

Konferensi Nasional MATEMATIKA 20 21



PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX
Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by
IndoMS



Organized by
Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

“Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0”

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

@Hak Cipta dilindungi Undang-undang

e-ISSN: 2829-3770

DOI issue: <https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX>

Dipublikasikan online pada:

Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:



Mei 2022

Editor:

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si, M.Si, Berny P. Tomasouw, S.Si, M.Si,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si, M. I. Tilukay, S.Si, M.Si, Monalisa E. Rijoly, S.Si, M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si, M.Si, M. B. Mananggal, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si, M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si, M.Si. Vicardy Kempa, S.Si, M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si, M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si, M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si, M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumulun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

Halaman Judul	i
Tim Reviewer	ii
Kata Pengantar	iii
Susunan Panitia KNM XX	iv
Daftar Isi	vii

ALJABAR

KLASIFIKASI TITIK KRITIS POLINOMIAL DUA VARIABEL BERDERAJAT TIGA Afif Humam	1 – 8
KAJIAN KEKUATAN \mathbb{Z} - MODUL \mathbb{Q} SEBAGAI INSPIRASI MUNCULNYA KONSEP DAN SIFAT DALAM TEORI MODUL Sri Wahyuni, Yunita Septriana Anwar, I Putu Yudi Prabhadika	9 – 14
GRAF PEMBAGI NOL DARI RING KOMUTATIF Maria Vianney Any Herawati	15 – 20
IDEAL TAK TEREDUKSI KUAT ATAS SEMIRING KOMUTATIF Fitriana Hasnani, Nikken Prima Puspita	21 – 26
BATAS ATAS PADA NORM – TAK HINGGA DARI INVERS MATRIKS NEKRASOV Eddy Djauhari	27 – 32
KOREPRESENTASI KOALJABAR $F[G]$ Na'imah Hijriati, Indah Emilia Wijayanti	33 – 40
HUBUNGAN SIFAT BERSIH PADA RING, MODUL, KOMODUL DAN KOALJABAR Nikken Prima Puspita, Indah Emilia Wijayanti, Budi Surodjo	41 – 50
KONTRAKSI PERTINGKATAN PADA PERTINGKATAN PAULI $\mathfrak{S}\mathfrak{L}(N, \mathbb{C})$ Reynald Saputra, Gantina Rachmaputri	51 – 60

ANALISIS

BUKTI ALTERNATIF INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG LEBESGUE DENGAN EKSPONEN PEUBAH Dina Nur Amalina dan Denny Ivanal Hakim	61 – 66
SEGITIGA TITIK CIRCUMCENTER PADA MODIFIKASI TEOREMA NAPOLEON Yunisa Fadhilah Hartati, Mashadi	67 – 76
FUNGSI SIMETRI TERHADAP TITIK (a, b) DAN BEBERAPA SIFATNYA Firdaus Ubaidillah	77 – 82
INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG MORREY-ADAMS DAN OPERATOR MAKSIMAL FRAKSIONAL Daniel Salim, Moch. Taufik Hakiki, Denny Ivanal Hakim	83 – 90
PENDEKATAN KALKULUS HIDA UNTUK PROSES HERMITE Herry Pribawanto Suryawan	91 – 98
KETAKSAMAAN HARDY DI RUANG HERZ HOMOGEN Pebrudal Zanu, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi1	99 – 106
OPERATOR KANTOROVICH PADA RUANG MORREY DIPERUMUM Mu'afa Purwa Arsana, Denny Ivanal Hakim	107 – 114
PERLUASAN DEFINISI RATA-RATA VIA TEOREMA NILAI RATA-RATA Mochammad Idris	115 – 124
SISTEM EIGEN OPERATOR LAPLACE BERBASIS RUAS PADA SUATU POHON KUANTUM Moh. Januar I. Burhan, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi	125 – 134

