

Konferensi Nasional MATEMATIKA 20 21



PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX
Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by
IndoMS



Organized by
Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

“Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0”

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

@Hak Cipta dilindungi Undang-undang

e-ISSN: 2829-3770

DOI issue: <https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX>

Dipublikasikan online pada:

Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:



Mei 2022

Editor:

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si, M.Si, Berny P. Tomasouw, S.Si, M.Si,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si, M. I. Tilukay, S.Si, M.Si, Monalisa E. Rijoly, S.Si, M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si, M.Si, M. B. Mananggal, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si, M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si, M.Si. Vicardy Kempa, S.Si, M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si, M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si, M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si, M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumulun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

Halaman Judul	i
Tim Reviewer	ii
Kata Pengantar	iii
Susunan Panitia KNM XX	iv
Daftar Isi	vii

ALJABAR

KLASIFIKASI TITIK KRITIS POLINOMIAL DUA VARIABEL BERDERAJAT TIGA	1 – 8
Afif Humam	
KAJIAN KEKUATAN \mathbb{Z} - MODUL \mathbb{Q} SEBAGAI INSPIRASI MUNCULNYA KONSEP DAN SIFAT DALAM TEORI MODUL	9 – 14
Sri Wahyuni, Yunita Septriana Anwar, I Putu Yudi Prabhadika	
GRAF PEMBAGI NOL DARI RING KOMUTATIF	15 – 20
Maria Vianney Any Herawati	
IDEAL TAK TEREDUKSI KUAT ATAS SEMIRING KOMUTATIF	21 – 26
Fitriana Hasnani, Nikken Prima Puspita	
BATAS ATAS PADA NORM – TAK HINGGA DARI INVERS MATRIKS NEKRASOV	27 – 32
Eddy Djauhari	
KOREPRESENTASI KOALJABAR $F[G]$	33 – 40
Na'imah Hijriati, Indah Emilia Wijayanti	
HUBUNGAN SIFAT BERSIH PADA RING, MODUL, KOMODUL DAN KOALJABAR	41 – 50
Nikken Prima Puspita, Indah Emilia Wijayanti, Budi Surodjo	
KONTRAKSI PERTINGKATAN PADA PERTINGKATAN PAULI $\mathfrak{S}\mathfrak{L}(N, \mathbb{C})$	51 – 60
Reynald Saputra, Gantina Rachmaputri	

ANALISIS

BUKTI ALTERNATIF INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG LEBESGUE DENGAN EKSPONEN PEUBAH	61 – 66
Dina Nur Amalina dan Denny Ivanal Hakim	
SEGITIGA TITIK CIRCUMCENTER PADA MODIFIKASI TEOREMA NAPOLEON	67 – 76
Yunisa Fadhilah Hartati, Mashadi	
FUNGSI SIMETRI TERHADAP TITIK (a, b) DAN BEBERAPA SIFATNYA	77 – 82
Firdaus Ubaidillah	
INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG MORREY-ADAMS DAN OPERATOR MAKSIMAL FRAKSIONAL	83 – 90
Daniel Salim, Moch. Taufik Hakiki, Denny Ivanal Hakim	
PENDEKATAN KALKULUS HIDA UNTUK PROSES HERMITE	91 – 98
Herry Pribawanto Suryawan	
KETAKSAMAAN HARDY DI RUANG HERZ HOMOGEN	99 – 106
Pebrudal Zanu, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi1	
OPERATOR KANTOROVICH PADA RUANG MORREY DIPERUMUM	107 – 114
Mu'afa Purwa Arsana, Denny Ivanal Hakim	
PERLUASAN DEFINISI RATA-RATA VIA TEOREMA NILAI RATA-RATA	115 – 124
Mochammad Idris	
SISTEM EIGEN OPERATOR LAPLACE BERBASIS RUAS PADA SUATU POHON KUANTUM	125 – 134
Moh. Januar I. Burhan, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi	

