Konferensi Nasional MATEMATIKA 2021

PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by IndoMS

Organized by Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

"Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0"

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

e-ISSN: 2829-3770
DOI issue: https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX

Dipublikasikan online pada:
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:

Mei 2022

Editor:

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si., M.Si., Berny P. Tomasouw, S.Si., M.Si.,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si., M. I. Tilukay, S.Si., M.Si., Monalisa E. Rijoly, S.Si., M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si., M.Si, M. B. Mananggel, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si., M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si., M.Si. Vicardy Kempa, S.Si., M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si., M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si., M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si., M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumalun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

MATEMATIKA TERAPAN

STATISTIKA

https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX.1-8

KNM XX
Universitas Pattimura Ambon, 6-7 Juli 2021

KLASIFIKASI TITIK KRITIS POLINOMIAL DUA VARIABEL BERDERAJAT TIGA

Afif Humam

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Indonesia
e-mail: afif.humam@math.itb.ac.id

Abstrak. *Jika diketahui fungsi dengan polinomial homogen derajat tiga, maka semua titik kritis tidak ada yang bersifat ekstrim (titik maksimum atau minimum). Tetapi akan berbeda jika fungsi berbentuk polinomial derajat tiga lengkap. Pada makalah ini kita akan melihat semua kemungkinan sifat dari titik kritis fungsi dua variabel tersebut jika koefisien dari polinomial tersebut berubah di bilangan real. Langkah pertama adalah menggunakan translasi dan rotasi dari koordinat sehingga bentuk polinomial derajat tiga tersebut dapat disederhanakan. Kemudian dengan menggunakan resultan dari pasangan turunan parsial pertama, kita akan dapat melihat semua kemungkinan dari titik kritis. Selanjutnya setelah semua titik kritis diperoleh, kita akan menguji sifat titik kritis tersebut.*

Kata kunci: turunan parsial, titik kritis, polinomial resultan, matriks Hessian

1 PENDAHULUAN

Misalkan kita mempunyai fungsi dua variabel dengan turunan parsial kedua terdefinisi pada setiap titik. Ditinjau dari nilai determinan Hessian pada titik kritis, berdasarkan teori Morse titik kritis terbagi menjadi dua jenis, yakni *nondegenerate* dan *degenerate* ([1]). Adapun titik *nondegenerate* terbagi lagi menjadi tiga macam, yaitu minimum lokal, maksimum lokal, dan pelana.

Misalkan $F(x, y)$ adalah polinom dua variabel berderajat total tiga. Titik (x_0, y_0) adalah titik kritis dari F apabila memenuhi sistem persamaan $F_x(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) = 0$. Perhatikan bahwa tidak semua polinomial berderajat tiga memiliki titik kritis. Sebagai contoh, polinomial $F(x, y) = x^3 + y^3 - y^2 + 3x + 1$ tidak memiliki titik kritis karena $0 = F_x(x, y) = 3(x^2 + 1)$ tidak memiliki solusi real.

Untuk mengetahui apakah $F(x, y)$ memiliki titik kritis, kita dapat meninjau polinomial resultan dari F_x dan F_y, yaitu $Res(F_x, F_y, x)$ dan $Res(F_x, F_y, y)$. Titik (x_0, y_0) adalah titik kritis dari $F(x, y)$ jika dan hanya jika $x = x_0$ dan $y = y_0$ berturut-turut adalah solusi dari $Res(F_x, F_y, y) = 0$ dan $Res(F_x, F_y, x) = 0$ ([2], Chapter 3). Adapun polinomial-polinomial resultan tersebut adalah polinom satu variabel berderajat maksimum empat, sehingga paling banyak $F(x, y)$ paling banyak memiliki empat titik kritis. Adapun eksistensi solusi real polinom satu varibel berderajat maksimum empat dapat ditinjau melalui koefisien-koefisiennya (lihat [3]).

Pada makalah ini, kita melakukan studi awal klasifikasi semua kemungkinan banyaknya titik kritis polinomial dua variabel berderajat total tiga beserta jenisnya.

2 POLINOMIAL BERBENTUK $F(x, y) = ax^3 + 3x^2y + by^3 + 3cx^2 + 3dy^2$

Misalkan $F(x, y)$ adalah polinom berderajat total tiga yang memiliki titik kritis. Transformasi translasi dan rotasi pada sumbu-z dengan sudut tertentu ([4], Chapter 9) membuat kita dapat menyederhanakan masalah dengan meninjau polinomial tanpa suku linier dan suku dengan monomial xy. Kasus paling mudah adalah ketika polinomial berbentuk $F(x, y) = p(x) + q(y)$, yaitu polinomial tanpa suku-suku dengan monomial x^2y dan xy^2.

Pada bagian ini kita akan meninjau kasus ketika tepat salah satu dari koefisien x^2y dan xy^2 tidak bernilai nol. Tanpa mengurangi keumuman, dengan kesimetrian kita dapat memilih koefisien x^2y yang tidak bernilai nol, kita misalkan $F(x, y) = ax^3 + 3x^2y + by^3 + 3cx^2 + 3dy^2$. Titik kritis dari $F(x, y)$ adalah solusi dari

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= 3ax^2 + 6xy + 6cx = 0 \\ F_y(x, y) &= 3x^2 + 3by^2 + 6dy = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Salah satu titik kritis dari $F(x, y)$ adalah $(0, 0)$ dan mudah untuk memeriksa bahwa tidak ada titik kritis lain di sumbu-x. Misalkan terdapat titik kritis lain yang tidak terletak di sumbu koordinat, maka dengan dilatasi tertentu pada sumbu-x, sumbu-y, dan sumbu-z dapat dipilih titik kritisnya memiliki koordinat $(1, 1)$. Adapun determinan Hessian di setiap titik (x, y) diberikan oleh

$$\det(\mathbf{H}_F(x, y)) = \det \begin{bmatrix} F_{xx}(x, y) & F_{xy}(x, y) \\ F_{yx}(x, y) & F_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 6(ax + y + c) & 6x \\ 6x & 6(by + d) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

