PARAMETER
JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN TERAPANNYA

e-ISSN. 2829-6303
Vol 01 No 02, Oktober 2022
Page 103-110

BEBERAPA SIFAT IDEAL *M*-KANSELASI

Some Property of M-Cancelation Ideal

Marlen M. Kolelupun[1], E. R. Persulessy[2]
[1.]Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI
[2,]Program Studi Matematika, FMIPA Universitas Pattimura

e-mail: [1]alenkolelupun@gmail.com*

Abstrak
Sifat kanselasi pada grup juga berlaku pada ring dan modul. Sifat kanselasi pada ring tersebut selanjutnya dikembangkan pada ideal. Suatu ideal I dari R disebut ideal kanselasi jika berlaku $\mathrm{IB} = \mathrm{IC}$ untuk B dan C ideal dari R, maka $\mathrm{B} = \mathrm{C}$. Selanjutnya suatu M: R-modul disebut modul kanselasi jika berlaku aM = bM maka a = b untuk a dan b ideal dari R. Dalam penelitian ini diperoleh bahwa ideal M-kanselasi merupakan generalisasi dari ideal kanselasi dan sifat-sifat dari ideal M-kanselasi. Untuk suatu M R-modul dan $\mathrm{x} \in \mathrm{R}$, Ideal $\mathbf{a} =< \mathrm{x} >$ adalah ideal M-kanselasi jika dan hanya jika $\mathrm{x} \notin \mathcal{Z}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M})$ dan jika **a** adalah ideal M-kanselasi lokal dari R maka **a** adalah ideal M-kanselasi dari R.
Kata Kunci: Ideal, Ideal Kanselasi, Modul, Modul Kanselasi, Ideal M-Kanselasi.

Abstract
The cancellation property of the group also applies to rings and modules. The cancellation property of the ring is further developed into an ideal. An ideal I of R called an cancellation ideal if it applies $IB = IC$ to B and C an ideal of R, then $B = C$. Furthermore, an M: R-module called an cancellation module if applicable AM = BM then A = B for A and B an ideal of R. In this research, M-cancellation ideal a generalization of cancellation ideal and has properties of the M-cancellation ideal. For M R-module and $x \in R$, an Ideal $A =< x >$ is M-cancellation ideal if and only if $x \notin \mathcal{Z}_R(M)$ and if an ideal A is M-cancellation ideal of R then A is M-cancelation of R.
Keywords: *Ideal, Cancellation Ideal, Module, Cancellation Module, M-Cancellation Ideal*

1. PENDAHULUAN

Sifat kanselasi merupakan salah satu sifat dasar dari grup. Sifat ini juga berlaku pada ring karena aksioma grup abelian berlaku di ring. Selanjutnya sifat ini lebih dikembangkan pada ideal yang merupakan subring khusus dan disebut ideal kanselasi. Diberikan R ring komutatif dengan elemen satuan, suatu ideal I dari R disebut ideal kanselasi jika $IB = IC$ untuk B dan C ideal dari R maka $B = C$(lihat [6]).

Dalam struktur aljabar dikenal juga ruang vektor. Struktur grup dan ring juga digunakan dalam membentuk suatu ruang vektor yaitu grup abelian dan lapangan. Jika struktur lapangan diperumum menjadi sebarang ring maka diperoleh suatu struktur lain yaitu struktur modul. Dengan kata lain modul adalah perumuman dari ruang vektor. Karena struktur pembentuk modul adalah grup abelian dan ring maka sifat kanselasi pada ideal digeneralisasi pada modul. Diberikan M merupakan R-modul. Suatu modul M disebut modul kanselasi jika untuk setiap ideal $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ berlaku $\boldsymbol{a}M = \boldsymbol{b}M$ maka $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ (lihat [2]). Sifat kanselasi juga berlaku disubmodul dan disebut ideal M-kanselasi. Diberikan M merupakan R-modul. Suatu ideal $\boldsymbol{a}$ disebut ideal M-kanselasi jika untuk semua submodul P dan Q dari M berlaku $\boldsymbol{a}P = \boldsymbol{a}Q$ mengakibatkan $P = Q$.

