Konferensi Nasional MATEMATIKA 2021

PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by IndoMS

Organized by Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

"Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0"

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

e-ISSN: 2829-3770
DOI issue: https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX

Dipublikasikan online pada:
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:

Mei 2022

Editor:
Dr. Harmanus Batkunde, S.Si., M.Si., Berny P. Tomasouw, S.Si., M.Si.,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si., M. I. Tilukay, S.Si., M.Si., Monalisa E. Rijoly, S.Si., M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si., M.Si, M. B. Mananggel, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si., M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si., M.Si. Vicardy Kempa, S.Si., M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si., M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si., M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si., M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumalun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

KOMBINATORIK

PENDIDIKAN MATEMATIKA

MATEMATIKA TERAPAN

STATISTIKA

https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX.115-124

KNM XX
Universitas Pattimura Ambon, 6-7 Juli 2021

PERLUASAN DEFINISI RATA-RATA VIA TEOREMA NILAI RATA-RATA

Mochammad Idris

Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Lambung Mangkurat,
Banjarbaru, Indonesia
e-mail: moch.idris@ulm.ac.id

Abstrak. *Untuk n bilangan positif, kita dapat menghitung rata-ratanya dengan rata-rata aritmetik, rata-rata geometrik, dan rata-rata harmonik. Namun ada beberapa definisi nilai rata-rata yang lain hanya untuk dua bilangan positif, dua yang disebutkan di sini adalah rata-rata logaritmik dan rata-rata identrik. Dalam paper ini, kita memperluas definisi rata-rata logaritmik dan rata-rata identrik untuk n bilangan positif via teorema nilai rata-rata.*

Kata kunci: rata-rata, teorema nilai rata-rata

1 PENDAHULUAN

Dalam paper ini, beberapa nilai rata-rata akan diperluas dari dua bilangan positif menjadi n bilangan positif. Kita mulai memperkenalkan fungsi yang bermakna sebagai nilai rata-rata. Dikutip dari [1], kita tampilkan yang berikut ini. Misalkan $R_+ := (0, \infty)$. Pemetaan $Ra : R_+ \times R_+ \to R_+$ dikatakan sebagai *rata-rata*, bila Ra memenuhi sifat-sifat berikut

1. $Ra(x, y) = Ra(y, x)$
2. $Ra(x, x) = x$
3. $x \leq Ra(x, y) \leq y$
4. $Ra(\alpha x, \alpha y) = \alpha Ra(x, y)$ dengan $\alpha > 0$.

Selanjutnya, disajikan beberapa contoh rata-rata.

1. Rata-rata aritmetik $RaA(x, y) := \frac{x+y}{2}$
2. Rata-rata-p $RaP(x, y) := \left(\frac{x^p+y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$, dengan $p > 0$
3. Rata-rata geometrik $RaG(x, y) := \sqrt{x + y}$
4. Rata-rata harmonik $RaH(x, y) := \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$
5. Rata-rata logaritmik $RaL(x, y) := \frac{x-y}{\ln x-\ln y}$ dengan $x \neq y$, ($RaL(x, x) := x$)
6. Rata-rata identrik $RaI(x, y) := e^{\left(\frac{y\ln y-x\ln x}{y-x}-1\right)}$ dengan $x \neq y$, ($RaI(x, x) := x$).

Tentu sangat mudah untuk memeriksa enam contoh itu memenuhi empat sifat di atasnya. Formula rata-rata aritmetika sangat terkenal dan bentuknya paling sederhana. Selanjutnya di sini, rata-rata-p dan rata-rata geometrik dapat dipandang sebagai rata-rata aritmetik dari variabel yang ditransformasi. Lihat berikut ini

$$RaP(x,y) = (RaA(u,v))^{\frac{1}{p}}$$

dengan $u = x^p$ dan $v = y^p$. Berikutnya

$$RaG(x,y) = e^{RaA(u,v)}$$

dengan $u = \ln x$ dan $v = \ln y$.

