PARAMETER
JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN TERAPANNYA

e-ISSN. 2829-6303
Vol 01 No 02, Oktober 2022
Page 97-102

BEBERAPA SYARAT PERLU DAN SYARAT CUKUP MODUL KOMULTIPLIKASI

Some Necessary and Sufficient Conditions of Comultiplication Module

Emanuella M.C. Wattimena[1], Henry W.M. Patty[2], Dyana Patty[3], Dorteus L. Rahakbauw[4]
[1.]Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI
[2,3,4]Program Studi Matematika, FMIPA Universitas Pattimura

e-mail: [1]emanuellawattimena@gmail.com*

Abstrak
Dalam teori ring, jika diberikan I dan J ideal di ring R maka perkalian I dan J, yaitu $IJ = \{\sum_i^n a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J\}$ juga ideal di R. Termotivasi atas perkalian ideal tersebut, maka dapat didefinisikan modul multiplikasi, yaitu suatu modul yang setiap submodulnya dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian antara suatu ideal di ring dan modul itu sendiri, yaitu $N = IM$. Lebih lanjut, jika $N = IM = 0 = ann_M(I)$. Dari definisi ini, dapat disimpulkan bahwa setiap modul komultiplikasi pasti merupakan modul komultiplikasi tetapi tidak berlaku sebaliknya.
Kata Kunci: *annihilator, ideal, modul, modul multiplikasi, modul komultiplikasi, ring, submodul.*

Abstract
In ring theory, if I and J be ideals of R, then the multiplication of I and J, which is defined by $IJ = \{\sum_i^n a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J\}$ is also ideal of R. Motivated by the multiplication of two ideals, then can be defined a multiplication module, a special module which every submodule of M can be expressed as the multiplication of an ideal of ring and the module itself, and can simply be written as $N = IM$. Furthermore, if $N = IM = 0 = ann_M(I)$ the module become a comultiplication module. By the definition, it concludes that every comultiplication module is a multiplication module but the converse is not necessarily applicable.
Keywords: *annihilator, ideal, module, comultiplication module, multiplication module, ring, submodule.*

1. PENDAHULUAN

Dalam penelitian ini, semua ring merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. Misalkan $(M,+)$ suatu grup abelian dan $(R,+,\cdot)$ merupakan ring, selanjutnya terdapat aksi $\circ : R \times M \to M$. Grup abelian M disebut modul atas ring R jika memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Stuktur modul merupakan generalisasi dari ruang vektor atas lapangan F. Jika skalar pada ruang vektor adalah elemen lapangan, skalar pada modul diperumum menjadi elemen pada ring. Dengan demikian, sebarang ring R merupakan modul atas dirinya sendiri.

Dalam teori ring, jika diberikan I dan J ideal di ring R maka perkalian I dan J, yaitu $IJ = \{\sum_i^n a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J\}$ juga ideal di R. Termotivasi atas perkalian ideal tersebut, maka dapat didefinisikan modul multiplikasi, yaitu suatu modul yang setiap submodulnya dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian antara suatu ideal di ring dan modul itu sendiri. Misalkan M adalah R-modul, M disebut modul multiplikasi jika terdapat I ideal di R sedemikian sehingga $N = IM$. Lebih lanjut, M R-modul disebut modul komultiplikasi jika untuk setiap submodul N di M, terdapat ideal I di R sedemikian sehingga $N = IM = 0$. Secara khusus, jika semua submodul dari M merupakan submodul komultiplikasi maka M disebut modul komultiplikasi. Juga M merupakan modul komultiplikasi jika dan hanya jika $N = (0_{:M}\ ann_R(N))$ untuk setiap submodul N dari M.Dalam penelitian ini, akan diselidiki beberapa syarat perlu dan syarat cukup modul komultiplikasi.

Definisi 1 [1]

Diberikan grup abelian $(M,+)$ dan R ring komutatif dengan elemen satuan. M disebut modul jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1) $(r_1 + r_2) \cdot m_1 = r_1 \cdot m_1 + r_2 \cdot m_1$
2) $r_1 \cdot (m_1 + m_2) = r_1 \cdot m_1 + r_1 \cdot m_2$
3) $(r_1 \cdot r_2) \cdot m_1 = r_1 \cdot (r_2 \cdot m_1)$
4) $1 \cdot m_1 = m_1$

Untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $m_1, m_2 \in M$.

