Konferensi Nasional MATEMATIKA KNM 2021

PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by IndoMS

Organized by Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

"Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0"

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

e-ISSN: 2829-3770
DOI issue: https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX

Dipublikasikan online pada:
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:

Mei 2022

Editor:
Dr. Harmanus Batkunde, S.Si., M.Si., Berny P. Tomasouw, S.Si., M.Si.,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si., M. I. Tilukay, S.Si., M.Si., Monalisa E. Rijoly, S.Si., M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si., M.Si, M. B. Mananggel, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si., M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si., M.Si. Vicardy Kempa, S.Si., M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si., M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si., M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si., M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumalun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

MATEMATIKA TERAPAN

STATISTIKA

https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX.107-114

KNM XX
Universitas Pattimura Ambon, 6-7 Juli 2021

OPERATOR KANTOROVICH PADA RUANG MORREY DIPERUMUM

Mu'afa Purwa Arsana* dan Denny Ivanal Hakim

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Indonesia

*e-mail: muafa.purwa@gmail.com

Abstrak. *Pada makalah ini, kami mengkaji operator Kantorovich pada ruang Morrey diperumum. Kami membahas bukti keterbatasan operator Kantorvich di ruang Morrey diperumum pada interval [0,1], kunci untuk membuktikan keterbatasan operator Kantorvich pada ruang Morrey diperumum adalah dengan menggunakan estimasi operator Kantorovich dengan operator maksimal Hardy-Littlewood. Keterbatasan operator Kantorovich pada ruang Morrey (klasik) telah dibuktikan sebelumnya oleh Burenkov, dkk. Kami juga membahas kekonvergenan operator Kantorovich di ruang Morrey diperumum pada interval* $[0,1]$ *dan memperoleh laju kekonvergenan operator Kantorvich.*

Kata kunci: operator Kantorovich, operator maksimal Hardy-Littlewood. ruang Morrey, ruang Morrey diperumum.

1 LATAR BELAKANG

Suku banyak Bernstein cukup baik dalam menghampiri fungsi kontinu. Dalam hal ini, suku banyak Bernstein digunakan oleh Bernstein dalam bukti konstruktif untuk Teorema Hampiran Weierstrass [1,8]. Tetapi suku banyak Bernstein tidak dapat menghampiri fungsi yang tidak kontinu. Pada tahun 1930, Kantorovich memodifikasi suku banyak Bernstein sehingga diperoleh barisan yang menghampiri sebarang fungsi terintegralkan, yaitu operator Kantorovich [3]. Operator Kantorovich diharapkan dapat mengatasi kelemahan suku banyak Bernstein dalam menghampiri fungsi yang tidak kontinu.

Burenkov dkk telah menunjukkan bahwa operator Kantorovich terbatas seragam di ruang Morrey (klasik) [7]. Burenkov membuktikan kekonvergenan dari peta operator Kantorovich pada ruang Morrey (klasik) melalui dominasi operator maksimal Hardy-Littlewood terhadap operator Kantorovich.

Ruang Morrey diperumum merupakan perluasan dari ruang Morrey, oleh karena itu akan ditinjau keterbatasan dan kekonvergenan operator Kantorovich pada ruang Morrey diperumum.

2 TUJUAN PENELITIAN

Tujuan penelitian ini adalah memberikan bukti bahwa barisan operator Kantorovich konvergen di ruang Morrey diperumum pada interval [0,1].

3 METODOLOGI

Penelitian ini merupakan sebuah kajian studi literatur makalah-makalah yang berkaitan dengan keterbatasan operator maksimal Hardy-Littlewood, keterbatasan seragam operator Kantorovich di ruang Morrey (klasik) [7] dan ruang Morrey diperumum.

4 KAJIAN TEORI

Berdasarkan Teorema Hampiran Weierstrass, suatu fungsi kontinu pada interval $[a, b]$ dapat dihampiri oleh suku banyak. Suku banyak Bernstein menghampiri suatu fungsi f yang kontinu pada interval $[0,1]$ yang merupakan bukti konstruktif Teorema Hampiran Weierstrass.

Definisi 4.1. Misalkan fungsi f kontinu pada $[0,1]$. Notasikan $b_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

Suku banyak Bernstein orde ke-n didefinisikan dengan

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), x \in [0,1].$$

Suku banyak Bernstein konvergen seragam pada interval $[0,1]$ jika $f \in C[0,1]$, [1,8].

Kantorovich memodifikasi suku banyak Bernstein untuk menghampiri fungsi $f \in L^1([0,1])$.