Dalam analisis real atau kalkulus, kita mengenal teorema nilai rata-rata (lihat [2]). Misalkan $R := (-\infty, \infty)$ dan $a < b$. Teorema nilai rata-rata menyatakan bahwa jika $f : (a,b) \to R$ terintegralkan di $[a,b]$ dan $\frac{d\int_a^s f(t)dt}{ds} = f(s)$ untuk setiap $s \in (a,b)$, maka terdapat $c \in (a,b)$ sehingga

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a}.$$

Tentu kita harus menambahkan syarat f sebagai fungsi injektif untuk mendapatkan

$$c = f^{-1}\left(\frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a}\right), \tag{1}$$

dengan f^{-1} sebagai invers fungsi f. Selanjutnya c disebut rata-rata dari a dan b. Untuk $f(t) = t$ untuk $x < t < y$, terbentuklah formula rata-rata aritmetika

$$RaA(x,y) \quad = \quad \frac{\int_x^y t dt}{y-x} = \frac{y^2 - x^2}{2(y-x)}. \tag{2}$$

Beberapa formula rata-rata lain yang dinyatakan dengan teorema nilai rata-rata dapat dilihat di [3, 4, 5].

Sekarang lihat kembali formula rata-rata aritmetik. Sudah lazim diketahui bahwa rata-rata aritmetik dapat diperluas untuk n bilangan positif dengan $n > 2$, yaitu

$$RdA(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad := \quad \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}, \tag{3}$$

dengan $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R^+$.

Proposisi 1.1 *Untuk setiap $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R_+$, Formula 3 memenuhi sifat-sifat*

1. $RdA(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *invarian dengan pertukaran urutan*
2. $RdA(x, x, \cdots, x) = x$
3. $\min(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le RdA(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le \max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$
4. $RdA(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n) = \alpha RdA(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *dengan* $\alpha > 0$.

Bukti. Ambil $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R_+$. Periksa Formula 3.

1. Karena operasi penjumlahan bersifat komutatif, sehingga nilai Rd^nA tetap sama meskipun urutan n bilangan positif diubah.

2. Jelas untuk $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ berlaku

$$Rd^nA(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\sum_{k=1}^{n} x}{n} = x\frac{n}{n} = x.$$

3. Perhatikan bahwa

$$\min(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \min(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = Rd^nA(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

   Sementara itu

$$\max(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \max(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{n} \geq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = Rd^nA(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

4. Untuk dengan $\alpha > 0$, berlaku

$$Rd^nA(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha x_k}{n} = \alpha\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = \alpha Rd^nA(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Bukti selesai ■

Untuk rata-rata-p, rata-rata geometrik, dan rata-rata harmonik juga mudah diperluas untuk n bilangan positif dengan $n > 2$. Sementara itu, rata-rata logaritmik dan rata-rata identrik tidak mudah diperluas untuk n bilangan positif dengan $n > 2$. Di [6, 7, 8, 9, 10], dua formula rata-rata tersebut telah ditunjukkan hasil perluasan rata-rata tersebut. Dengan cara yang berbeda, di sini, kita akan membahas perluasan dua formula rata-rata tersebut dengan mengacu pada formula rata-rata aritmetik dan teorema nilai rata-rata.

2 HASIL

Secara umum (tanpa memandang formula rata-rata tertentu), kita akan mendefinisikan *formula rata-rata untuk n bilangan positif* dengan $n \geq 2$. Perhatikan definisi berikut.

Definisi 1 *Formula rata-rata untuk n bilangan positif (dengan $n \geq 2$) tetap harus memenuhi empat sifat di atas (seperti untuk dua bilangan positif), yakni $Rd^n : R_+^n \to R_+$ memenuhi*

1. $Rd^n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *invarian dengan pertukaran urutan*

2. $Rd^n(x, x, \cdots, x) = x$

3. $\min(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq Rd^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq \max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

4. $Rd^n(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n) = \alpha Rd^n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *dengan* $\alpha > 0$.