SUKU BANYAK BERNSTEIN DAN OPERATOR KANTOROVICH UNTUK BEBERAPA FUNGSI YANG TIDAK KONTINU	135 – 142
Reinhart Gunadi, Denny I. Hakim	
KETERBATASAN OPERATOR TIPE VOLTERRA PADA RUANG MORREY ANALITIK $L_{p,\lambda}$	585 - 590
Moch Taufik Hakiki, Wono Setya Budhi, dan Denny Ivanal Hakim	
KOMBINATORIK	
PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF SIPUT DAN GRAF UBUR-UBUR	143 – 148
Kevin Akbar, Kiki Ariyanti Sugeng	
DIMENSI METRIK LOKAL PADA GRAF FLOWER DAN GRAF GEAR KORONA GRAF LINTASAN	149 – 154
Salma Fauziyah Ashim, Tri Atmojo Kusmayadi, Titin Sri Martini	
PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF LILIN	155 – 160
Rizqi Rachmadhani, Kiki Ariyanti Sugeng	
PELABELAN HARMONIS PADA GRAF SEGITIGA BELAH KETUPAT VARIASI LM_n	161 – 164
Evi Maharani, Kurniawan Atmadja	
PEWARNAAN SIMPUL r – DINAMIS PADA GRAF TERATAI T_n	165 – 170
Audi Fierera, Kiki A. Sugeng	
SIFAT-SIFAT GRAF CAYLEY GRUP S_n	171-176
Afifan Hadi, Kiki Ariyanti Sugeng	
PENDIDIKAN MATEMATIKA	
LKPD BERBASIS PENEMUAN TERBIMBING BERBANTUAN ALAT PERAGA PADA MATERI LUAS PERMUKAAN DAN VOLUME PRISMA DAN LIMAS	177 – 182
Fithroh Nafa Dzillah, Latifah Mustofa Lestyanto	
PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA DARING BERBASIS MODEL PENEMUAN TERBIMBING MENGGUNAKAN LIVEWORKSHEETS PADA MATERI PRISMA DAN LIMAS	183 – 188
Sania Sururul Khususna, Latifah Mustofa Lestyanto, Eddy Budiono	
PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA BERBASIS MASALAH BERBANTUAN GOOGLE FORM UNTUK PEMAHAMAN KONSEP SISWA KELAS VII SMP PADA MATERI SEGITIGA DAN SEGIEMPAT	189 – 194
Herlin Oktavita, Latifah Mustofa Lestyanto2	
EKSPLORASI ETNOMATEMATIKA PADA GELANG MANIK-MANIK KHAS DAYAK KALIMANTAN SEBAGAI SUMBER PENYUSUNAN LKPD	195 – 206
Silvia	
ANALISIS KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIS SISWA DENGAN PEMBELAJARAN MODEL BRAIN BASED LEARNING BERBASIS LEARNING MANANGEMENT SYSTEM	207 – 214
N. R. Mumtaz, M. Asikin	
PENGEMBANGAN ASESMEN ALTERNATIF DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA KONTEKS LINGKUNGAN LAHAN BASAH UNTUK SISWA TINGKAT SMP/MTS	215 – 222
Muhammad Rizal, Noor Fajriah, Agni Danaryanti	
MATERI PENGAYAAN TEORI BILANGAN DASAR DI SEKOLAH DASAR	223-228
Awanga Dijayangrana, Hilda Assiyatun	
KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS TULIS MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH VOLUME BENDA PUTAR MELALUI MODEL PERKULIAHAN KOLABORATIF	229 – 236
Fadhila Kartika Sari, Anies Fuady	
PERAN PENULISAN JURNAL DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA SECARA DARING DI MASA PANDEMI COVID-19	237 – 244

Gusti Firda Khairunnisa, Frida Siswiyanti	
ANALISIS KRUSKAL WALLIS UNTUK MENGETAHUI TINGKAT KOSENTRASI BELAJAR MAHASISWA BERDASARKAN PROGRAM STUDI	245 – 250
Venessa Y. A. Brabar, Grace A. V. Hikoyabi, Agustinus Langowuyo	
ANALISIS PENGARUH PEMANFAATAN INTERNET TERHADAP MINAT BELAJAR MAHASISWA PRODI STATISTIKA	251 – 258
Mariana Tanawani, Meilani Yarangga, dan Agustinus Langowuy	
PENGARUH PROSES BELAJAR MENGAJAR LURING DAN DARING TERHADAP HASIL BELAJAR MAHASISWA JURUSAN MATEMATIKA ANGAKATAN 2018 FMIPA UNIVERSITAS CENDERAWASIH	259 – 264
Dewi Rahmawati, Tiara A. Nadapdap, Agustinus Langowuyo	
PENILAIAN ESAI MENGGUNAKAN MODEL PEMBELAJARAN MESIN	265 – 270
Farah Qotrunnada, Marcus Wono Setya Budhi, Hilda Assiyatun	
PENGEMBANGAN PERANGKAT PEMBELAJARAN BERBASIS ETNOMATEMATIKA BUDAYA MASYARAKAT NEGERI TULEHU PADA MATERI SEGIEMPAT DAN SEGITIGA UNTUK SISWA DI KELAS VII MTS NEGERI I MALUKU TENGAH.	271 – 276
Heni Rahim, W. Mataheru, J. Takaria	
PENERAPAN FUZZY LINEAR PROGRAMMING UNTUK OPTIMASI PRODUKSI TAHU (STUDI KASUS DI DESA TANJUNGREJO KABUPATEN JEMBER)	277 – 284
Anisa Wahyu Illahi, Agustina Pradjaningsih, Abduh Riski	
PENENTUAN SOLUSI FISIBEL AWAL MASALAH TRANSPORTASI DENGAN MINIMUM DEMAND METHOD	285 – 292
Ulniyatul Ula, Siti Khabibah, Robertus Heri S.U	
OPTIMALISASI RUTE DAN PENJADWALAN PENGANGKUTAN SAMPAH DENGAN METODE INSERTION HEURISTIC DAN INTRA- ROUTE IMPROVEMENT (STUDI KASUS: UNIVERSITAS BRAWIJAYA MALANG)	293 – 298
Fara El Nandhita Pratiwi	
MODEL MATEMATIS RUTE WISATA DI RIAU DENGAN MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN GOL	299 – 312
Ihda Hasbiyati, Hasriati, T. P. Nababan	