Definisi 4.2. Misalkan fungsi f terintegralkan pada interval $[0,1]$, operator Kantorovich orde ke-n didefinisikan dengan

$$K_n(f)(x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt.$$

Barisan operator Kantorovich $\{K_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke $f \in L^q([0,1])$ untuk $1 \leq q < \infty$ [2,4].

Untuk mempelajari operator Kantorovich pada ruang Morrey digunakan operator maksimal Hardy-Littlewood yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4.3. Operator maksimal Hardy-Littlewood M didefinisikan dengan

$$Mf(x) = \sup_{x\in[a,b]\subset[0,1]} \frac{1}{|b-a|}\int_a^b |f(y)|dy\,.$$

Ruang Morrey pertama kali diperkenalkan oleh C.B. Morrey untuk mempelajari perilaku lokal solusi persamaan diferensial eliptik [5]. Definisi ruang ini diberikan sebagai berikut.

Definisi 4.4. Untuk $1 \leq q \leq p < \infty$, ruang Morrey (klasik) $\mathcal{M}_q^p([0,1])$ adalah himpunan semua (kelas ekuivalen) fungsi $L_{loc}^q([0,1])$ yang memenuhi $\|f\|_{\mathcal{M}_q^p([0,1])} < \infty$ di mana normanya didefinisikan sebagai

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p([0,1])} = \sup_{a<b:[a,b]\subset[0,1]} |b-a|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b |f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Jika $p = q$, maka $\mathcal{M}_q^p([0,1]) = L^p([0,1])$ dan untuk $p > q$ berlaku $L^p([0,1]) \subset \mathcal{M}_q^p([0,1])$.

Operator Kantorovich konvergen ke sebarang fungsi di $L^p([0,1])$[4]. Untuk kekovergenan di ruang Morrey kami meninjau ruang Sobolev-Morrey yang didefiniskan sebagai berikut.

Definisi 4.5. Misalkan $1 \leq q \leq p < \infty$ ruang Morrey Sobolev non-homogen $W^1\mathcal{M}_q^p([0,1])$ didefinisikan sebagai subhimpunan dari ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p([0,1])$ terdiri dari semua fungsi kontinu mutlak pada [0,1] sedemikian sehingga $f' \in \mathcal{M}_q^p([0,1])$ adalah turunan lemah dari $f \in \mathcal{M}_q^p([0,1])$. Ruang ini adalah ruang bernorma dengan norma

$$\|f\|_{W^1\mathcal{M}_q^p([0,1])} := \|f\|_{\mathcal{M}_q^p([0,1])} + \|f'\|_{\mathcal{M}_q^p([0,1])}$$

dan

$$\|f\|_{\dot{W}\mathcal{M}_q^p([0,1])} = \|f'\|_{\mathcal{M}_q^p([0,1])}.$$

Hasil pada paper [7] adalah estimasi titik demi titik untuk orde ke-n operator Kantorovich dengan menggunakan operator maksimal Hardy-Littlewood. Dan hasil selanjutnya adalah keterbatasan seragam operator Kantorovich di ruang Morrey pada interval [0,1] dengan bantuan operator maksimal Hardy-Littlewood. Lebih lanjut, kekonvergenan operator Kantorovich juga diberikan di [7].

5 HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada makalah ini kami mengkaji keterbatasan operator maksimal Hardy-Littlewood pada ruang Morrey diperumum yang memuat hasil pada [7] sebagai kasus khusus.

5.1 Operator Kantorovich di Ruang Morrey Diperumum

Yang perlu diperhatikan pada ruang Morrey diperumum adalah fungsi $\varphi: (0,\infty) \to [0,\infty)$ yang tidak memenuhi $\varphi = 0$, dimana φ adalah fungsi monoton naik dan jika $t^{-\frac{1}{q}}\varphi(t) \geq s^{-\frac{1}{q}}\varphi(s)$ untuk setiap $0 < t \leq s < \infty$. Kumpulan dari φ disebut himpunan $\mathcal{G}_q$. Norma ruang Morrey diperumum diperoleh dengan mengganti peranan fungsi $t^{\frac{1}{p}}$ pada norma ruang Morrey klasik.

Definisi 5.1.1. Ruang Morrey diperumum $\mathcal{M}_q^\varphi([0,1])$ adalah himpunan semua (kelas ekuivalen) fungsi terukur f dengan norma

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])} = \sup_{b>a:[a,b]\subset[0,1]} \varphi(b-a)\left(\frac{1}{|b-a|}\int_a^b |f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Jika $\varphi(t) = t^{\frac{1}{p}}$, maka $\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1]) = \mathcal{M}_q^{p}([0,1])$. Jika φ adalah fungsi konstan, maka $\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1]) = L^{\infty}([0,1])$.