Untuk $n = 2$, Definisi 1 kembali menjadi rata-rata Ra (lihat di awal paper ini). Jelas bahwa rata-rata aritmetika untuk n bilangan positif (Formula 3) memenuhi empat sifat pada Definisi 1 (lihat Proposisi 1.1). Selanjutnya keterkaitan Rd^nA dengan RaA disampaikan oleh proposisi berikut.

Proposisi 2.1 *Untuk* $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R_+$, *berlaku*

$$\mathit{Rd}^n\!A(x_1, x_2, \cdots, x_n) \;=\; \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \mathit{RaA}(x_k, x_j). \tag{4}$$

Bukti. Diketahui $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R_+$. Sekarang nyatakan

$$\mathit{Rd}^n\!A(x_1, x_2, \cdots, x_n) \;=\; \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(n-1)x_k}{n(n-1)}.$$

Bentuk $\sum_{k=1}^{n}(n-1)x_k$ dapat diubah menjadi $\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}(x_k + x_j)$, sehingga

$$\mathit{Rd}^n\!A(x_1, x_2, \cdots, x_n) \;=\; \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}(x_k + x_j)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \mathit{RaA}(x_k, x_j).$$

Bukti selesai. ■

Pada Formula 2, kita mempunyai rata-rata aritmetika untuk dua bilangan positif sebanyak $\frac{n(n-1)}{2}$. Penghitungan rata-rata aritmetika untuk n bilangan positif dapat dilakukan dengan menghitung rata-rata aritmetika $\frac{n(n-1)}{2}$ dari rata-rata aritmetika untuk dua bilangan positif tersebut. Selanjutnya, dengan memanfaatkan Formula 2, dapat dilihat bahwa Formula 4 menjadi

$$\mathit{Rd}^n\!A(x_1, x_2, \cdots, x_n) \;=\; \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\int_{x_k}^{x_j} t\,dt}{x_j - x_k}. \tag{5}$$

Rata-rata aritmetika pada Formula 5 menginspirasi pendefinisian dua formula rata-rata untuk n bilangan positif.

Definisi 2 *Misalkan* $0 < a < b$ *dan fungsi* $f : (a, b) \to R_+$ *bersifat injektif sedemikian sehingga terintegralkan di* $[a, b]$ *dan*

$$\frac{d \int_a^s f(t)dt}{ds} = f(s)$$

untuk setiap $s \in (a, b)$. *Untuk* $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a, b)$, *didefinisikan*

$$\mathit{iRd}^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \;:=\; \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} f^{-1}\left(\frac{\int_{x_j}^{x_k} f(t)dt}{x_k - x_j}\right), \tag{6}$$

dan

$$\mathit{iiRd}^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \;:=\; f^{-1}\left(\frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\int_{x_j}^{x_k} f(t)dt}{x_k - x_j}\right). \tag{7}$$

Untuk $n = 2$, Formula 6 dan 7 merupakan formula yang sama.

Teorema 2.2 *Misalkan* $0 < a < b$ *dan* $f : (a, b) \to R_+$ *memenuhi asumsi pada Definisi 2.*

1. *Jika fungsi* f *konveks (lihat [11]), maka*

$$\mathit{iRd}^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq \mathit{iiRd}^n(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

untuk setiap $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a, b)$.

2. *Jika fungsi f konkav (lihat [11]), maka*

$$\mathit{iRd}^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq \ddot{u}\mathit{Rd}^n(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

untuk setiap $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a, b)$.

Bukti. Kasus pertama: diketahui $0 < a < b$ dan $f : (a, b) \to R_+$ memenuhi asumsi pada Definisi 2. Asumsi selanjutnya, f juga bersifat konveks, sehingga $-f^{-1}$ bersifat konveks. Dengan memanfaatkan ketaksamaan Jensen (lihat [11]), berlaku

$$-f^{-1}\left(\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{\int_{x_j}^{x_k} f(t)dt}{x_k - x_j}\right) \leq \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} -f^{-1}\left(\frac{\int_{x_j}^{x_k} f(t)dt}{x_k - x_j}\right),$$

