PARAMETER
JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN TERAPANNYA

e-ISSN. 2829-6303
Vol 03 No 02, Oktober 2024
Page 169-180

INDEKS WIENER DARI BEBERAPA STRUKTUR ALJABAR

The Wiener Index of Some Algebraic Structures

Alfian Putra Ardana[1], Rio Satriyantara[2*], Ratna Sari Widiastuti[3]

[1,2]Program Studi Matematika FMIPA Universitas Mataram, Mataram, 83111, Nusa Tengggara Barat, Indonesia
[3]Program Studi Matematika FMIPA Universitas Udayana, Kabupaten Badung 80361, Bali, Indonesia
E-mail Correspondence Author: *riosatriyantara@staff.unram.ac.id*

Abstrak
Indeks Wiener adalah salah satu indeks topologi yang memainkan peran penting dalam kimia matematika. Artikel ini bertujuan untuk untuk merangkum, menyederhanakan dan menganalisis metode serta temuan terbaru terkait Indeks Wiener dalam konteks graf aljabar. Metode yang digunakan adalah dengan meninjau literatur secara sistematis terhadap jurnal-jurnal yang relevan, seluruh sumber yang didapatkan dari artikel ini adalah artikel yang diterbitkan dalam sepuluh tahun terakhir, memastikan relevansi dan kebaruan informasi. Kriteria inklusi mencakup artikel yang fokus pada teori dan aplikasi Indeks Wiener dalam konteks graf aljabar serta menyediakan rumus umum atau temuan signifikan, sedangkan kriteria eksklusi menghilangkan artikel tanpa peer-review, tanpa bukti matematis yang mendalam, atau yang fokus pada aplikasi non-aljabar. Artikel ini memuat informasi tentang Indeks Wiener dari graf pangkat dari grup dihedral $\boldsymbol{2n}$ ($\boldsymbol{\Gamma^{D_{2n}}}$), Indeks Wiener dari graf ideal prima dari ring bilangan bulat modulo $\left(\boldsymbol{\Gamma_p}(\mathbb{Z}_n)\right)$, dan Indeks Wiener dari graf identitas dari grup siklis ($\boldsymbol{\Gamma_G}$), dimana G dilambangkan sebagai grup siklis dan berorde $\boldsymbol{n}$ untuk $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

Kata Kunci: Aljabar, Graf, Grup, Topologi, Wiener

Abstract
Wiener index is one of the topological indices that plays an important role in mathematical chemistry. This article aims to summarize and analyze the latest methods and findings related to Wiener index in the context of algebraic graphs. The method used is a systematic literature review of relevant journals, all sources obtained from this article are articles published in the last ten years, ensuring the relevance and novelty of the information. Inclusion criteria include articles that focus on the theory and applications of Wiener index in the context of algebraic graphs and provide general formulas or significant findings, while exclusion criteria eliminate articles without peer-review, without in-depth mathematical proofs, or those that focus on non-algebraic applications. This article contains information about the Wiener Index of the power graph of the dihedral group 2n ($\boldsymbol{\Gamma^{D_{2n}}}$). *Wiener indices of prime ideal graphs of the ring of integers modulo* $\left(\boldsymbol{\Gamma_p}(\mathbb{Z}_n)\right)$. *Wiener indices of the identity graph of a cyclic group* ($\boldsymbol{\Gamma_G}$), *where G is denoted as a cyclic group and order n for* $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

Keywords: *Algebra, Graph, Group, Topology, Wiener*

1. PENDAHULUAN

Indeks Wiener adalah salah satu indeks topologi yang memainkan peran penting dalam kimia matematika. Diperkenalkan oleh Harold Wiener pada tahun 1947, indeks ini mengukur jumlah jarak antara semua pasangan simpul dalam sebuah graf, yang dalam konteks kimia biasanya mewakili molekul. Setiap atom dalam molekul direpresentasikan sebagai simpul, sementara ikatan kimia antara atom-atom tersebut direpresentasikan sebagai sisi [1]. Indeks Wiener telah terbukti sangat berguna dalam memprediksi berbagai sifat fisik dan kimia molekul, seperti titik didih, kepadatan, indeks bias, dan viskositas. Selain itu, indeks ini juga digunakan dalam pengembangan model *Quantitative Structure-Activity Relationship* (QSAR) yang membantu memprediksi aktivitas biologis dan toksisitas senyawa kimia . Lebih jauh lagi, Indeks Wiener dapat membantu menentukan stabilitas molekul dan mengidentifikasi isomer-isomer struktural. Artikel ini, mengeksplorasi lebih dalam aplikasi Indeks Wiener dalam kimia melalui teori graf, yang digunakan untuk memprediksi sifat-sifat molekul, dan pentingnya dalam penelitian kimia modern [2].

