

Konferensi Nasional MATEMATIKA 20 21



PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX
Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by
IndoMS



Organized by
Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

“Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0”

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

@Hak Cipta dilindungi Undang-undang

e-ISSN: 2829-3770

DOI issue: <https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX>

Dipublikasikan online pada:

Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:



Mei 2022

Editor:

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si, M.Si, Berny P. Tomasouw, S.Si, M.Si,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si, M. I. Tilukay, S.Si, M.Si, Monalisa E. Rijoly, S.Si, M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si, M.Si, M. B. Mananggal, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si, M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si, M.Si. Vicardy Kempa, S.Si, M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si, M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si, M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si, M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumulun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

Halaman Judul	i
Tim Reviewer	ii
Kata Pengantar	iii
Susunan Panitia KNM XX	iv
Daftar Isi	vii

ALJABAR

KLASIFIKASI TITIK KRITIS POLINOMIAL DUA VARIABEL BERDERAJAT TIGA Afif Humam	1 – 8
KAJIAN KEKUATAN \mathbb{Z} - MODUL \mathbb{Q} SEBAGAI INSPIRASI MUNCULNYA KONSEP DAN SIFAT DALAM TEORI MODUL Sri Wahyuni, Yunita Septriana Anwar, I Putu Yudi Prabhadika	9 – 14
GRAF PEMBAGI NOL DARI RING KOMUTATIF Maria Vianney Any Herawati	15 – 20
IDEAL TAK TEREDUKSI KUAT ATAS SEMIRING KOMUTATIF Fitriana Hasnani, Nikken Prima Puspita	21 – 26
BATAS ATAS PADA NORM – TAK HINGGA DARI INVERS MATRIKS NEKRASOV Eddy Djauhari	27 – 32
KOREPRESENTASI KOALJABAR $F[G]$ Na'imah Hijriati, Indah Emilia Wijayanti	33 – 40
HUBUNGAN SIFAT BERSIH PADA RING, MODUL, KOMODUL DAN KOALJABAR Nikken Prima Puspita, Indah Emilia Wijayanti, Budi Surodjo	41 – 50
KONTRAKSI PERTINGKATAN PADA PERTINGKATAN PAULI $\mathfrak{S}\mathfrak{L}(N, \mathbb{C})$ Reynald Saputra, Gantina Rachmaputri	51 – 60

ANALISIS

BUKTI ALTERNATIF INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG LEBESGUE DENGAN EKSPONEN PEUBAH Dina Nur Amalina dan Denny Ivanal Hakim	61 – 66
SEGITIGA TITIK CIRCUMCENTER PADA MODIFIKASI TEOREMA NAPOLEON Yunisa Fadhilah Hartati, Mashadi	67 – 76
FUNGSI SIMETRI TERHADAP TITIK (a, b) DAN BEBERAPA SIFATNYA Firdaus Ubaidillah	77 – 82
INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG MORREY-ADAMS DAN OPERATOR MAKSIMAL FRAKSIONAL Daniel Salim, Moch. Taufik Hakiki, Denny Ivanal Hakim	83 – 90
PENDEKATAN KALKULUS HIDA UNTUK PROSES HERMITE Herry Pribawanto Suryawan	91 – 98
KETAKSAMAAN HARDY DI RUANG HERZ HOMOGEN Pebrudal Zanu, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi1	99 – 106
OPERATOR KANTOROVICH PADA RUANG MORREY DIPERUMUM Mu'afa Purwa Arsana, Denny Ivanal Hakim	107 – 114
PERLUASAN DEFINISI RATA-RATA VIA TEOREMA NILAI RATA-RATA Mochammad Idris	115 – 124
SISTEM EIGEN OPERATOR LAPLACE BERBASIS RUAS PADA SUATU POHON KUANTUM Moh. Januar I. Burhan, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi	125 – 134