untuk setiap $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a, b)$. Artinya $\mathit{iRd}^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq \ddot{u}\mathit{Rd}^n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Kasus kedua, diketahui f konkav. Jelas bahwa f konkav jika dan hanya jika $g = -f$ konveks. Mengacu pada kasus pertama, $-g^{-1}$ bersifat konveks. Akibatnya

$$-g^{-1}\left(\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{\int_{x_j}^{x_k} g(t)dt}{x_k - x_j}\right) \leq \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} -g^{-1}\left(\frac{\int_{x_j}^{x_k} g(t)dt}{x_k - x_j}\right),$$

untuk setiap $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a, b)$. Jadi $\mathit{iRd}^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq \ddot{u}\mathit{Rd}^n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. ■

Dengan menambahkan asumsi bahwa f bersifat konveks atau konkav, kita dapat melihat hubungan dua definisi rata-rata untuk n bilangan positif. Selanjutnya pada sub bab berikutnya, akan dipilih f sesuai untuk memperluas definisi rata-rata identrik, rata-rata logaritmik, dan rata-rata-p. Dengan mengetahui f bersifat konveks atau konkav, tentu akan diketahui mana yang dominan dari dua definisi tersebut.

3 APLIKASI

Pada bagian ini, kita memanfaatkan Definisi 2 untuk memperluas rata-rata identrik dan rata-rata logaritmik dengan n bilangan positif. Dengan memilih $f(t) := \ln t$ untuk setiap $t > 0$, rata-rata identrik dua bilangan positif dapat dinyatakan oleh teorema nilai rata-rata, yaitu

$$\mathit{RaI}(x_1, x_2) = e^{\left(\frac{\int_{x_1}^{x_2} \ln t dt}{x_2 - x_1}\right)},$$

untuk setiap $x_1, x_2 \in R_+$. Selanjutnya dengan mengambil $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R_+$ dan berdasarkan Definisi 2, tentu dengan mudah, rata-rata identrik untuk n bilangan positif dinyatakan dengan dua cara yaitu

$$\mathit{iRd}^n I(x_1, x_2, \cdots, x_n) := \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} e^{\left(\frac{\int_{x_j}^{x_k} \ln t dt}{x_k - x_j}\right)} \tag{8}$$

dan

$$\ddot{u}\mathit{Rd}^n I(x_1, x_2, \cdots, x_n) := e^{\left(\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{\int_{x_j}^{x_k} \ln t dt}{x_k - x_j}\right)}. \tag{9}$$

Dapat diperiksa bahwa $f(t) = \ln t$ merupakan fungsi konkav, sehingga menurut Teorema 2.2, berlaku

$$\mathit{iRd^rI}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq \mathit{\ddot{u}Rd^rI}(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

untuk setiap $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R_+$.

Proposisi 3.1 *Formula $\mathit{iRd^rI}$ dan $\mathit{\ddot{u}Rd^rI}$ memenuhi empat sifat pada Definisi 1.*

Bukti. Diketahui $\mathit{iRd^rI}$ dan $\mathit{\ddot{u}Rd^rI}$ (lihat Persamaan (8) dan (9)). Sekarang periksa bahwa

1. Karena
$$\frac{\int_a^b \ln t dt}{b-a} = \frac{\int_b^a \ln t dt}{a-b}$$
dan penjumlahan bersifat invarian, maka untuk setiap $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R_+$, kita mempunyai $\mathit{iRd^rI}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dan $\mathit{\ddot{u}Rd^rI}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ invarian dengan pertukaran urutan.