Indeks Wiener dari suatu representasi graf telah menjadi subjek penelitian intensif oleh banyak matematikawan, dengan berbagai kontribusi yang signifikan terhadap pemahaman tentang struktur aljabar dan topologi. Malik dan koleganya berhasil merumuskan formula umum untuk Indeks Wiener pada graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo, memperluas penerapan indeks ini dalam konteks teori ring [3]. Pada tahun 2023, Gayatri dan rekan-rekannya berhasil mengidentifikasi rumus umum untuk Indeks Wiener dari graf koprima pada grup dihedral, memberikan wawasan yang lebih mendalam mengenai struktur internal grup tersebut [4]. Putra dan timnya di tahun 2023, menemukan rumus umum untuk Indeks Wiener pada graf pangkat dari grup bilangan bulat modulo, menambahkan dimensi baru dalam analisis graf pangkat dan aplikasinya [5]. Selanjutnya, pada tahun 2023 Asmarani dan koleganya menemukan rumus umum untuk Indeks Wiener dari graf pangkat pada grup dihedral, memperkuat konsistensi dan keandalan metode ini dalam berbagai struktur grup [6]. Temuan-temuan ini menegaskan pentingnya Indeks Wiener dalam berbagai aplikasi matematika dan kimia, menyediakan alat analitis yang kuat untuk mengeksplorasi topologi molekul dan struktur aljabar yang kompleks.

Artikel ini merupakan upaya komprehensif untuk menyatukan dan menyempurnakan berbagai artikel yang telah membahas secara mendalam tentang Indeks Wiener dalam konteks beberapa Struktur Aljabar yang berbeda. Artikel-artikel tersebut meliputi karya [7] Adzkia dan Fahim yang diterbitkan pada tahun 2015, yang secara khusus meneliti Indeks Wiener dari graf ideal prima yang berasal dari ring bilangan bulat modulo, kemudian tulisan Asmarani dan timnya [6] yang diterbitkan pada tahun 2023, yang membahas dengan rinci tentang Indeks Wiener dari graf pangkat yang terkait dengan grup dihedral. Selain itu, [8] Darmajid dan kolagennya yang diterbitkan pada tahun 2024 juga turut serta dengan mengulas secara mendalam mengenai Indeks Wiener yang diambil dari graf identitas yang berasal dari grup siklis, dinotasikan sebagai Γ_G, di mana G merupakan grup siklis dengan ordo n, untuk n yang merupakan anggota himpunan bilangan asli $n \in N$. Dengan menyatukan berbagai perspektif dari artikel-artikel tersebut, artikel ini berupaya untuk mempermudah pembaca dalam mempelajari, memahami, dan mengapresiasi konsep Indeks Wiener dari sudut pandang struktur aljabar yang lebih luas dan mendalam.

2. METODE PENELITIAN

Metode penelitian ini dilakukan melalui tinjauan literatur secara sistematis terhadap jurnal-jurnal yang relevan dengan tujuan untuk merangkum dan menganalisis metode serta temuan terbaru terkait Indeks Wiener dalam konteks graf aljabar. Artikel yang dipilih adalah yang diterbitkan dalam sepuluh tahun terakhir, memastikan relevansi dan kebaruan informasi. Kriteria inklusi mencakup artikel yang fokus pada teori dan aplikasi Indeks Wiener dalam konteks graf aljabar serta menyediakan rumus umum atau temuan signifikan, sedangkan kriteria eksklusi menghilangkan artikel tanpa peer-review, tanpa bukti matematis yang mendalam, atau yang fokus pada aplikasi non-aljabar. Setiap artikel yang memenuhi kriteria inklusi diunduh dan dianalisis, dengan data yang dikumpulkan meliputi metode yang digunakan, hasil utama, rumus yang ditemukan, dan aplikasi dari temuan tersebut. Analisis komparatif dilakukan untuk metode penentuan Indeks Wiener, serta pengujian ulang terhadap beberapa rumus umum menggunakan contoh graf sederhana untuk memastikan validitas. Hasil dari tinjauan literatur ini disusun dalam bentuk artikel review dengan bagian-bagian meliputi pendahuluan, metode, hasil, diskusi, dan kesimpulan, yang menyajikan temuan utama secara rinci dan memberikan interpretasi kritis terhadap kontribusi masing-masing studi.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Grup sering direpresentasikan menggunakan graf untuk memvisualisasikan hubungan antar elemen dan operasi di dalamnya. Grup dihedral adalah kelompok simetri dari poligon beraturan dengan jumlah sisi tertentu, terdiri dari rotasi dan refleksi. Misalnya, grup dihedral dari segitiga beraturan memiliki enam elemen: tiga rotasi dan tiga refleksi. Operasi dalam grup dihedral mencakup penggabungan rotasi dan refleksi yang menghasilkan elemen baru dalam grup tersebut. Grup ini dinotasikan dengan D_{2n} dengan dua pembangun a dan b. Secara matematis grup ini memiliki anggota sebanyak $2n$, semua anggota grup dapat didaftarkan dengan $D_{2n} = \{e, a, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$, dengan $a^n = b^2 = e$. Sementara itu, grup bilangan bulat modulo adalah kelompok yang terdiri dari bilangan bulat dari nol hingga satu kurang dari bilangan yang ditetapkan, dengan operasi penjumlahan yang dilakukan secara modulo. Misalnya, operasi penjumlahan pada grup bilangan bulat modulo lima untuk tiga tambah empat adalah dua. Grup ini bersifat komutatif, dengan elemen identitas nol dan setiap elemen memiliki invers. Grup bilangan bulat modulo ini dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_n$, dan anggota-anggotanya didaftarkan dengan $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2, \dots n-1\}$. Kedua grup ini memainkan peran penting dalam teori grup dan berbagai aplikasi matematika [9].