SUKU BANYAK BERNSTEIN DAN OPERATOR KANTOROVICH UNTUK BEBERAPA FUNGSI YANG TIDAK KONTINU Reinhart Gunadi, Denny I. Hakim	135 – 142
KETERBATASAN OPERATOR TIPE VOLTERRA PADA RUANG MORREY ANALITIK $L_{p,\lambda}$ Moch Taufik Hakiki, Wono Setya Budhi, dan Denny Ivanal Hakim	585 - 590
KOMBINATORIK	
PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF SIPUT DAN GRAF UBUR-UBUR Kevin Akbar, Kiki Ariyanti Sugeng	143 – 148
DIMENSI METRIK LOKAL PADA GRAF FLOWER DAN GRAF GEAR KORONA GRAF LINTASAN Salma Fauziyah Ashim, Tri Atmojo Kusmayadi, Titin Sri Martini	149 – 154
PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF LILIN Rizqi Rachmadhani, Kiki Ariyanti Sugeng	155 – 160
PELABELAN HARMONIS PADA GRAF SEGITIGA BELAH KETUPAT VARIASI LM_n Evi Maharani, Kurniawan Atmadja	161 – 164
PEWARNAAN SIMPUL r – DINAMIS PADA GRAF TERATAI T_n Audi Fierera, Kiki A. Sugeng	165 – 170
SIFAT-SIFAT GRAF CAYLEY GRUP S_n Afifan Hadi, Kiki Ariyanti Sugeng	171-176
PENDIDIKAN MATEMATIKA	
LKPD BERBASIS PENEMUAN TERBIMBING BERBANTUAN ALAT PERAGA PADA MATERI LUAS PERMUKAAN DAN VOLUME PRISMA DAN LIMAS Fithroh Nafa Dzillah, Latifah Mustofa Lestyanto	177 – 182
PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA DARING BERBASIS MODEL PENEMUAN TERBIMBING MENGGUNAKAN LIVEWORKSHEETS PADA MATERI PRISMA DAN LIMAS Sania Sururul Khususna, Latifah Mustofa Lestyanto, Eddy Budiono	183 – 188
PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA BERBASIS MASALAH BERBANTUAN GOOGLE FORM UNTUK PEMAHAMAN KONSEP SISWA KELAS VII SMP PADA MATERI SEGITIGA DAN SEGIEMPAT Herlin Oktavita, Latifah Mustofa Lestyanto2	189 – 194
EKSPLORASI ETNOMATEMATIKA PADA GELANG MANIK-MANIK KHAS DAYAK KALIMANTAN SEBAGAI SUMBER PENYUSUNAN LKPD Silvia	195 – 206
ANALISIS KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIS SISWA DENGAN PEMBELAJARAN MODEL BRAIN BASED LEARNING BERBASIS LEARNING MANANGEMENT SYSTEM N. R. Mumtaz, M. Asikin	207 – 214
PENGEMBANGAN ASESMEN ALTERNATIF DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA KONTEKS LINGKUNGAN LAHAN BASAH UNTUK SISWA TINGKAT SMP/MTS Muhammad Rizal, Noor Fajriah, Agni Danaryanti	215 – 222
MATERI PENGAYAAN TEORI BILANGAN DASAR DI SEKOLAH DASAR Awanga Dijayangrana, Hilda Assiyatun	223-228
KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS TULIS MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH VOLUME BENDA PUTAR MELALUI MODEL PERKULIAHAN KOLABORATIF Fadhila Kartika Sari, Anies Fuady	229 – 236
PERAN PENULISAN JURNAL DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA SECARA DARING DI MASA PANDEMI COVID-19	237 – 244

Gusti Firda Khairunnisa, Frida Siswiyanti ANALISIS KRUSKAL WALLIS UNTUK MENGETAHUI TINGKAT KOSENTRASI BELAJAR MAHASISWA BERDASARKAN PROGRAM STUDI	245 – 250
Venessa Y. A. Brabar, Grace A. V. Hikoyabi, Agustinus Langowuyo ANALISIS PENGARUH PEMANFAATAN INTERNET TERHADAP MINAT BELAJAR MAHASISWA PRODI STATISTIKA	251 – 258
Mariana Tanawani, Meilani Yarangga, dan Agustinus Langowuy PENGARUH PROSES BELAJAR MENGAJAR LURING DAN DARING TERHADAP HASIL BELAJAR MAHASISWA JURUSAN MATEMATIKA ANGAKATAN 2018 FMIPA UNIVERSITAS CENDERAWASIH	259 – 264
Dewi Rahmawati, Tiara A. Nadapdap, Agustinus Langowuyo PENILAIAN ESAI MENGGUNAKAN MODEL PEMBELAJARAN MESIN	265 – 270
Farah Qotrunnada, Marcus Wono Setya Budhi, Hilda Assiyatun PENGEMBANGAN PERANGKAT PEMBELAJARAN BERBASIS ETNOMATEMATIKA BUDAYA MASYARAKAT NEGERI TULEHU PADA MATERI SEGIEMPAT DAN SEGITIGA UNTUK SISWA DI KELAS VII MTS NEGERI I MALUKU TENGAH.	271 – 276
Heni Rahim, W. Mataheru, J. Takaria PENERAPAN FUZZY LINEAR PROGRAMMING UNTUK OPTIMASI PRODUKSI TAHU (STUDI KASUS DI DESA TANJUNGREJO KABUPATEN JEMBER)	277 – 284
Anisa Wahyu Illahi, Agustina Pradjaningsih, Abduh Riski PENENTUAN SOLUSI FISIBEL AWAL MASALAH TRANSPORTASI DENGAN MINIMUM DEMAND METHOD	285 – 292
Ulniyatul Ula, Siti Khabibah, Robertus Heri S.U OPTIMALISASI RUTE DAN PENJADWALAN PENGANGKUTAN SAMPAH DENGAN METODE INSERTION HEURISTIC DAN INTRA- ROUTE IMPROVEMENT (STUDI KASUS: UNIVERSITAS BRAWIJAYA MALANG)	293 – 298
Fara El Nandhita Pratiwi MODEL MATEMATIS RUTE WISATA DI RIAU DENGAN MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN GOL	299 – 312
Ihda Hasbiyati, Hasriati, T. P. Nababan	
MATEMATIKA TERAPAN	
MODEL SUSCEPTIBLE INFECTED RECOVERED (SIR) PADA DEMAM BERDARAH DENGUE (DBD)	313 – 320
Oscar Andhry Barata, Rahmat, Rengga Nanda Pramudya ANALISA PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE FRAKSIONAL NUMERIK MENGGUNAKAN METODE EULER DAN APLIKASINYA	321 – 326
Leli Deswita, Syamsudhuha, Asral. M TERAPAN FUNGSI SIGMOID UNTUK MENENTUKAN NILAI MAKSIMAL KOEFISIEN GAYA ANGKAT DAN SUDUT STALL PADAKURVA LINEAR C_L TERHADAP α	327 – 334
Angga Septiyana, Singgih Satrio W, Fuad Surastyo P, Try Kusuma Wardana, Ardian Rizaldi, Novita Atmasari, Eries Bagita Jayanti, Prasetyo Ardi P IMPLEMENTASI DEEP LEARNING UNTUK KLASIFIKASI GAMBAR MENGGUNAKAN CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORK (CNN) PADA BATIK SASAMBO	335 – 340
Muna Malika, Edy Widodo	
STATISTIKA	
PENERAPAN MODEL SPACE TIME AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (STARI(1,1,1)) PADA DATA NTP TANAMAN PANGAN DARI TIGA PROVINSI DI PULAU JAWA	341 -350
Fajriatus Sholihah, Kartika Sari, Budi Nurani Ruchjana, Toni Toharudin ANALISIS KORESPONDENSI BERGANDA UNTUK MENGETAHUI INDIKATOR-INDIKATOR YANG MEMPENGARUHI KEJADIAN LOW BACK PAIN PADA KUSIR	351 - 358

KUDA/DELMAN DI KOTA CIMAH I TAHUN 2019	
Dhita Diana Dewi, Fajriatus Sholihah, Rosa Rosmanah, Lucy Fitria Dewi, Mochamad Yudhi Afrizal, Irlandia Ginanjar	
PROSES POISSON NON HOMOGEN DAN PENERAPANNYA PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT	359 – 362
Viona Prisyella Balqis, Muhammad Herlambang Prakasa Yudha, Budi Nurani Ruchjana	
PENERAPAN DISTRIBUSI STASIONER RANTAI MARKOV PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT	363 – 370
Tubagus Robbi Megantara, Ayun Sri Rahmani, Budi Nurani Ruchjana	
SPATIAL CLUSTER ING DENGAN METODE SKATER (K'LUSTER ANALYSIS BY TREE EDGE REMOVAL) UNTUK PENGELOMPOKAN SEBARAN COVID-19 DI KABUPATEN TULUNGAGUNG	371 – 380
Danang Ariyanto, Henny Pramodyo, Novi Nur Aini	
ANALISIS KLASTER KABUPATEN/KOTA INDONESIA BERDASARKAN INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DENGAN MODEL MIXTURE SKEW-T	381 – 388
Kristoforus Exelsis Pratama, Irwan Susanto, Yuliana Susanti	
ANALISIS INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DI KABUPATEN BURU SELATAN DENGAN MENGGUNAKAN REGRESI LINIER BERGANDA	389 – 396
Muhidin Jariyah, Inayah. P. F. Solong, Juan C. S. Jamco	
TINJAUAN KEPUTUSAN HIPOTESA FUZZY BERBASIS P-VALUE FUZZY (STUDI KASUS DATA COVID-19 DI NUSA TENGGARA BARAT)	397 – 404
Wahidaturrahmi	
PENERAPAN METODE AUTO SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS PADA PERAMALAN DATA INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DI INDONESIA	405 – 410
Andreas Reza Chrisantama*, Winita Sulandari, Sugiyanto	
PERAMALAN JUMLAH PRODUKSI PERIKANAN DI KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE PEMULUSAN EKSPONENSIAL	411 – 418
Asrul Irfanullah, Claudia Sumanik, Romy Makatita	
ANALISIS PENGARUH STRUKTUR KONSUMSI AKHIR RUMAH TANGGA BERDASARKAN KOMPONEN PENGELUARAN KABUPATEN BURU SELATAN PERIODE 2015 – 2019 DENGAN RAKL	419 – 424
Nikita A. Putiray, Dea M. Tuhumury, Angel M.P. Manuputty	
EKSPLORASI SISA USIA BEARING MENGGUNAKAN DISTRIBUSI WEIBULL	425 – 430
Sutawanir Darwis, Nusar Hajarisman, Suliadi, Achmad Widodo	
PENERAPAN MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED MOVING AVERAGE (VARIMA) UNTUK PRAKIRAAN INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DAN KURS RUPIAH TERHADAP USD	431 – 442
Ani Pertiwi, Lucy Fitria Dewi, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana	
PENGELOMPOKKAN JUMLAH PENDUDUK KABUPATEN BURU SELATAN BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA TAHUN 2018 DENGAN ALGORITMA K-MEANS	443 – 450
Samin Radjid, Nadia Istifarin, Meylani Tuasella	
PENERAPAN METODE ARIMAX PADA PERAMALAN PRODUKSI DAGING SAPI DI SUKOHARJO	451 – 458
Fitrian Nur Ardyansyah, Winita Sulandari, Sugiyanto	
ANALISIS KEPUASAN DAN POSITIONING SELLER E-MARKETPLACE DENGAN MENGGUNAKAN IMPORTANCE PERFORMANCE ANALYSIS DAN BILOT	459 – 464
Farah Dibah, Dwi Endah Kusri	
KLASTERISASI LOKASI PASAR KABUPATEN BANYUMAS GUNA MEMPERMUDAH UPTD DALAM MENGELOLA KELAS PASAR	465 – 470
Pradini Nurul Safitri, Abdullah Ahmad Dzikrullah	

PENGARUH MOTIVASI INTRINSIK DAN KEPUASAN KERJA TERHADAP ORGANIZATIONAL CITIZENSHIP BEHAVIOR	471 – 476
Diya Kasih Puspitasari, Dwi Endah Kusrini	
KLASTERING JUMLAH PENDUDUK BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA KECAMATAN LEKSULA TAHUN 2018 DENGAN MENGGUNAKAN METODE ALGORITMA K-MEANS	477 – 484
Morensi T. Risakotta, Rensya Siwalette, Rola E. Leasa	
PERAMALAN DENGAN METODE SIMPLE MOVING AVERAGE DAN DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING BROWN (STUDI KASUS: JUMLAH CURAH HUJAN DAN JUMLAH HARI HUJAN KABUPATEN BURU SELATAN)	485 – 494
Apriano R. Narahawarin, Ravensky Silangen, Rahania Patiekon	
PERAMALAN GARIS KEMISKINAN KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING DARI HOLT	495 – 502
Ade Irma La Murdani, Intan Gainau, Unique Resiloy	
ANALISIS PERBEDAAN PENDAPATAN TOKO WALET MAS SEBELUM DAN SESUDAH PANDEMI COVID-19 DENGAN METODE MANN-WHITNEY	503 – 508
Marselina Ema Koten, Yunida Kurniasih, Agustinus Langowuyo	
ANALISIS PENGARUH BELANJA DAERAH, JUMLAH PENDUDUK, DAN PDRB TERHADAP PENDAPATAN DAERAH DI KABUPATEN BURU SELATAN TAHUN 2013-2020	509 – 516
Dephie Latumahina, Martje Riry, Olfen Sabono	
UJI KECOCOKAN DISTRIBUSI RAYLEIGH BIVARIAT MENGGUNAKAN UJI KOLMOGOROV-SMIRNOV BIVARIAT PADA DATA HASIL PERTANDINGAN PERSIB BANDUNG	517 – 522
Wulan Jati Nuraya, Aceng Komarudin Mutaqin	
MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) UNTUK PERAMALAN BANYAKNYA KASUS TERKONFIRMASI DAN KASUS SEMBUH COVID-19 DI INDONESIA	523 – 532
Sri Indra Maiyanti, Mahrudinda, Al Fataa W. Haq, Budi Nurani Ruchjana	
MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) DAN PENERAPANNYA PADA DATA PERKEMBANGAN HARGA ECERAN BERAS DI TIGA IBU KOTA PROVINSI WILAYAH PULAU JAWA	533 – 544
Zulfa Hidayah Satria Putri, Asri Yuniar, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana	
PENERAPAN METODE REGRESI LINEAR BERGANDA UNTUK MELIHAT PENGARUH JUMLAH PENDUDUK DAN LUAS WILAYAH TERHADAP JUMLAH PENGGUNA LISTRIK DI KECAMATAN AMBALAU KABUPATEN BURU SELATAN	545 – 552
Fadly Ode, Nur Statib J, Elsy Malwewar	
ANALISIS TINGKAT KEGEMARAN AYAM GEPUK PAK GEMBUS DARI BERBAGAI JENIS PAKET MELALUI PENDEKATAN UJI STATISTIK	553 – 558
Maharani Tiara Pramuditya, Evan Claude Boudewijn Kainama, Agustinus Langowuyo	
SIMULASI PERGERAKAN HARGA SAHAM MENGGUNAKAN MODEL GERAK BROWN GEOMETRIK DENGAN R STUDIO	559 – 564
Ahmad Fawaid Ridwan, Rizki Apriva Hidayana, Budi Nurani Ruchjana	
PENAKSIRAN RATA-RATA <i>EXCESS CLAIM</i> PESERTA DARI PERUSAHAAN PEMBERI LAYANAN KESEHATAN PT. X	565 – 572
Wildan*, Indah Permatasari, and Aceng Komarudin Mutaqin	
PENGARUH SELF EFFICACY DAN MOTIVASI BELAJAR TERHADAP HASIL BELAJAR SISWA KELAS VII SMP NEGERI 3 GANTUNG	573 – 584
Alperu, Nerru Pranuta Murnaka*, Indra Bayu M, Andy Wahyu H	

KLASIFIKASI TITIK KRITIS POLINOMIAL DUA VARIABEL BERDERAJAT TIGA

Afif Humam

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Indonesia
e-mail: afif.humam@math.itb.ac.id

Abstrak. Jika diketahui fungsi dengan polinomial homogen derajat tiga, maka semua titik kritis tidak ada yang bersifat ekstrim (titik maksimum atau minimum). Tetapi akan berbeda jika fungsi berbentuk polinomial derajat tiga lengkap. Pada makalah ini kita akan melihat semua kemungkinan sifat dari titik kritis fungsi dua variabel tersebut jika koefisien dari polinomial tersebut berubah di bilangan real. Langkah pertama adalah menggunakan translasi dan rotasi dari koordinat sehingga bentuk polinomial derajat tiga tersebut dapat disederhanakan. Kemudian dengan menggunakan resultan dari pasangan turunan parsial pertama, kita akan dapat melihat semua kemungkinan dari titik kritis. Selanjutnya setelah semua titik kritis diperoleh, kita akan menguji sifat titik kritis tersebut.

Kata kunci: turunan parsial, titik kritis, polinomial resultan, matriks Hessian

1 PENDAHULUAN

Misalkan kita mempunyai fungsi dua variabel dengan turunan parsial kedua terdefinisi pada setiap titik. Ditinjau dari nilai determinan Hessian pada titik kritis, berdasarkan teori Morse titik kritis terbagi menjadi dua jenis, yakni *nondegenerate* dan *degenerate* ([1]). Adapun titik *nondegenerate* terbagi lagi menjadi tiga macam, yaitu minimum lokal, maksimum lokal, dan pelana.

Misalkan $F(x, y)$ adalah polinom dua variabel berderajat total tiga. Titik (x_0, y_0) adalah titik kritis dari F apabila memenuhi sistem persamaan $F_x(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) = 0$. Perhatikan bahwa tidak semua polinomial berderajat tiga memiliki titik kritis. Sebagai contoh, polinomial $F(x, y) = x^3 + y^3 - y^2 + 3x + 1$ tidak memiliki titik kritis karena $0 = F_x(x, y) = 3(x^2 + 1)$ tidak memiliki solusi real.

Untuk mengetahui apakah $F(x, y)$ memiliki titik kritis, kita dapat meninjau polinomial resultan dari F_x dan F_y , yaitu $Res(F_x, F_y, x)$ dan $Res(F_x, F_y, y)$. Titik (x_0, y_0) adalah titik kritis dari $F(x, y)$ jika dan hanya jika $x = x_0$ dan $y = y_0$ berturut-turut adalah solusi dari $Res(F_x, F_y, y) = 0$ dan $Res(F_x, F_y, x) = 0$ ([2], Chapter 3). Adapun polinomial-polinomial resultan tersebut adalah polinom satu variabel berderajat maksimum empat, sehingga paling banyak $F(x, y)$ paling banyak memiliki empat titik kritis. Adapun eksistensi solusi real polinom satu variabel berderajat maksimum empat dapat ditinjau melalui koefisien-koefisiennya (lihat [3]).

Pada makalah ini, kita melakukan studi awal klasifikasi semua kemungkinan banyaknya titik kritis polinomial dua variabel berderajat total tiga beserta jenisnya.

2 POLINOMIAL BERBENTUK $F(x, y) = ax^3 + 3x^2y + by^3 + 3cx^2 + 3dy^2$

Misalkan $F(x, y)$ adalah polinom berderajat total tiga yang memiliki titik kritis. Transformasi translasi dan rotasi pada sumbu- z dengan sudut tertentu ([4], Chapter 9) membuat kita dapat menyederhanakan masalah dengan meninjau polinomial tanpa suku linier dan suku dengan monomial xy . Kasus paling mudah adalah ketika polinomial berbentuk $F(x, y) = p(x) + q(y)$, yaitu polinomial tanpa suku-suku dengan monomial x^2y dan xy^2 .

Pada bagian ini kita akan meninjau kasus ketika tepat salah satu dari koefisien x^2y dan xy^2 tidak bernilai nol. Tanpa mengurangi keumuman, dengan kesimetrian kita dapat memilih koefisien x^2y yang tidak bernilai nol, kita misalkan $F(x, y) = ax^3 + 3x^2y + by^3 + 3cx^2 + 3dy^2$. Titik kritis dari $F(x, y)$ adalah solusi dari

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= 3ax^2 + 6xy + 6cx = 0 \\ F_y(x, y) &= 3x^2 + 3by^2 + 6dy = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Salah satu titik kritis dari $F(x, y)$ adalah $(0, 0)$ dan mudah untuk memeriksa bahwa tidak ada titik kritis lain di sumbu- x . Misalkan terdapat titik kritis lain yang tidak terletak di sumbu koordinat, maka dengan dilatasi tertentu pada sumbu- x , sumbu- y , dan sumbu- z dapat dipilih titik kritisnya memiliki koordinat $(1, 1)$. Adapun determinan Hessian di setiap titik (x, y) diberikan oleh

$$\det(\mathbf{H}_F(x, y)) = \det \begin{bmatrix} F_{xx}(x, y) & F_{xy}(x, y) \\ F_{yx}(x, y) & F_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 6(ax + y + c) & 6x \\ 6x & 6(by + d) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

2.1 Terdapat Titik Kritis Lain di Sumbu- y

Misalkan $(0, \beta)$ adalah titik kritis dari $F(x, y)$ dengan $\beta \neq 0$. Karena $F_y(0, \beta) = 0$, maka haruslah $2d = -\beta b$. Perhatikan bahwa determinan Hessian di titik $(0, 0)$ dan $(0, \beta)$ berturut-turut adalah $\det(\mathbf{H}_F(0, 0)) = 36cd$ dan $\det(\mathbf{H}_F(0, \beta)) = -36(\beta + c)d$.

1. Titik $(0, 0)$ dan $(0, \beta)$ keduanya *degenerate*

Kasus ini dipenuhi oleh $d = 0$. Akibatnya, kurva $F_x(x, y) = 0$ dan $F_y(x, y) = 0$ memiliki garis persekutuan, yaitu $x = 0$. Seluruh titik pada garis tersebut adalah titik kritis *nondegenerate*.

2. Titik $(0, 0)$ *degenerate* dan $(0, \beta)$ *nondegenerate*

Kasus ini dipenuhi oleh $d \neq 0$ dan $c = 0$. Akibatnya, $F_x(x, y) = F_y(x, y) = 0$ menghasilkan $x = 0$ atau $x^2 + b(a/2)^2x^2 + \beta b(a/2)x = 0$ (diberikan oleh $ax + 2y = 0$)

- (a) Tidak ada titik kritis lain.

Kasus ini dipenuhi saat $a = 0$ atau $a^2b = -4$.

- (b) Ada titik kritis lain.

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan titik kritis lainnya adalah $(1, 1)$. Diperoleh $a = -2$ dan $1 + b = \beta b$. Kemudian, $\det(\mathbf{H}_F(1, 1)) = 36d \neq 0$ sehingga $(1, 1)$ adalah titik kritis *nondegenerate*. Karena sudah ada tiga titik kritis berbeda dan salah satunya *degenerate*, maka tidak ada lagi titik kritis lain.

3. Titik $(0, 0)$ *nondegenerate* dan $(0, \beta)$ *degenerate*

Kasus ini dipenuhi oleh $d \neq 0$ dan $c = -\beta$, yaitu $bc = 2d \neq 0$.

(a) Tidak ada titik kritis lain.

Kasus ini dipenuhi saat $a = 0$ atau $a^2b = -4$.

(b) Ada titik kritis lain.

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan titik kritis lainnya adalah $(1, 1)$ (melalui dilatasi, karena tidak ada titik kritis lain baik di sumbu- x maupun di sumbu- y). Diperoleh $a = -2 - 2c$ dan $1 + b = -bc = -2d$. Kemudian, $\det(\mathbf{H}_F(1, 1)) = 18c \neq 0$ sehingga $(1, 1)$ adalah titik kritis *nondegenerate*. Karena sudah ada tiga titik kritis berbeda dan salah satunya *degenerate*, maka tidak ada lagi titik kritis lainnya.

4. Titik $(0, 0)$ dan $(0, \beta)$ keduanya *nondegenerate*.

Kasus ini dipenuhi oleh $b \neq 0$, $c \neq 0$, dan $bc \neq 2d$. Perhatikan bahwa, $F_x(x, y) = F_y(x, y) = 0$ menghasikan $x = 0$ atau $(1 - (ab^2/4))x^2 + a(bc - e)x + c(bc - 2d) = 0$.

(a) Tidak ada titik kritis lainnya

Kasus ini terjadi saat $a^2(bc - d)^2 < (4 - ab^2)c(bc - 2d)$.

(b) Ada titik kritis lain.

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan titik kritis lainnya adalah $(1, 1)$. Diperoleh $a = -2 - 2c$ dan $1 + b = -2d$. Kemudian, $\det(\mathbf{H}_F(1, 1)) = 36(c + d + cd)$.

i. $(1, 1)$ *degenerate*

Kasus ini terjadi saat $c + d + cd = 0$. Karena sudah terdapat tiga titik kritis berbeda dan salah satunya *degenerate*, maka tidak ada titik kritis lain

ii. $(1, 1)$ *nondegenerate*

Kasus ini terjadi saat $c + d + cd \neq 0$. Selanjutnya, jika $a^2(bc - d)^2 = (4 - ab^2)c(bc - 2d)$, maka tidak ada titik kritis lain. Adapun jika $a^2(bc - d)^2 \neq (4 - ab^2)c(bc - 2d)$, maka terdapat satu titik kritis lain yang juga *nondegenerate*.

2.2 Tidak Terdapat Titik Kritis Lain di Sumbu- y

Kasus ini terjadi saat $b = 0 \neq d$ atau $d = 0 \neq b$.

1. Kondisi $b = 0 \neq d$

Pada kasus ini, $F_x(x, y) = F_y(x, y) = 0$ terjadi saat $x(-(x^2/d) + ax + 2c) = 0$.

(a) Tidak ada titik kritis lain

Kasus ini terjadi saat $a^2 + 8\frac{c}{d} < 0$ atau $a = c = 0$. Di sini, $(0, 0)$ adalah titik kritis *nondegenerate* jika $a^2 + 8\frac{c}{d} < 0$ dan *degenerate* jika $a = c = 0$.

(b) Ada titik kritis lain

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $(1, 1)$ adalah titik kritis lain dari $F(x, y)$, maka $2d = -1$ dan $a + 2c = -2$. Diperoleh $a^2 + 8\frac{c}{d} = 4(c - 1)^2$.

i. Tidak ada titik kritis lain

Kasus ini terjadi saat $c = 0$ atau $c = 1$. Jika $c = 0$, maka $(0, 0)$ adalah titik kritis *degenerate* dan $(1, 1)$ adalah titik kritis *nondegenerate*. Sebaliknya, jika $c = 1$, maka $(0, 0)$ adalah titik kritis *nondegenerate* dan $(1, 1)$ adalah titik kritis *degenerate*

ii. Ada titik kritis lain

Kasus ini terjadi saat $0 \neq c \neq 1$. Titik kritis lainnya adalah (c, c^2) . Di sini, $(0, 0)$, $(1, 1)$, dan (c, c^2) adalah titik-titik kritis *nondegenerate*.

2. Kondisi $d = 0 \neq b$

Pada kasus ini, $F_x(x, y) = F_y(x, y) = 0$ terjadi saat $x^2 = -by^2$ dan $x(ax + 2y + 2c) = 0$.

(a) Tidak ada titik kritis lain

Kasus ini terjadi saat $b > 0$. Di sini, $(0, 0)$ adalah titik kritis *degenerate*.

(b) Ada titik kritis lain

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $(1, 1)$ adalah titik kritis lain dari $F(x, y)$, maka $b = -1$ dan $a + 2c = -2$. Diperoleh $2y = a + 2 \pm ay$, yaitu $y(2 \pm a) = 2 + a$

i. Tidak ada titik kritis lain

Kasus ini terjadi saat $a = 2$. Di sini, $(0, 0)$ adalah titik kritis *degenerate* dan $(1, 1)$ adalah titik kritis *nondegenerate*.

ii. Ada tepat satu titik kritis lain

Kasus ini terjadi saat $-2 \neq a \neq 2$. Titik kritis lainnya adalah $\left(\frac{2+a}{a-2}, \frac{2+a}{2-a}\right)$.

Di sini, $(0, 0)$ adalah titik kritis *degenerate* dan dua titik lainnya adalah titik-titik kritis *nondegenerate*.

iii. Terdapat garis persekutuan

Kasus ini terjadi saat $a = -2$. Garis $y = x$ memenuhi $F_x(x, y) = F_y(x, y) = 0$. Setiap titik yang dilalui oleh garis tersebut adalah titik kritis *degenerate*.

3 POLINOMIAL BERBENTUK $F(x, y) = ax^3 + 3x^2y + 3xy^2 + by^3 + 3cx^2 + 3dy^2$

Pada bagian terakhir, kita akan meninjau polinom dengan kedua koefisien x^2y dan xy^2 tidak bernilai nol. Tanpa mengurangi keumuman, dengan dilatasi tertentu pada sumbu- x dan sumbu- y , kita dapat memilih kedua koefisien tersebut bernilai sama. Selanjutnya dengan sifat simetri (pencerminan terhadap bidang $y = x$), kita cukup meninjau kasus $a \geq b$.

Perhatikan bahwa turunan parsial dari $F(x, y)$ adalah

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= 3ax^2 + 6xy + 3y^2 + 6cx \\ F_y(x, y) &= 3x^2 + 6xy + 3by^2 + 6dy \end{aligned} \tag{3}$$

Dari bentuk di atas dapat diperiksa bahwa tidak ada titik kritis selain $(0, 0)$ pada sumbu-sumbu koordinat. Selanjutnya kita menghitung resultan kedua fungsi di atas

$$\begin{aligned} Res(F_x, F_y, x) &= \det \begin{bmatrix} 3a & 0 & 3 & 0 \\ 6(y+c) & 3a & 6y & 3 \\ 3y^2 & 6(y+c) & 3by^2 + 6dy & 6y \\ 0 & 3y^2 & 0 & 3by^2 + 6dy \end{bmatrix} \\ &= 3^4(Py^4 + Qy^3 + Ry^2 + Sy) \end{aligned} \tag{4}$$

dengan

$$\begin{aligned} P &= a^2b^2 - 6ab + 4a + 4b - 3 \\ Q &= 4a^2bd - 4abc - 12ad + 8bc - 4c + 8d \\ R &= 4a^2d^2 - 8acd + 16cd + 4bc^2 \\ S &= 8c^2d \end{aligned} \tag{5}$$

Kita akan memeriksa kemungkinan titik kritis berdasarkan bentuk kurva $F_x(x, y) = 0$ dan $F_y(x, y) = 0$ yang merupakan irisan kerucut.

3.1 Persamaan $F_x(x, y) = 0$ berbentuk elips atau sebuah titik ($a > 1$)

Bentuk sebuah titik terjadi saat $c = 0$. Jelas bahwa dalam bentuk ini, $(0, 0)$ adalah satu-satunya titik kritis yang bersifat *degenerate*. Bentuk elips terjadi saat $c \neq 0$.

1. Elips-Elips, Elips-Parabola, dan Elips-Hiperbola

Kasus ini terjadi saat $d \neq 0$. Terdapat tiga kemungkinan.

- (a) Total terdapat dua titik kritis, keduanya *nondegenerate*.
- (b) Total terdapat tiga titik kritis, salah satunya *degenerate*. (saat kedua kurva bersinggungan)
- (c) Total terdapat empat titik kritis *nondegenerate*.

2. Elips-Sebuah Garis

Kasus ini terjadi saat $b = 1$ dan $d = 0$, menghasilkan fungsi yang memiliki tepat dua titik kritis, keduanya *degenerate*.

3. Elips-Dua Garis Berpotongan

Kasus ini terjadi saat $b < 1$ dan $d = 0$. Karena $(0, 0)$ adalah titik perpotongan dari dua garis yang berpotongan, maka kasus ini menghasilkan dua kemungkinan

- (a) Tepat dua titik kritis berbeda dengan $(0, 0)$ *degenerate* dan titik lainnya bersifat *nondegenerate*. Kasus ini terjadi saat $b = 0$.
- (b) Tepat tiga titik kritis berbeda dengan $(0, 0)$ *degenerate* dan dua titik sisanya bersifat *nondegenerate*. Kasus ini terjadi saat $b \neq 0$.

3.2 Persamaan $F_x(x, y) = 0$ berbentuk parabola atau sebuah garis ($a = 1$)

Bentuk sebuah garis terjadi saat $c = 0$.

1. Jika $F_y(x, y) = 0$ juga berbentuk sebuah garis, yakni $b = 1$ dan $d = 0$, maka setiap titik yang dilalui garis $x + y = 0$ adalah titik-titik kritis *degenerate*.
2. Jika $F_y(x, y) = 0$ berbentuk parabola, yakni $b = 1$, maka $(0, 0)$ adalah satu-satunya titik kritis dan bersifat *degenerate*.
3. Jika $F_y(x, y) = 0$ berbentuk dua garis berpotongan, yakni $b < 1$ dan $d = 0$, maka $(0, 0)$ adalah satu-satunya titik kritis dan bersifat *degenerate*.
4. Jika $F_y(x, y) = 0$ berbentuk hiperbola, yakni $b < 1$ dan $d \neq 0$, maka terdapat tepat dua titik kritis yang merupakan titik kritis *degenerate*.

Adapun bentuk parabola terjadi saat $c \neq 0$.

1. Parabola-Parabola

Kasus ini terjadi saat $b = 1$ dan $d \neq 0$. Terdapat dua kemungkinan:

- (a) Titik $(0, 0)$ menjadi satu-satunya titik kritis dan bersifat *nondegenerate*.
- (b) Total terdapat dua titik kritis, keduanya *nondegenerate*. (saat $c + d \neq 0$)

2. Parabola-Dua Garis Berpotongan

Kasus ini terjadi saat $b < 1$ dan $d = 0$. Terdapat dua kemungkinan:

- (a) Tepat dua titik kritis berbeda dengan $(0, 0)$ *degenerate* dan titik lainnya bersifat *non-degenerate*. Kasus ini terjadi saat $b = 0$.
- (b) Tepat tiga titik kritis berbeda dengan $(0, 0)$ *degenerate* dan dua titik sisanya bersifat *nondegenerate*. Kasus ini terjadi saat $b \neq 0$.

3. Parabola-Hiperbola

Kasus ini terjadi saat $b < 1$ dan $d \neq 0$. Terdapat tiga kemungkinan:

- (a) Total terdapat dua titik kritis, keduanya *nondegenerate*.
- (b) Total terdapat tiga titik kritis, salah satunya *degenerate*. (saat parabola dan hiperbola bersinggungan)
- (c) Total terdapat empat titik kritis *nondegenerate*.

3.3 Persamaan $F_x(x, y) = 0$ berbentuk hiperbola atau sepasang garis berpotongan ($a < 1$)

Kondisi terakhir ini akan kita bagi menjadi tiga kasus:

1. Dua Garis Berpotongan-Dua Garis Berpotongan

Kasus ini terjadi saat $b < 1$ dan $c = d = 0$. Terdapat dua kemungkinan pada kasus ini:

- (a) Titik $(0, 0)$ menjadi satu-satunya titik kritis dan bersifat *degenerate*.
- (b) Terdapat sebuah garis yang melalui $(0, 0)$ dan setiap titik yang dilalui adalah titik kritis *degenerate*. (saat $P = 0$)

2. Dua Garis Berpotongan-Hiperbola

Kasus ini terjadi saat $b < 1$ dan $c = 0 \neq d$. Terdapat dua kemungkinan pada kasus ini:

- (a) Titik kritis $(0, 0)$ adalah titik *degenerate* dan terdapat tepat satu titik kritis lain yang bersifat *nondegenerate*. (saat $P = 0$)
- (b) Titik kritis $(0, 0)$ adalah titik *degenerate* dan terdapat tepat dua titik kritis lain yang bersifat *nondegenerate*.

3. Hiperbola-Hiperbola

Kasus ini terjadi saat $b < 1$ dan $cd \neq 0$. Kemungkinan pada kasus ini antara lain:

- (a) Terdapat tepat satu titik kritis *nondegenerate*.
- (b) Terdapat tepat dua titik kritis *nondegenerate*.
- (c) Terdapat tepat satu titik kritis *nondegenerate* dan satu titik kritis *degenerate*.
- (d) Terdapat tepat tiga titik kritis *nondegenerate*.
- (e) Terdapat tepat dua titik kritis *nondegenerate* dan satu titik kritis *degenerate*.
- (f) Terdapat empat titik kritis *nondegenerate*.

4 KESIMPULAN

- Fungsi polinomial dua variabel berderajat total tiga dapat memiliki tak berhingga banyaknya titik kritis yang membentuk sebuah garis, atau berhingga banyaknya titik kritis dengan jumlah tidak lebih dari empat buah.
- Kemungkinan paling banyak terjadi pada kondisi kedua kurva ketinggian fungsi turunan parsial pertama di ketinggian nol berbentuk hiperbola.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Y. Matsumoto, *An Introduction to Morse Theory (Translations of Mathematical Monographs, Vol. 208)*. American Mathematical Society, 2001.
- [2] D. A. Cox, L. John, and D. O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms. 3rd ed.* Springer, 2007.
- [3] D. Lazard, "Quantifier elimination: Optimal solution for two classical examples," *Journal of Symbolic Computation*. 5 (1-2): 261-266. doi:10.1016/S0747-7171(88)80015-4, 1988.
- [4] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra Applications Version, 9th Edition*. Wiley, 2005.

ISSN 2829-3770



9

772829

377007