Dalam tulisan ini dibahas beberapa sifat ideal M-kanselasi terkait dengan hubungan ideal kanselasi, modul kanselasi, dan ideal M-kanselasi serta syarat perlu dan syarat cukup suatu ideal merupakan ideal M-kanselasi. .

2. LANDASAN TEORI

Sifat kanselasi merupakan sifat dasar dari grup. Sifat kanselasi juga berlaku pada ring dan dikembangkan pada ideal. Berikut diberikan definisi dan contoh yang merupakan landasan teori dari sifat kanselasi.

Definisi 1[1]

Diberikan sebarang ring R dan elemen tak nol $a \in R$. Elemen a disebut pembagi nol jika terdapat $b \in R, b \neq 0_R$, sedemikian sehingga $a \cdot b = 0_R$ atau $b \cdot a = 0_R$.

Contoh [2]

1. Dalam ring $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12}, \cdot_{12})$ elemen $\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ dan $\bar{6}$ merupakan pembagi nol.
2. Elemen $\bar{5}$ bukan pembagi nol di $\mathbb{Z}_{12}$ Sebab tidak ada $\bar{y} \in \mathbb{Z}_{12}$ sedemikian sehingga $\bar{5} \cdot_6 \bar{y} = \bar{0}$.

Definisi 2[2]

Diberikan A merupakan ideal dari ring R. Ideal A disebut regular jika A memuat elemen regular artinya elemen-elemen di ideal A bukan pembagi nol.

Contoh

Dalam sebuah daerah integral, setiap elemen tak nol adalah element regular, dan demikian juga ideal yang tak nol adalah elemen ideal regular. Contohnya $\mathbb{Z}_P$ dengan P merupakan himpunan bilangan prima.

Definisi 3[2]

Suatu ideal utama $A =< x >$ disebut regular jika dan hanya jika x adalah elemen regular dari ring R.

Contoh

Himpunan $\mathbb{Z}_P$ adalah ideal utama regular karena $\mathbb{Z}_P$ merupakan himpunan bilangan modulo dengan P merupakan himpunan bilangan prima $P = \{1, 2, 3, 5, \ldots n\}$, dimana setiap elemennya bukan pembagi nol. Pada himpunan $\mathbb{Z}_P$ elemen-elemennya tidak memuat pembagi nol.

Berikut ini akan diberikan teorema yang berkaitan dengan operasi antar dua ideal. Teorema ini menjelaskan bahwa perkalian dua ideal juga merupakan ideal.

Teorema 1. Perkalian Dua Ideal [3]

Diberikan R merupakan ring. Jika I_1 dan I_2 masing-masing merupakan ideal pada R, maka : $I_1 I_2 = \{\sum_i^n a_i b_i \,|a_i \in I, b_i \in J\}$ merupakan ideal pada ring R.

Bukti:

Akan dibuktikan $I_1 I_2 = \{\sum_i^n a_i b_i \,|a_i \in I, b_i \in J\}$ merupakan ideal di R. Diambil sebarang $r \in R$ dan $x, y \in I_1 I_2$ yang berarti $= \sum_{i=0}^m a_i b_i$, $a \in I_1, b \in I_2$ dan $y = \sum_{i=0}^n c_i d_i$, $c \in I_1, d \in I_2$.

$$
\begin{aligned}
x - y &= \left(\textstyle\sum_{i=0}^m a_i b_i\right) - \left(\textstyle\sum_{i=0}^n c_i d_i\right) \\
&= (a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_m b_m) - (c_0 d_0 + c_1 d_1 + \cdots + c_n d_n) \\
&= (a_0 b_0 - c_0 d_0) + (a_1 b_1 - c_1 d_1) + \cdots + (a_m b_m - c_n d_n) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{\{m,n\}} (a_i b_i - c_i d_i) \in I_1 I_2
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, untuk sebarang $a = \sum_{i=0}^n x_i y_i \in I_1 I_2$ dan $r \in R$ berlaku :

$$
\begin{aligned}
rx &= r\left(\textstyle\sum_{i=0}^n a_i b_i\right) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^n r(a_i b_i) \\
&= \sum_{i=0}^n (r a_i) b_i \in I_1 I_2
\end{aligned}
$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa $I_1 I_2$ merupakan ideal di R.