Dalam matematika, Indeks Wiener didefinisikan pada graf sederhana yang terhubung sebagai jumlah dari semua jarak antara dua simpul, definisi Indeks Wiener secara matematis sebagai berikut.

Definisi 1. [10] *Misalkan Γ suatu graf sederhana yang terhubung dengan himpunan semua simpulnya dinotasikan sebagai $V(\Gamma)$. Indeks Wiener dari graf Γ, dinotasikan dengan $W(\Gamma)$ adalah*

$$W(\Gamma) = \sum_{u,v \in V(\Gamma)} d(u,v) \tag{1}$$

di mana $d(u,v)$ adalah jarak terpendek antara simpul u dan v.

atau dapat juga didefiniskan sebagai berikut.

Definisi 2. **[15]** *Misalkan Γ sebuah graf dengan matriks jarak. Indeks Wiener dari Γ yang dinotasikan $W(\Gamma)$ adalah*

$$W(\Gamma) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij.} \tag{2}$$

Graf pangkat untuk suatu grup adalah representasi visual yang membantu memahami struktur dan hubungan antara elemen-elemen dalam grup tersebut. Dalam graf pangkat, setiap elemen grup diwakili oleh simpul, dan ada sebuah tepi yang menghubungkan dua simpul jika salah satu elemen dapat diperoleh dari elemen lainnya dengan menaikkan pangkat elemen tersebut. Dengan kata lain, graf pangkat menggambarkan bagaimana elemen-elemen dalam grup dapat saling berubah melalui operasi pangkat. Graf ini memberikan wawasan tentang sifat-sifat aljabar dari grup, seperti siklis atau tidaknya, serta hubungan antara subgrup-subgrup di dalamnya. Dengan menggunakan graf pangkat, Pola dan struktur yang mungkin tidak terlihat jelas hanya dari definisi aljabar grup dapat dengan mudah dilihat.

Definisi 3. [11] *Grup G dikatakan grup dihedral dengan order $2n, n \geq 3$ dan $n \in N$, adalah grup yang dibangun oleh dua elemen $a, b \in G$ dengan sifat*

$$G = \{a, b | e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1}\} \tag{3}$$

Grup dihedral dengan order $2n$ disimbolkan dengan D_{2n}. Dari **Definisi 3** dapat dilihat bahwa $|D_{2n}| = 2n$ dan D_{2n} dapat dituliskan sebagai himpunan yaitu $D_{2n} = \{e, a, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$

Misal diberikan grup dihedral D_{2n} dengan n adalah perpangkatan prima, maka graf pangkat dari grup akan berbentuk graf terhubung yang terdiri dari dua subgraf, yakni subgraf bintang dan subgraf lengkap. Hal ini dituliskan dalam Lemma berikut

Lemma 1. **[6]** *Misalkan diberikan grup dihedral D_{2n} dengan $n = p^k$ dan p adalah bilangan prima dan $k \in \mathbb{N}$. Graf pangkat Γ^G terdiri dari subgraf lengkap dan subgraf bintang.*

Mudah dilihat subgraf lengkap pada **Lemma 1** dibentuk dari semua unsur rotasi, dan subgraf bintang dibentuk dari semua unsur refleksi. Dari fakta ini didapatkan bahwa jarak antara unsur refleksi dan unsur non-identitas lainnya adalah dua, dan selain itu jaraknya satu. Dari fakta ini Indeks Wiener dari graf pangkat dapat dihitung menggunakan rumus umum berikut.

Definisi 4. [12] *Misalkan grup G adalah himpunan simpul yang terdiri dari semua anggota grup G, graf pangkat grup G adalah Γ^G, dan dua simpul $u, v \in V(\Gamma^G)$ bertetangga apabila $u = v^k$ atau $v = u^c$ untuk suatu $k, c \in \mathbb{N}$.*

Berikut ini adalah teorema yang membahas terkait rumus umum Indeks Wiener untuk graf pangkat dari grup dihedral $2n$ yang dibahas oleh Asmarani dan Kolagennya.

Teorema 1. **[6]** *Misalkan diberikan grup dihedral D_{2n} dengan $n = p^m$, p adalah bilangan prima dan $m \in \mathbb{N}$. Indeks Wiener dari graf pangkat dari grup dihedral $2n$ $(\Gamma^{D_{2n}})$ adalah*

$$W(\Gamma^{D_{2n}}) = \frac{7n^2}{2} - \frac{5n}{2} \tag{4}$$

Bukti. Misalkan $D_{2n} = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, \dots, a^{n-1}b\}$, suatu grup dihedral dengan $n = p^m$ di mana p merupakan bilangan prima dan m merupakan bilangan asli maka grup dihedral dapat dipartisi menjadi 3 partisi yaitu $V_1 = \{e\}, V_2 = \{a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ dan $V_3 =$

$\{b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$. Untuk membuktikan Indeks Wiener dari graf pangkat suatu grup dihedral dapat dibagi menjadi 4 kasus.