2. Dari definisi yaitu $\mathit{RaI}(x, y) = x$, bila $x = y$, sehingga
$$\mathit{iRd^rI}(x, x, \cdots, x) = \frac{2}{n(n-1)} \frac{n(n-1)x}{2} = x$$
dan
$$\mathit{\ddot{u}Rd^rI}(x, x, \cdots, x) = e^{\left(\frac{2}{n(n-1)} \frac{n(n-1)\ln x}{2}\right)} = x.$$

3. Karena RaI merupakan formula rata-rata, maka berlaku $x \leq \mathit{RaI}(x, y) \leq y$, dengan $0 < x \leq y$. Selanjutnya, dengan memanfaatkan Proposisi 1.1 (sifat 3), kita mendapatkan
$$\min(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq \mathit{iRd^rI}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq \max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
dan
$$\min(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq \mathit{\ddot{u}Rd^rI}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq \max(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

4. (mengulang nomer 3) Jelas RaI adalah formula rata-rata. Konsekuensinya, untuk $\alpha > 0$, berlaku $\mathit{RaI}(\alpha x, \alpha y) = \alpha \mathit{RaI}(x, y)$, dengan $x, y > 0$. Selanjutnya, dengan memanfaatkan Proposisi 1.1 (sifat 4), kita mendapatkan
$$\mathit{iRd^rI}(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n) = \alpha \mathit{iRd^rI}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
dan
$$\mathit{\ddot{u}Rd^rI}(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n) = \alpha \mathit{\ddot{u}Rd^rI}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
dengan $\alpha > 0$.

Bukti selesai. ■

Sekarang, lihat rata-rata logaritmik (di [12, 13]) yang dinyatakan

$$\mathit{RaL}(x_1, x_2) = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{tx_2 + (1-t)x_1} dt}.$$

Sementara itu dalam bentuk yang lain (lihat [14]) adalah

$$\mathit{RaL}(x_1, x_2) = \int_0^1 x_1^t x_2^{1-t} dt.$$

Dari dua bentuk di atas, kita mempunyai dua definisi rata-rata logaritmik untuk n bilangan positif, yaitu

$$\begin{aligned} iRd^rL(x_1, x_2, \cdots, x_n) &:= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{tx_k+(1-t)x_j} dt} && (10) \\ &:= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \int_0^1 x_1^t x_2^{1-t} dt, && (11) \end{aligned}$$

dan

$$\ddot{u}Rd^rL(x_1, x_2, \cdots, x_n) := \frac{1}{\left(\frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \int_0^1 \frac{1}{tx_k+(1-t)x_j} dt\right)}, \qquad (12)$$

untuk setiap $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R_+$. Karena $f(t) := \frac{1}{t}$, untuk setiap $t > 0$, bersifat konveks, maka

$$iRd^rL(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq \ddot{u}Rd^rL(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

untuk setiap $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R_+$.

Proposisi 3.2 *Formula iRd^rL dan $\ddot{u}Rd^rL$ memenuhi empat sifat pada Definisi 1.*

Bukti. Diketahui iRd^rI dan $\ddot{u}Rd^rI$ (lihat Persamaan (8) dan (9)). Sekarang periksa bahwa

1. Jelas untuk $a, b > 0$, berlaku

$$\int_0^1 \frac{1}{ta+(1-t)b} dt = \int_0^1 \frac{1}{tb+(1-t)a} dt$$

   dan

$$\int_0^1 a^t b^{1-t} dt = \int_0^1 b^t a^{1-t} dt.$$

   Selain itu, penjumlahan bersifat invarian, sehingga untuk setiap $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R_+$, kita mempunyai $iRd^rL(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dan $\ddot{u}Rd^rL(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ invarian dengan pertukaran urutan.

2. Dari definisi dinyatakan bahwa $RaL(x, y) = x$, bila $x = y$. Akibatnya kita mendapatkan

$$iRd^rL(x, x, \cdots, x) = \frac{2}{n(n-1)} \frac{n(n-1)x}{2} = x$$

   dan

$$\ddot{u}Rd^rL(x, x, \cdots, x) = \frac{1}{\left(\frac{2}{n(n-1)} \frac{n(n-1)\frac{1}{x}}{2}\right)} = x.$$

3. Telah disampaikan bahwa RaL merupakan formula rata-rata. Artinya juga berlaku

$$x \leq RaL(x, y) \leq y,$$

   dengan $0 < x \leq y$. Gunakankan Proposisi 1.1 (sifat 3) untuk memperoleh

$$\min(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq iRd^rL(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq \max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

   dan

$$\min(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq \ddot{u}Rd^rL(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq \max(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