Karena pembentuk modul adalah ring dan grup belian maka sifat dasar dari ideal yaitu perkalian ideal memotivasi terbentuknya modul perkalian. Berikut diberikan definisi modul multiplikasi.

Definisi 4. Modul Multiplikasi[4]

Suatu M R-modul disebut modul multiplikasi jika untuk setiap submodul N di M terdapat ideal I di R sedemikian sehingga $N = IM$.

Contoh

$\mathbb{Z}$ adalah $\mathbb{Z}$ -modul multiplikasi.

Penyelesaian :

Diketahui $n\mathbb{Z}$ merupakan sebarang submodul di $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$-modul . Akan ditunjukkan bahwa terdapat ideal I di ring $\mathbb{Z}$ sehingga berlaku $N = IM$ atau $n\mathbb{Z} = I\mathbb{Z}$. Ambil sebarang $a \in \mathbb{Z}$. Berdasarkan definsi modul multiplikasi maka $N = IM$ atau, $n\mathbb{Z} = I\mathbb{Z}$ atau dapat dinyatakan sebagai $na = Ia, a \in \mathbb{Z}$. Karena $n\mathbb{Z}$ juga merupakan ideal di ring $\mathbb{Z}$ dan memenuhi $(n\mathbb{Z})\mathbb{Z} = n(\mathbb{Z}\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$ maka diperoleh $na = (na)a$ atau $n\mathbb{Z} = (n\mathbb{Z})\mathbb{Z}$. Karena ditemukan ideal $I = n\mathbb{Z}$ yang memenuhi $N = IM$ atau $n\mathbb{Z} = (n\mathbb{Z})\mathbb{Z}$ maka terbukti $\mathbb{Z}$ adalah $\mathbb{Z}$ -modul multiplikasi.

Sifat kanselasi juga berlaku pada modul dan disebut modul kanselasi. Sifat kanselasi pada modul merupakan generalisasi dari ideal kanselasi. Berikut definisi dari modul kanselasi.

Definisi 5[3]

Suatu himpunan M disebut modul kanselasi jika $AM = BM$ maka $A = B$, untuk A, B ideal di R.

Contoh

Modul bebas adalah modul kanselasi.

Penyelesaian:

Diketahui misalkan F adalah modul bebas. Karena F adalah modul bebas maka F mempunyai basis. $\mathcal{B} = \{x_\alpha | \alpha \in I\}$ adalah basis dari F. Akan ditunjukan modul bebas adalah modul kanselasi artinya $AF = BF \Rightarrow A = B$ atau akan ditunjukan $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$. Misalkan $A = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ dan $B = \{b_1 + b_2 \ldots + b_n\}$ ideal di R dan $AF = BF$. Ambil sebarang $x_{\alpha_1} \in \mathcal{B}$, karena $AF = BF$ diperoleh:

$$ax_{\alpha_1} = \sum_{i=1}^{n} b_i x_{\alpha_i} \quad , a \in A \text{dan } b_i \in B$$

$$\Leftrightarrow \quad ax_{\alpha_1} = b_1 x_{\alpha_1} + b_2 x_{\alpha_2} + \cdots + b_n x_{\alpha_n}, \quad b_i = 0; i \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad ax_1 = b_1 x_{\alpha_1}$$

Dari persamaan di atas diperoleh $a = b_1$.