Kasus 1

Untuk $e \in V_1$ dan $x \in V(\Gamma^{D_{2n}})$ dimana $e \neq v$, diperoleh

$$\sum_{x \in V(\Gamma^{D_{2n}})} d(e,x) = (2n-1) \cdot 1$$

$$= 2n - 1$$

Kasus 2

Untuk $a^i, a^j \in V_2$ dimana $1 \leq i, j \leq n-1$, dan $i \neq j$ diperoleh

$$\sum_{a^i, a^j \in V_2} d\left(a^i, a^j\right) = \binom{n-1}{2} \cdot 1$$

$$= \frac{(n-1)!}{2!\,(n-3)!}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$\sum_{a^i, a^j \in V_2} d\left(a^i, a^j\right) = \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 1$$

Kasus 3

Untuk $a^c b, a^d b \in V_3$ dimana $0 \leq c, d \leq n-1$, dan $c \neq d$ diperoleh

$$\sum_{a^c b, a^d b \in V_3} d\left(a^c b, a^d b\right) = \binom{n}{2} \cdot 1$$

$$= \frac{n!}{2!\,(n-2)!} . 2$$

$$= n(n-1)$$

$$\sum_{a^c b, a^d b \in V_3} d\left(a^c b, a^d b\right) = n^2 - n$$

Kasus 4

Untuk $a^k \in V_2$ dan $a^l b \in V_3$ dimana $1 \leq k, l \leq n-1$, diperoleh

$$\sum_{a^k \in V_2, a^l b \in V_3} d\left(a^k, a^l b\right) = (n-1)n \cdot 2$$

$$= 2n^2 - 2n$$

Berdasarkan **Definisi 1** dan keempat kasus, Indeks Wiener dari graf pangkat dari dihedral grup D_{2n} ketika $n = p^m$ untuk p bilangan prima dan m bilangan asli adalah

$$W(\Gamma^{D_{2n}}) = \sum_{u,v \in V(\Gamma^{D_{2n}})} d(u,v)$$

$$= \sum_{x \in V(\Gamma^{D_{2n}})} d(e,x) + \sum_{a^i, a^j \in V_2} d\left(a^i, a^j\right) + \sum_{a^c b, a^d b \in V_3} d\left(a^c b, a^d b\right) + \sum_{a^k \in V_2, a^l b \in V_3} d\left(a^k, a^l b\right)$$

$$= (2n-1) + \left(\frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 1\right) + (n^2 - n) + (2n^2 - 2n)$$

$$W(\Gamma^{D_{2n}}) = \frac{7n^2}{2} - \frac{5n}{2} \blacksquare$$

Definisi 5. [13] *Misalkan R suatu ring komutatif dan P suatu ideal prima dari R. Graf ideal prima Γ_P didefinisikan sebagai himpunan setiap elemen $R-\{0\}$ sebagai titik-titik pada graf dengan r_1 dan r_2 bertetangga jika dan hanya jika $r_1 r_2 \in P$.*

Adapun teorema yang membahas tentang Indeks Wiener dari graf ideal prima dari ring bilangan bulat modulo yang dinotasikan $\left(\Gamma_p(\mathbb{Z}_n)\right)$ yang dibahas oleh Adzkia dan Fahim. Berikut ini adalah bunyi teoremanya.

Teorema 2 [7] *Jika $n = p^k$, untuk p adalah bilangan prima dan $k \geq 2$, maka Indeks Wiener dari graf ideal prima dari ring bilangan bulat modulo $\left(\Gamma_p(\mathbb{Z}_n)\right)$ adalah*

$$W\left(\Gamma_p(\mathbb{Z}_n)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{p}-1\right)\left(\frac{n}{p}-2\right) + \left(n-\frac{n}{p}-1\right)\left(n-\frac{n}{p}-2\right) + \left(\frac{n}{p}-1\right)\left(n-\frac{n}{p}\right) \quad (5)$$

Pada artikel ini persamaan tersebut dibuat menjadi lebih sederhana. Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$W\left(\Gamma_p(\mathbb{Z}_n)\right) = \frac{n^2}{2p^2} - \frac{n^2}{p} + \frac{5}{2}\frac{n}{p} + n^2 - 4n + 3 \quad (6)$$

Bukti. Misalkan himpunan simpul dari graf ideal prima dari ring bilangan bulat modulo $\Gamma_p(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_{p^k} - \{\overline{0}\} = \left\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots, \overline{p^k-1}\right\}$ di mana p adalah bilangan prima dan $k \geq 2$. Maka terdapat himpunan kelipatan bilangan prima yang tidak termasuk $\{\overline{0}\}$, yang juga merupakan himpunan bagian dari simpul $\Gamma_p(\mathbb{Z}_n)$ dilambangkan sebagai $P - \{\overline{0}\} = \left\{\overline{p}, \overline{2p}, \overline{3p}, \dots, \overline{(p^{k-1}-1)p}\right\}$. Untuk membuktikan Indeks Wiener dari graf ideal prima, dapat dibagi menjadi tiga kasus berdasarkan jarak antara dua simpul sebagai berikut.