SUKU BANYAK BERNSTEIN DAN OPERATOR KANTOROVICH UNTUK BEBERAPA FUNGSI YANG TIDAK KONTINU Reinhart Gunadi, Denny I. Hakim	135 – 142
KETERBATASAN OPERATOR TIPE VOLTERRA PADA RUANG MORREY ANALITIK $L_{p,\lambda}$ Moch Taufik Hakiki, Wono Setya Budhi, dan Denny Ivanal Hakim	585 - 590
KOMBINATORIK	
PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF SIPUT DAN GRAF UBUR-UBUR Kevin Akbar, Kiki Ariyanti Sugeng	143 – 148
DIMENSI METRIK LOKAL PADA GRAF FLOWER DAN GRAF GEAR KORONA GRAF LINTASAN Salma Fauziyah Ashim, Tri Atmojo Kusmayadi, Titin Sri Martini	149 – 154
PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF LILIN Rizqi Rachmadhani, Kiki Ariyanti Sugeng	155 – 160
PELABELAN HARMONIS PADA GRAF SEGITIGA BELAH KETUPAT VARIASI LM_n Evi Maharani, Kurniawan Atmadja	161 – 164
PEWARNAAN SIMPUL r – DINAMIS PADA GRAF TERATAI T_n Audi Fierera, Kiki A. Sugeng	165 – 170
SIFAT-SIFAT GRAF CAYLEY GRUP S_n Afifan Hadi, Kiki Ariyanti Sugeng	171-176
PENDIDIKAN MATEMATIKA	
LKPD BERBASIS PENEMUAN TERBIMBING BERBANTUAN ALAT PERAGA PADA MATERI LUAS PERMUKAAN DAN VOLUME PRISMA DAN LIMAS Fithroh Nafa Dzillah, Latifah Mustofa Lestyanto	177 – 182
PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA DARING BERBASIS MODEL PENEMUAN TERBIMBING MENGGUNAKAN LIVEWORKSHEETS PADA MATERI PRISMA DAN LIMAS Sania Sururul Khususna, Latifah Mustofa Lestyanto, Eddy Budiono	183 – 188
PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA BERBASIS MASALAH BERBANTUAN GOOGLE FORM UNTUK PEMAHAMAN KONSEP SISWA KELAS VII SMP PADA MATERI SEGITIGA DAN SEGIEMPAT Herlin Oktavita, Latifah Mustofa Lestyanto2	189 – 194
EKSPLORASI ETNOMATEMATIKA PADA GELANG MANIK-MANIK KHAS DAYAK KALIMANTAN SEBAGAI SUMBER PENYUSUNAN LKPD Silvia	195 – 206
ANALISIS KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIS SISWA DENGAN PEMBELAJARAN MODEL BRAIN BASED LEARNING BERBASIS LEARNING MANANGEMENT SYSTEM N. R. Mumtaz, M. Asikin	207 – 214
PENGEMBANGAN ASESMEN ALTERNATIF DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA KONTEKS LINGKUNGAN LAHAN BASAH UNTUK SISWA TINGKAT SMP/MTS Muhammad Rizal, Noor Fajriah, Agni Danaryanti	215 – 222
MATERI PENGAYAAN TEORI BILANGAN DASAR DI SEKOLAH DASAR Awanga Dijayangrana, Hilda Assiyatun	223-228
KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS TULIS MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH VOLUME BENDA PUTAR MELALUI MODEL PERKULIAHAN KOLABORATIF Fadhila Kartika Sari, Anies Fuady	229 – 236
PERAN PENULISAN JURNAL DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA SECARA DARING DI MASA PANDEMI COVID-19	237 – 244

Gusti Firda Khairunnisa, Frida Siswiyanti	
ANALISIS KRUSKAL WALLIS UNTUK MENGETAHUI TINGKAT KOSENTRASI BELAJAR MAHASISWA BERDASARKAN PROGRAM STUDI	245 – 250
Venessa Y. A. Brabar, Grace A. V. Hikoyabi, Agustinus Langowuyo	
ANALISIS PENGARUH PEMANFAATAN INTERNET TERHADAP MINAT BELAJAR MAHASISWA PRODI STATISTIKA	251 – 258
Mariana Tanawani, Meilani Yarangga, dan Agustinus Langowuy	
PENGARUH PROSES BELAJAR MENGAJAR LURING DAN DARING TERHADAP HASIL BELAJAR MAHASISWA JURUSAN MATEMATIKA ANGAKATAN 2018 FMIPA UNIVERSITAS CENDERAWASIH	259 – 264
Dewi Rahmawati, Tiara A. Nadapdap, Agustinus Langowuyo	
PENILAIAN ESAI MENGGUNAKAN MODEL PEMBELAJARAN MESIN	265 – 270
Farah Qotrunnada, Marcus Wono Setya Budhi, Hilda Assiyatun	
PENGEMBANGAN PERANGKAT PEMBELAJARAN BERBASIS ETNOMATEMATIKA BUDAYA MASYARAKAT NEGERI TULEHU PADA MATERI SEGIEMPAT DAN SEGITIGA UNTUK SISWA DI KELAS VII MTS NEGERI I MALUKU TENGAH.	271 – 276
Heni Rahim, W. Mataheru, J. Takaria	
PENERAPAN FUZZY LINEAR PROGRAMMING UNTUK OPTIMASI PRODUKSI TAHU (STUDI KASUS DI DESA TANJUNGREJO KABUPATEN JEMBER)	277 – 284
Anisa Wahyu Illahi, Agustina Pradjaningsih, Abduh Riski	
PENENTUAN SOLUSI FISIBEL AWAL MASALAH TRANSPORTASI DENGAN MINIMUM DEMAND METHOD	285 – 292
Ulniyatul Ula, Siti Khabibah, Robertus Heri S.U	
OPTIMALISASI RUTE DAN PENJADWALAN PENGANGKUTAN SAMPAH DENGAN METODE INSERTION HEURISTIC DAN INTRA- ROUTE IMPROVEMENT (STUDI KASUS: UNIVERSITAS BRAWIJAYA MALANG)	293 – 298
Fara El Nandhita Pratiwi	
MODEL MATEMATIS RUTE WISATA DI RIAU DENGAN MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN GOL	299 – 312
Ihda Hasbiyati, Hasriati, T. P. Nababan	
MATEMATIKA TERAPAN	
MODEL SUSCEPTIBLE INFECTED RECOVERED (SIR) PADA DEMAM BERDARAH DENGUE (DBD)	313 – 320
Oscar Andhry Barata, Rahmat, Rengga Nanda Pramudya	
ANALISA PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE FRAKSIONAL NUMERIK MENGGUNAKAN METODE EULER DAN APLIKASINYA	321 – 326
Leli Deswita, Syamsudhuha, Asral. M	
TERAPAN FUNGSI SIGMOID UNTUK MENENTUKAN NILAI MAKSIMAL KOEFISIEN GAYA ANGKAT DAN SUDUT STALL PADA KURVA LINEAR C_L TERHADAP α	327 – 334
Angga Septiyana, Singgih Satrio W, Fuad Surastyo P, Try Kusuma Wardana, Ardian Rizaldi, Novita Atmasari, Eries Bagita Jayanti, Prasetyo Ardi P	
IMPLEMENTASI DEEP LEARNING UNTUK KLASIFIKASI GAMBAR MENGGUNAKAN CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORK (CNN) PADA BATIK SASAMBO	335 – 340
Muna Malika, Edy Widodo	
STATISTIKA	
PENERAPAN MODEL SPACE TIME AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (STARI(1,1,1)) PADA DATA NTP TANAMAN PANGAN DARI TIGA PROVINSI DI PULAU JAWA	341 -350
Fajriatus Sholihah, Kartika Sari, Budi Nurani Ruchjana, Toni Toharudin	
ANALISIS KORESPONDENSI BERGANDA UNTUK MENGETAHUI INDIKATOR-INDIKATOR YANG MEMPENGARUHI KEJADIAN LOW BACK PAIN PADA KUSIR	351 - 358

