. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.893>
- Velleman, D. (2006). How to Prove It: A structured Approach (Vol. 60, Issue 4, p. 1329). <https://doi.org/10.2307/2275901>
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101–119. <https://doi.org/10.1023/A:1015535614355>.