Kasus 1

Untuk $u, v \in P - \{0\}$, di mana $u, v \in \Gamma_p(\mathbb{Z}_n)$ dan $u \neq v$, jarak antara u dan v adalah satu, maka jumlah kombinasi yang diperoleh untuk pasangan (u, v) adalah $\binom{\frac{n}{p}-1}{2}$

$$\begin{aligned}
W\left(\Gamma_p(\mathbb{Z}_n)\right) &= \sum_{u,v \in V\left(\Gamma_p(\mathbb{Z}_n)\right)} d(u,v) \\
&= 1 \cdot \binom{\frac{n}{p}-1}{2} \\
&= \frac{\left(\frac{n}{p}-1\right)!}{2!\left(\frac{n}{p}-3\right)!} \\
&= \frac{\left(\frac{n}{p}-1\right)\left(\frac{n}{p}-2\right)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n}{p}-1\right)\left(\frac{n}{p}-2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{p^2} - \frac{2n}{p} - \frac{n}{p} + 2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{p^2} - \frac{3n}{p} + 2\right) \\
W\left(\Gamma_p(\mathbb{Z}_n)\right) &= \frac{n^2}{2p^2} - \frac{3n}{2p} + 1
\end{aligned}$$

Kasus 2

Untuk $u, v \notin P - \{0\}$, di mana $u, v \in V\left(\Gamma_p(\mathbb{Z}_n)\right)$ dan $u \neq v$, jarak antara u dan v adalah dua, maka jumlah kombinasi yang diperoleh untuk pasangan (u, v) adalah $\binom{n-\frac{n}{p}}{2}$.

$$
\begin{aligned}
W\left(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)\right) &= \sum_{u,v \in V\left(\Gamma_p(\mathbb{Z}_n)\right)} d(u,v) = 2\binom{n-\frac{n}{p}}{2} \\
&= 2\frac{\left(n-\frac{n}{p}\right)}{2!\left(n-\frac{n}{p}\right)\left(n-\frac{n}{p}-2\right)!} \\
&= 2\frac{\left(n-\frac{n}{p}\right)\left(n-\frac{n}{p}-1\right)}{2} \\
&= \left(n-\frac{n}{p}\right)\left(n-\frac{n}{p}-1\right) \\
&= n^2 + \frac{n^2}{p^2} - \frac{n^2}{p} - \frac{n^2}{p} + \frac{2n}{p} + \frac{n}{p} - 2n - n + 2 \\
W\left(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)\right) &= n^2 + \frac{n^2}{p^2} - \frac{2n^2}{p} + \frac{3n}{p} - 3n + 2
\end{aligned}
$$

Kasus 3

Untuk $u \in P - \{\overline{0}\}$ dan $v \notin P - \{\overline{0}\}$, dimana $u, v \in \Gamma_P(\mathbb{Z}_n)$dan $u \neq v$, jarak antara u dan v adalah satu, dan jumlah kombinasi yang diperoleh dari (u, v) adalah $\left(\frac{n}{p}-1\right)\left(n-\frac{n}{p}\right)$.

$$
\begin{aligned}
W\left(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)\right) &= \sum_{u,v \in V\left(\Gamma_p(\mathbb{Z}_n)\right)} d(u,v) \\
&= 1\left(\frac{n}{p}-1\right)\left(n-\frac{n}{p}\right) \\
&= \left(\frac{n}{p}-1\right)\left(n-\frac{n}{p}\right) \\
W\left(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)\right) &= -\frac{n^2}{p^2} + \frac{n^2}{p} + \frac{n}{p} - n
\end{aligned}
$$

Berdasarkan ketiga kasus di atas, maka Indeks Wiener dari graf ideal prima dari ring bilangan bulat modulo $\left(\Gamma_P(\mathbb{Z}_n)\right)$ adalah

$$
\begin{aligned}
W\left(\Gamma_p(\mathbb{Z}_n)\right) &= \left(\frac{n^2}{2p^2} - \frac{3n}{2p} + 1\right) + \left(n^2 + \frac{n^2}{p^2} - \frac{2n^2}{p} + \frac{3n}{p} - 3n + 2\right) + \left(-\frac{n^2}{p^2} + \frac{n^2}{p} + \frac{n}{p} - n\right) \\
&= \frac{n^2}{2p^2} + \frac{n^2}{p^2} - \frac{n^2}{p^2} - \frac{2n^2}{p} + \frac{n^2}{p} - \frac{3n}{2p} + \frac{3n}{p} + \frac{n}{p} + n^2 - 3n - n + 2 + 1 \\
W\left(\Gamma_p(\mathbb{Z}_n)\right) &= \frac{n^2}{2p^2} - \frac{n^2}{p} + \frac{5}{2}\frac{n}{p} + n^2 - 4n + 3 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Definisi 6. [14] *Misal G adalah grup dengan elemen identitas e, graf identitas $\Gamma_G = \Gamma(G, E)$ didefinisikan dengan himpunan simpul G dan himpunan sisi E yang memenuhi dua syarat:*

i. *Untuk setiap simpul yang berbeda $x, y \in G$, x dan y bertetangga di Γ_G jika dan hanya jika $xy = e$.*

ii. *Untuk setiap $x \in G$, x dan e bertetangga di Γ_G.*

Definisi 7. [15] *Suatu grup $(G,*)$ disebut grup siklis jika terdapat $g \in G$ sedemikian hingga untuk setiap $a \in G$ dapat dinyatakan sebagai $a = g^n$, untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$. Elemen $g \in G$ tersebut disebut dengan generator atau elemen pembangun grup $(G,*)$, dinotasikan dengan $G = \langle g \rangle$.*