KUDA/DELMAN DI KOTA CIMAH I TAHUN 2019	
Dhita Diana Dewi, Fajriatus Sholihah, Rosa Rosmanah, Lucy Fitria Dewi, Mochamad Yudhi Afrizal, Irlandia Ginanjar	
PROSES POISSON NON HOMOGEN DAN PENERAPANNYA PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT	359 – 362
Viona Prisyella Balqis, Muhammad Herlambang Prakasa Yudha, Budi Nurani Ruchjana	
PENERAPAN DISTRIBUSI STASIONER RANTAI MARKOV PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT	363 – 370
Tubagus Robbi Megantara, Ayun Sri Rahmani, Budi Nurani Ruchjana	
SPATIAL CLUSTER ING DENGAN METODE SKATER (K'LUSTER ANALYSIS BY TREE EDGE REMOVAL) UNTUK PENGELOMPOKAN SEBARAN COVID-19 DI KABUPATEN TULUNGAGUNG	371 – 380
Danang Ariyanto, Henny Pramodyo, Novi Nur Aini	
ANALISIS KLABTER KABUPATEN/KOTA INDONESIA BERDASARKAN INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DENGAN MODEL MIXTURE SKEW-T	381 – 388
Kristoforus Exelsis Pratama, Irwan Susanto, Yuliana Susanti	
ANALISIS INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DI KABUPATEN BURU SELATAN DENGAN MENGGUNAKAN REGRESI LINIER BERGANDA	389 – 396
Muhidin Jariyah, Inayah. P. F. Solong, Juan C. S. Jamco	
TINJAUAN KEPUTUSAN HIPOTESA FUZZY BERBASIS P-VALUE FUZZY (STUDI KASUS DATA COVID-19 DI NUSA TENGGARA BARAT)	397 – 404
Wahidaturrahmi	
PENERAPAN METODE AUTO SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS PADA PERAMALAN DATA INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DI INDONESIA	405 – 410
Andreas Reza Chrisantama*, Winita Sulandari, Sugiyanto	
PERAMALAN JUMLAH PRODUKSI PERIKANAN DI KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE PEMULUSAN EKSPONENSIAL	411 – 418
Asrul Irfanullah, Claudia Sumanik, Romy Makatita	
ANALISIS PENGARUH STRUKTUR KONSUMSI AKHIR RUMAH TANGGA BERDASARKAN KOMPONEN PENGELUARAN KABUPATEN BURU SELATAN PERIODE 2015 – 2019 DENGAN RAKL	419 – 424
Nikita A. Putiray, Dea M. Tuhumury, Angel M.P. Manuputty	
EKSPLORASI SISA USIA BEARING MENGGUNAKAN DISTRIBUSI WEIBULL	425 – 430
Sutawanir Darwis, Nusar Hajarisman, Suliadi, Achmad Widodo	
PENERAPAN MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED MOVING AVERAGE (VARIMA) UNTUK PRAKIRAAN INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DAN KURS RUPIAH TERHADAP USD	431 – 442
Ani Pertiwi, Lucy Fitria Dewi, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana	
PENGELOMPOKKAN JUMLAH PENDUDUK KABUPATEN BURU SELATAN BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA TAHUN 2018 DENGAN ALGORITMA K- MEANS	443 – 450
Samir Radjid, Nadia Istifarin, Meylani Tuasella	
PENERAPAN METODE ARIMAX PADA PERAMALAN PRODUKSI DAGING SAPI DI SUKOHARJO	451 – 458
Fitrian Nur Ardyansyah, Winita Sulandari, Sugiyanto	
ANALISIS KEPUASAN DAN POSITIONING SELLER E-MARKETPLACE DENGAN MENGGUNAKAN IMPORTANCE PERFORMANCE ANALYSIS DAN BILOT	459 – 464
Farah Dibah, Dwi Endah Kusri	
KLASTERISASI LOKASI PASAR KABUPATEN BANYUMAS GUNA MEMPERMUDAH UPTD DALAM MENGELOLA KELAS PASAR	465 – 470
Pradini Nurul Safitri, Abdullah Ahmad Dzikrullah	