MATEMATIKA TERAPAN

MODEL SUSCEPTIBLE INFECTED RECOVERED (SIR) PADA DEMAM BERDARAH DENGUE (DBD)	313 – 320
Oscar Andhry Barata, Rahmat, Rengga Nanda Pramudya	
ANALISA PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE FRAKSIONAL NUMERIK MENGGUNAKAN METODE EULER DAN APLIKASINYA	321 – 326
Leli Deswita, Syamsudhuha, Asral. M	
TERAPAN FUNGSI SIGMOID UNTUK MENENTUKAN NILAI MAKSIMAL KOEFISIEN GAYA ANGKAT DAN SUDUT STALL PADA KURVA LINEAR C_L TERHADAP α	327 – 334
Angga Septiyana, Singgih Satrio W, Fuad Surastyo P, Try Kusuma Wardana, Ardian Rizaldi, Novita Atmasari, Eries Bagita Jayanti, Prasetyo Ardi P	
IMPLEMENTASI DEEP LEARNING UNTUK KLASIFIKASI GAMBAR MENGGUNAKAN CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORK (CNN) PADA BATIK SASAMBO	335 – 340
Muna Malika, Edy Widodo	

STATISTIKA

PENERAPAN MODEL SPACE TIME AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (STARI(1,1,1)) PADA DATA NTP TANAMAN PANGAN DARI TIGA PROVINSI DI PULAU JAWA	341 - 350
Fajriatus Sholihah, Kartika Sari, Budi Nurani Ruchjana, Toni Toharudin	
ANALISIS KORESPONDENSI BERGANDA UNTUK MENGETAHUI INDIKATOR-INDIKATOR YANG MEMPENGARUHI KEJADIAN LOW BACK PAIN PADA KUSIR	351 - 358

KUDA/DELMAN DI KOTA CIMAH I TAHUN 2019	
Dhita Diana Dewi, Fajriatus Sholihah, Rosa Rosmanah, Lucy Fitria Dewi, Mochamad Yudhi Afrizal, Irlandia Ginanjar	
PROSES POISSON NON HOMOGEN DAN PENERAPANNYA PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT	359 – 362
Viona Prisyella Balqis, Muhammad Herlambang Prakasa Yudha, Budi Nurani Ruchjana	
PENERAPAN DISTRIBUSI STASIONER RANTAI MARKOV PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT	363 – 370
Tubagus Robbi Megantara, Ayun Sri Rahmani, Budi Nurani Ruchjana	
SPATIAL CLUSTER ING DENGAN METODE SKATER (K'LUSTER ANALYSIS BY TREE EDGE REMOVAL) UNTUK PENGELOMPOKAN SEBARAN COVID-19 DI KABUPATEN TULUNGAGUNG	371 – 380
Danang Ariyanto, Henny Pramodyo, Novi Nur Aini	
ANALISIS KLASTER KABUPATEN/KOTA INDONESIA BERDASARKAN INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DENGAN MODEL MIXTURE SKEW-T	381 – 388
Kristoforus Exelsis Pratama, Irwan Susanto, Yuliana Susanti	
ANALISIS INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DI KABUPATEN BURU SELATAN DENGAN MENGGUNAKAN REGRESI LINIER BERGANDA	389 – 396
Muhidin Jariyah, Inayah. P. F. Solong, Juan C. S. Jamco	
TINJAUAN KEPUTUSAN HIPOTESA FUZZY BERBASIS P-VALUE FUZZY (STUDI KASUS DATA COVID-19 DI NUSA TENGGARA BARAT)	397 – 404
Wahidaturrahmi	
PENERAPAN METODE AUTO SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS PADA PERAMALAN DATA INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DI INDONESIA	405 – 410
Andreas Reza Chrisantama*, Winita Sulandari, Sugiyanto	
PERAMALAN JUMLAH PRODUKSI PERIKANAN DI KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE PEMULUSAN EKSPONENSIAL	411 – 418
Asrul Irfanullah, Claudia Sumanik, Romy Makatita	
ANALISIS PENGARUH STRUKTUR KONSUMSI AKHIR RUMAH TANGGA BERDASARKAN KOMPONEN PENGELUARAN KABUPATEN BURU SELATAN PERIODE 2015 – 2019 DENGAN RAKL	419 – 424
Nikita A. Putiray, Dea M. Tuhumury, Angel M.P. Manuputty	
EKSPLORASI SISA USIA BEARING MENGGUNAKAN DISTRIBUSI WEIBULL	425 – 430
Sutawanir Darwis, Nusar Hajarisman, Suliadi, Achmad Widodo	
PENERAPAN MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED MOVING AVERAGE (VARIMA) UNTUK PRAKIRAAN INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DAN KURS RUPIAH TERHADAP USD	431 – 442
Ani Pertiwi, Lucy Fitria Dewi, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana	
PENGELOMPOKKAN JUMLAH PENDUDUK KABUPATEN BURU SELATAN BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA TAHUN 2018 DENGAN ALGORITMA K- MEANS	443 – 450
Samin Radjid, Nadia Istifarin, Meylani Tuasella	
PENERAPAN METODE ARIMAX PADA PERAMALAN PRODUKSI DAGING SAPI DI SUKOHARJO	451 – 458
Fitrian Nur Ardyansyah, Winita Sulandari, Sugiyanto	
ANALISIS KEPUASAN DAN POSITIONING SELLER E-MARKETPLACE DENGAN MENGGUNAKAN IMPORTANCE PERFORMANCE ANALYSIS DAN BILOT	459 – 464
Farah Dibah, Dwi Endah Kusri	
KLASTERISASI LOKASI PASAR KABUPATEN BANYUMAS GUNA MEMPERMUDAH UPTD DALAM MENGELOLA KELAS PASAR	465 – 470
Pradini Nurul Safitri, Abdullah Ahmad Dzikrullah	