Definisi 8. [15] *Misalkan Γ suatu graf dengan himpunan titik $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Matriks jarak dari graf Γ, dinotasikan $D(\Gamma)$, adalah matriks $D(\Gamma) = [d_{ij}] = n \times n$ dimana $d_{ij} = d(v_i, v_j)$ dan $d_{ii} = 0$.*

Selain itu, artikel ini juga membahas tentang Indeks Wiener dari graf identitas dari grup siklis yang dinotasikan Γ_G dimana G adalah grup siklis berorde n untuk $n \in \mathbb{N}$ yang dibahas oleh Darmajid dan kolagennya, berikut ini adalah bunyi teoremanya.

Teorema 3. [8] *Misalkan G grup siklis dengan orde n untuk $n \in \mathbb{N}$ dan Γ_G merupakan graf identitas dari G. Indeks Wiener dari Γ_G adalah*

$$W(\Gamma_G) = \begin{cases} 0 & jika\ n = 1 \\ 4\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right) & jika\ n\ ganjil\ dan\ n > 1 \\ 4\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right) - 1 & jika\ n\ genap \end{cases} \tag{7}$$

Bukti. Apabila $n = 1$ berakibat $G = \{e\}$ maka $D(\Gamma_G)$ adalah matriks nol yang menyebabkan $W(\Gamma_G) = 0$. Kemudian diasumsikan bahwa $n > 1$. Karena G adalah grup siklis sehingga terdapat $a \in G$ berakibat $G = \langle a \rangle$. Perhatikan kasus $n = 2m + 1$ dimana $m = \left(\frac{n}{2}\right)$. Untuk setiap $a^i \in G$, terdapat tepat satu $a^j \in G$ yang memenuhi $a^i a^j = e = a^j a^i$ yakni $a^j = a^{2m+1-i}$. Karena $i \neq 2m + 1 - i$ maka $a^i a^j = e = a^j a^i$Ini berarti, a^i hanya bertetangga dengan e dan a^{2m+1-i} serta a^{2m+1-i} hanya bertetangga dengan a^i dan e. Berdasarkan hal tersebut didapatkan $d(a^i, a^{2m+1-i}) = d(a^i, e) = d(a^{2m+1-i}, e) = 1$ sedangkan $\forall k \in \{0,1, \ldots, n-1\} - \{0, i, 2m + 1 - i\}$ berlaku $d(a^i, a^k) = 2$ dan $d(a^i, a^i) = 0$. Dengan demikian, didapatkan,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2m} d(e, a^j) &= d(e, e) + \sum_{j=0}^{2m} d(e, a^j) \\ &= 0 + 2m \\ \sum_{j=0}^{2m} d(e, a^j) &= 2m \end{aligned}$$

Untuk $1 \leq i \leq 2m$, berlaku

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2m} d(a^i, a^j) &= d(a^i, e) + d(a^i, a^i) + d(a^i, a^{2m+1-i}) + \sum_{\substack{j \in \{0,1,\ldots,n-1\} \\ j \notin \{i, 2m+1-i\}}} d(a^i, a^j) \\ &= 1 + 0 + 1 + \sum_{\substack{j \in \{0,1,\ldots,n-1\} \\ j \notin \{0, i, 2m+1-i\}}} 2 \\ &= 1 + 0 + 1 + (2\mathrm{m} - 2)2 \\ &= 2 + 4m - 4 \\ \sum_{j=0}^{2m} d(a^i, a^j) &= 4m - 2 \end{aligned}$$

Akibatnya, Indeks Wiener dari graf identitas Γ_G adalah

$$W(\Gamma_G) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2m+1}\sum_{j=0}^{2m+1} d\left(a^i, a^j\right)$$
$$= \frac{2m + (4m-2)(2m)}{2}$$
$$W(\Gamma_G) = 4m^2 - 2$$

Selanjutnya, perhatikan kasus untuk $n = 2m$. Karena $(a^m)^{-1} = a^m$ dan $\left(a^i\right)^{-1} = a^{2m-i} \neq a^i, \forall\, i \neq m$ akibatnya a^i bertetangga dengan e dan a^{2m-i} serta a^{2m-i} bertetangga dengan e dan a^i. Dengan demikian, untuk a^m hanya bertetangga dengan e. Maka didapatkan,

$$\sum_{j=0}^{2m-1} d\left(e, a^j\right) = d(e,e) + \sum_{j=0}^{2m-1} d\left(e, a^j\right)$$
$$= 0 + \sum_{j=0}^{2m-1} 1$$
$$\sum_{j=0}^{2m-1} d\left(e, a^j\right) = 2m - 1$$