Karena $a = b_1$ dan $b_1 \in B$ maka $a \in B$. Karena $a \in B$dan $a \in A$ maka $\mathrm{B} \subseteq A$. Ambil sebarang $x_{\alpha_1} \in \mathcal{B}$, karena $BF = AF$ diperoleh;

$$\mathrm{b}x_{\alpha_1} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_{\alpha_i} \quad , b \in B\text{dan } a_i \in A$$

$$\Leftrightarrow \quad bx_{\alpha_1} = a_1 x_{\alpha_1} + a_2 x_{\alpha_2} + \cdots + a_n x_{\alpha_n}, \quad a_i = 0; i \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad bx_1 = a_1 x_{\alpha_1}$$

Dari persamaan di atas diperoleh $\mathrm{b} = a_1$. Karena $\mathrm{b} = a_1$ dan $a_1 \in A$ maka $b \in A$. Karena $\mathrm{b} \in A$ dan $\mathrm{b} \in B$ maka $A \subseteq B$. Karena $\mathrm{B} \subseteq A$ dan $A \subseteq B$ maka $A = B$. Dengan demikian modul bebas adalah modul kanselasi.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sifat kanselasi pada ring lebih dikembangkan pada ideal dan disebut ideal kanselasi. Ideal kanselasi pada ring R yang memotivasi terbentuk nya struktur ideal M-kanselasi. Berikut ini merupakan definisi ideal kanselasi.

Definisi 6 [4]

Misalkan R merupakan suatu ring komutatif dengan elemen satuan. Suatu ideal I dari R disebut ideal kanselasi jika berlaku $IB = IC$ untuk ideal B dan C dari R maka $B = C$. Sederhananya dapat dipahami bahwa I adalah ideal kanselasi jika dan hanya jika berlaku $IB \subseteq IC$ untuk ideal B dan C dari R maka $B \subseteq C$.

Contoh

Diberikan ring $\mathbb{Z}$. Setiap ideal tak kosong di $\mathbb{Z}$ merupakan ideal kanselasi

Bukti:

Diambil sebarang I ideal tak kosong di $\mathbb{Z}$ dan A, B ideal di $\mathbb{Z}$ Sedemikian sehingga $AI = BI$. Akan dibuktikan $A = B$ atau akan ditunjukan $A \subseteq B$dan $B \subseteq A$). Diketahui bahwa $A = a\mathbb{Z}$, $B = b\mathbb{Z}$ dan $I = i\mathbb{Z}$ untuk suatu $a, b, i \in \mathbb{Z}$ dengan $i \neq 0$. Diperhatikan bahwa $ai \in ai\mathbb{Z} = (a\mathbb{Z})(i\mathbb{Z}) = AI = BI = (b\mathbb{Z})(i\mathbb{Z}) = (bi)\mathbb{Z}$. Jadi $ai = bix$, untuk suatu $x \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, $i(a - bx) = 0$. Diperhatikan juga bahwa $i \neq 0$, haruslah $a - bx =$

0. Dapat disimpulkan bahwa $a = bx$ dan $a \in b\mathbb{Z} = B$ sehingga didapatkan $A = a\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z} = B$. Jadi $A \subseteq B$. Analog untuk $B \subseteq A$. Dengan demikian terbukti $A = B$ dan I merupakan ideal kanselasi.

Teorema 2[4]

Misalkan R merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. Suatu ideal I dari R adalah ideal kanselasi jika dan hanya jika I adalah ideal utama regular lokal.

Bukti:

($\Longrightarrow$) Diketahui R merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. Akan ditunjukan ideal I dari R adalah ideal kanselasi jika dan hanya jika I merupakan ideal utama regular lokal. Artinya ideal I adalah ideal kanselasi jika dan hanya jika ideal I adalah $I_M =< a >_M$, untuk M merupakan ideal maksimal dan a bukan elemen pembagi nol.