PENGARUH MOTIVASI INTRINSIK DAN KEPUASAN KERJA TERHADAP ORGANIZATIONAL CITIZENSHIP BEHAVIOR	471 – 476
Diya Kasih Puspitasari, Dwi Endah Kusrini	
KLASTERING JUMLAH PENDUDUK BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA KECAMATAN LEKSULA TAHUN 2018 DENGAN MENGGUNAKAN METODE ALGORITMA K-MEANS	477 – 484
Morensi T. Risakotta, Rensya Siwalette, Rola E. Leasa	
PERAMALAN DENGAN METODE SIMPLE MOVING AVERAGE DAN DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING BROWN (STUDI KASUS: JUMLAH CURAH HUJAN DAN JUMLAH HARI HUJAN KABUPATEN BURU SELATAN)	485 – 494
Apriano R. Narahawarin, Ravensky Silangen, Rahania Patiekon	
PERAMALAN GARIS KEMISKINAN KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING DARI HOLT	495 – 502
Ade Irma La Murdani, Intan Gainau, Unique Resiloy	
ANALISIS PERBEDAAN PENDAPATAN TOKO WALET MAS SEBELUM DAN SESUDAH PANDEMI COVID-19 DENGAN METODE MANN-WHITNEY	503 – 508
Marselina Ema Koten, Yunida Kurniasih, Agustinus Langowuyo	
ANALISIS PENGARUH BELANJA DAERAH, JUMLAH PENDUDUK, DAN PDRB TERHADAP PENDAPATAN DAERAH DI KABUPATEN BURU SELATAN TAHUN 2013-2020	509 – 516
Dephie Latumahina, Martje Riry, Olfen Sabono	
UJI KECOCOKAN DISTRIBUSI RAYLEIGH BIVARIAT MENGGUNAKAN UJI KOLMOGOROV-SMIRNOV BIVARIAT PADA DATA HASIL PERTANDINGAN PERSIB BANDUNG	517 – 522
Wulan Jati Nuraya, Aceng Komarudin Mutaqin	
MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) UNTUK PERAMALAN BANYAKNYA KASUS TERKONFIRMASI DAN KASUS SEMBUH COVID-19 DI INDONESIA	523 – 532
Sri Indra Maiyanti, Mahrudinda, Al Fataa W. Haq, Budi Nurani Ruchjana	
MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) DAN PENERAPANNYA PADA DATA PERKEMBANGAN HARGA ECERAN BERAS DI TIGA IBU KOTA PROVINSI WILAYAH PULAU JAWA	533 – 544
Zulfa Hidayah Satria Putri, Asri Yuniar, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana	
PENERAPAN METODE REGRESI LINEAR BERGANDA UNTUK MELIHAT PENGARUH JUMLAH PENDUDUK DAN LUAS WILAYAH TERHADAP JUMLAH PENGGUNA LISTRIK DI KECAMATAN AMBALAU KABUPATEN BURU SELATAN	545 – 552
Fadly Ode, Nur Statib J, Elsy Malwewar	
ANALISIS TINGKAT KEGEMARAN AYAM GEPUK PAK GEMBUS DARI BERBAGAI JENIS PAKET MELALUI PENDEKATAN UJI STATISTIK	553 – 558
Maharani Tiara Pramuditya, Evan Claude Boudewijn Kainama, Agustinus Langowuyo	
SIMULASI PERGERAKAN HARGA SAHAM MENGGUNAKAN MODEL GERAK BROWN GEOMETRIK DENGAN R STUDIO	559 – 564
Ahmad Fawaid Ridwan, Rizki Apriva Hidayana, Budi Nurani Ruchjana	
PENAKSIRAN RATA-RATA <i>EXCESS CLAIM</i> PESERTA DARI PERUSAHAAN PEMBERI LAYANAN KESEHATAN PT. X	565 – 572
Wildan*, Indah Permatasari, and Aceng Komarudin Mutaqin	
PENGARUH SELF EFFICACY DAN MOTIVASI BELAJAR TERHADAP HASIL BELAJAR SISWA KELAS VII SMP NEGERI 3 GANTUNG	573 – 584
Alperu, Nerru Pranuta Murnaka*, Indra Bayu M, Andy Wahyu H	