4. Dengan mengulang nomer 3 bahwa RaL adalah formula rata-rata, sehingga untuk $\alpha > 0$, berlaku $RaL(\alpha x, \alpha y) = \alpha RaL(x, y)$, dengan $x, y > 0$. Selanjutnya, dengan memanfaatkan Proposisi 1.1 (sifat 4), kita mendapatkan

$$iRd^rL(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n) = \alpha iRd^rI(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

dan

$$\ddot{u}Rd^rL(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n) = \alpha \ddot{u}Rd^rL(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

dengan $\alpha > 0$.

Bukti selesai. ■

4 PENUTUP

Di [10], telah ditunjukkan keterkaitan rata-rata geometri, rata-rata logaritmik, rata-rata identrik, dan rata-rata aritmetik dengan dua bilangan positif yaitu

$$RaG(x_1, x_2) \leq RaL(x_1, x_2) \leq RaI(x_1, x_2) \leq RaA(x_1, x_2),$$

untuk setiap $x_1, x_2 \in R_+$. Karena perluasan rata-rata logaritmik, rata-rata identrik mengacu pada rata aritmetik, maka bentuk ketaksamaan di atas masih berlaku untuk rata-rata logaritmik, rata-rata identrik, dan rata-rata aritmetik dengan n bilangan positif yaitu

$$Rd^rL(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq Rd^rI(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq Rd^rA(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

untuk setiap $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R_+$. Dalam penelitian selanjutnya, perlu diselidiki keterkaitan tiga rata-rata tersebut dan rata-rata geometri dengan n bilangan positif. Selain itu, tidak sederhana untuk menunjukkan empat sifat pada Definisi 1 juga berlaku untuk dua formula pada Definisi 2. Hal itu juga akan dilakukan pada kesempatan yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

[1] G. Zabandan, ”Several integral inequalities and their applications on means,” *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.* 12(2), 363-374 (2012).

[2] R. G. Bartle, D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis, 4th Edition*, John Wiley & Sons, Inc. (2010).

[3] B. Long, Y. Li, and Y. Chu, ”Optimal Inequalities Between Generalized Logarithmic, Identric, and Power Means” *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 80(1) , 41-51 (2012).

[4] J. Sandor and B. Bhayo, ”On Some Inequalities for the Identric, Logarithmic and Related Means” *Journal of Mathematical Inequalities*, 9(3), 889-896 (2015).

[5] K. B. Stolarsky, ”Generalizations of the Logarithmic Mean” *Mathematics Magazine*, 48(2), 87-92 (1975).

[6] P. S. Bullen, *Handbook of Means and Their Inequalities*. Kluwer (2003).

[7] E. M. Pearce, J. Pečarić, and V. Šimić, “On Weighted Generalized Logarithmic Means,” *Houston Journal of Mathematics*, 23(2), 547-562 (2020).

[8] A. O. Pittenger, "The logarithmic mean in n variables, "*Amer. Math. Monthly*, 92, 99-104 (1985).

[9] S. Mustonen, "Logarithmic Mean for Several Arguments, " *unpbub-lished paper, the current version of this paper can be downloaded from http://www.survo.fi/papers/logmean.pdf*, last update: 17 November 2005.

[10] Z. G. Xiao and Z. H. Zhang, "The Inequalities $G \leq L \leq I \leq A$ in n Variables, "*Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 4(2), Article 39 (2003).

[11] M. H. Duong, *Fundamental Inequalities: Techniques and Applications (Lecture notes)*. Mathematics Institute, University of Warwick (2017).

[12] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović, and P. M. Vasić, "Means and their inequalities, "*Reidel*, Dordrecht (1989).

[13] B. C. Carlson, *Special Functions of Applied Mathematics*. Academic Press, New York (1977).

[14] B. C. Carlson, "The logarithmic mean," *Amer. Math. Monthly*, 79, 615-618 (1972).

ISSN 2829-3770