Contoh 1:

1. Setiap ring R adalah R-modul.
2. Himpunan vektor-vektor berdimensi n, $\mathbb{R}^n$adalah $\mathbb{R}$ -modul, dimana $\mathbb{R}$ merupakan himpunan bilangan-bilangan real.

Definisi 2 [2]

Diberikan ring R dengan elemen satuan dan modul M atas R. Suatu himpunan tak kosong $S \subseteq M$ disebut submodul pada M jika S merupakan subgrup pada M terhadap operasi penjumlahan serta S juga merupakan modul atas R terhadap operasi pergandaan skalar yang sama dengan yang berlaku pada M. Dengan kata lain, S merupakan submodul pada M jika:

i) $(S,+)$ merupakan grup abelian terhadap operasi "+", yaitu S merupakan subgrup pada $(M,+)$.
ii) $(\forall r \in R)(\forall s \in S)\ rs \in S$.

Berikut ini diberikan syarat perlu dan syarat cukup suatu himpunan bagian merupakan submobul.

Teorema 1 [3]

Diberikan modul M atas R dan $N \subseteq M$ dengan $N \neq \emptyset$. Himpunan N disebut submodul pada M jika dan hanya jika dan hanya jika:

i) $(\forall n_1, n_2 \in N) n_1 - n_2 \in N$
ii) $(\forall n_1 \in N, r \in R.) rn_1 \in N$

Contoh 2:

Diketahui $\mathbb{R}^3$ merupakan modul atas R dan $S \subset \mathbb{R}^3$dengan $S = \{(a \quad b \quad 0) | a, b \in \mathbb{R}\}$. S merupakan submodul dari $\mathbb{R}^3$.

Selanjutnya, jika modul $\mathbb{Z}$ atas ring $\mathbb{Z}$ dibandingkan dengan modul $\mathbb{Z}_{12}$ atas ring $\mathbb{Z}$, perbedaan utama dari kedua modul ini adalah dalam modul $\mathbb{Z}$ tidak terdapat $n \neq 0$ dan $r \neq 0$ dalam ring $\mathbb{Z}$ sedemikian hingga $rn = 0$, sementara di dalam modul $\mathbb{Z}_{12}$ dapat ditemukan $\bar{n} \neq 0$ sedemikian hingga ada $r \neq 0$ di $\mathbb{Z}$ sedemikian hingga $r\bar{n} = \bar{0}$. Dari fenomena ini, didefinisikanlah pengertian annihilator suatu elemen modul sebagai berikut:

Definisi 2 [4]

Diberikan modul M atas R dan diberikan N submodul pada M. Himpunan $(0:_R N)$ disebut annihilator submodul N yang didefinisikan $(0:_R N) = \{r \in R | rn = 0, \forall n \in N\}$. Sering juga dinotasikan sebagai $Ann_R(N)$.

Contoh 3:

Annihilator modul $\mathbb{Z}_6$ atas ring $\mathbb{Z}$ adalah $6\mathbb{Z}$.

Definisi 3 [5]

Jika M merupakan modul atas R, maka $(M,+)$ merupakan grup abelian dan setiap subgrupnya merupakan grup abelian. Jika N subgrup pada M maka N merupakan subgrup normal pada M, sehingga dapat dibentuk grup faktor.

$$M/_N = \{\overline{m} = m + N | m \in M\}$$

2. METODE PENELITIAN

2.1 Tipe Penelitian

Tipe penelitian yang digunakan adalah berupa studi pustaka, yaitu dengan menggunakan beberapa literatur yang berkaitan sebagai acuan untuk membahas inti permasalahan sehingga dapat disajikan dalam penulisan secara benar dan terperinci.

2.2 Bahan dan Materi Ajar

Dalam penelitian ini, digunakan bahan atau materi berupa karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk pdf, buku cetak dan media lainnya seperti materi perkuliahan dan internet.

