KAJIAN STRUKTUR SUPER *n*-MATRIKS

Marsa Sopaheluwakan[1], B. P. Tomasouw[2], M. E. Rijoly[3]

[1,2,3]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura
Jalan Ir. M. Putuhena

e-mail: [1]marsa.sopaheluwakan@gmail.com ; [2]bp.tomasouw@fmipa.unpatti.ac.id ;
[3]engellinemonalisa@gmail.com

Abstrak

Super n-matriks merupakan suatu kajian dari supermatriks yang digeneralisasikan. Struktur super *n*-matriks terbentuk dari gabungan n-supermatriks yang terpatisi menurut aturan baris dan kolom tertentu. Jika $\boldsymbol{V_1}, \boldsymbol{V_2}, \dots, \boldsymbol{V_n}$ dengan $\boldsymbol{n > 3}$ merupakan supermatriks-supermatriks yang berbeda dimana $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V_1} \cup \boldsymbol{V_2} \cup \dots \cup \boldsymbol{V_n}$ maka $\boldsymbol{V}$ disebut super *n*-matriks (operasi $\cup$ hanya simbol). Dengan kata lain, $\boldsymbol{V}$ adalah perpaduan antara $\boldsymbol{n}$ supermatriks atau supermatriks berdimensi $\boldsymbol{n}$. Penelitian ini mengkaji beberapa definisi super *n*-matriks antara lain super *n*-matriks baris dan kolom, super *n*-matriks persegi dan persegi panjang, super *n*-matriks simetris, dan semi super *n*-matriks. Jika $\boldsymbol{V^T}$ merupakan transpose dari super *n*-matriks kolom $\boldsymbol{V}$, maka $\boldsymbol{VV^T}$ dan $\boldsymbol{V^TV}$ merupakan dua super *n*-matriks simetri yang berbeda.

Kata Kunci: supermatriks, super *n*-matriks.

THE STUDY OF SUPER *n*-MATRIX STRUCTURE

Abstract

Super *n*-matrix is a study of generalized supermatrix. The structure of super *n*-matrix is formed the union of *n* supermatrix which is partitioned based on row or colomn rule. If $\boldsymbol{V_1}, \boldsymbol{V_2}, \dots, \boldsymbol{V_n}$ with $\boldsymbol{n > 3}$ are different supermatrices which $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V_1} \cup \boldsymbol{V_2} \cup \dots \cup \boldsymbol{V_n}$ then $\boldsymbol{V}$ is called super *n*-matrix ($\cup$ is just a symbol). In other words, $\boldsymbol{V}$ is the combination of *n* supermatrices or supermatrix with n order. This research gives some definition of super *n*-matrix such as row and colomn super *n*-matrix, square and rectangular super *n*-matrix, symetris super *n*-matrix and semi super *n*-matrix. If $\boldsymbol{V^T}$ is the transpose of colomn super *n*-matrix $\boldsymbol{V}$, then $\boldsymbol{VV^T}$ and $\boldsymbol{V^TV}$ are two different symetris super *n*-matrix.

Keywords: super *n*-matrix, supermatrix.

1. Pendahuluan
1.1. Latar Belakang

Teori matriks merupakan cabang ilmu aljabar yang penting dalam pembahasan ilmu matematika. Dengan perkembangan ilmu pengetahuan, telah ditemukan banyak aplikasi dari matriks dalam kehidupan sehari-hari baik dalam matematika maupun terapannya.

Seiring perkembangan penelitian tentang matriks, banyak ditemui struktur matriks yang tidak biasa seperti supermatriks (Yost, 1991) dan superbimatriks (Kandasamy, 2009). Konsep supermatriks dimotivasi dari matriks partisi yang merupakan pengelompokan matriks dalam ukuran tertentu. Berbeda dengan matriks partisi, supermatriks merupakan kumpulan elemen-elemen yang merupakan matriks sederhana dan skalar-skalar yang disusun menurut aturan baris dan kolom sehingga menjadi matriks baru yang berpartisi.

Berbeda halnya dengan matriks klasik dimana operasi penjumlahan, pergandaan, pengurangan, determinan, dan invers matriks dapat dioperasikan menurut aturan tertentu, operasi gabungan matriks dapat dikondisikan untuk matriks dengan ukuran yang sama maupun berbeda. Konsep gabungan atau perpaduan dari beberapa supermatriks inilah yang disebut dengan super n-matriks. Untuk $n=2$ konsep ini disebut superbimatriks sedangkan untuk $n=3$ konsep ini disebut supertrimatriks. Oleh sebab itu, super n-matriks ini diperkenalkan untuk $n>3$.

1.2. Landasan Teori
1.2.1 Supermatriks

Supermatriks merupakan suatu matriks dengan elemen-elemennya berupa skalar-skalar atau matriks-matriks.

Ilustrasinya:

$$a_{11}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix}, a_{12}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix},$$

$$a_{21}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 9 & 9\\ 7 & 8\end{bmatrix}, a_{21}=\begin{bmatrix}0 & 7\\ 0 & 4\\ 1 & 7\end{bmatrix}$$

Dengan asumsi a_{ij}, $1\le i$, $j\le 2$, menotasikan matriks, bukan skalar suatu matriks.

Jika keempat matriks-matriks disusun dalam matriks berikut

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

secara lengkap ditulis sebagai

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 7 & 2 & 3\\ \hline 1 & 1 & 0 & 7\\ 9 & 9 & 0 & 4\\ 7 & 8 & 1 & 7\end{array}\right]$$

1.2.2 Superbimatriks

Definisi 1.1

Diberikan V_1 dan V_2 merupakan supermatriks-supermatriks berbeda dimana $V=V_1\cup V_2$ maka V disebut super bimatriks. ($\cup$ hanya simbol).

Contoh 1.1

Diberikan

$$A_1=\left[\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 6 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{array}\right],\ A_2=\left[\begin{array}{ccccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1\\ \hline 5 & 2 & 1 & 0 & 5\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$$

adalah dua supermatriks maka

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 6 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{array}\right]\cup\left[\begin{array}{ccccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1\\ \hline 5 & 2 & 1 & 0 & 5\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$$

adalah superbimatriks.

Contoh 1.2

Diberikan

$$A_1=\left[\begin{array}{c|c}1 & 3\\ 2 & 4\end{array}\right] \text{ dan } A_2=\left[\begin{array}{c|c}1 & 3\\ 2 & 4\end{array}\right]=A_1.$$

Jelas bahwa $A=A_1\cup A_2$ bukan superbimatriks.

Definisi 1.2

Diberikan $V = V_1 \cup V_2$ merupakan superbimatriks. Jika setiap V_1 dan V_2 merupakan super vektor baris maka V merupakan superbivektor baris atau superbimatriks baris.

Definisi 1.3

Diberikan $V = V_1 \cup V_2$ merupakan superbimatriks. Jika setiap V_1 dan V_2 merupakan super vektor kolom maka V merupakan superbivektor kolom atau superbimatriks kolom.

Definisi 1.4

Diberikan $V = V_1 \cup V_2$ superbimatriks. Jika setiap V_1 dan V_2 merupakan $t \times t$ matriks persegi maka V merupakan superbimatriks persegi. Jika dilain sisi, V_1 merupakan matriks $m \times m$ dan V_2 merupakan matriks $n \times n$ maka V merupakan super n-matriks persegi campuran.

Definisi 1.5

Diberikan $V = V_1 \cup V_2$ merupakan superbimatriks. Jika setiap V_1 dan V_2 merupakan $m \times t\ (m \neq t)$ supermatriks persegi panjang maka V merupakan superbimatriks persegi panjang. Jika dilain sisi, setiap V_1 dan V_2 merupakan supermatriks-supermatriks persegi panjang dengan orde berbeda maka V merupakan superbimatriks persegi panjang campuran.

Definisi 1.6

Diberikan $V = V_1 \cup V_2$ merupakan superbimatriks. Jika V_i merupakan supermatriks persegi dan V_j merupakan supermatriks persegi panjang maka V merupakan superbimatriks campuran.

Definisi 1.7

Diberikan $V = V_1 \cup V_2$ merupakan superbimatriks. V dikatakan superbimatriks baris spesial jika setiap V_1 dan V_2 yang merupakan matriks berukuran $m_i \times n_i\ \left(n_i > m_i\right)$; $1 < i < n$; dengan partisi secara vertikal. Dengan kata lain, tidak ada partisi diantara baris-baris. Jika $W = W_1 \cup W_2$ merupakan superbimatriks. W dikatakan superbimatriks kolom spesial jika setiap W_1 dan W_2 yang merupakan matriks berukuran $t_i \times s_i\ \left(t_i > s_i\right)$; $1 < i < n$; dengan partisi secara horizontal. Dengan kata lain, tidak ada partisi diantara kolom-kolom.

Definisi 1.8

Diberikan $V = V_1 \cup V_2$ merupakan superbimatriks. Jika setiap V_1 dan V_2 merupakan supermatriks simetris maka V merupakan superbimatriks simetris. Tetapi jika V_i merupakan supermatriks simetris dan V_i hanya supermatriks maka V merupakan quasi superbimatriks simetris.

Definisi 1.9

Diberikan V_1, V_2 merupakan bimatriks. Jika V_i merupakan supermatriks dan V_j hanya matriks dengan $i \neq j$, maka $V = V_1 \cup V_2$ merupakan semi superbimatriks.

1.2.3 Supertrimatriks

Definisi 1.10

Diberikan V_1, V_2 dan V_3 merupakan supermatriks-supermatriks berbeda dimana $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ maka V disebut super trimatriks.

Contoh 1.3

Diberikan $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ dimana

$$T_1 = \left[\begin{array}{ccccc|cc} 3 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & 7 & 8 & 0 \end{array}\right],$$

$$T_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right] \text{ dan}$$

$$T_3 = \left[\begin{array}{cc|ccc} 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ \hline 6 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Sehingga, T adalah super trimatriks.

Definisi 1.11

Diberikan $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ merupakan super trimatriks. Jika setiap V_1, V_2 dan V_3 merupakan super vektor baris maka V merupakan super trivektor baris atau super trimatriks baris.

Definisi 1.12

Diberikan $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ merupakan super trimatriks. Jika setiap V_1, V_2 dan V_3 merupakan super vektor kolom maka V merupakan super trivektor kolom atau super trimatriks kolom.

Definisi 1.13

Diberikan $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ merupakan super trimatriks. Jika V_1 , V_2 dan V_3 merupakan $t \times t$ matriks persegi maka V merupakan super trimatriks persegi. Jika dilain sisi, V_1 merupakan matriks $m \times m$, V_2 merupakan matriks $n \times n$, dan V_3 merupakan matriks $s \times s$ maka V merupakan super trimatriks persegi campuran.

Definisi 1.14

Diberikan $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ merupakan super trimatriks. Jika setiap V_1, V_2 dan V_3 merupakan $m \times t$ $(m \neq t)$ supermatriks persegi panjang maka V merupakan super trimatriks persegi panjang. Jika dilain sisi, setiap V_1, V_2 dan V_3 merupakan supermatriks-supermatriks persegi panjang dengan orde berbeda maka V merupakan super trimatriks persegi panjang campuran.

Definisi 1.15

Diberikan $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ merupakan super trimatriks. Jika V_i (bisa lebih dari 1) merupakan supermatriks persegi dan lainnya (misalkan V_j) merupakan supermatriks persegi panjang maka V merupakan super trimatriks campuran.

Definisi 1.16

Diberikan $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ merupakan super trimatriks. V dikatakan super trimatriks baris spesial jika setiap V_1, V_2 dan V_3 yang merupakan matriks berukuran $m_i \times n_i$ $(n_i > m_i)$; $1 < i < n$; dengan partisi secara vertikal. Dengan kata lain, tidak ada partisi diantara baris-baris. Jika $W = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ merupakan super trimatriks. W dikatakan super trimatriks kolom spesial jika setiap W_1, W_2 dan W_3 yang merupakan matriks berukuran $t_i \times s_i$ $(t_i > s_i)$; $1 < i < n$; dengan partisi secara horizontal. Dengan kata lain, tidak ada partisi diantara kolom-kolom.

Definisi 1.17

Diberikan $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ merupakan super trimatriks. Jika setiap V_1, V_2 dan V_3 merupakan supermatriks simetris maka V merupakan super trimatriks simetris. Tetapi jika sebagian V_i merupakan supermatriks simetris dan sebagian lagi dari V_i hanya supermatriks maka V merupakan quasi super trimatriks simetris.

Definisi 1.18

Diberikan V_1, V_2 dan V_3 merupakan trimatriks. Jika V_i merupakan supermatriks dan V_j hanya matriks, $i \neq j$ maka $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ merupakan semi super trimatriks.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini bersifat studi literatur, sehingga dalam prosesnya perlu mempelajari beberapa literature yang berhubungan dengan penelitian kemudian mencoba membahas inti permasalahan tersebut.

Bahan atau materi yang digunakan dalam penelitian ini diperoleh dari beberapa literature berupa karya ilmiah seperti jurnal-jurnal, buku cetak, dan informasi ilmiah lainnya.

3. Hasil dan Pembahasan

Definisi 3.1

Diberikan $V_1, V_2, \ldots, V_n$ dengan $n > 3$ untuk n bilangan bulat positif merupakan supermatriks-supermatriks berbeda dimana $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ maka V disebut super n-matriks.

Definisi 3.2

Diberikan $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ dengan $n > 3$ merupakan super n-matriks. Jika setiap V_i merupakan super vektor baris untuk $i = 1,2,\ldots,n$ maka V merupakan super n-vektor baris atau super n-matriks baris.

Definisi 3.3

Diberikan $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ dengan $n > 3$ merupakan super n-matriks. Jika setiap V_i merupakan super vektor kolom untuk $i = 1,2,\ldots,n$ maka V merupakan super n-vektor kolom atau super n-matriks kolom.

Definisi 3.4

Diberikan $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ dengan $n > 3$ merupakan super n-matriks. Jika setiap V_i merupakan $t \times t$ matriks persegi untuk $i = 1,2,\ldots,n$ maka V merupakan super n-matriks persegi. Jika dilain sisi, V_i merupakan $m_i \times m_i$ matriks persegi untuk $i = 1,2,\ldots,n$ maka V merupakan super n-matriks persegi campuran.

Definisi 3.5

Diberikan $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ dengan $n > 3$ merupakan super n-matriks. Jika V_i merupakan $m \times t$ $(m \neq t)$ supermatriks persegi panjang maka V merupakan super n-matriks persegi panjang. Jika dilain sisi, setiap V_i merupakan supermatriks-supermatriks persegi panjang dengan orde berbeda maka V merupakan super n-matriks persegi panjang campuran.

Definisi 3.6

Diberikan $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ dengan $n > 3$ merupakan super n-matriks. Jika beberapa V_i merupakan supermatriks persegi dan beberapa V_j merupakan supermatriks persegi panjang maka V merupakan super n-matriks campuran.

Definisi 3.7

Diberikan $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ dengan $n > 3$ merupakan super n-matriks. V dikatakan super n-matriks baris spesial jika setiap V_i yang merupakan matriks berukuran $m_i \times n_i$ $(n_i > m_i)$; $1 < i < n$; dengan partisi secara vertikal. Dengan kata lain, tidak ada partisi diantara baris-baris. Jika $W = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n$ dengan $n > 3$ merupakan super n-matriks. W dikatakan super n-matriks kolom spesial jika setiap W_i yang merupakan matriks berukuran $t_i \times s_i$ $(t_i > s_i)$; $1 < i < n$; dengan partisi secara horizontal. Dengan kata lain, tidak ada partisi diantara kolom-kolom.

Definisi 3.8

Diberikan $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ dengan $n > 3$ merupakan super n-matriks. Jika setiap V_i merupakan supermatriks simetris untuk $i = 1,2,\ldots,n$ maka V merupakan super n-matriks simetris. Tetapi jika sebagian V_i merupakan supermatriks simetris dan sebagian lagi dari V_i hanya supermatriks maka V merupakan quasi super n-matriks simetris.

Definisi 3.9

Diberikan $V_1, V_2, \ldots, V_n$ dengan $n > 3$ merupakan n-matriks. Jika beberapa V_i merupakan supermatriks dan beberapa V_j hanya matriks $1 \le i$, $j \le n$ maka $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ merupakan semi super n-matriks.

Teorema 3.1

Diberikan $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ super n-matriks kolom. V^T merupakan transpose dari V. Maka VV^T merupakan super n-matriks simetri.

Teorema 3.2

Diberikan $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ super n-matriks. V^T merupakan transpose dari V. Maka VV^T dan V^TV merupakan dua super *n*-matriks simetri yang berbeda.

4. Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan yang telah diuraikan, dapat disimpulkan bahwa super n-matriks merupakan perpaduan atau kumpulan dari n supermatriks baik yang sama maupun berbeda ukuran dimana supermatriks merupakan matriks sederhana yang dipartisi atau matriks baru yang disusun oleh matriks-matriks sederhana.

Pada dasarnya struktur dari matriks biasa dan super n-matriks sama. Tetapi, pada super n-matriks, diperoleh beberapa bentuk lain seperti super n-matriks baris dan kolom, super n-matriks persegi dan persegi panjang, super n-matriks campuran, super n-matriks simetris, dan semi super n-matriks. Selain itu diperoleh juga beberapa teorema, yakni VV^T merupakan super n-matriks simetri jika V^T merupakan transpose dari super n-matriks kolom V dan VV^T dan V^TV merupakan dua super n-matriks simetri yang berbeda jika V^T merupakan transpose dari V .

Daftar Pustaka

Kandasamy, V dan Smarandache, F (2009). *Superbimatrices and Their Generalizations.* Judetul Olt: Editurea CuArt and authors.

Varadarajan, V.S. (2004). *Supersymmetry for mathematicians: an introduction*. New York: Courant Lecture Notes.

R Yost, S.A. (1992). Supermatrix Models. *International Journal of Modern Physics A*, Vol. 7, No. 24.