PENGARUH MOTIVASI INTRINSIK DAN KEPUASAN KERJA TERHADAP ORGANIZATIONAL CITIZENSHIP BEHAVIOR	471 – 476
Diya Kasih Puspitasari, Dwi Endah Kusrini	
KLASTERING JUMLAH PENDUDUK BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA KECAMATAN LEKSULA TAHUN 2018 DENGAN MENGGUNAKAN METODE ALGORITMA K-MEANS	477 – 484
Morensi T. Risakotta, Rensya Siwalette, Rola E. Leasa	
PERAMALAN DENGAN METODE SIMPLE MOVING AVERAGE DAN DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING BROWN (STUDI KASUS: JUMLAH CURAH HUJAN DAN JUMLAH HARI HUJAN KABUPATEN BURU SELATAN)	485 – 494
Apriano R. Narahawarin, Ravensky Silangen, Rahania Patiekon	
PERAMALAN GARIS KEMISKINAN KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING DARI HOLT	495 – 502
Ade Irma La Murdani, Intan Gainau, Unique Resiloy	
ANALISIS PERBEDAAN PENDAPATAN TOKO WALET MAS SEBELUM DAN SESUDAH PANDEMI COVID-19 DENGAN METODE MANN-WHITNEY	503 – 508
Marselina Ema Koten, Yunida Kurniasih, Agustinus Langowuyo	
ANALISIS PENGARUH BELANJA DAERAH, JUMLAH PENDUDUK, DAN PDRB TERHADAP PENDAPATAN DAERAH DI KABUPATEN BURU SELATAN TAHUN 2013-2020	509 – 516
Dephie Latumahina, Martje Riry, Olfen Sabono	
UJI KECOCOKAN DISTRIBUSI RAYLEIGH BIVARIAT MENGGUNAKAN UJI KOLMOGOROV-SMIRNOV BIVARIAT PADA DATA HASIL PERTANDINGAN PERSIB BANDUNG	517 – 522
Wulan Jati Nuraya, Aceng Komarudin Mutaqin	
MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) UNTUK PERAMALAN BANYAKNYA KASUS TERKONFIRMASI DAN KASUS SEMBUH COVID-19 DI INDONESIA	523 – 532
Sri Indra Maiyanti, Mahrudinda, Al Fataa W. Haq, Budi Nurani Ruchjana	
MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) DAN PENERAPANNYA PADA DATA PERKEMBANGAN HARGA ECERAN BERAS DI TIGA IBU KOTA PROVINSI WILAYAH PULAU JAWA	533 – 544
Zulfa Hidayah Satria Putri, Asri Yuniar, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana	
PENERAPAN METODE REGRESI LINEAR BERGANDA UNTUK MELIHAT PENGARUH JUMLAH PENDUDUK DAN LUAS WILAYAH TERHADAP JUMLAH PENGGUNA LISTRIK DI KECAMATAN AMBALAU KABUPATEN BURU SELATAN	545 – 552
Fadly Ode, Nur Statib J, Elsy Malwewar	
ANALISIS TINGKAT KEGEMARAN AYAM GEPUK PAK GEMBUS DARI BERBAGAI JENIS PAKET MELALUI PENDEKATAN UJI STATISTIK	553 – 558
Maharani Tiara Pramuditya, Evan Claude Boudewijn Kainama, Agustinus Langowuyo	
SIMULASI PERGERAKAN HARGA SAHAM MENGGUNAKAN MODEL GERAK BROWN GEOMETRIK DENGAN R STUDIO	559 – 564
Ahmad Fawaid Ridwan, Rizki Apriva Hidayana, Budi Nurani Ruchjana	
PENAKSIRAN RATA-RATA <i>EXCESS CLAIM</i> PESERTA DARI PERUSAHAAN PEMBERI LAYANAN KESEHATAN PT. X	565 – 572
Wildan*, Indah Permatasari, and Aceng Komarudin Mutaqin	
PENGARUH SELF EFFICACY DAN MOTIVASI BELAJAR TERHADAP HASIL BELAJAR SISWA KELAS VII SMP NEGERI 3 GANTUNG	573 – 584
Alperu, Nerru Pranuta Murnaka*, Indra Bayu M, Andy Wahyu H	

PERLUASAN DEFINISI RATA-RATA VIA TEOREMA NILAI RATA-RATA

Mochammad Idris

Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Lambung Mangkurat,
Banjarbaru, Indonesia
e-mail: moch.idris@ulm.ac.id

Abstrak. Untuk n bilangan positif, kita dapat menghitung rata-ratanya dengan rata-rata aritmetik, rata-rata geometrik, dan rata-rata harmonik. Namun ada beberapa definisi nilai rata-rata yang lain hanya untuk dua bilangan positif, dua yang disebutkan di sini adalah rata-rata logaritmik dan rata-rata identrik. Dalam paper ini, kita memperluas definisi rata-rata logaritmik dan rata-rata identrik untuk n bilangan positif via teorema nilai rata-rata.

Kata kunci: rata-rata, teorema nilai rata-rata

1 PENDAHULUAN

Dalam paper ini, beberapa nilai rata-rata akan diperluas dari dua bilangan positif menjadi n bilangan positif. Kita mulai memperkenalkan fungsi yang bermakna sebagai nilai rata-rata. Dikutip dari [1], kita tampilkan yang berikut ini. Misalkan $R_+ := (0, \infty)$. Pemetaan $Ra : R_+ \times R_+ \rightarrow R_+$ dikatakan sebagai *rata-rata*, bila Ra memenuhi sifat-sifat berikut

1. $Ra(x, y) = Ra(y, x)$
2. $Ra(x, x) = x$
3. $x \leq Ra(x, y) \leq y$
4. $Ra(\alpha x, \alpha y) = \alpha Ra(x, y)$ dengan $\alpha > 0$.