Teorema 5.1.2.[7] Misalkan K_n adalah operator Kantorovich suku ke-n, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan M adalah operator maksimal Hardy-Littlewood, maka ketaksamaan di bawah ini benar untuk setiap $f \in L^1([0,1])$

$$|K_n(f)(x)| \leq Mf(x), x \in [0,1].$$

Teorema 5.1.3.[6] Misalkan $1 < q < \infty$ dan $\varphi \in \mathcal{G}_q$, maka

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])}.$$

Catatan: Notasi "A $\lesssim$ B" menyatakan terdapat konstanta positif C yang tidak bergantung dari A dan B yang memenuhi $A \leq CB$.

Teorema 5.1.4. Misalkan $1 \leq q < \infty$ dan $\varphi \in \mathcal{G}_q$, $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ terbatas seragam pada $\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])$.

Bukti: Untuk kasus $q > 1$, berdasarkan Teorema 5.1.2 dan 5.1.3 diperoleh

$$\|K_n(f)\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])} \leq \|Mf\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])}.$$

Untuk kasus $q = 1$, bukti teorema ini menyadur bukti estimasi serupa yang dibuktikan pada makalah [1] dan menerapkannya pada perhitungan norma ruang Morrey diperumum dari operator Kantorovich. Misalkan a dan b memenuhi $b > a$ dan $[a,b] \subset [0,1]$. Misalkan $a_1 :=$ maks$\{0,2a-b\}$ dan $b_1 := \min\{1,2b-a\}$. Perhatikan bahwa, $b-a \leq b_1 - a_1 \leq 3(b-a)$. Definisikan $f_1 := \chi_{[a_1,b_1]}f$ dan $f_2 := f - f_1$.Berdasarkan keterbatasan operator Kantorovich pada ruang Lebesgue [4] dan Definisi 5.1.1 diperoleh

$$\frac{\varphi(b-a)}{b-a}\|K_n(f_1)\|_{L_1([a,b])} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}_1^{\varphi}([0,1])}. \quad (1)$$

Selanjutnya berdasarkan Teorema 5.1.2 untuk setiap $x \in [a,b]$ berlaku

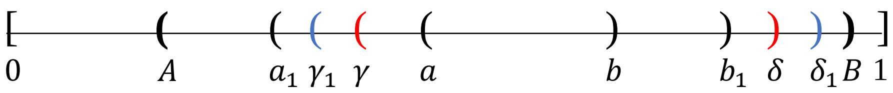
$$|K_n(f_2)(x)| \leq M[f_2](x). \quad (2)$$

Misalkan $\alpha < \beta; x \in [\alpha,\beta] \subset [0,1]$, maka

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta |f_2(y)|dy \leq \sup_{\gamma<\delta;x\in[\gamma,\delta]\subset[0,1];[\gamma,\delta]\not\subset[a_1,b_1]} \frac{1}{\delta-\gamma}\int_\gamma^\delta |f(y)|dy. \quad (3)$$

Misalkan $\gamma_1 = \max\{0,2\gamma-\delta\}, \delta_1 = \min\{1,2\delta-\gamma\}$, maka $\gamma_1 \leq \gamma \leq \delta \leq \delta_1$ dan $\delta_1 - \gamma_1 \leq 3(\delta-\gamma)$. Karena $[\gamma,\delta] \not\subset [a_1,b_1]$ maka $\gamma < a_1$ atau $\delta > b_1$. Dengan sifat simetri asumsikan bahwa $\delta > b_1$ atau $(-\delta < -b_1)$. Karena $[\gamma,\delta] \subset [0,1]$, maka kemungkinannya hanya $b_1 < 1$. Sehingga $b_1 = 2b - a < 1$ atau $(a = 2b - b_1)$. Karena $x \in [\gamma,\delta] \cap [a,b]$, didapat $\alpha < b$. Akibatnya, $2\gamma - \delta < 2b - b_1 = a$ dan $2\delta - \gamma > 2b_1 - b = 3b - 2a \geq b$. Dengan demikian, $[a,b] \subset [2\gamma-\delta, 2\delta-\gamma]$. Karena $[a,b] \subset [0,1]$, maka

$$[\gamma_1,\delta_1] = [2\gamma-\delta, 2\delta-\gamma] \cap [0,1] \supset [a,b] \cap [0,1] = [a,b]. \quad (4)$$



Gambar 1: Ilustrasi garis bilangan.