2.3 Populasi dan Sampel Penelitian

Adapun prosedur yang digunakakan dalam penelitian ini terdiri dari: penentuan judul penelitian, mempelajari teori modul atas ring, mempelajari modul multiplikasi, mengidentifikasi modul komultiplikasi, mengkaji beberapa syarat perlu dan syarat cukup modul komultiplikasi, menyimpulkan penelitian.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Modul Multiplikasi

Definisi 4 [6]

Sebuah modul M atas ring R disebut modul multiplikasi jika untuk setiap submodul N dari modul M, $N = IM$, I ideal di R.

Contoh 4

$\mathbb{Z}$ adalah $\mathbb{Z}$ -modul multiplikasi.

Penyelesaian:

Diketahui: $n\mathbb{Z}$ merupakan sebarang submodul di $\mathbb{Z}$ -modul $\mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan: terdapat ideal Idi ring $\mathbb{Z}$ sehingga berlaku $N = IM$ atau $n\mathbb{Z} = I\mathbb{Z}$

Ambil sebarang $a \in \mathbb{Z}$, maka $n\mathbb{Z} = I\mathbb{Z}$ sehingga $na = Ia$, $na = (na)a$ dan $n\mathbb{Z} = (n\mathbb{Z})\mathbb{Z}$.

Karena ditemukan ideal $I = n\mathbb{Z}$ yang memenuhi $N = IM$ atau $n\mathbb{Z} = (n\mathbb{Z})\mathbb{Z}$ maka terbukti $\mathbb{Z}$ adalah $\mathbb{Z}$ -modul multiplikasi. Modul multiplikasi ini yang kemudian didualisasikan untuk memperoleh modul komultiplikasi.

3.2 Modul Komultiplikasi

Sebelum didefinisikan modul komultiplikasi, diberikan terlebih dahulu teorema berikut.

Teorema 2 [7]

Diberikan M modul atas ring R dan N submodul di M dan $m \in M$ maka $(N:_R Rm) = (N:_R m) = \{r \in R | rm \in N\}$. Selanjutnya, jika N submodul di M dan I ideal di R maka $(N:_M I) = \{m \in M | Im \subseteq N\}$ juga merupakan submodul di M.

Bukti:

Untuk membuktikan $(N:_M I)$ merupakan submodul maka cukup dibuktikan dengan dua aksioma submodul.

(i) Ambil sebarang $a, b \in (N:_M I)$. Akan ditunjukan $a - b \in (N:_M I)$.
$a \in (N:_M I)$ artinya $Ia \subseteq N$
$b \in (N:_M I)$ artinya $Ib \subseteq N$
$$\begin{aligned} a - b &= Ia - Ib \\ &= I(a-b) \\ &= Ic, c = a - b, c \in M \end{aligned}$$
Karena $c \in M$ maka diperoleh $Ic \subseteq N$

(ii) Ambil sebarang $a \in (N:_M I)$ dan $r \in R$. Akan ditunjukkan $ar \in (N:_M I)$.
$a \in (N:_R I)$ artinya $Ia \subseteq N$.
$$\begin{aligned} r \cdot a &= r(Ia) \\ &= I(ra) \\ &= Ib, \qquad b = ra, b \in M \end{aligned}$$
Karena $Ib \subseteq N$ maka diperoleh $ra \in (N:_M I)$.

Karena memenuhi dua aksioma submodul, maka terbukti $(N:_M I)$ merupakan submodul di M.

Lebih lanjut, jika N submodul di M maka,
$$\begin{aligned} \big(0:_M (0:_R N)\big) &= \{m \in M | m(0:_R N) = 0\} \\ &= \{m \in M | m(rN) = 0\} \\ &= \{m \in M | m(rn) = 0, n \in N\} \\ &= \{m \in M | mrn = 0, n \in N\} \\ &= \{m \in M | m(rn) = 0, n \in N\} \\ &= \{m \in M | rmn = 0, n \in N\} \\ &= \{m \in M | rm_1 = 0, m_1 = mn \in M\} \\ &= \{m_1 \in M | rm_1 = 0\} \end{aligned}$$
Diperoleh bahwa $m \in \big(0:_M (0:_R N)\big)$ jika dan hanya jika $rm = 0$ sedemikian sehingga $rN = 0$.