Selanjutnya, disajikan beberapa contoh rata-rata.

1. Rata-rata aritmetik $RaA(x, y) := \frac{x+y}{2}$
2. Rata-rata- p $RaP(x, y) := \left(\frac{x^p+y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$, dengan $p > 0$
3. Rata-rata geometrik $RaG(x, y) := \sqrt{x+y}$
4. Rata-rata harmonik $RaH(x, y) := \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$
5. Rata-rata logaritmik $RaL(x, y) := \frac{x-y}{\ln x - \ln y}$ dengan $x \neq y$, ($RaL(x, x) := x$)
6. Rata-rata identrik $RaI(x, y) := e^{\left(\frac{y \ln y - x \ln x}{y-x} - 1\right)}$ dengan $x \neq y$, ($RaI(x, x) := x$).

Tentu sangat mudah untuk memeriksa enam contoh itu memenuhi empat sifat di atasnya. Formula rata-rata aritmetika sangat terkenal dan bentuknya paling sederhana. Selanjutnya di sini, rata-rata- p dan rata-rata geometrik dapat dipandang sebagai rata-rata aritmetik dari variabel yang ditransformasi. Lihat berikut ini

$$RaP(x, y) = (RaA(u, v))^{\frac{1}{p}}$$

dengan $u = x^p$ dan $v = y^p$. Berikutnya

$$RaG(x, y) = e^{RaA(u, v)}$$

dengan $u = \ln x$ dan $v = \ln y$.

Dalam analisis real atau kalkulus, kita mengenal teorema nilai rata-rata (lihat [2]). Misalkan $R := (-\infty, \infty)$ dan $a < b$. Teorema nilai rata-rata menyatakan bahwa jika $f : (a, b) \rightarrow R$ terintegralkan di $[a, b]$ dan $\frac{d}{ds} \int_a^s f(t) dt = f(s)$ untuk setiap $s \in (a, b)$, maka terdapat $c \in (a, b)$ sehingga

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t) dt}{b - a}.$$

Tentu kita harus menambahkan syarat f sebagai fungsi injektif untuk mendapatkan

$$c = f^{-1} \left(\frac{\int_a^b f(t) dt}{b - a} \right), \tag{1}$$

dengan f^{-1} sebagai invers fungsi f . Selanjutnya c disebut rata-rata dari a dan b . Untuk $f(t) = t$ untuk $x < t < y$, terbentuklah formula rata-rata aritmetika

$$RaA(x, y) = \frac{\int_x^y t dt}{y - x} = \frac{y^2 - x^2}{2(y - x)}. \tag{2}$$

Beberapa formula rata-rata lain yang dinyatakan dengan teorema nilai rata-rata dapat dilihat di [3, 4, 5].

Sekarang lihat kembali formula rata-rata aritmetik. Sudah lazim diketahui bahwa rata-rata aritmetik dapat diperluas untuk n bilangan positif dengan $n > 2$, yaitu

$$RaA(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}, \tag{3}$$

dengan $x_1, x_2, \dots, x_n \in R^+$.

Proposisi 1.1 Untuk setiap $x_1, x_2, \dots, x_n \in R_+$, Formula 3 memenuhi sifat-sifat

1. $RaA(x_1, x_2, \dots, x_n)$ invarian dengan pertukaran urutan
2. $RaA(x, x, \dots, x) = x$
3. $\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq RaA(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$
4. $RaA(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) = \alpha RaA(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dengan $\alpha > 0$.

Bukti. Ambil $x_1, x_2, \dots, x_n \in R_+$. Periksa Formula 3.

1. Karena operasi penjumlahan bersifat komutatif, sehingga nilai RdA tetap sama meskipun urutan n bilangan positif diubah.
2. Jelas untuk $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ berlaku

$$RdA(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sum_{k=1}^n x}{n} = x \frac{n}{n} = x.$$

3. Perhatikan bahwa

$$\min(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sum_{k=1}^n \min(x_1, x_2, \dots, x_n)}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = RdA(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Sementara itu

$$\max(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sum_{k=1}^n \max(x_1, x_2, \dots, x_n)}{n} \geq \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = RdA(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

4. Untuk dengan $\alpha > 0$, berlaku

$$RdA(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha x_k}{n} = \alpha \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = \alpha RdA(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Bukti selesai ■

Untuk rata-rata- p , rata-rata geometrik, dan rata-rata harmonik juga mudah diperluas untuk n bilangan positif dengan $n > 2$. Sementara itu, rata-rata logaritmik dan rata-rata identrik tidak mudah diperluas untuk n bilangan positif dengan $n > 2$. Di [6, 7, 8, 9, 10], dua formula rata-rata tersebut telah ditunjukkan hasil perluasan rata-rata tersebut. Dengan cara yang berbeda, di sini, kita akan membahas perluasan dua formula rata-rata tersebut dengan mengacu pada formula rata-rata aritmetik dan teorema nilai rata-rata.

2 HASIL

Secara umum (tanpa memandang formula rata-rata tertentu), kita akan mendefinisikan *formula rata-rata untuk n bilangan positif* dengan $n \geq 2$. Perhatikan definisi berikut.

Definisi 1 *Formula rata-rata untuk n bilangan positif (dengan $n \geq 2$) tetap harus memenuhi empat sifat di atas (seperti untuk dua bilangan positif), yakni $Rd^n : R_+^n \rightarrow R_+$ memenuhi*

1. $Rd^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ invarian dengan pertukaran urutan
2. $Rd^n(x, x, \dots, x) = x$
3. $\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq Rd^n(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$
4. $Rd^n(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) = \alpha Rd^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dengan $\alpha > 0$.

Untuk $n = 2$, Definisi 1 kembali menjadi rata-rata Ra (lihat di awal paper ini). Jelas bahwa rata-rata aritmetika untuk n bilangan positif (Formula 3) memenuhi empat sifat pada Definisi 1 (lihat Proposisi 1.1). Selanjutnya keterkaitan RdA dengan RaA disampaikan oleh proposisi berikut.

Proposisi 2.1 Untuk $x_1, x_2, \dots, x_n \in R_+$, berlaku

$$RdA(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n RaA(x_k, x_j). \quad (4)$$

Bukti. Diketahui $x_1, x_2, \dots, x_n \in R_+$. Sekarang nyatakan

$$RdA(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n (n-1)x_k}{n(n-1)}.$$

Bentuk $\sum_{k=1}^n (n-1)x_k$ dapat diubah menjadi $\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n (x_k + x_j)$, sehingga

$$RdA(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n (x_k + x_j)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n RaA(x_k, x_j).$$

Bukti selesai. ■

Pada Formula 2, kita mempunyai rata-rata aritmetika untuk dua bilangan positif sebanyak $\frac{n(n-1)}{2}$. Penghitungan rata-rata aritmetika untuk n bilangan positif dapat dilakukan dengan menghitung rata-rata aritmetika $\frac{n(n-1)}{2}$ dari rata-rata aritmetika untuk dua bilangan positif tersebut. Selanjutnya, dengan memanfaatkan Formula 2, dapat dilihat bahwa Formula 4 menjadi

$$RdA(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \frac{\int_{x_k}^{x_j} t dt}{x_j - x_k}. \quad (5)$$

Rata-rata aritmetika pada Formula 5 menginspirasi pendefinisian dua formula rata-rata untuk n bilangan positif.

Definisi 2 Misalkan $0 < a < b$ dan fungsi $f : (a, b) \rightarrow R_+$ bersifat injektif sedemikian sehingga terintegralkan di $[a, b]$ dan

$$\frac{d \int_a^s f(t) dt}{ds} = f(s)$$

untuk setiap $s \in (a, b)$. Untuk $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$, didefinisikan

$$iRd^n(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n f^{-1} \left(\frac{\int_{x_j}^{x_k} f(t) dt}{x_k - x_j} \right), \quad (6)$$

dan

$$\ddot{i}Rd^n(x_1, x_2, \dots, x_n) := f^{-1} \left(\frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \frac{\int_{x_j}^{x_k} f(t) dt}{x_k - x_j} \right). \quad (7)$$

Untuk $n = 2$, Formula 6 dan 7 merupakan formula yang sama.

Teorema 2.2 Misalkan $0 < a < b$ dan $f : (a, b) \rightarrow R_+$ memenuhi asumsi pada Definisi 2.

1. Jika fungsi f konveks (lihat [11]), maka

$$iRd^n(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \ddot{i}Rd^n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

untuk setiap $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$.

2. Jika fungsi f konkav (lihat [11]), maka

$$iRd^n(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \ddot{i}Rd^n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

untuk setiap $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$.

Bukti. Kasus pertama: diketahui $0 < a < b$ dan $f : (a, b) \rightarrow R_+$ memenuhi asumsi pada Definisi 2. Asumsi selanjutnya, f juga bersifat konveks, sehingga $-f^{-1}$ bersifat konveks. Dengan memanfaatkan ketaksamaan Jensen (lihat [11]), berlaku

$$-f^{-1} \left(\frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \frac{\int_{x_j}^{x_k} f(t) dt}{x_k - x_j} \right) \leq \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n -f^{-1} \left(\frac{\int_{x_j}^{x_k} f(t) dt}{x_k - x_j} \right),$$

untuk setiap $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$. Artinya $iRd^n(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \ddot{i}Rd^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Kasus kedua, diketahui f konkav. Jelas bahwa f konkav jika dan hanya jika $g = -f$ konveks. Mengacu pada kasus pertama, $-g^{-1}$ bersifat konveks. Akibatnya

$$-g^{-1} \left(\frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \frac{\int_{x_j}^{x_k} g(t) dt}{x_k - x_j} \right) \leq \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n -g^{-1} \left(\frac{\int_{x_j}^{x_k} g(t) dt}{x_k - x_j} \right),$$

untuk setiap $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$. Jadi $iRd^n(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \ddot{i}Rd^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$. ■

Dengan menambahkan asumsi bahwa f bersifat konveks atau konkav, kita dapat melihat hubungan dua definisi rata-rata untuk n bilangan positif. Selanjutnya pada sub bab berikutnya, akan dipilih f sesuai untuk memperluas definisi rata-rata identrik, rata-rata logaritmik, dan rata-rata- p . Dengan mengetahui f bersifat konveks atau konkav, tentu akan diketahui mana yang dominan dari dua definisi tersebut.

3 APLIKASI

Pada bagian ini, kita memanfaatkan Definisi 2 untuk memperluas rata-rata identrik dan rata-rata logaritmik dengan n bilangan positif. Dengan memilih $f(t) := \ln t$ untuk setiap $t > 0$, rata-rata identrik dua bilangan positif dapat dinyatakan oleh teorema nilai rata-rata, yaitu

$$RdI(x_1, x_2) = e \left(\frac{\int_{x_1}^{x_2} \ln t dt}{x_2 - x_1} \right),$$

untuk setiap $x_1, x_2 \in R_+$. Selanjutnya dengan mengambil $x_1, x_2, \dots, x_n \in R_+$ dan berdasarkan Definisi 2, tentu dengan mudah, rata-rata identrik untuk n bilangan positif dinyatakan dengan dua cara yaitu

$$iRd^n I(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n e \left(\frac{\int_{x_j}^{x_k} \ln t dt}{x_k - x_j} \right) \tag{8}$$

dan

$$\ddot{i}Rd^n I(x_1, x_2, \dots, x_n) := e \left(\frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \frac{\int_{x_j}^{x_k} \ln t dt}{x_k - x_j} \right). \tag{9}$$

Dapat diperiksa bahwa $f(t) = \ln t$ merupakan fungsi konkav, sehingga menurut Teorema 2.2, berlaku

$$iRd^p I(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \ddot{i}Rd^p I(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

untuk setiap $x_1, x_2, \dots, x_n \in R_+$.

Proposisi 3.1 Formula $iRd^p I$ dan $\ddot{i}Rd^p I$ memenuhi empat sifat pada Definisi 1.

Bukti. Diketahui $iRd^p I$ dan $\ddot{i}Rd^p I$ (lihat Persamaan (8) dan (9)). Sekarang periksa bahwa

1. Karena

$$\frac{\int_a^b \ln t dt}{b-a} = \frac{\int_b^a \ln t dt}{a-b}$$

dan penjumlahan bersifat invarian, maka untuk setiap $x_1, x_2, \dots, x_n \in R_+$, kita mempunyai $iRd^p I(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $\ddot{i}Rd^p I(x_1, x_2, \dots, x_n)$ invarian dengan pertukaran urutan.

2. Dari definisi yaitu $RaI(x, y) = x$, bila $x = y$, sehingga

$$iRd^p I(x, x, \dots, x) = \frac{2}{n(n-1)} \frac{n(n-1)x}{2} = x$$

dan

$$\ddot{i}Rd^p I(x, x, \dots, x) = e^{\left(\frac{2}{n(n-1)} \frac{n(n-1) \ln x}{2}\right)} = x.$$

3. Karena RaI merupakan formula rata-rata, maka berlaku $x \leq RaI(x, y) \leq y$, dengan $0 < x \leq y$. Selanjutnya, dengan memanfaatkan Proposisi 1.1 (sifat 3), kita mendapatkan

$$\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq iRd^p I(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dan

$$\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \ddot{i}Rd^p I(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

4. (mengulang nomer 3) Jelas RaI adalah formula rata-rata. Konsekuensinya, untuk $\alpha > 0$, berlaku $RaI(\alpha x, \alpha y) = \alpha RaI(x, y)$, dengan $x, y > 0$. Selanjutnya, dengan memanfaatkan Proposisi 1.1 (sifat 4), kita mendapatkan

$$iRd^p I(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) = \alpha iRd^p I(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dan

$$\ddot{i}Rd^p I(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) = \alpha \ddot{i}Rd^p I(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dengan $\alpha > 0$.

Bukti selesai. ■

Sekarang, lihat rata-rata logaritmik (di [12, 13]) yang dinyatakan

$$RaL(x_1, x_2) = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{tx_2 + (1-t)x_1} dt}.$$

Sementara itu dalam bentuk yang lain (lihat [14]) adalah

$$RaL(x_1, x_2) = \int_0^1 x_1^t x_2^{1-t} dt.$$

Dari dua bentuk di atas, kita mempunyai dua definisi rata-rata logaritmik untuk n bilangan positif, yaitu

$$iRd^pL(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \int_0^1 \frac{1}{tx_k + (1-t)x_j} dt \quad (10)$$

$$:= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \int_0^1 x_1^t x_2^{1-t} dt, \quad (11)$$

dan

$$\ddot{i}Rd^pL(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{1}{\left(\frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \int_0^1 \frac{1}{tx_k + (1-t)x_j} dt \right)}, \quad (12)$$

untuk setiap $x_1, x_2, \dots, x_n \in R_+$. Karena $f(t) := \frac{1}{t}$, untuk setiap $t > 0$, bersifat konveks, maka

$$iRd^pL(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \ddot{i}Rd^pL(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

untuk setiap $x_1, x_2, \dots, x_n \in R_+$.

Proposisi 3.2 Formula iRd^pL dan $\ddot{i}Rd^pL$ memenuhi empat sifat pada Definisi 1.