Berdasarkan (2), (3), dan (4), diperoleh

$$
\begin{aligned}
|K_n(f_2)(x)| &\leq \sup_{\substack{\gamma<\delta;x\in[\gamma,\delta]\subset[0,1];\\ [\gamma,\delta]\not\subset[a_1,b_1]}} \frac{3}{\delta_1-\gamma_1}\int_{\gamma_1}^{\delta_1}|f(y)|dy \\
&\leq \sup_{A,B:[a,b]\subset[A,B]} \frac{3}{B-A}\int_A^B |f(y)|dy.
\end{aligned}
$$

Karena φ monoton naik, maka

$$
\begin{aligned}
\frac{\varphi(b-a)}{b-a}\|K_n(f_2)\|_{L_1([a,b])} &\lesssim \varphi(b-a)\sup_{A,B:[a,b]\subset[A,B]}\frac{1}{B-A}\int_A^B|f(y)|dy \\
&\leq \sup_{A,B:[a,b]\subset[A,B]}\varphi(B-A)\frac{1}{B-A}\int_A^B|f(y)|dy \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{M}_1^{\varphi}([0,1])}. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Dengan menggabungkan (1) dan (5) diperoleh $\|K_n(f)\|_{\mathcal{M}_1^{\varphi}([0,1])} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}_1^{\varphi}([0,1])}$.
Jadi, terbukti bahwa $\|K_nf\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])}$ untuk setiap $1 \leq q < \infty$. ■

Teorema 5.1.5. Misalkan $1 < q < \infty$ dan $\varphi \in \mathcal{G}_q$, maka untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dan $f \in W^1\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])$

$$
\|K_n(f)-f\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])} \lesssim \frac{1}{\sqrt{n}}\|f\|_{W\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])}.
$$

Bukti: Bukti teorema ini menyadur bukti estimasi serupa yang dibuktikan pada makalah [7]. Misalkan $f \in W^1\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])$. Untuk setiap $x, y \in [0,1]$

$$
|f(y)-f(x)| = \left|\int_x^y f'(t)dt\right| \leq M(f')(x)|y-x|.
$$

Karena $b_{n,k}(x) \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
|K_n(f)(x)-f(x)| &\leq (n+1)\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}|f(y)-f(x)|dy \\
&\leq (n+1)\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} M(f')(x)|y-x|dy.
\end{aligned}
$$

Misalkan fungsi $g_x(y) = |y-x|$, maka

$$
|K_n(f)(x)-f(x)| \leq M(f')(x)\cdot K_n(g_x)(x).
$$

Perhatikan, dengan menggunakan ketaksamaan Cauchy-Schwarz dua kali pada $K_n(g_x)$ serta memperhitungkan bahwa $\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) = 1$, diperoleh

$$K_n(g_x)(x) = \left((n+1) \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |y-x| dy \right)^{2\times\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left((n+1) \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{k+1}}^{\frac{k+1}{k+1}} (y-x)^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Perhatikan bahwa

$$K_n(g_x)^2(x) \leq \frac{n-1}{(n+1)^2} x(1-x) + \frac{1}{3(n+1)^2}.$$

Untuk setiap $x \in [0,1]$ berlaku $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, sehingga

$$K_n(g_x)(y) \leq \left(\frac{n-1}{4(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{3n+1}{12(n+1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Akibatnya,

$$\|K_n(f) - f\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \|M(f')\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])}.$$

Berdasarkan Teorema 5.1.2 (untuk $q > 1$)

$$\|M(f')\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])} \lesssim \|f'\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])}.$$

Jadi,

$$\|K_n(f) - f\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])} \lesssim \frac{1}{\sqrt{n}} \|f\|_{\dot{W}\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])}. \blacksquare$$

Walaupun Teorema 5.1.5 tidak mencakup kasus $q = 1$, kekonvergenan $\{K_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ ke f di $\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])$ juga berlaku untuk setiap $f \in W^1\mathcal{M}_q^{\varphi}([0,1])$. Namun, kami belum memperoleh laju kekonvergenan $\{K_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ seperti pada Teorema 5.1.5. Hasil ini diberikan pada teorema berikut.

Teorema 5.1.6. Untuk setiap $f \in W^1\mathcal{M}_1^{\varphi}([0,1])$ berlaku $\lim_{n\to\infty} \|K_n(f) - f\|_{\mathcal{M}_1^{\varphi}([0,1])} = 0$.