Definisi 5 [4]

Diberikan M merupakan R-modul. Sebuah submodul N dari M disebut submodul komultiplikasi dari M dan dinotasikan dengan $N \subseteq M$, jika terdapat suatu ideal I dari R sedemikian sehingga $N = [0_{:M} I] = ann_M(I)$. Secara khusus, jika semua submodul dari M merupakan submodul komultiplikasi maka M disebut modul komultiplikasi. Juga M merupakan modul komultiplikasi jika dan hanya jika $N = (0_{:M}\, ann_R(N))$ untuk setiap submodul N dari M.

Contoh 5

Himpunan $\mathbb{Z}_4$ merupakan modul komultiplikasi. Misalkan $M = \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$ merupakan $\mathbb{Z}$-modul dan $N = 2\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$ himpunan submodul dari M, maka M merupakan modul komultiplikasi.

3.3 Beberapa Syarat Perlu dan Syarat Cukup Modul Komultiplikasi

Teorema 3 [1]
Diberikan sebuah ring R dan M merupakan R-modul komultiplikasi. Maka pernyataan berikut ekuivalen untuk R-modul:

1. Setiap submodul dari M merupakan modul komultiplikasi.
2. $N = \left(0:_R M(0:_R N)\right)$untuk setiap N submodul dari M.
3. Diberikan submodul K, L dari M, jika $(0:_R K) \subseteq (0:_R L)$ maka $L \subseteq K$.
4. Diberikan sebarang submodul N dari M dan $m \in M$, jika $(0:_R N) \subseteq (0:_R m)$ maka $m \in N$.
5. Diberikan sebarang submodul N dari M dan $m \in M$, jika $(0:_R N) \subseteq (0:_R m)$ maka $N:_R m$ bukan ideal maksimal dari R.

Bukti:
(1 ⇔ 2)
Akan ditunjukkan bahwa jika M merupakan modul komultiplikasi maka
$$N = \left(0:_R M(0:_R N)\right)$$
M merupakan modul komultiplikasi artinya terdapat suatu ideal I di R sedemikian sehingga $N = (0:_M I)$. Selanjutnya, sesuai dengan sifat annihilator, jika N merupakan submodul di M maka himpunan semua annihilator dari himpunan $(0:_R N)$ akan membentuk ideal di ring R. Sehingga akan diperoleh $I \subseteq (0:_R N)$ sedemikian sehingga $\left(0:_M (0:_R N)\right) \subseteq (0:_M I) = N$ sehingga mengakibatkan $N = \left(0:_M (0:_R N)\right)$. Sebaliknya, jika $N = \left(0:_M (0:_R N)\right)$ dan sudah diketahui bahwa $I \subseteq (0:_R N)$ sedemikian sehingga $\left(0:_M (0:_R N)\right) \subseteq (0:_M I)$ sehingga $N = (0:_M I)$. Terbukti M merupaka modul komultiplikasi.
(2 ⟹ 3 ⟹ 4 ⟹ 5) jelas
(5 ⟹ 2) dengan menggunakan Teorema 3.

4. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan pada bab sebelumnya maka dapat disimpulkan beberapa hal, antara lain:

1. Modul komultiplikasi merupakan dualisasi dari suatu modul khusus, yaitu modul multiplikasi. Apabila untuk setiap submodul N dari modul M, terdapat suatu ideal I di ring R sedemikian sehingga $N = IM = 0 = (0:_R I)$ maka M merupakan R −modul komultiplikasi.
2. Beberapa syarat perlu dan syarat cukup suatu modul komultiplikasi termotivasi dari syarat perlu dan syarat cukup modul multiplikasi dan juga sifat-sifat annihilator.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Al-Shaniafi, Y. Smith P., (2009), *Comultiplication Modules over Commutative Rings*, Journal of Commutative Algebra.
[2] Atani, S.,Ghaleh, S..2006.*On Comultiplication Modules*. International Mathematical Forum.
[3] Gilbert, L., Gilbert J..2009. *Elements of Modern Algebra*. USA: Brooks/Cole.
[4] Rajaee, S. 2013. *Some Results on Comultiplication Modules*. International Journal of Algebra, Vol.7.

[5] Wijayanti, Sri Wahyuni. 2013. *Bahan Ajar: Teori Modul*. Yogyakarta.
[6] Wijayanti, Sri Wahyuni. 2013. *Bahan Ajar: Teori Ring*. Yogyakarta.
[7] Wisbauer, R. .1991. *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers.