

# Konferensi Nasional MATEMATIKA 20 21



## PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX  
Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :  
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology  
e-ISSN : 2829-3770

Powered by  
IndoMS



Organized by  
Universitas Pattimura

# PROSIDING

## KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

“Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0”

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

@Hak Cipta dilindungi Undang-undang

e-ISSN: 2829-3770

DOI issue: <https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX>

Dipublikasikan online pada:

Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:



Mei 2022

## **Editor:**

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si, M.Si, Berny P. Tomasouw, S.Si, M.Si,  
Taufan Talib, S.Pd., M.Si, M. I. Tilukay, S.Si, M.Si, Monalisa E. Rijoly, S.Si, M.Sc.  
Z.A. Leleury, S.Si, M.Si, M. B. Mananggal, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si, M.Sc.,  
Y. A. Lesnussa, S.Si, M.Si. Vicardy Kempa, S.Si, M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si, M.Si.  
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si, M.Si.

## **Design cover:**

L. J. Sinay, S.Si, M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

## **Tim *Reviewer***

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumulun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

## DAFTAR ISI

Halaman Judul	i
Tim Reviewer	ii
Kata Pengantar	iii
Susunan Panitia KNM XX	iv
Daftar Isi	vii

### ALJABAR

<b>KLASIFIKASI TITIK KRITIS POLINOMIAL DUA VARIABEL BERDERAJAT TIGA</b>	1 – 8
Afif Humam	
<b>KAJIAN KEKUATAN <math>\mathbb{Z}</math> - MODUL <math>\mathbb{Q}</math> SEBAGAI INSPIRASI MUNCULNYA KONSEP DAN SIFAT DALAM TEORI MODUL</b>	9 – 14
Sri Wahyuni, Yunita Septriana Anwar, I Putu Yudi Prabhadika	
<b>GRAF PEMBAGI NOL DARI RING KOMUTATIF</b>	15 – 20
Maria Vianney Any Herawati	
<b>IDEAL TAK TEREDUKSI KUAT ATAS SEMIRING KOMUTATIF</b>	21 – 26
Fitriana Hasnani, Nikken Prima Puspita	
<b>BATAS ATAS PADA NORM – TAK HINGGA DARI INVERS MATRIKS NEKRASOV</b>	27 – 32
Eddy Djauhari	
<b>KOREPRESENTASI KOALJABAR <math>F[G]</math></b>	33 – 40
Na'imah Hijriati, Indah Emilia Wijayanti	
<b>HUBUNGAN SIFAT BERSIH PADA RING, MODUL, KOMODUL DAN KOALJABAR</b>	41 – 50
Nikken Prima Puspita, Indah Emilia Wijayanti, Budi Surodjo	
<b>KONTRAKSI PERTINGKATAN PADA PERTINGKATAN PAULI <math>\mathfrak{S}\mathfrak{L}(N, \mathbb{C})</math></b>	51 – 60
Reynald Saputra, Gantina Rachmaputri	

### ANALISIS

<b>BUKTI ALTERNATIF INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG LEBESGUE DENGAN EKSPONEN PEUBAH</b>	61 – 66
Dina Nur Amalina dan Denny Ivanal Hakim	
<b>SEGITIGA TITIK CIRCUMCENTER PADA MODIFIKASI TEOREMA NAPOLEON</b>	67 – 76
Yunisa Fadhilah Hartati, Mashadi	
<b>FUNGSI SIMETRI TERHADAP TITIK <math>(a, b)</math> DAN BEBERAPA SIFATNYA</b>	77 – 82
Firdaus Ubaidillah	
<b>INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG MORREY-ADAMS DAN OPERATOR MAKSIMAL FRAKSIONAL</b>	83 – 90
Daniel Salim, Moch. Taufik Hakiki, Denny Ivanal Hakim	
<b>PENDEKATAN KALKULUS HIDA UNTUK PROSES HERMITE</b>	91 – 98
Herry Pribawanto Suryawan	
<b>KETAKSAMAAN HARDY DI RUANG HERZ HOMOGEN</b>	99 – 106
Pebrudal Zanu, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi1	
<b>OPERATOR KANTOROVICH PADA RUANG MORREY DIPERUMUM</b>	107 – 114
Mu'afa Purwa Arsana, Denny Ivanal Hakim	
<b>PERLUASAN DEFINISI RATA-RATA VIA TEOREMA NILAI RATA-RATA</b>	115 – 124
Mochammad Idris	
<b>SISTEM EIGEN OPERATOR LAPLACE BERBASIS RUAS PADA SUATU POHON KUANTUM</b>	125 – 134
Moh. Januar I. Burhan, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi	

<b>SUKU BANYAK BERNSTEIN DAN OPERATOR KANTOROVICH UNTUK BEBERAPA FUNGSI YANG TIDAK KONTINU</b> Reinhart Gunadi, Denny I. Hakim	135 – 142
<b>KETERBATASAN OPERATOR TIPE VOLTERRA PADA RUANG MORREY ANALITIK <math>L_{p,\lambda}</math></b> Moch Taufik Hakiki, Wono Setya Budhi, dan Denny Ivanal Hakim	585 - 590
<b>KOMBINATORIK</b>	
<b>PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF SIPUT DAN GRAF UBUR-UBUR</b> Kevin Akbar, Kiki Ariyanti Sugeng	143 – 148
<b>DIMENSI METRIK LOKAL PADA GRAF FLOWER DAN GRAF GEAR KORONA GRAF LINTASAN</b> Salma Fauziyah Ashim, Tri Atmojo Kusmayadi, Titin Sri Martini	149 – 154
<b>PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF LILIN</b> Rizqi Rachmadhani, Kiki Ariyanti Sugeng	155 – 160
<b>PELABELAN HARMONIS PADA GRAF SEGITIGA BELAH KETUPAT VARIASI <math>LM_n</math></b> Evi Maharani, Kurniawan Atmadja	161 – 164
<b>PEWARNAAN SIMPUL <math>r</math> – DINAMIS PADA GRAF TERATAI <math>T_n</math></b> Audi Fierera, Kiki A. Sugeng	165 – 170
<b>SIFAT-SIFAT GRAF CAYLEY GRUP <math>S_n</math></b> Afifan Hadi, Kiki Ariyanti Sugeng	171-176
<b>PENDIDIKAN MATEMATIKA</b>	
<b>LKPD BERBASIS PENEMUAN TERBIMBING BERBANTUAN ALAT PERAGA PADA MATERI LUAS PERMUKAAN DAN VOLUME PRISMA DAN LIMAS</b> Fithroh Nafa Dzillah, Latifah Mustofa Lestyanto	177 – 182
<b>PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA DARING BERBASIS MODEL PENEMUAN TERBIMBING MENGGUNAKAN LIVEWORKSHEETS PADA MATERI PRISMA DAN LIMAS</b> Sania Sururul Khususna, Latifah Mustofa Lestyanto, Eddy Budiono	183 – 188
<b>PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA BERBASIS MASALAH BERBANTUAN GOOGLE FORM UNTUK PEMAHAMAN KONSEP SISWA KELAS VII SMP PADA MATERI SEGITIGA DAN SEGIEMPAT</b> Herlin Oktavita, Latifah Mustofa Lestyanto2	189 – 194
<b>EKSPLORASI ETNOMATEMATIKA PADA GELANG MANIK-MANIK KHAS DAYAK KALIMANTAN SEBAGAI SUMBER PENYUSUNAN LKPD</b> Silvia	195 – 206
<b>ANALISIS KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIS SISWA DENGAN PEMBELAJARAN MODEL BRAIN BASED LEARNING BERBASIS LEARNING MANANGEMENT SYSTEM</b> N. R. Mumtaz, M. Asikin	207 – 214
<b>PENGEMBANGAN ASESMEN ALTERNATIF DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA KONTEKS LINGKUNGAN LAHAN BASAH UNTUK SISWA TINGKAT SMP/MTS</b> Muhammad Rizal, Noor Fajriah, Agni Danaryanti	215 – 222
<b>MATERI PENGAYAAN TEORI BILANGAN DASAR DI SEKOLAH DASAR</b> Awanga Dijayangrana, Hilda Assiyatun	223-228
<b>KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS TULIS MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH VOLUME BENDA PUTAR MELALUI MODEL PERKULIAHAN KOLABORATIF</b> Fadhila Kartika Sari, Anies Fuady	229 – 236
<b>PERAN PENULISAN JURNAL DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA SECARA DARING DI MASA PANDEMI COVID-19</b>	237 – 244

Gusti Firda Khairunnisa, Frida Siswiyanti	
<b>ANALISIS KRUSKAL WALLIS UNTUK MENGETAHUI TINGKAT KOSENTRASI BELAJAR MAHASISWA BERDASARKAN PROGRAM STUDI</b>	245 – 250
Venessa Y. A. Brabar, Grace A. V. Hikoyabi, Agustinus Langowuyo	
<b>ANALISIS PENGARUH PEMANFAATAN INTERNET TERHADAP MINAT BELAJAR MAHASISWA PRODI STATISTIKA</b>	251 – 258
Mariana Tanawani, Meilani Yarangga, dan Agustinus Langowuy	
<b>PENGARUH PROSES BELAJAR MENGAJAR LURING DAN DARING TERHADAP HASIL BELAJAR MAHASISWA JURUSAN MATEMATIKA ANGAKATAN 2018 FMIPA UNIVERSITAS CENDERAWASIH</b>	259 – 264
Dewi Rahmawati, Tiara A. Nadapdap, Agustinus Langowuyo	
<b>PENILAIAN ESAI MENGGUNAKAN MODEL PEMBELAJARAN MESIN</b>	265 – 270
Farah Qotrunnada, Marcus Wono Setya Budhi, Hilda Assiyatun	
<b>PENGEMBANGAN PERANGKAT PEMBELAJARAN BERBASIS ETNOMATEMATIKA BUDAYA MASYARAKAT NEGERI TULEHU PADA MATERI SEGIEMPAT DAN SEGITIGA UNTUK SISWA DI KELAS VII MTS NEGERI I MALUKU TENGAH.</b>	271 – 276
Heni Rahim, W. Mataheru, J. Takaria	
<b>PENERAPAN FUZZY LINEAR PROGRAMMING UNTUK OPTIMASI PRODUKSI TAHU (STUDI KASUS DI DESA TANJUNGREJO KABUPATEN JEMBER)</b>	277 – 284
Anisa Wahyu Illahi, Agustina Pradjaningsih, Abduh Riski	
<b>PENENTUAN SOLUSI FISIBEL AWAL MASALAH TRANSPORTASI DENGAN MINIMUM DEMAND METHOD</b>	285 – 292
Ulniyatul Ula, Siti Khabibah, Robertus Heri S.U	
<b>OPTIMALISASI RUTE DAN PENJADWALAN PENGANGKUTAN SAMPAH DENGAN METODE INSERTION HEURISTIC DAN INTRA- ROUTE IMPROVEMENT (STUDI KASUS: UNIVERSITAS BRAWIJAYA MALANG)</b>	293 – 298
Fara El Nandhita Pratiwi	
<b>MODEL MATEMATIS RUTE WISATA DI RIAU DENGAN MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN GOL</b>	299 – 312
Ihda Hasbiyati, Hasriati, T. P. Nababan	
<b>MATEMATIKA TERAPAN</b>	
<b>MODEL SUSCEPTIBLE INFECTED RECOVERED (SIR) PADA DEMAM BERDARAH DENGUE (DBD)</b>	313 – 320
Oscar Andhry Barata, Rahmat, Rengga Nanda Pramudya	
<b>ANALISA PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE FRAKSIONAL NUMERIK MENGGUNAKAN METODE EULER DAN APLIKASINYA</b>	321 – 326
Leli Deswita, Syamsudhuha, Asral. M	
<b>TERAPAN FUNGSI SIGMOID UNTUK MENENTUKAN NILAI MAKSIMAL KOEFISIEN GAYA ANGKAT DAN SUDUT STALL PADA KURVA LINEAR <math>C_L</math> TERHADAP <math>\alpha</math></b>	327 – 334
Angga Septiyana, Singgih Satrio W, Fuad Surastyo P, Try Kusuma Wardana, Ardian Rizaldi, Novita Atmasari, Eries Bagita Jayanti, Prasetyo Ardi P	
<b>IMPLEMENTASI DEEP LEARNING UNTUK KLASIFIKASI GAMBAR MENGGUNAKAN CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORK (CNN) PADA BATIK SASAMBO</b>	335 – 340
Muna Malika, Edy Widodo	
<b>STATISTIKA</b>	
<b>PENERAPAN MODEL SPACE TIME AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (STARI(1,1,1)) PADA DATA NTP TANAMAN PANGAN DARI TIGA PROVINSI DI PULAU JAWA</b>	341 -350
Fajriatus Sholihah, Kartika Sari, Budi Nurani Ruchjana, Toni Toharudin	
<b>ANALISIS KORESPONDENSI BERGANDA UNTUK MENGETAHUI INDIKATOR-INDIKATOR YANG MEMPENGARUHI KEJADIAN LOW BACK PAIN PADA KUSIR</b>	351 - 358

<b>KUDA/DELMAN DI KOTA CIMAH I TAHUN 2019</b>	
Dhita Diana Dewi, Fajriatus Sholihah, Rosa Rosmanah, Lucy Fitria Dewi, Mochamad Yudhi Afrizal, Irlandia Ginanjar	
<b>PROSES POISSON NON HOMOGEN DAN PENERAPANNYA PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT</b>	359 – 362
Viona Prisyella Balqis, Muhammad Herlambang Prakasa Yudha, Budi Nurani Ruchjana	
<b>PENERAPAN DISTRIBUSI STASIONER RANTAI MARKOV PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT</b>	363 – 370
Tubagus Robbi Megantara, Ayun Sri Rahmani, Budi Nurani Ruchjana	
<b>SPATIAL CLUSTER ING DENGAN METODE SKATER (K'LUSTER ANALYSIS BY TREE EDGE REMOVAL) UNTUK PENGELOMPOKAN SEBARAN COVID-19 DI KABUPATEN TULUNGAGUNG</b>	371 – 380
Danang Ariyanto, Henny Pramodyo, Novi Nur Aini	
<b>ANALISIS KLASTER KABUPATEN/KOTA INDONESIA BERDASARKAN INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DENGAN MODEL MIXTURE SKEW-T</b>	381 – 388
Kristoforus Exelsis Pratama, Irwan Susanto, Yuliana Susanti	
<b>ANALISIS INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DI KABUPATEN BURU SELATAN DENGAN MENGGUNAKAN REGRESI LINIER BERGANDA</b>	389 – 396
Muhidin Jariyah, Inayah. P. F. Solong, Juan C. S. Jamco	
<b>TINJAUAN KEPUTUSAN HIPOTESA FUZZY BERBASIS P-VALUE FUZZY (STUDI KASUS DATA COVID-19 DI NUSA TENGGARA BARAT)</b>	397 – 404
Wahidaturrahmi	
<b>PENERAPAN METODE AUTO SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS PADA PERAMALAN DATA INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DI INDONESIA</b>	405 – 410
Andreas Reza Chrisantama*, Winita Sulandari, Sugiyanto	
<b>PERAMALAN JUMLAH PRODUKSI PERIKANAN DI KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE PEMULUSAN EKSPONENSIAL</b>	411 – 418
Asrul Irfanullah, Claudia Sumanik, Romy Makatita	
<b>ANALISIS PENGARUH STRUKTUR KONSUMSI AKHIR RUMAH TANGGA BERDASARKAN KOMPONEN PENGELUARAN KABUPATEN BURU SELATAN PERIODE 2015 – 2019 DENGAN RAKL</b>	419 – 424
Nikita A. Putiray, Dea M. Tuhumury, Angel M.P. Manuputty	
<b>EKSPLORASI SISA USIA BEARING MENGGUNAKAN DISTRIBUSI WEIBULL</b>	425 – 430
Sutawanir Darwis, Nusar Hajarisman, Suliadi, Achmad Widodo	
<b>PENERAPAN MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED MOVING AVERAGE (VARIMA) UNTUK PRAKIRAAN INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DAN KURS RUPIAH TERHADAP USD</b>	431 – 442
Ani Pertiwi, Lucy Fitria Dewi, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana	
<b>PENGELOMPOKKAN JUMLAH PENDUDUK KABUPATEN BURU SELATAN BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA TAHUN 2018 DENGAN ALGORITMA K- MEANS</b>	443 – 450
Samir Radjid, Nadia Istifarin, Meylani Tuasella	
<b>PENERAPAN METODE ARIMAX PADA PERAMALAN PRODUKSI DAGING SAPI DI SUKOHARJO</b>	451 – 458
Fitrian Nur Ardyansyah, Winita Sulandari, Sugiyanto	
<b>ANALISIS KEPUASAN DAN POSITIONING SELLER E-MARKETPLACE DENGAN MENGGUNAKAN IMPORTANCE PERFORMANCE ANALYSIS DAN BILOT</b>	459 – 464
Farah Dibah, Dwi Endah Kusri	
<b>KLASTERISASI LOKASI PASAR KABUPATEN BANYUMAS GUNA MEMPERMUDAH UPTD DALAM MENGELOLA KELAS PASAR</b>	465 – 470
Pradini Nurul Safitri, Abdullah Ahmad Dzikrullah	

<b>PENGARUH MOTIVASI INTRINSIK DAN KEPUASAN KERJA TERHADAP ORGANIZATIONAL CITIZENSHIP BEHAVIOR</b>	471 – 476
Diya Kasih Puspitasari, Dwi Endah Kusri	
<b>KLASTERING JUMLAH PENDUDUK BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA KECAMATAN LEKSULA TAHUN 2018 DENGAN MENGGUNAKAN METODE ALGORITMA K-MEANS</b>	477 – 484
Morensi T. Risakotta, Rensya Siwalette, Rola E. Leasa	
<b>PERAMALAN DENGAN METODE SIMPLE MOVING AVERAGE DAN DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING BROWN (STUDI KASUS: JUMLAH CURAH HUJAN DAN JUMLAH HARI HUJAN KABUPATEN BURU SELATAN)</b>	485 – 494
Apriano R. Narahawarin, Ravensky Silangen, Rahania Patiekon	
<b>PERAMALAN GARIS KEMISKINAN KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING DARI HOLT</b>	495 – 502
Ade Irma La Murdani, Intan Gainau, Unique Resiloy	
<b>ANALISIS PERBEDAAN PENDAPATAN TOKO WALET MAS SEBELUM DAN SESUDAH PANDEMI COVID-19 DENGAN METODE MANN-WHITNEY</b>	503 – 508
Marselina Ema Koten, Yunida Kurniasih, Agustinus Langowuyo	
<b>ANALISIS PENGARUH BELANJA DAERAH, JUMLAH PENDUDUK, DAN PDRB TERHADAP PENDAPATAN DAERAH DI KABUPATEN BURU SELATAN TAHUN 2013-2020</b>	509 – 516
Dephie Latumahina, Martje Riry, Olfen Sabono	
<b>UJI KECOCOKAN DISTRIBUSI RAYLEIGH BIVARIAT MENGGUNAKAN UJI KOLMOGOROV-SMIRNOV BIVARIAT PADA DATA HASIL PERTANDINGAN PERSIB BANDUNG</b>	517 – 522
Wulan Jati Nuraya, Aceng Komarudin Mutaqin	
<b>MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) UNTUK PERAMALAN BANYAKNYA KASUS TERKONFIRMASI DAN KASUS SEMBUH COVID-19 DI INDONESIA</b>	523 – 532
Sri Indra Maiyanti, Mahrudinda, Al Fataa W. Haq, Budi Nurani Ruchjana	
<b>MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) DAN PENERAPANNYA PADA DATA PERKEMBANGAN HARGA ECERAN BERAS DI TIGA IBU KOTA PROVINSI WILAYAH PULAU JAWA</b>	533 – 544
Zulfa Hidayah Satria Putri, Asri Yuniar, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana	
<b>PENERAPAN METODE REGRESI LINEAR BERGANDA UNTUK MELIHAT PENGARUH JUMLAH PENDUDUK DAN LUAS WILAYAH TERHADAP JUMLAH PENGGUNA LISTRIK DI KECAMATAN AMBALAU KABUPATEN BURU SELATAN</b>	545 – 552
Fadly Ode, Nur Statib J, Elsy Malwewar	
<b>ANALISIS TINGKAT KEGEMARAN AYAM GEPUK PAK GEMBUS DARI BERBAGAI JENIS PAKET MELALUI PENDEKATAN UJI STATISTIK</b>	553 – 558
Maharani Tiara Pramuditya, Evan Claude Boudewijn Kainama, Agustinus Langowuyo	
<b>SIMULASI PERGERAKAN HARGA SAHAM MENGGUNAKAN MODEL GERAK BROWN GEOMETRIK DENGAN R STUDIO</b>	559 – 564
Ahmad Fawaid Ridwan, Rizki Apriva Hidayana, Budi Nurani Ruchjana	
<b>PENAKSIRAN RATA-RATA <i>EXCESS CLAIM</i> PESERTA DARI PERUSAHAAN PEMBERI LAYANAN KESEHATAN PT. X</b>	565 – 572
Wildan*, Indah Permatasari, and Aceng Komarudin Mutaqin	
<b>PENGARUH SELF EFFICACY DAN MOTIVASI BELAJAR TERHADAP HASIL BELAJAR SISWA KELAS VII SMP NEGERI 3 GANTUNG</b>	573 – 584
Alperu, Nerru Pranuta Murnaka*, Indra Bayu M, Andy Wahyu H	

## SISTEM EIGEN OPERATOR LAPLACE BERBASIS RUAS PADA SUATU POHON KUANTUM

Moh. Januar I. Burhan\*, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Bandung, Indonesia  
\*e-mail: januar.ismail@s.itb.ac.id

**Abstrak.** Pada makalah ini, disajikan beberapa hasil investigasi mengenai sistem eigen operator Laplace berbasis ruas pada pohon kuantum  $P_2 \triangleright S_2$ . Diasumsikan kondisi Dirichlet berlaku pada dua verteks tepi, dan kondisi Neumann untuk verteks tepi lainnya. Beberapa hal yang dibahas dalam investigasi ini antara lain, Kalkulus ketetangaan, determinan sekular, dan dilanjutkan dengan perhitungan nilai eigen beserta analisis perilaku sistem koefisien dari fungsi eigen yang diperoleh. Salah satu hasil utama adalah simulasi fungsi eigen pada kasus ini dan selanjutnya diharapkan menjadi langkah awal untuk menentukan solusi persamaan gelombang berbasis ruas pada pohon kuantum  $P_2 \triangleright S_2$ .

**Kata kunci:** berbasis ruas, operator Laplace, dan pohon kuantum.

### 1 PENDAHULUAN

Struktur graf kuantum telah muncul pada karya ilmiah dalam kajian ilmu kimia pertama kalinya di tahun 1930-an. Struktur tersebut digunakan untuk memodelkan gerakan elektron antara atom. Dengan mengutip pada paper [1, 2] yang berisi kumpulan topik graf kuantum dengan penekanan pada analisis spektral, maka pada paper ini disajikan beberapa pembahasan mengenai teori spektral pada salah satu jenis graf kuantum.

Dari berbagai jenis graf kuantum, dalam paper ini dipilih pohon kuantum  $P_2 \triangleright S_2$  yang diperoleh dari operasi comb ( $\triangleright$ ) antara graf garis  $P_2$  dan graf bintang  $S_2$ . Lebih lanjut, hanya dua macam kasus yang akan dibahas pada graf pohon tersebut berdasarkan kondisi verteksnya. Pertama, semua kondisi verteksnya adalah Neumann-Kirchoff dan yang kedua adalah pohon kuantum jenis pertama yang dua verteks tepinya menjadi verteks berkondisi Dirichlet. Operator yang diberikan pada setiap ruas adalah operator Laplace negatif yaitu turunan kedua negatif sebagai operator diferensialnya. Operator ini bekerja pada ruas sehingga dapat disebut dengan operator Laplace berbasis ruas seperti yang diperkenalkan oleh Friedmann pada paper [3] dalam Kalkulus pada graf. Setidaknya ada beberapa alasan pemilihan pohon kuantum  $P_2 \triangleright S_2$  sebagai objek pembahasan. Diantaranya adalah suatu pohon sederhana seperti  $P_2 \triangleright S_2$  dapat dikatakan sebagai salah satu pembentuk jaringan atau graf yang sangat kompleks sehingga analisa pada pohon kuantum tersebut diharapkan menjadi gambaran secara lokal dari jaringan yang lebih besar. Alasan yang lain adalah kegunaan teori graf pada teori medan kuantum, pohon kuantum  $P_2 \triangleright S_2$  berbentuk seperti diagram Feynman, yaitu graf yang merepresentasikan interaksi dari partikel-partikel berkenaan posisi dari partikel tersebut selama proses hamburan.

Pada paper ini, kedua macam kasus pada pohon kuantum  $P_2 \triangleright S_2$  akan dianalisa mengenai spektrum operator diferensial terkait. Hasil dan pembahasan disajikan dalam dua bagian.

Pada bagian pertama dilakukan analisa spektral kuantitatif berupa kalkulus ketetangaan untuk kasus pertama, dengan mempertimbangkan struktur graf yang mendasarinya. Metode ini digunakan oleh Friedmann, Wilson, dan Aziz pada [3, 4, 5] yang diperkenalkan oleh von Below (1984). Selanjutnya untuk kasus kedua dilakukan analisis spektral kuantitatif yang berbeda, dikarenakan pada kasus kedua ini ada dua verteks tepi yang mempunyai kondisi verteks yang berbeda dengan lainnya. Sehingga hasil pada kasus ini adalah membahas metode determinan sekular yang diperkenalkan oleh Berkolaiko pada [1, 6], yang dibangun oleh matriks hamburan yang diperoleh dari masing-masing hamburan lokal pada setiap verteks. Selanjutnya, sebagai bagian terakhir, disajikan simulasi dari hasil analisa spektral yang telah dilakukan pada kasus kedua untuk pohon kuantum  $P_2 \triangleright S_2$ .

## 2 KAJIAN TEORI

Pada bagian ini, diberikan pembahasan konsep mengenai dua metode yang akan digunakan, yaitu kalkulus ketetangaan dan determinan sekular. Asumsikan notasi graf berhingga sebagai  $G = (V, E)$ , dengan  $V, E \neq \emptyset$ . Misalkan  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  dengan  $n, m \in \mathbb{N}$ . Kita akan mengatakan dua verteks  $v_i, v_j \in V$  bertetangga, dinotasikan  $v_i \sim v_j$ , apabila terdapat ruas  $e \in E$  sehingga  $e = \{v_i, v_j\}$ . Kita akan memberikan tanda setiap ruas  $e = \{v_i, v_j\}$  dengan arah tertentu, dengan mengklasifikasikan dua verteks yang bertetangga  $v_i, v_j$  menjadi verteks awal dan verteks akhir. Apabila  $v$  adalah verteks awal dan  $v_j$  adalah verteks akhir maka dapat dinotasikan  $e = (v_i, v_j)$ . Selanjutnya,

**Asumsi 2.1.** *Graf kombinatorik  $G = (V, E)$  diasumsikan sebagai graf tidak kosong, berarah, terhubung, berhingga dan sederhana.*

**Definisi 1.** *(Matriks Transisi) Misalkan  $G = (V, E)$  adalah graf yang memenuhi asumsi (2.1) dengan matriks ketetangaan  $A$ . Misalkan  $e := (1)_{n \times 1}$ , kita definisikan matriks transisi  $\tilde{A} \in [0, 1]^{n \times n}$  dengan bentuk*

$$\tilde{A}(\Gamma) := \text{Diag}(Ae)^{-1} A.$$

*Dapat ditulis entri-entri matriks transisi sebagai berikut,*

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_j a_{ij}}.$$

Misalkan  $e = (v_i, v_j)$ , didefinisikan  $o(e) := v_i$  sebagai verteks awal dan  $t(e) = v_j$  verteks akhir dari ruas berarah  $e := (v_i, v_j)$ .

**Definisi 2.** *(Matriks insidensi) Misalkan  $G = (V, E)$  adalah graf yang memenuhi asumsi (2.1) dengan himpunan verteks  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Didefinisikan matriks insidensi  $D(G) := (d_{ij}) \in \{-1, 0, 1\}^{n \times m}$  dengan*

$$d_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{jika } v_i = o(e_j), \\ 1 & \text{jika } v_i = t(e_j), \\ 0 & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Selanjutnya, dibahas sedikit mengenai graf konsep kuantum dan kondisi verteks yang membuat operator diferensial self-adjoint.

**Definisi 3.** *(Graf Bermetrik) Graf bermetrik  $G_l := (G, l)$  adalah pasangan terurut yang berisikan graf kombinatorik  $G = (V, E)$  dan fungsi  $l : E \rightarrow (0, \infty]$  dengan  $e \mapsto l(e) := l_e$ . Apabila  $|V| < \infty$  dan  $l_e < \infty$  untuk setiap  $e \in E$  maka  $G_l$  kompak. Jika  $l_e = 1$  untuk setiap  $e$  maka graf bermetrik disebut equilateral.*

Graf kuantum adalah pasangan terurut  $(G_l, \mathcal{H})$  yang berisikan dari graf bermetrik  $G_l$  dan operator differensial ((Hamiltonian))  $\mathcal{H}$  yang disertai kondisi verteks pada graf tersebut.

**Definisi 4.** Berikut ini diperkenalkan kondisi verteks tipe- $\delta$ , yang didefinisikan pada verteks  $v$  sebagai berikut, misalkan  $f \in \tilde{H}^2(G)$ , maka

$$\begin{cases} f(x) \text{ kontinu di } v, \\ \sum_{e \ni v} \frac{df}{dx_e}(v) = \alpha_v f(v), \end{cases}$$

dengan  $\alpha_v$  bilangan yang ditentukan untuk suatu verteks  $v$ .

**Definisi 5.** Selanjutnya operator Hamilton  $-\Delta_{\Gamma}^{\delta}$  dengan  $f_e \mapsto -\frac{d^2}{dx_e^2} f_e$  untuk setiap  $e \in E$  disebut dengan operator Laplace berbasis ruas yang bekerja pada ruas-ruas pada graf kuantum.  $-\Delta_{\Gamma}^K$  artinya operator Laplace berbasis ruas dengan kondisi verteks Neumann-Kirchoff pada setiap verteks di graf kuantum. Konsep ini telah diperkenalkan oleh Friedmann dan Tillich pada [3].

### 2.1 Kalkulus Ketetangaan

Diberikan sistem persamaan nilai eigen operator Laplace berbasis ruas dengan disertai kondisi Neumann Kirchoff sebagai berikut ini,

$$\begin{aligned} -f_j'' &= \lambda f_j && \text{untuk setiap } j \in \{1, \dots, m\}, \\ f_i(v) &= f_j(v) && \text{untuk setiap } v \in e_i \cap e_j, \\ \sum_{j=1}^m d_{ij} f_j'(v_i) &= 0 && \text{untuk setiap } i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Pada formula di atas diberikan fungsi  $f_j$  sebanyak  $m$ , setiap fungsi didefinisikan pada ruas  $e_j$ .

Dapat diperoleh spektrum operator Laplace berbasis ruas pada graf bermetrik  $G_l$  dengan kondisi batas Neumann-Kirchoff dari matriks transisi  $\tilde{A}(G)$  dengan hubungan sebagai berikut,

**Proposisi 2.2.** (Klawonn [7]) Misalkan  $(G_l, -\Delta_{\Gamma}^K)$  adalah graf kuantum atas kondisi Kirchoff dengan matriks transisi  $\tilde{A}$  seperti pada permasalahan (1), maka spektrum operator tersebut diberikan dengan

$$\sigma(-\Delta_{\Gamma}^K) = \{0\} \cup \left\{ \lambda > 0 : \cos \sqrt{\lambda} \in \sigma(\tilde{A}) \right\} \cup \left\{ \lambda > 0 : \cos \sqrt{\lambda} = -1 \right\},$$

tanpa menghitung multiplisitasnya. Multiplisitas  $(m(\lambda))$  masing-masing antara lain

$$m(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{jika } \lambda = 0, \\ m(\cos \sqrt{\lambda}, \tilde{A}) & \text{jika } \sin \sqrt{\lambda} \neq 0, \\ m - n + 2 & \text{jika } \cos \sqrt{\lambda} = 1 \text{ dan } \lambda > 0, \\ m - n + 2 & \text{jika } \cos \sqrt{\lambda} = -1 \text{ dan } G \text{ bipartit,} \\ m - n & \text{jika } \cos \sqrt{\lambda} = -1 \text{ dan } G \text{ bukan bipartit.} \end{cases}$$

Akibatnya diperoleh ekspresi eksplisit dari nilai eigen operator Laplace berbasis ruas pada graf bermetrik  $G_l$ .

**Akibat 2.3.** Seperti yang digambarkan pada (2.2), apabila dinotasikan nilai-nilai eigen  $\tilde{A}$  oleh  $1 = \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n \geq -1$ , maka nilai eigen  $\lambda_{r,k}$  ( $k \in \mathbb{N}_0$ ) dari graf kuantum  $-\Delta_{\Gamma}^K$  diberikan oleh

$$\lambda_{r,k} = \begin{cases} 0 & \text{jika } r = 1, k = 0, \\ (2k)^2 \pi^2 & \text{jika } r = 1, k \neq 0, \\ (2k\pi \pm \arccos(\mu_r))^2 & \text{jika } 1 < r < n, \\ (2k+1)^2 \pi^2 & \text{jika } r = n \text{ dan } G \text{ bipartit,} \\ (2k\pi \pm \arccos(\mu_r))^2 & \text{jika } r = n \text{ dan } G \text{ bukan bipartit,} \\ (2k+1)^2 \pi^2 & \text{jika } r = n+1 \text{ dan } G \text{ bukan bipartit.} \end{cases}$$

## 2.2 Matriks Hamburan

Berikut ini akan diperkenalkan matrik hamburan lokal  $\sigma^{(v)}$  yang dibahas pada literatur [1]. Tinjau masalah hamburan pada persamaan

$$-\Delta_G^\delta f = k^2 f, \quad (2)$$

di verteks  $v$  dengan diberikan kondisi verteks  $\delta$  (Dimungkinkan setiap verteks berbeda kondisi verteks yang artinya kondisi verteks tidak seragam). Pada bagian ini, solusi dari persamaan (2) dapat direpresentasikan sebagai superposisi dari  $e^{-ikx}$  dan  $e^{ikx}$ , yaitu

$$f(x) = a_1 e^{-ikx} + a_2 e^{ikx} = f_{e,v}^{\text{masuk}} + f_{e,v}^{\text{keluar}}, \quad (3)$$

**Definisi 6.** (Hamburan Lokal): Misalkan  $f^{(e)} \in \tilde{H}^2(G)$  adalah solusi dari persamaan (2) dengan  $f_{e,v}^{\text{masuk}}(x_e^v) = e^{-ikx_e^v}$  dan  $f_{e',v}^{\text{masuk}}(x_{e'}^v) = 0$  untuk setiap  $e' \in E_v \setminus \{e\}$  dengan  $E_v = \{e \in E : v \in e\}$ , maka matriks hamburan lokal

$$\sigma^{(v)} := \left( \sigma_{e',e}^{(v)} \right) \in \mathbb{C}^{d_v \times d_v}$$

di verteks  $v \in e$ , dengan  $e, e' \in E_v$  didefinisikan sebagai,

$$\begin{cases} f_e^{(e)}(x_e^v) = e^{-ikx_e^v} + \sigma_{e,e}^{(v)} e^{ikx_e^v} \text{ pada } e, \\ f_{e'}^{(e)}(x_{e'}^v) = \sigma_{e',e}^{(v)} e^{ikx_e^v} \text{ pada } e' \neq e. \end{cases}$$

Catatan:  $\sigma_{e,e}^{(v)}$  dapat diinterpretasikan sebagai koefisien pencerminan sepanjang ruas  $e$ , sedangkan  $\sigma_{e',e}^{(v)}$  untuk  $e' \neq e$  adalah koefisien hamburan dari ruas  $e$  ke ruas  $e'$ .

Selanjutnya konsep hamburan lokal pada suatu verteks  $v \in V$  akan diperluas keseluruh graf  $G$ . Misalkan  $(f, k)$  adalah pasangan eigen dari  $-\Delta f = k^2 f$ . Tinjau verteks  $v \in V$  yang berinsidensi dengan ruas  $e = \{v, v'\} \in E_v$ , Pembatasan fungsi  $f$  pada ruas  $e$  dapat secara umum ditulis sebagai

$$f_e(x_e^v) = a_b e^{ikx_e^v} + \bar{a}_{b'} e^{ikx_{e'}^v} = a_b e^{ikx_e^v} + \bar{a}_{b'} e^{ikL_e} e^{-ikx_e^v}, \quad (4)$$

dengan  $L_e$  adalah panjang ruas  $e$ .

**Definisi 7.** (Matriks Hamburan Global). Misalkan  $G$  graf kuantum dengan matriks hamburan lokal  $\sigma^{(v)}$  untuk setiap  $v \in V$ . Didefinisikan matriks hamburan global  $S(k) = (s_{b',b}) \in \mathbb{C}^{2|E| \times 2|E|}$  dengan aturan

$$s_{b',b} = \delta_{t(b),v} \delta_{o(b'),v} \sigma_{b',b}^{(v)},$$

dengan  $b, b'$  adalah pasangan ruas berarah (bond/arc) pada ruas  $e \in E$  pada graf  $G$  dan  $\delta$  dinotasikan sebagai fungsi Kronecker delta.

Apabila kita mendefinisikan vektor  $a \in \mathbb{C}^{2|E|}$  menjadi vektor yang berisikan koefisien-koefisien dari persamaan (4), maka diperoleh hubungan antara matriks hamburan global dengan vektor  $a$ . Didefinisikan  $D(k) := \text{Diag}(z_j)$  dengan  $z_j = e^{ikL_j}$  dan  $L_j$  panjang ruas yang bersesuaian dengan koefisien  $a_j$ . Selanjutnya, diperoleh hubungan

$$a = SD(k)a. \quad (5)$$

Dari persamaan (5) sebelumnya diperoleh hubungan sebagai berikut,

**Teorema 2.4.** (Berkolaiko [1]) Misalkan  $G$  graf kuantum yang kompak, maka  $k^2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  adalah nilai eigen dari operator  $-\Delta$  jika dan hanya jika  $k$  memenuhi persamaan

$$\det(I - SD(k)) = 0,$$

dengan  $D(k) := \text{Diag}(z_j)$  dengan  $z_j = e^{ikL_j}$  dan  $L_j$  panjang ruas yang bersesuaian dengan koefisien  $a_j$ .

Lebih lanjut, fungsi  $\Sigma(k) := \det(I - SD(k))$  disebut dengan determinan sekular.

### 3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebagaimana telah dijelaskan pada bab pendahuluan, jenis graf kuantum yang dibahas adalah pohon kuantum  $P_2 \triangleright S_2$ . Selanjutnya diberikan dua kasus permasalahan pada pohon kuantum tersebut. Antara lain,

**Masalah 3.1.** Misalkan  $G = (V, E)$  pohon berarah  $P_2 \triangleright S_2$  tidak kosong, terhubung, berhingga, dan sederhana dengan himpunan verteks

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

himpunan ruas

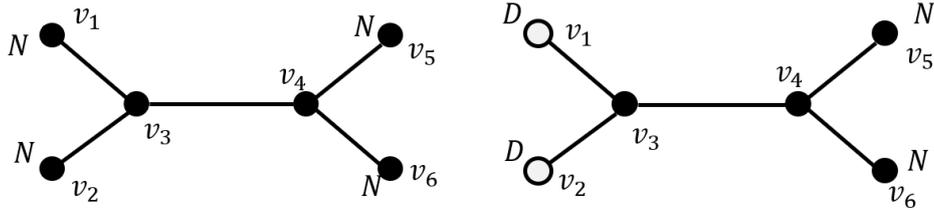
$$E = \{e_1 = \{v_1, v_3\}, e_2 = \{v_2, v_3\}, e_3 = \{v_3, v_4\}, e_4 = \{v_4, v_5\}, e_5 = \{v_4, v_6\}\},$$

matriks ketetanggaan  $A_G = (a_{ij})_{6 \times 6}$  dan matriks insidensi  $D_G = (d_{ij})$ . Asumsikan bahwa  $G$  dilengkapi dengan struktur metrik equilateral, yang berarti setiap ruas  $e = (u, v) \in E$  diidentifikasi dengan interval  $[0, 1]$  dan koordinat  $x_e \in [0, 1]$  dengan  $x_e = 0$  dan  $x_e = 1$  berhubungan dengan  $u$  dan  $v$  secara berurutan. Terakhir pada setiap ruas  $e_i \in E$  didefinisikan fungsi-fungsi ruas oleh  $f_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_i(x)$ .

Tujuan adalah menentukan spektrum dari operator Laplace berbasis ruas dan fungsi  $f_i \in \bigoplus_{e \in E} H^2(e)$  yang memenuhi  $-\Delta f = k^2 f$  dengan kondisi

1. Kasus 1, Kondisi Neumann-Kirchoff diseluruh verteks pada pohon kuantum  $P_2 \triangleright S_2$ .
2. Kasus 2, Kondisi Dirichlet pada 2 verteks tepi  $v_1$  dan  $v_2$ , serta kondisi Neumann-Kirchoff untuk verteks lainnya pada pohon kuantum  $P_2 \triangleright S_2$ .

Kedua kasus tersebut diilustrasikan pada gambar berikut ini,



Gambar 1. Kiri: Kasus 1, Kanan: Kasus2.

### 3.1 Spektrum pada kasus 1

Kasus 1 adalah kasus yang dapat diselesaikan oleh kedua metode yang diberikan. Pada paper ini kami memilih untuk mengerjakannya menggunakan analisa kuantitatif kalkulus ketetangaan. Sehingga pada paper ini kami memberikan klaim sebagai berikut,

**Klaim 3.2.** *Kasus 1 adalah kasus yang dapat diselesaikan oleh kedua metode yang diberikan. Pada pembahasannya akan dipilih analisis kuantitatif dengan kalkulus ketetangaan untuk mengerjakannya. Dilain pihak kami asumsikan bahwa kasus 2 akan lebih baik diselesaikan oleh analisis kuantitatif dengan Determinan sekular yang lebih fleksibel dengan kondisi batas pada verteks, tidak seperti halnya kalkulus ketetangaan.*

Diberikan pohon kuantum  $P_2 \triangleright S_2$  dengan kondisi Neumann-Kirchoff diseluruh verteksnya. Dapat diperoleh matriks transisi dari matriks ketetangaan sebagai berikut,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya dapat ditentukan nilai eigen dari matriks transisi  $\tilde{A}$  sebagai berikut,

$$\mu_6 = -1 \leq -\frac{2}{3} \leq 0 \leq 0 \leq \frac{2}{3} \leq 1 = \mu_1.$$

Dengan menggunakan akibat (2.3) dapat diperoleh spektrum dari operator Laplace berbasis ruas di bawah ini,

Nilai Eigen $\lambda$	untuk nilai eigen $\mu$
$\lambda_{1,0} = 0$	$\mu_1 = 1$
$\lambda_{1,k} = \{(2k\pi)^2 : k \in \mathbb{N}\}$	$\mu_1 = 1$
$\lambda_{2,k} = \{(2k\pi \pm \arccos(2/3))^2 : k \in \mathbb{N}_0\}$	$\mu_2 = 2/3$
$\lambda_{34,k} = \{(2k\pi \pm \pi/2)^2 : k \in \mathbb{N}_0^2\}$	$\mu_{3,4} = 0$
$\lambda_{5,k} = \{(2k\pi \pm \arccos(-2/3))^2 : k \in \mathbb{N}_0\}$	$\mu_5 = -2/3$
$\lambda_{6,k} = \{((2k+1)\pi)^2 : k \in \mathbb{N}_0\}$	$\mu_6 = -1$

Tabel 1. Spektrum Operator Laplace berbasis ruas pada kasus 1.

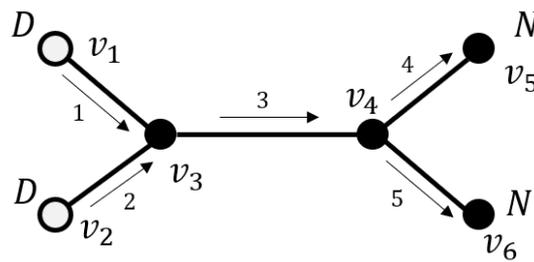
Dengan  $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$  dan  $\mathbb{N}_0^2$  artinya bermultiplisitas 2 untuk nilai eigen yang berhubungan.

### 3.2 Spektrum pada kasus 2

Sebagaimana yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya. Pada kasus 2 ini, digunakan analisa kuantitatif Determinan sekular. Hal ini dilakukan dikarenakan pada analisa kuantitatif kalkulus ketetapan tidak tepat apabila digunakan pada graf kuantum yang pada verteks-verteksnya memiliki berbagai macam kondisi batas. Apabila diberikan masalah nilai eigen operator Laplace berbasis ruas untuk kasus 2 pada masalah 3.1. Dapat disajikan solusi pada masing-masing ruas  $e_j \in E(G)$  sebagai berikut

$$f_j(x) = a_j e^{ikx} + a_{\bar{j}} e^{ik(1-x)} \text{ untuk setiap } j = 1, \dots, 5.$$

Berikut ini adalah ilustrasi kasus 2 yang telah ditambahkan pasangan ruas berarah (arc/bond) pada gambar di bawah ini.



Gambar 2. Ilustrasi kasus 2 dengan ditambahkan arah pada ruas

Pada gambar tersebut telah diberikan arah sesuai parameterisasi. Berikut ini penotasian ruas berarah (arc/bond) ke- $j$  untuk  $j = 1, \dots, 5$  sesuai variabel ruas dari  $x_e = 0$  ke  $x_e = 1$  pada pohon  $P_2 \triangleright S_2$ .

$$\{1 = (v_1, v_3), 2 = (v_2, v_3), 3 = (v_3, v_4), 4 = (v_4, v_5), 5 = (v_4, v_6)\}.$$

Kebalikan ruas berarah  $j$  dinotasikan dengan  $\bar{j}$ . Karena pada verteks  $v_1$  dan  $v_2$  diberikan kondisi batas Dirichlet, maka matriks hamburan lokal pada  $v_1$  dan  $v_2$  adalah  $\sigma^{(v_1)} = \sigma^{(v_2)} = (-1)$  yaitu koefisien  $a_1 = -a_{\bar{1}} e^{ik}$  dan  $a_2 = -a_{\bar{2}} e^{ik}$ . Selanjutnya dapat diperoleh matriks hamburan global (Global Scattering) untuk pohon  $P_2 \triangleright S_2$ ,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dengan urutan pelabelan ruas berarah (arc/bond) sebagai berikut

$$[1, 2, 3, 4, 5, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}].$$

Karena  $L_e = 1$  untuk setiap  $e \in E$ , maka matriks diagonal panjang ruas adalah

$$D(k) = \text{Diag}(z_1)_{10 \times 10},$$

dengan  $z_1 = e^{ik}$ .

**Proposisi 3.3.** Misalkan diberikan pohon kuantum  $P_2 \triangleright S_2$  sesuai masalah (3.1) pada kasus 2. Fungsi determinan sekular untuk menentukan nilai eigen dari operator Laplace berbasis ruas adalah

$$\Sigma(k) = -\frac{1}{9}(z_1 - 1)(z_1 + 1)(9z_1^4 - 10z_1^2 + 9)(z_1^2 + 1)^2.$$

**Bukti.** Dengan menggunakan teorema (2.4) □

Menurut teorema (2.4) dan proposisi (3.3) maka dapat diperoleh nilai eigen operator Laplace berbasis ruas untuk pohon kuantum  $P_2 \triangleright S_2$  dengan kondisi batas yang diberikan pada kasus 2 sebagai berikut,

Nilai Eigen $\lambda$	Faktor
$\lambda_{1,k} = \{(2k\pi)^2 : k \in \mathbb{N}\}$	$(z_1 - 1) = 0$
$\lambda_{23,k} = \{(2k\pi \pm \arccos(5/9)/2)^2 : k \in \mathbb{N}_0^2\}$	$(9z_1^4 - 10z_1^2 + 9) = 0$
$\lambda_{45,k} = \{(2k\pi \pm \pi/2)^2 : k \in \mathbb{N}_0^2\}$	$(z_1^2 + 1)^2 = 0$
$\lambda_{6,k} = \{((2k + 1)\pi)^2 : k \in \mathbb{N}_0\}$	$(z_1 + 1) = 0$

Tabel 2. Spektrum Operator Laplace berbasis ruas pada kasus 2.

Akibatnya dapat diperoleh fungsi eigen pada masing-masing ruas berhubungan dengan nilai eigen yang telah diperoleh.

**Akibat 3.4.** Misalkan diberikan pohon kuantum  $P_2 \triangleright S_2$  sesuai masalah (3.1) pada kasus 2. Fungsi eigen pada masing-masing ruas  $j = 1, \dots, 5$  yang bersesuaian dengan nilai eigen pada tabel 2 adalah

$$f_j(x) = a_j e^{ikx} + a_{\bar{j}} e^{ik(1-x)}, \text{ untuk } j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

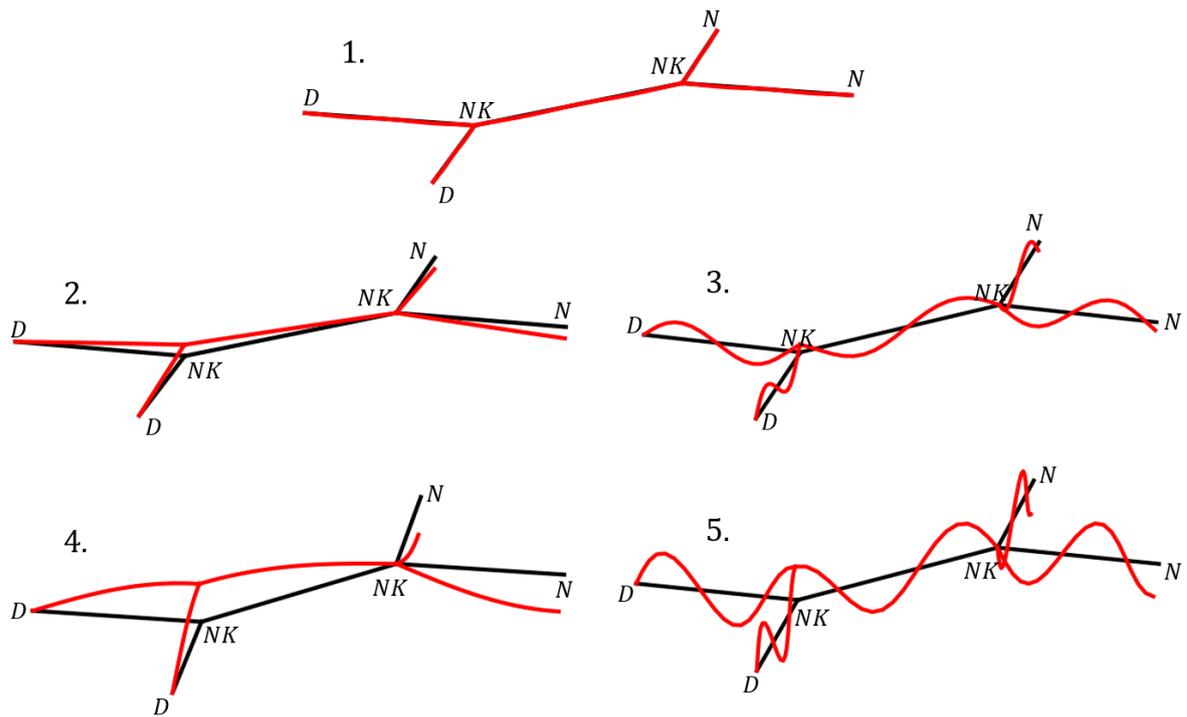
dengan ketentuan hubungan koefisien

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_{\bar{1}} e^{ik}, \\ a_2 &= -a_{\bar{2}} e^{ik}, \\ a_3 &= -\frac{2}{3} a_{\bar{1}} e^{2ik} - \frac{2}{3} a_{\bar{2}} e^{2ik} - \frac{1}{3} a_{\bar{3}} e^{ik}, \\ a_4 &= -\frac{4}{9} a_{\bar{1}} e^{3ik} - \frac{4}{9} a_{\bar{2}} e^{3ik} - \frac{2}{9} a_{\bar{3}} e^{2ik} - \frac{1}{3} a_{\bar{4}} e^{ik} + \frac{2}{3} a_{\bar{5}} e^{ik}, \\ a_5 &= -\frac{4}{9} a_{\bar{1}} e^{3ik} - \frac{4}{9} a_{\bar{2}} e^{3ik} - \frac{2}{9} a_{\bar{3}} e^{2ik} + \frac{2}{3} a_{\bar{4}} e^{ik} - \frac{1}{3} a_{\bar{5}} e^{ik}. \end{aligned}$$

### 3.3 Simulasi Fungsi Eigen

Pada bagian terakhir ini, diberikan salah satu hasil berupa simulasi fungsi eigen dari masalah nilai eigen operator Laplace berbasis ruas pada pohon kuantum  $P_2 \triangleright S_2$  untuk kasus 2 menggunakan perangkat lunak Python disajikan pada gambar 3. Fungsi eigen yang disimulasikan adalah fungsi eigen pada akibat (3.4) yang diperoleh dari spektrum operator Laplace berbasis ruas pada kasus 2 yang diberikan pada tabel 2.

Dari simulasi ini dapat ditunjukkan bahwa verteks tepi berkondisi Dirichlet membuat nilai fungsi eigen pada ruas yang beridensi dengan verteks tersebut bernilai nol.



Gambar 3. Plot fungsi eigen berwarna merah dan pohon kuantum  $P_2 \triangleright S_2$  berwarna hitam dengan keterangan: gambar pertama adalah fungsi eigen untuk nilai eigen  $\lambda_{1,1}$  dan  $\lambda_{6,0}$ , gambar kedua adalah fungsi eigen untuk nilai eigen  $\lambda_{23,0}$ , gambar ketiga adalah fungsi eigen untuk nilai eigen  $\lambda_{23,1}$ , gambar keempat adalah fungsi eigen untuk nilai eigen  $\lambda_{45,0}$ , dan gambar kelima adalah fungsi eigen untuk nilai eigen  $\lambda_{45,1}$ .

#### 4 KESIMPULAN

- Perlu dikonstruksi dan dibangun ulang pada konsep Kalkulus Ketetangaan untuk menyelesaikan masalah spektral pada graf kuantum dengan kasus kondisi batas tidak seragam.
- Analisis kuantitatif determinan sekular dapat digunakan pada graf kuantum dengan kasus kondisi batas tidak seragam
- Sistem eigen yang diperoleh pada pohon kuantum  $P_2 \triangleright S_2$  dapat menjadi bagian yang diperlukan dalam membangun persamaan gelombang linear pada pohon kuantum tersebut.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] G. Berkolaiko dan P. Kuchment, *Introduction to quantum graphs*, number 186, American Mathematical Soc, Rhode Island (2013).
- [2] P. Kuchment, "Quantum graphs: II. Some spectral properties of quantum and combinatorial graphs." *Journal of Physics A: Mathematical and General* 38.22 (2005).
- [3] J. Friedman dan J.-P. Tillich, "Wave equations for graphs and the edge-based Laplacian", *Pacific Journal of Mathematics*, 216(2), 229–266 (2004).

- [4] F. Aziz, R. C. Wilson, dan E. R. Hancock, "A wave packet signature for complex networks," *Journal of Complex Networks*, 7(3), 346–374 (2019).
- [5] R. C. Wilson, F. Aziz, dan E. R. Hancock, "Eigenfunctions of the edge-based laplacian on a graph", *Linear Algebra and its Applications*, 438(11), 4183–4189 (2013).
- [6] G. Berkolaiko, "An elementary introduction to quantum graphs," *Geometric and computational spectral theory*, 700, 41–72 (2017).
- [7] M. A. Klawonn, *Spectral comparison of the standard Laplacian on equilateral finite metric graphs subjected to Kirchhoff and Anti-Kirchhoff vertex conditions*, Hagen: FernUniversität Hagen (2019).

ISSN 2829-3770



9

772829

377007