Misalkan M merupakan ideal maksimal dari R. Akan ditunjukan I_M adalah ideal utama regular. Asumsikan bahwa $I \subseteq M$, Ambil/pilih suatu subhimpunan $\{b_\alpha\}_{\propto \in \mathcal{F}}, \{\bar{b}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ adalah basis I/MI R/M-ruang vektor . Tunjukan bahwa $|\mathcal{F}| > 1$ maka untuk $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{F}$ dengan $\alpha_1 \neq \alpha_2$, diperoleh $I = \left(b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2}\right) + (b_\alpha | \alpha \in \mathcal{F}\text{-}\{\alpha_1, \alpha_2\}\}) + MI$. Menurut lemma 4.1, $I = \left(b_{\alpha_1}\right) + (b_\alpha | \alpha \in \mathcal{F}\text{-}\{\alpha_1, \alpha_2\}\}) + MI$, Namun $(b_\alpha | \alpha \in \mathcal{F}\text{-}\{, \alpha_2\}\}$ adalah basis untuk MI, suatu kontradisi. Oleh Karena itu $I = (b) + MI$ untuk $a \in I$. Misalkan $b \in I$ maka $(b)I = (b)\big((a) + MI\big) = (a)(b) + M(b)I \subseteq (a)I + M(b)I = \big((a) + M(b)\big)I$. Karena $(b) \subseteq (a) + M(b)$ maka $b = ra + mb$ untuk $m \in M$, jadi $(1 - m)b = ra$. Oleh karena $1 - m$ adalah unit di R_M, $b \in (a)_M$ dengan demikian $I_M = (a)_M$. Akan ditunjukan bahwa $ca = 0$ di R_M. Maka $(cI)_M = (ca)_M = 0_M$, jadi $(cI)_M = (cMI)_M$. Karena$(cI)_N = (cMI)_N$ untuk ideal maksimal lain N dari R diperoleh $cI = cMI$. Karena I adalah ideal kanselasi $(c) = (c)_M$. Dengan demikian $c = 0$ di R_M. Oleh karena itu I_M adalah ideal regular.

($\Longleftarrow$) Diketahui I merupakan ideal utama regular lokal artinya I_M adalah ideal utama regular. Akan ditunjukan I adalah ideal kanselasi berarti untuk setiap B dan C ideal di R berlaku jika $IB = IC$ maka $B = C$ sehingga akan ditunjukan $B \subseteq C$ dan $C \subseteq B$. Ambil sebarang $b \in B$ akan ditunjukan $b \in C$

$$IB = IC \Longrightarrow B = C$$
$$I_M B = I_M C$$
$$< a >_M b =< a >_M c$$
$$(na)_M b = (na)_M c, n \in R$$
$$(na)_N b = (na)_N c$$

Untuk ideal maksimal lain N dari R menurut definisi ideal maksimal diperoleh

$$(na)b = (na)c$$
$$(na)b - (na)c = 0$$
$$(na)(b - c) = 0$$

Karena $na \in I$ maka $na \neq 0$, maka $(b - c) = 0$ dengan demikian diperoleh $b = c$. Karena $b = c$ dan $c \in C$ maka $b \in C$ sehingga $B \subseteq C$. Analog untuk $C \subseteq B$.

■

Berikut ini akan dijelaskan definisi ideal M-kanselasi yang merupakan generalisasi dari ideal kanselasi.

Definisi 7 [5]

Misalkan M merupakan R-modul. Suatu ideal A disebut ideal M-kanselasi jika untuk semua submodul P dan Q dari M, $AP = AQ$ mengakibatkan $P = Q$.

Contoh

Diberikan ring $\mathbb{Z}$ dengan $M = \mathbb{Q}$ merupakan $\mathbb{Z}$-modul

i. $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal $\mathbb{Q}$-kanselasi

ii. $a\mathbb{Z},\ a \neq 0, a \in \mathbb{N}$ merupakan ideal $\mathbb{Q}$-kanselasi.

Bukti:

i. Akan dibuktikan $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal $\mathbb{Q}$-kanselasi. Diambil sebarang P, Q submodul di $\mathbb{Q}$ sedemikian sehingga $(2\mathbb{Z})P = (2\mathbb{Z})Q$. Akan ditunjukan $P = Q$ atau akan dibuktikan $P \subseteq Q$ dan $Q \subseteq P$.