Bukti: Misalkan $f \in W^1\mathcal{M}_1^{\varphi}([0,1])$, karena fungsi f adalah fungsi kontinu maka cukup memperlihatkan

$$|K_n(f)(x) - f(x)| \leq |K_n(f)(x) - B_n(f)(x)| + |B_n(f)(x) - f(x)|.$$

Ambil seberang $\epsilon > 0$. Berdasarkan Teorema Hampiran Weierstrass, terdapat N_1 sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N_1$ berlaku $\|B_n(f) - f\|_{L^\infty([0,1])} < \frac{\epsilon}{2}$.
Karena f adalah fungsi kontinu pada $[0,1]$, maka f kontinu seragam pada $[0,1]$. Akibatnya, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x, y \in [0,1]$, jika $|x - y| < \delta$ maka $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Pilih N_2 sedemikian hingga $N_2 + 1 \geq \frac{1}{\delta}$. Akibatnya, untuk setiap $n \geq N_2$ dan untuk setiap $x \in [0,1]$ berlaku

$$\begin{aligned} |K_n(f)(x) - B_n(f)(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} \left| f(y) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dy \\ &< \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Misalkan $N_\epsilon = \text{maks}(N_1, N_2)$. Oleh karena itu, $|K_n(f)(x) - f(x)| < \epsilon$ untuk setiap $n \geq N_\epsilon$ dan untuk setiap $x \in [0,1]$. Akibatnya, untuk setiap $[a,b] \subset [0,1]$ dan untuk setiap $n \geq N_\epsilon$ berlaku

$$\varphi(b-a)(b-a)^{-1} \int_a^b |K_n(f)(x) - f(x)| dx < \varphi(b-a)(b-a)^{-1} \int_a^b \epsilon \, dx < \varphi(1)\epsilon.$$

Dengan mengambil supremum atas $[a,b] \subset [0,1]$, untuk setiap $n \geq N_\epsilon$ berlaku

$$\|K_n f - f\|_{\mathcal{M}_1^\varphi([0,1])} < \epsilon. \blacksquare$$

6 KESIMPULAN

Barisan operator Kantorovich $\{K_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke f di ruang Morrey diperumum $\mathcal{M}_q^\varphi([0,1])$ untuk setiap $1 \leq q < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$, dan $f \in W^1\mathcal{M}_q^\varphi([0,1])$. Untuk $q > 1$ diperoleh informasi laju kekonvergenan $\{K_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ yakni $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Walaupun kekonvergenan juga berlaku untuk $q = 1$, laju kekonvergenan belum diketahui untuk kasus ini. Hasil ini juga mencakup kekonvergenan $\{K_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ke f di $L^\infty([0,1])$ untuk fungsi f yang kontinu pada $[0,1]$. Saran lanjutan dari penelitian ini, menemukan suatu ruang fungsi selain ruang Sobolev-Morrey untuk menunjau kekonvergenan barisan operator Kantorovich di ruang Morrey, yang nantiya dapat di perluas ke ruang Morrey diperumum. Untuk lebih lanjutnya dapat ditinjau kekonvergenan operator Kantorovich di ruang Morrey lemah atau pun ruang Morrey kecil.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didanai oleh program PPMI ITB 2021.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bernstein, S., "Demonstration du théorème deWeierstrass fondé sur le calcul des probabilités.Commun." *Kharkov Math. Soc.* 13, 1–2 (1912).

[2] Chlodovsky, "Sur le developpement des fonctions definies dans un intervalle infini en series de polynomes de M. S. Bernstein." *Compos. Math.*, 4, 380–393 (1937).

[3] Kantorovich, L.V., "Sur certains developements suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein I, II." *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 563(568), 595–600 (1930).

[4] Lorentz, G.G., *Bernstein Polynomials, 2nd ed.* Chelsea Publishing Co (1986).

[5] Morrey, C.B., "On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations." *Trans. Am. Math. Soc.*, 43(1), 126–166 (1938).

[6] Sawano, Y., "A thought on generalized Morrey space." Journal of Indonesian Mathematica Sinica, 21(6), 1535-1544 (2019).

[7] Victor, B., Ghorbanalizadeh, A., Sawano, Y., "Uniform boundedness of Kantorovich op-erator in Morrey spaces." *Positivity*. 22, 1097–1107 (2018).

[8] Weierstrass, K., "Uber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkrlicher Func-tionen einer reellen Vernderlichen." *Verl. d. Akad. d. Wiss.* 2, 633-639 (1885).

ISSN 2829-3770