Bukti. Diketahui iRd^pI dan $\ddot{i}Rd^pI$ (lihat Persamaan (8) dan (9)). Sekarang periksa bahwa

1. Jelas untuk $a, b > 0$, berlaku

$$\int_0^1 \frac{1}{ta + (1-t)b} dt = \int_0^1 \frac{1}{tb + (1-t)a} dt$$

dan

$$\int_0^1 a^t b^{1-t} dt = \int_0^1 b^t a^{1-t} dt.$$

Selain itu, penjumlahan bersifat invarian, sehingga untuk setiap $x_1, x_2, \dots, x_n \in R_+$, kita mempunyai $iRd^pL(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $\ddot{i}Rd^pL(x_1, x_2, \dots, x_n)$ invarian dengan pertukaran urutan.

2. Dari definisi dinyatakan bahwa $RaL(x, y) = x$, bila $x = y$. Akibatnya kita mendapatkan

$$iRd^pL(x, x, \dots, x) = \frac{2}{n(n-1)} \frac{n(n-1)x}{2} = x$$

dan

$$\ddot{i}Rd^pL(x, x, \dots, x) = \frac{1}{\left(\frac{2}{n(n-1)} \frac{n(n-1)\frac{1}{x}}{2} \right)} = x.$$

3. Telah disampaikan bahwa RaL merupakan formula rata-rata. Artinya juga berlaku

$$x \leq RaL(x, y) \leq y,$$

dengan $0 < x \leq y$. Gunakan Proposisi 1.1 (sifat 3) untuk memperoleh

$$\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq iRd^pL(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dan

$$\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \ddot{i}Rd^pL(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

4. Dengan mengulang nomer 3 bahwa RaL adalah formula rata-rata, sehingga untuk $\alpha > 0$, berlaku $RaL(\alpha x, \alpha y) = \alpha RaL(x, y)$, dengan $x, y > 0$. Selanjutnya, dengan memanfaatkan Proposisi 1.1 (sifat 4), kita mendapatkan

$$iRd^pL(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) = \alpha iRd^pI(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dan

$$iiRd^pL(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) = \alpha iiRd^pL(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dengan $\alpha > 0$.

Bukti selesai. ■

4 PENUTUP

Di [10], telah ditunjukkan keterkaitan rata-rata geometri, rata-rata logaritmik, rata-rata identrik, dan rata-rata aritmetik dengan dua bilangan positif yaitu

$$RaG(x_1, x_2) \leq RaL(x_1, x_2) \leq RaI(x_1, x_2) \leq RaA(x_1, x_2),$$

untuk setiap $x_1, x_2 \in R_+$. Karena perluasan rata-rata logaritmik, rata-rata identrik mengacu pada rata aritmetik, maka bentuk ketaksamaan di atas masih berlaku untuk rata-rata logaritmik, rata-rata identrik, dan rata-rata aritmetik dengan n bilangan positif yaitu

$$Rd^pL(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq Rd^pI(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq Rd^pA(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

untuk setiap $x_1, x_2, \dots, x_n \in R_+$. Dalam penelitian selanjutnya, perlu diselidiki keterkaitan tiga rata-rata tersebut dan rata-rata geometri dengan n bilangan positif. Selain itu, tidak sederhana untuk menunjukkan empat sifat pada Definisi 1 juga berlaku untuk dua formula pada Definisi 2. Hal itu juga akan dilakukan pada kesempatan yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] G. Zabandan, "Several integral inequalities and their applications on means," *Int. J. Non-linear Anal. Appl.* 12(2), 363-374 (2012).
- [2] R. G. Bartle, D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis, 4th Edition*, John Wiley & Sons, Inc. (2010).
- [3] B. Long, Y. Li, and Y. Chu, "Optimal Inequalities Between Generalized Logarithmic, Identric, and Power Means" *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 80(1), 41-51 (2012).
- [4] J. Sandor and B. Bhayo, "On Some Inequalities for the Identric, Logarithmic and Related Means" *Journal of Mathematical Inequalities*, 9(3), 889-896 (2015).
- [5] K. B. Stolarsky, "Generalizations of the Logarithmic Mean" *Mathematics Magazine*, 48(2), 87-92 (1975).
- [6] P. S. Bullen, *Handbook of Means and Their Inequalities*. Kluwer (2003).
- [7] E. M. Pearce, J. Pečarić, and V. Šimić, "On Weighted Generalized Logarithmic Means," *Houston Journal of Mathematics*, 23(2), 547-562 (2020).

- [8] A. O. Pittenger, "The logarithmic mean in n variables," *Amer. Math. Monthly*, 92, 99-104 (1985).
- [9] S. Mustonen, "Logarithmic Mean for Several Arguments, " *unpublished paper; the current version of this paper can be downloaded from <http://www.survo.fi/papers/logmean.pdf>*, last update: 17 November 2005.
- [10] Z. G. Xiao and Z. H. Zhang, "The Inequalities $G \leq L \leq I \leq A$ in n Variables," *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 4(2), Article 39 (2003).
- [11] M. H. Duong, *Fundamental Inequalities: Techniques and Applications (Lecture notes)*. Mathematics Institute, University of Warwick (2017).
- [12] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović, and P. M. Vasić, "Means and their inequalities," *Reidel*, Dordrecht (1989).
- [13] B. C. Carlson, *Special Functions of Applied Mathematics*. Academic Press, New York (1977).
- [14] B. C. Carlson, "The logarithmic mean," *Amer. Math. Monthly*, 79, 615-618 (1972).

ISSN 2829-3770



9

772829

377007