Diambil sebarang $p = \frac{a}{b} \in P, a \in \mathbb{Z}$ dan $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Diperoleh

$$p = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot 2\frac{1}{2} \in P\left((2\mathbb{Z}) \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right)\right)$$

Diperhatikan juga bahwa

$$\begin{aligned} P\left((2\mathbb{Z}) \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right)\right) &= Q\left((2\mathbb{Z}) \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right)\right) \\ &= Q\mathbb{Z}\ ,\ Q\ \mathbb{Z}\text{-modul} \\ &= Q \end{aligned}$$

Jadi $p \in P\left((2\mathbb{Z}) \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right)\right) = Q$ dan $p \in Q$

Dengan kata lain $P \subseteq Q$. Analog untuk $Q \subseteq P$. Dengan demikian $P = Q$ dan $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal M-kanselasi.

ii. $a\mathbb{Z},\ a \neq 0, a \in \mathbb{N}$ merupakan ideal $\mathbb{Q}$-kanselasi. (Pembuktian analog dengan (i)).

Ideal M-kanselasi mempunyai beberapa sifat khusus yang akan dijelaskan sebagai berikut.

Lemma 1 [5]

Misalkan M merupakan R-modul dan A merupakan ideal. Jika M adalah modul kanselasi dan A adalah ideal M-kanselasi dari R maka A adalah ideal kanselasi.

Bukti:

Diketahui M merupakan modul kanselasi berarti untuk setiap A dan B ideal dari ring R, berlaku $AM = BM$ maka $A = B$ dan A ideal M-kanselasi berarti untuk setiap submodul P dan Q dari M, berlaku $AP = AQ$ maka $P = Q$. Akan ditunjukan bahwa A adalah ideal kanselasi berarti untuk setiap ideal B, C dari R, berlaku $AB = BC$ maka $B = C$. Karena M adalah modul kanselasi maka untuk sebarang dua ideal di R kedua ideal itu sama dan karena A ideal M-kanselasi merupakan generalisasi dari ideal kanselasi maka pasti A adalah ideal kanselasi sehingga terbukti A adalah ideal kanselasi.

Lemma 2[5]

Diberikan M R-modul dan $x \in R$. Ideal $A =< x >$ merupakan ideal M-kanselasi jika dan hanya jika $x \notin \mathcal{Z}_R(M)$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui M R-modul dan $x \in R$ dan $A =< x >$ ideal M-kanselasi

Akan ditunjukan $x \notin \mathcal{Z}_R(M)$, $\mathcal{Z}_R(M) = \{0\}$, sehingga cukup ditunjukan $x \neq 0$. Karena $A =< x >$ ideal M-kanselasi, maka berdasarkan lemma 4.2 maka $A =< x >$ adalah ideal kanselasi. Berdasarkan teorema 4.1 $A =< x >$ adalah ideal kanselasi jika dan hanya jika $A =< x >$ adalah ideal utama regular lokal artinya $A =< x >$

adalah ideal kanselasi jika dan hanya jika ideal $A =< x >$ adalah $A_M =< x >_M$, untuk M merupakan ideal maksimal dan x bukan elemen pembagi nol. x bukan elemen pembagi nol artinya untuk $x \neq 0$ terdapat $y \in R$, $y \neq 0$ sedemikian hingga $xy \neq 0$. sehingga diperoleh $x \neq 0$. Karena $x \neq 0$ maka terbukti $x \notin \mathcal{Z}_R(M)$, $\mathcal{Z}_R(M) = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Diketahui M R-modul, $x \in R$ dan $x \notin \mathcal{Z}_R(M)$ berarti $x \neq 0$. Akan ditunjukan $A = < x >$ adalah ideal M-kanselasi. A ideal M-kanselasi berarti untuk setiap P dan Q submodul di M berlaku $AP = AQ$ maka $P = Q$, berarti cukup ditunjukan $P = Q$. Sehingga akan ditunjukan $P \subseteq Q$ dan $Q \subseteq P$.