KETAKSAMAAN HARDY DI RUANG HERZ HOMOGEN

Pebrudal Zanu*, Yudi Soeharyadi, and Wono Setya Budhi

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung,
Indonesia

*e-mail: pebrudalzanu@students.itb.ac.id

Abstrak. Ruang Herz pertama kali diperkenalkan untuk mengidentifikasi hasil transformasi Fourier dari kelas fungsi Lipschitz. Lu dan Yang membedakan ruang ini menjadi dua jenis berdasarkan dekomposisi spasial pada $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dan \mathbb{R}^n . Dekomposisi pada $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ berupa anulus 2 berpangkat. Sedangkan, pada \mathbb{R}^n berupa bola satuan dan anulus 2 berpangkat. Ruang Herz tersebut dinamakan dengan ruang Herz homogen dan non-homogen. Dalam makalah ini akan dibuktikan keterbatasan operator Hardy tipe Samko dan dualnya pada ruang Herz homogen. Pembuktian terlebih dahulu melalui kasus $1 < q \leq p < \infty$. Untuk kasus $1 < p \leq q < \infty$, bukti dilanjutkan dengan konsep dualitas.

Kata kunci: Ruang Herz, operator Hardy, dan dualitas

1 PENDAHULUAN

Hasil transformasi Fourier dari fungsi di L^p untuk $1 \leq p \leq 2$ adalah fungsi di $L^{p'}$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, dalam hal ini jika $p = 1$ maka $p' = \infty$. Hasil ini dikenal dengan ketaksamaan Hausdorff–Young di ruang Lebesgue yang bisa dilihat dalam [1, hal.114]. Ketaksamaan Hausdorff–Young tersebut dapat dibuktikan melalui interpolasi Riesz-Thorin. Herz memperkenalkan sebuah ruang sebagai ruang hasil peta transformasi Fourier dengan domainnya merupakan kelas fungsi Lipschitz [2, Proposisi 3.1], sekarang dikenal sebagai ruang Herz.

Dewasa ini, perkembangan ruang Herz sangat pesat baik sebagai domain maupun hasil peta dari operator. Lu dan Yang [3] membedakan dua jenis ruang Herz berdasarkan cara kita mendekomposisi domain spasial $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dan \mathbb{R}^n . Yang pertama, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ didekomposisi atas anulus/cincin $B_j := \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} < |x| \leq 2^j\}$. Dalam dekomposisi kedua \mathbb{R}^n terbagi atas $D \cup_{j \in \mathbb{N}} B_j$, dengan $D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. Dekomposisi yang pertama dimaksudkan untuk melihat perilaku fungsi di dekat singularitas 0, sedangkan dekomposisi kedua dimaksudkan untuk fungsi yang singularitasnya jauh dari 0. Ruang dengan dekomposisi pertama disebut sebagai ruang Herz homogen, sedangkan yang kedua disebut ruang Herz tak homogen.

Ruang Herz didefinisikan menggunakan 3 parameter yaitu α, p, q dengan $0 < p, q < \infty$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Pada ruang Herz homogen kuasi-norma dikonstruksi melalui kuasi-norma barisan di $\ell^q(\mathbb{Z})$ dengan bobot setiap sukunya adalah $2^{\alpha q}$. Suku-suku barisan ini adalah $\|f\|_{L^p(B_j)}$ untuk setiap $j \in \mathbb{Z}$. Pada ruang Herz non-homogen, kuasi-norma dikonstruksi melalui kuasi-norma barisan di $\ell^q(\mathbb{N}_0)$ dengan bobot setiap sukunya adalah $2^{j\alpha q}$. Suku-suku barisan ini adalah $\|f\|_{L^p(\tilde{B}_j)}$ untuk setiap $j \in \mathbb{N}_0$, dengan $\tilde{B}_0 = D$ dan $\tilde{B}_j = B_j$ untuk setiap $j \in \mathbb{N}$.

Deskripsi kuasi-norma ruang Herz di atas dapat dituliskan dalam bentuk yang sederhana melalui definisi di bawah ini. Misalkan berturut-turut $\chi_j := \chi_{B_j}$ dan $\tilde{\chi}_j = \chi_{\tilde{B}_j}$ dengan χ_E adalah fungsi karakteristik pada E . Misalkan $0 < p, q < \infty$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$

1. Ruang Herz homogen $\dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai berikut

$$\dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

dengan

$$\|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)} := \left\| \left\{ 2^{\alpha j} \|f \chi_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\} \right\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{\alpha j q} \|f \chi_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

dan $L_{loc}^p(\Omega) := \{f \in L^p(K), \text{ untuk setiap } K \subseteq \Omega, K \text{ kompak}\}$.

2. Ruang Herz non-homogen $K_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai berikut

$$K_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

dengan

$$\|f\|_{K_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)} := \left\| \left\{ 2^{\alpha j} \|f \tilde{\chi}_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\} \right\|_{\ell^q(\mathbb{N}_0)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{\alpha j q} \|f \tilde{\chi}_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Perhatikan bahwa $\dot{K}_p^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) = L_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$ dengan $L_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$ merupakan ruang Lebesgue berbobot $|x|^{\alpha p}$. Hal ini terjadi karena $2^{j-1} \leq |x| \leq 2^j$ pada annulus B_j . Selanjutnya, jika $\alpha > 0$ maka $K_p^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \subsetneq L_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$. Untuk melihat ini, misalkan $f(x) = |x|^{-n/p} \chi_{B(0,1)}$ maka $f \in L_p^\alpha(\mathbb{R}^n) \setminus K_p^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$. Kasus yang berbeda, jika $\alpha < 0$ maka $L_p^\alpha(\mathbb{R}^n) \subsetneq K_p^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$. Untuk melihat ini, misalkan $f(x) = |x|^{-\alpha - \frac{n}{p}} \chi_{B(0,1)}$ maka $f \in K_p^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \setminus L_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Secara umum, tidak ada sifat inklusi antara ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dan $\dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$. Misalkan $0 < p, q < \infty$ dan $\alpha > 0$, definisikan $f(x) := \frac{1}{|x|^{ns}} \chi_{\tilde{B}_0}(x)$ dan $g(x) := \frac{1}{|x|^{ns}} \chi_{\tilde{B}_0^c}(x)$ maka $f \in \dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$ dan $g \in L^p(\mathbb{R}^n) \setminus \dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$ ketika $\frac{1}{p} < s < \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n}$. Untuk $\alpha > 0$, diperoleh $\dot{K}_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n) = K_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$ [3, Proposisi 1.1.2].

Misalkan $\beta \in \mathbb{R}$ dan f merupakan fungsi terukur. Operator Hardy dalam Samko [4] memetakan fungsi f dengan aturan berikut

$$H^\beta f(x) = \frac{1}{|x|^{n-\beta}} \int_{|y| < |x|} \frac{f(y)}{|y|^\beta} dy$$

Dapat dilihat bahwa operator Hardy tersebut adalah rata-rata dari fungsi $|x|^{-\beta} f \cdot |^\beta$ pada selang $|y| \leq |x|$ untuk sebarang $x \in \mathbb{R}^n$. Kemudian dapat dibuktikan dualnya adalah

$$\tilde{H}^\beta f(x) = \frac{1}{|x|^\beta} \int_{|y| > |x|} \frac{f(y)}{|y|^{n-\beta}} dy,$$

dalam artian $\langle Hf, g \rangle = \langle f, \tilde{H}g \rangle$.

Pada makalah ini, kami membuktikan keterbatasan operator Hardy dan dualnya pada ruang Herz homogen. Untuk kasus $1 < q \leq p < \infty$ pembuktian terinspirasi melalui ide yang Karapetians [5] dalam menunjukkan keterbatasan operator integral di ruang Lebesgue. Kernel dari operator tersebut memenuhi homogen derajat $-n$ dan invarian terhadap rotasi. Untuk kasus $1 < p \leq q < \infty$, bukti dilanjutkan melalui konsep dualitas.

Hasil ketaksamaan Hardy dan dualnya pada ruang Herz homogen dengan hasil sebagai berikut.

Teorema 1.1. *Misalkan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $1 < p, q < \infty$. Jika $\frac{n}{p} + \alpha + \beta < n$ maka terdapat konstanta $C > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $f \in \dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)$ berlaku*

$$\|H^\beta f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Untuk kasus $\beta = 0$, keterbatasan telah dibuktikan oleh Chen, dkk [6] melalui kasus khusus dari operator Hausdorff. Untuk ruang berdimensi-1 bisa dilihat pada Yee dan Ho [7] sebagai kasus khusus dari ruang Herz–Morrey. Hal yang baru dalam makalah ini adalah keterbatasan untuk nilai β yang lebih luas.

Teorema 1.2. *Misalkan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $1 < p, q < \infty$. Jika $0 < \frac{n}{p} + \alpha - \beta$ maka terdapat konstanta $C > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $f \in \dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)$ berlaku*

$$\|\tilde{H}^\beta f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Sifat-sifat yang akan digunakan dalam makalah ini adalah sebagai berikut

- ketaksamaan Hölder di ruang Herz homogen dalam [3, Proposition 1.1.4]: Misalkan $0 < p_i < \infty$ dan $a_i \in \mathbb{R}$ untuk $i = 1, 2$. Jika

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

dan $f_i \in \dot{K}_{p_i}^{\alpha_i, q_i}(\mathbb{R}^n)$ untuk $i = 1, 2$ maka $f_1 f_2 \in \dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)$ dan

$$\|f_1 f_2\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f_1\|_{\dot{K}_{p_1}^{\alpha_1, q_1}(\mathbb{R}^n)} \|f_2\|_{\dot{K}_{p_2}^{\alpha_2, q_2}(\mathbb{R}^n)}.$$

- Dual dari ruang Herz: Misalkan $1 < p, q < \infty$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, dual dari $\dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)$ adalah $\dot{K}_{p'}^{-\alpha, q'}(\mathbb{R}^n)$ dalam [3].
- Misalkan $0 < r \leq 1$. Untuk sebarang barisan positif $\{u_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ berlaku

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_j| \leq \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \quad (1)$$

Untuk melengkapi pendahuluan ini, diberikan notasi yang digunakan dalam penulisan makalah ini. Misalkan $A, B > 0$

- A proporsional di atas dengan B , ditulis $A \lesssim B$ berarti terdapat $C_1 > 0$ sedemikian sehingga $A \leq C_1 B$.
- A proporsional dengan B , ditulis $A \sim B$ berarti $A \lesssim B$ dan $B \lesssim A$.

Makalah ini disusun dalam urutan sebagai berikut: pada Bagian 1 adalah pendahuluan berisi tentang pengenalan objek, notasi, sifat-sifat dan kebaruan dalam penelitian ini. Pada Bagian 2 menunjukkan keterbatasan operator Hardy dan dualnya pada ruang Herz homogen untuk kasus $1 < q \leq p < \infty$. Pada Bagian 3 menunjukkan keterbatasan operator Hardy dan dualnya pada ruang Herz homogen untuk kasus $1 < p \leq q < \infty$. Riset ini didukung oleh hibah riset P2MI ITB 2021.

2 Bukti Untuk Kasus $1 < q \leq p < \infty$

2.1 Bukti Teorema 1.1

Untuk x tetap, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} |H^\beta f(x)| &\leq \frac{1}{|x|^{n-\beta}} \int_{|y| \leq |x|} \frac{|f(y)|}{|y|^\beta} dy \\ &= \int_{|y| \leq |x|} \frac{1}{|x|^{\frac{n-\beta}{p'}} |y|^{\frac{n-\beta}{p'} + \frac{\alpha+\beta}{p'}}} \frac{|y|^{\frac{n}{pp'} + \frac{\alpha}{p'} - \frac{\beta}{p}}}{|x|^{\frac{n-\beta}{p}}} |f(y)| dy. \end{aligned}$$

Dengan ketaksamaan Hölder diperoleh

$$\begin{aligned} |H^\beta f(x)| &\leq \left(\int_{|y| \leq |x|} \frac{1}{|x|^{n-\beta} |y|^{\frac{n}{p} + \alpha + \beta}} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{|y| \leq |x|} \frac{|y|^{\frac{n}{p'} + \frac{\alpha p}{p'} - \beta}}{|x|^{n-\beta}} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim |x|^{-\frac{n}{pp'} - \frac{\alpha}{p'}} \left(\int_{|y| \leq |x|} \frac{|y|^{\frac{n}{p'} + \frac{\alpha p}{p'} - \beta}}{|x|^{n-\beta}} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Selanjutnya pada anulus B_j diperoleh

$$\|(H^\beta f)\chi_j\|_{L^p} \lesssim \left(\int_{B_j} |x|^{-\frac{n}{p'} - \frac{\alpha p}{p'}} \int_{|y| \leq |x|} \frac{|y|^{\frac{n}{p'} + \frac{\alpha p}{p'} - \beta}}{|x|^{n-\beta}} |f(y)|^p dy dx \right)^{\frac{1}{p}} := V_j^{\frac{1}{p}}.$$

Dengan melakukan perubahan urutan pengintegralan dan untuk setiap $y \in B_k$ berlaku $|y| \sim 2^k$ maka diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} V_j &\leq \int_{|y| \leq 2^j} |y|^{\frac{n}{p'} + \frac{\alpha p}{p'} - \beta} |f(y)|^p \int_{2^{j-1} < |x| \leq 2^j} |x|^{-\frac{n}{p'} - \frac{\alpha p}{p'} - n + \beta} dx dy \\ &\lesssim \int_{|y| \leq 2^j} |y|^{\frac{n}{p'} + \frac{\alpha p}{p'} - \beta} |f(y)|^p (2^j)^{-\frac{n}{p'} - \frac{\alpha p}{p'} + \beta} dy \\ &\lesssim \sum_{k=-\infty}^j (2^{k-j})^{\frac{n}{p'} - \alpha - \beta} 2^{k\alpha p} 2^{-j\alpha p} \|f\chi_k\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

Karena ketaksamaan (1) dan $\left(\frac{n}{p'} - \alpha - \beta\right) \frac{q}{p} > 0$ diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \|H^\beta f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}} &\lesssim \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{j\alpha q} \sum_{k=-\infty}^j (2^{k-j})^{\left(\frac{n}{p'} - \alpha - \beta\right) \frac{q}{p}} 2^{k\alpha q} 2^{-j\alpha q} \|f\chi_k\|_{L^p}^q \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} (2^{k-j})^{\left(\frac{n}{p'} - \alpha - \beta\right) \frac{q}{p}} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|_{L^p}^q \right]^{\frac{1}{q}} \lesssim \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}}. \end{aligned} \quad (2)$$

2.2 Bukti Teorema 1.2

Untuk x tetap, perhatikan bahwa

$$|\tilde{H}^\beta f(x)| \leq \frac{1}{|x|^\beta} \int_{|y| > |x|} \frac{|f(y)|}{|y|^{n-\beta}} dy = \int_{|y| > |x|} \frac{1}{|x|^{\frac{\beta}{p'}} |y|^{\frac{n-\beta}{p'}} |y|^{\frac{n}{pp'} + \frac{\alpha}{p'}}} |f(y)| dy.$$

Dengan ketaksamaan Hölder diperoleh

$$\begin{aligned} |\tilde{H}^\beta f(x)| &\leq \left(\int_{|y| > |x|} \frac{1}{|x|^\beta |y|^n |y|^{\frac{n}{p} + \alpha - \beta}} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{|y| > |x|} \frac{|y|^{\frac{n}{p'} + \frac{\alpha p}{p'}}}{|x|^\beta |y|^{n-\beta}} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim |x|^{-\frac{n}{pp'} - \frac{\alpha}{p'}} \left(\int_{|y| > |x|} \frac{|y|^{\frac{n}{p'} + \frac{\alpha p}{p'} - n + \beta}}{|x|^\beta} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Selanjutnya pada anulus B_j diperoleh

$$\|(\tilde{H}^\beta f)\chi_j\|_{L^p} \lesssim \left(\int_{B_j} |x|^{-\frac{n}{p'} - \frac{\alpha p}{p'} - \beta} \int_{|y| > |x|} |y|^{\frac{n}{p'} + \frac{\alpha p}{p'} - n + \beta} |f(y)|^p dy dx \right)^{\frac{1}{p}} := W_j^{\frac{1}{p}}.$$

Dengan melakukan perubahan urutan pengintegralan dan untuk setiap $y \in B_k$ berlaku $|y| \sim 2^k$ maka diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} W_j &\leq \int_{|y| > 2^{j-1}} |y|^{\frac{n}{p'} + \frac{\alpha p}{p'} - n + \beta} |f(y)|^p \int_{2^{j-1} < |x| \leq 2^j} |x|^{-\frac{n}{p'} - \frac{\alpha p}{p'} - \beta} dx dy \\ &\lesssim \int_{|y| > 2^{j-1}} |y|^{\frac{n}{p'} + \frac{\alpha p}{p'} - n + \beta} |f(y)|^p (2^j)^{-\frac{n}{p'} - \frac{\alpha p}{p'} + n - \beta} dy \\ &= \sum_{k=j-1}^{\infty} (2^{j-k})^{\frac{n}{p'} + \alpha - \beta} 2^{k\alpha p} 2^{-j\alpha p} \|f\chi_k\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

Serupa dengan (2) diperoleh

$$\|\tilde{H}^\beta f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}} \lesssim \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}}.$$

3 Bukti untuk Kasus $1 < p \leq q < \infty$

Karena $\frac{n}{p} + \alpha + \beta < n$ maka $\frac{n}{p'} - \alpha - \beta > 0$ dan $q' < p'$. Berdasarkan Teorema 1.2 diperoleh \tilde{H}^β terbatas pada $\dot{K}_{p'}^{-\alpha, q'}(\mathbb{R}^n)$. Dengan ketaksamaan Hölder dan dualitas, ambil $f \in \dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} |\langle H^\beta f, g \rangle| &= |\langle f, \tilde{H}^\beta g \rangle| \leq \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)} \|\tilde{H}^\beta g\|_{\dot{K}_{p'}^{-\alpha, q'}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{\dot{K}_{p'}^{-\alpha, q'}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

untuk setiap $g \in \dot{K}_{p'}^{-\alpha, q'}(\mathbb{R}^n)$. Ambil supremum atas g diperoleh

$$\|H^\beta f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{g \neq 0} \frac{|\langle H^\beta f, g \rangle|}{\|g\|_{\dot{K}_{p'}^{-\alpha, q'}(\mathbb{R}^n)}} \lesssim \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Untuk $\tilde{\mathcal{H}}^\beta$ bukti serupa. Dengan Teorema 1.1, ketaksamaan Hölder, dan dualitas diperoleh

$$\|\tilde{H}^\beta f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{\dot{K}_p^{\alpha, q}(\mathbb{R}^n)}.$$

4 KESIMPULAN

Telah dibuktikan keberlakuan ketaksamaan Hardy pada ruang Herz homogen. Bukti tersebut menggunakan cara yang terinspirasi dari Karapetiants dan konsep dualitas pada ruang Herz homogen.

PUSTAKA

- [1] L. Grafakos, *Classical Fourier analysis. Third edition. Graduate Texts in Mathematics.* Springer, New York, 2014.
- [2] C. Herz, *Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms*, J. Math. Mech. **18** (1968), 283-32.
- [3] S. Lu, D. Yang, and G.Hu, *Herz Type Spaces and Their Applications*, Beijing: Science Press, 2008.

- [4] N. Samko, *Integral operators commuting with dilations and rotations in generalized Morrey-type spaces*. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **43.16**(2020): 9416-9434.
- [5] N. Karapetiants, S. Samko, *Equations with Involutive Operators*. Boston: Birkhäuser, 2001.
- [6] J. Chen, D. Fan, J. Li, *Hausdorff operators on function spaces*, *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, **33.4**(2012), 537-556.
- [7] TL. Yee, KP. Ho, *Hardy's inequalities and integral operators on Herz-Morrey spaces*. *Open Mathematics*, **18**(1), (2020), 106-121.

ISSN 2829-3770



9

772829

377007