Dan

$$\sum_{j=0}^{2m-1} d\left(a^m, a^j\right) = d(a^m, e) + d(a^m, a^m) + \sum_{\substack{j\in\{0,1,\dots,2m-1\} \\ j\neq m}} d\left(a^i, a^j\right)$$
$$= 1 + 0 + \sum_{\substack{j\in\{0,1,\dots,n-1\} \\ j\neq m}} 2$$
$$= 1 + 0 + (2m-1)2$$
$$= 1 + 4m - 2$$
$$\sum_{j=0}^{2m-1} d\left(a^m, a^j\right) = 4m - 1$$

Untuk $1 \leq i \leq 2m-1$ dengan $i \neq m$ berlaku

$$\sum_{j=0}^{2m-1} d\left(a^i, a^j\right) = d\left(a^i, e\right) + d\left(a^i, a^{2m-i}\right) + d\left(a^i, a^i\right) + \sum_{\substack{j\in\{0,1,\dots,2m-1\} \\ j\neq m}} d\left(a^i, a^{2m-i}\right)$$
$$= 1 + 1 + 0 + \sum_{\substack{j\in\{0,1,\dots,n-1\} \\ j\neq m}} 2$$
$$= 1 + 1 + 0 + (2m-1)2$$
$$= 2 + 4m - 2$$
$$\sum_{j=0}^{2m-1} d\left(a^i, a^j\right) = 4\text{m}$$

Akibatnya, Indeks Wiener dari graf identitas Γ_G adalah

$$W(\Gamma_G) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2m+1}\sum_{j=0}^{2m+1} d\left(a^i, a^j\right)$$
$$= \frac{(2m-1) + (4m-1) + (2m-2)(4m)}{2}$$
$$W(\Gamma_G) = 4m^2 - m - 1$$

Setelah dilakukan perhitungan, terdapat perbedaan hasil dengam artikel acuan. Pada artikel acuan diperoleh persamaan $4m^2 - 5m + 2$, sedangkan pada artikel ini didapatkan persamaan $4m^2 - m - 1$.

Kemudian akan dibuktikan Indeks Wiener dari graf pangkat atas grup siklis dengan orde tertentu. Misalkan G adalah grup siklis dengan orde n, artinya, terdapat elemen $a \in G$ sehingga $G = \langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$. Jika $n = 1$ maka Indeks Wiener dari graf pangkat Γ_G dari grup G adalah $W(\Gamma_G) = 0$. ■

Berdasarkan hasil yang diperoleh, Artikel ini tidak hanya menyatukan dan menyempurnakan berbagai artikel tentang Indeks Wiener dalam konteks beberapa struktur aljabar, tetapi juga memperkenalkan hasil-hasil penelitian terbaru yang berkontribusi signifikan dalam pengembangan ilmu pengetahuan di bidang ini. Misalnya, penelitian **[6]** Asmarani dan timnya yang diterbitkan pada tahun 2023 melanjutkan dengan mengeksplorasi Indeks Wiener dari graf pangkat dari grup dihedral, memperluas cakupan kajian dengan memanfaatkan struktur grup yang lebih kompleks. Penelitian ini memperkuat pemahaman bahwa Indeks Wiener dapat digunakan sebagai alat untuk mempelajari sifat-sifat internal grup yang sebelumnya belum banyak dibahas dalam literatur. Kemudian, [7] Adzkia dan Fahim yang diterbitkan pada tahun 2015 yang meneliti Indeks Wiener dari graf ideal prima dari ring bilangan bulat modulo telah membuka wawasan baru mengenai hubungan antara teori graf dan teori bilangan. Temuan mereka menjadi dasar yang penting bagi penelitian lebih lanjut. Sementara itu, penelitian [8] Darmajid dan kolagennya yang diterbitkan pada tahun 2024 yang membahas Indeks Wiener dari graf identitas dari grup siklis, dinotasikan sebagai Γ_G, menambah lapisan pemahaman baru dengan memperhatikan grup siklis berorde n untuk $n \in N$. Temuan ini menghubungkan konsep graf dengan teori grup secara lebih mendalam, menawarkan perspektif baru yang berguna bagi analisis lebih lanjut.

Artikel ini mengintegrasikan hasil-hasil tersebut, menyoroti bagaimana penelitian-penelitian ini tidak hanya memperkuat temuan sebelumnya, tetapi juga memperluas batas-batas pengetahuan di bidang Struktur Aljabar dan Indeks Wiener. Dengan demikian, artikel ini memberikan kontribusi yang signifikan dalam memajukan pemahaman tentang interaksi antara teori graf dan teori aljabar, serta memperlihatkan perkembangan terbaru dalam penelitian yang relevan.

4. KESIMPULAN

Indeks Wiener dari graf pangkat dari grup dihedral 2n $\left(\boldsymbol{\Gamma^{D_{2n}}}\right)$ adalah

$$W(\Gamma^{D_{2n}}) = \frac{7n^2}{2} - \frac{5n}{2}.$$

Indeks Wiener dari graf ideal prima dari ring bilangan bulat modulo $\left(\Gamma_p(\mathbb{Z}_n)\right)$ adalah

$$W\left(\Gamma_p(\mathbb{Z}_n)\right) = \frac{n^2}{2p^2} - \frac{n^2}{p} + \frac{5}{2}\frac{n}{p} + n^2 - 4n + 3.$$

Indeks Wiener dari graf identitas dari grup siklis (Γ_G), di mana G dilambangkan sebagai grup siklis dan berorde n untuk $n \in \mathbb{N}$ adalah

$$W(\Gamma_G) = \begin{cases} 0 & jika\ n = 1 \\ 4\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right) & jika\ n\ ganjil\ dan\ n > 1 \\ 4\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right) - 1 & jika\ n\ genap \end{cases}$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] S. H. P. Ningrum, A. M. Siboro, S. T. Lestari, I. G. A. W. Wardhana, and Z. Y. Awanis, “Abstraksi Chemical Topological Graph (Ctg) Melalui Indeks Topologis Graf Aljabar,” *Pros. SAINTEK*, vol. 6, no. November 2023, pp. 92–100, 2024, doi: 10.29303/saintek.v6i1.923.

[2] R. García-Domenech, J. Gálvez, J. V. de Julián-Ortiz, and L. Pogliani, “Some new trends in chemical graph theory,” *Chem. Rev.*, vol. 108, no. 3, pp. 1127–1169, 2008, doi: 10.1021/cr0780006.

[3] D. P. Malik, M. N. Husni, I. G. A. W. Wardhana, and G. Semil, “the Chemical Topological Graph Associated With the Nilpotent Graph of a Modulo Ring of Prime Power Order,” *J. Fundam. Math. Appl.*, vol. 7, no. 1, pp. 1–9, 2023.

[4] M. R. Gayatri, N. Nurhabibah, Q. Aini, Z. Y. Awanis, S. Salwa, and I. G. A. W. Wardhana, “The Clique Number and The Chromatics Number Of The Coprime Graph for The Generalized Quarternion Group,” *JTAM (Jurnal Teor. dan Apl. Mat.*, vol. 7, no. 2, p. 409, 2023, doi: 10.31764/jtam.v7i2.13099.

[5] L. R. W. Putra, Z. Y. Awanis, S. Salwa, Q. Aini, and I. G. A. W. Wardhana, “the Power Graph Representation for Integer Modulo Group With Power Prime Order,” *BAREKENG J. Ilmu Mat. dan Terap.*, vol. 17, no. 3, pp. 1393–1400, 2023, doi: 10.30598/barekengvol17iss3pp1393-1400.

[6] E. Y. Asmarani, S. T. Lestari, D. Purnamasari, A. G. Syarifudin, S. Salwa, and I. G. A. W. Wardhana, “The First Zagreb Index, The Wiener Index, and The Gutman Index of The Power of Dihedral Group,” *CAUCHY J. Mat. Murni dan Apl.*, vol. 7, no. 4, pp. 513–520, 2023, doi: 10.18860/ca.v7i4.16991.

[7] D. Adzkiya and K. Fahim, *Applied and computational mathematics*. 2015. doi: 10.1201/b19779-66.

[8] Darmajid, N. Hidayat, W. B. Wicaksono, A. F. Musyarrofah, “Indeks Wiener Dari Graf Identitas Dan Graf Pangkat Pada Grup Siklis Berhingga” vol. 9, no. 7, 2024.

[9] A. Gazir and I. G. A. W. Wardhana, “Subgrup Non Trivial Dari Grup Dihedral,” *Eig. Math. J.*, vol. 2, no. 2, pp. 73–76, 2019, doi: 10.29303/emj.v1i2.26.

[10] V. Aşkin and Ş. Büyükköse, “The Wiener Index of an Undirected Power Graph,” *Adv. Linear Algebr. & Matrix Theory*, vol. 11, no. 01, pp. 21–29, 2021, doi: 10.4236/alamt.2021.111003.

[11] A. Gazir, I. G. Adhitya, W. Wardhana, and Q. Aini, “The Intersection Graph of a Dihedral Group,” vol. 4, no. 2, 2021.

[12] E. Y. Asmarani, A. G. Syarifudin, I. G. A. W. Wardhana, and N. W. Switrayni, “The Power Graph of a Dihedral Group,” *Eig. Math. J.*, vol. 4, no. 2, pp. 80–85, 2022, doi: 10.29303/emj.v4i2.117.

[13] V. R. Wijaya and A. G. Syarifudin, "Sifat-Sifat Graf Ideal Prima Dari Ring Komutatif (Properties Of Prime Ideal Graph Of Commutative Ring)," vol. 05, no. 02, pp. 1–9, 2023.

[14] M. V. A. Herawati, "Graf Identitas Grup Simetris," *Pros. Semin. Nas. Sains Dan Terap. 2022*, no. VI, pp. 116–120, 2022.

[15] I. B. Muktyas and S. Arifin, "Semua Subgrup Siklik Dari Grup $(\mathrm{Z_N}, +)$" vol. 3, no. 2, pp. 177–186, 2018.