Ambil sebarang $a \in P$ akan ditunjukan $a \in Q$

$$x_1 a = \sum x_i\, b_i$$
$$= x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_n b_n$$

Karena $b_i \in Q$ dan Q submodul berarti ada $b_i = 0$, $i \neq 1$ sehingga

$ax = b_1 x_1$. Karena $\boldsymbol{a} =< x >$ ideal M-kanselasi berarti $a = b_i \in Q$. Karena $a \in P$ dan $a \in Q$ maka $P \subseteq Q$. Analog untuk $Q \subseteq P$

Dengan demikian terbukti bahwa $A =< x >$ merupakan ideal M-kanselasi jika dan hanya jika $x \notin \mathcal{Z}_R(M)$. ■

Lemma 3.[5]

Misalkan M merupakan R-modul, dan misalkan A merupakan ideal dari R. Jika A adalah ideal M-kanselasi lokal dari R maka A adalah ideal M-kanselasi dari R.

Bukti :

Diketahui M merupakan R-modul, A ideal dari R dan A adalah ideal M-kanselasi lokal dari R A_m adalah ideal M_m-kanselasi dari R_m jika $A_m P_m = A_m Q_m$untuk submodul P_m dan $Q_m$dari M_m, mengakibatkan $P_m = Q_m$. Akan ditunjukan A adalah ideal M-kanselasi dari R artinya untuk submodu P dan Q di M berlaku jika $AP = AQ$ maka $P = Q$, sehingga akan ditunjukan $P \subseteq Q$ dan $Q \subseteq P$. Ambil sebarang elemen $a_m \in A_{\boldsymbol{m}}, p_m \in P_m$ dan $q_m \in Q_m$ maka berlaku

$$a_m p_{m,} = a_m q_m$$
$$(ap)_m = (aq)_m$$
$$(ap)_n = (aq)_n$$

untuk ideal maksimal lain n dari R berdasarkan definisi ideal maksimal maka diperoleh $ap = aq$. Karena $a \in A$ dan A adalah ideal maka a mempunyai invers, sehingga

$$a^{-1}ap = a^{-1}aq$$
$$(a^{-1}a)p = (a^{-1}a)q$$
$$p = q$$

Karena $p \in P$, $q \in Q$ dan $p = q$ maka $p \in Q$ sehingga diperoleh $P \subseteq Q$. Analog untuk $Q \subseteq P$ sehingga $P = Q$. Dengan demikian terbukti bahwa A adalah ideal M-kanselasi dari R.

4. KESIMPULAN

Hasil penting atau sifat yang dapat dijadikan kesimpulan dari tulisan ini adalah:

1. Ideal M-kanselasi dan modul kanselasi adalah generalisasi atau perumuman dari ideal kanselasi. Sehingga jika diketahui suatu modul M adalah modul kanselasi dan ideal A adalah ideal M-kanselasi maka otomatis ideal A juga adalah ideal kanselasi.
2. Syarat perlu dan syarat cukup suatu ideal $A = < x >$ adalah ideal M-kanselasi jika dan hanya jika elemen pembangun ideal tersebut adalah elemen regular atau bukan elemen pembagi nol dan syarat perlu dari ideal kanselasi adalah ideal M-kanselasi merupakan generalisasi dari karakretistik ideal kanselasi pada Teorema 1.

Selain itu beberapa sifat ideal M-kanselasi ini juga dapat dijadikan dasar untuk penelitian syarat cukup suatu ideal kanselasi merupakan ideal M-kanselasi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] E.I.Wijayanti and S.Wahyuni, Ideal Utama dan Daerah Euclid, Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jurusan Matematika. Program Studi S1 Matematika, 2013.

[2] R.Glimer, Multiplicative Ideal Theory,, New York: Marcel Dekker, 1972.

[3] R. Wisbauer, Foundation of Module and Ring Theory, Gordon and Breach: Science Publishers, 1991.

[4] E. Wattimena, Beberapa Syarat Perlu dan Syarat Cukup Modul Komultiplikasi, Ambon, Maluku: Universitas Pattimura. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Jurusan Matematika, 2018.

[5] N. &. A. M. A.G, "Weak Cancellation Modules," vol. 37, pp. 73-82, 1997.

[6] A. &. M. R. D.D, "A Characterization Of Cancellation Ideals," vol. 125, pp. 2853-2854, 1997.

[7] P. N. &. S. Yassemi, "M-Cancellation Ideals," vol. 40, pp. 259-263, 2000.