2.1 Terdapat Titik Kritis Lain di Sumbu-y

Misalkan $(0, \beta)$ adalah titik kritis dari $F(x, y)$ dengan $\beta \neq 0$. Karena $F_y(0, \beta) = 0$, maka haruslah $2d = -\beta b$. Perhatikan bahwa determinan Hessian di titik $(0, 0)$ dan $(0, \beta)$ berturut-turut adalah $\det(\mathbf{H}_F(0, 0)) = 36cd$ dan $\det(\mathbf{H}_F(0, \beta)) = -36(\beta + c)d$.

1. Titik $(0, 0)$ dan $(0, \beta)$ keduanya *degenerate*
   Kasus ini dipenuhi oleh $d = 0$. Akibatnya, kurva $F_x(x, y) = 0$ dan $F_y(x, y) = 0$ memiliki garis persekutuan, yaitu $x = 0$. Seluruh titik pada garis tersebut adalah titik kritis *nondegenerate*.

2. Titik $(0, 0)$ *degenerate* dan $(0, \beta)$ *nondegenerate*
   Kasus ini dipenuhi oleh $d \neq 0$ dan $c = 0$. Akibatnya, $F_x(x, y) = F_y(x, y) = 0$ menghasikan $x = 0$ atau $x^2 + b(a/2)^2x^2 + \beta b(a/2)x = 0$ (diberikan oleh $ax + 2y = 0$)

   (a) Tidak ada titik kritis lain.
   Kasus ini dipenuhi saat $a = 0$ atau $a^2b = -4$.

   (b) Ada titik kritis lain.
   Tanpa mengurangi keumuman, misalkan titik kritis lainnya adalah $(1, 1)$. Diperoleh $a = -2$ dan $1 + b = \beta b$. Kemudian, $\det(\mathbf{H}_F(1, 1)) = 36d \neq 0$ sehingga $(1, 1)$ adalah titik kritis *nondegenerate*. Karena sudah ada tiga titik kritis berbeda dan salah satunya *degenerate*, maka tidak ada lagi titik kritis lain.

3. Titik $(0, 0)$ *nondegenerate* dan $(0, \beta)$ *degenerate*
   Kasus ini dipenuhi oleh $d \neq 0$ dan $c = -\beta$, yaitu $bc = 2d \neq 0$.

(a) Tidak ada titik kritis lain.
Kasus ini dipenuhi saat $a = 0$ atau $a^2 b = -4$.

(b) Ada titik kritis lain.
Tanpa mengurangi keumuman, misalkan titik kritis lainnya adalah $(1, 1)$ (melalui dilatasi, karena tidak ada titik kritis lain baik di sumbu-x maupun di sumbu-y). Diperoleh $a = -2 - 2c$ dan $1 + b = -bc = -2d$. Kemudian, $\det(\mathbf{H}_F(1, 1)) = 18c \neq 0$ sehingga $(1, 1)$ adalah titik kritis *nondegenerate*. Karena sudah ada tiga titik kritis berbeda dan salah satunya *degenerate*, maka tidak ada lagi titik kritis lainnya.

4. Titik $(0, 0)$ dan $(0, \beta)$ keduanya *nondegenerate*.
Kasus ini dipenuhi oleh $b \neq 0$, $c \neq 0$, dan $bc \neq 2d$. Perhatikan bahwa, $F_x(x, y) = F_y(x, y) = 0$ menghasikan $x = 0$ atau $(1 - (ab^2/4))x^2 + a(bc - e)x + c(bc - 2d) = 0$.

(a) Tidak ada titik kritis lainnya
Kasus ini terjadi saat $a^2(bc - d)^2 < (4 - ab^2)c(bc - 2d)$.

(b) Ada titik kritis lain.
Tanpa mengurangi keumuman, misalkan titik kritis lainnya adalah $(1, 1)$. Diperoleh $a = -2 - 2c$ dan $1 + b = -2d$. Kemudian, $\det(\mathbf{H}_F(1, 1)) = 36(c + d + cd)$.

i. $(1, 1)$ *degenerate*
Kasus ini terjadi saat $c + d + cd = 0$. Karena sudah terdapat tiga titik kritis berbeda dan salah satunya *degenerate*, maka tidak ada titik kritis lain

ii. $(1, 1)$ *nondegenerate*
Kasus ini terjadi saat $c + d + cd \neq 0$. Selanjutnya, jika $a^2(bc - d)^2 = (4 - ab^2)c(bc - 2d)$, maka tidak ada titik kritis lain. Adapun jika $a^2(bc - d)^2 \neq (4 - ab^2)c(bc - 2d)$, maka terdapat satu titik kritis lain yang juga *nondegenerate*.

2.2 Tidak Terdapat Titik Kritis Lain di Sumbu-y

Kasus ini terjadi saat $b = 0 \neq d$ atau $d = 0 \neq b$.

1. Kondisi $b = 0 \neq d$
Pada kasus ini, $F_x(x, y) = F_y(x, y) = 0$ terjadi saat $x(-(x^2/d) + ax + 2c) = 0$.

(a) Tidak ada titik kritis lain
Kasus ini terjadi saat $a^2 + 8\frac{c}{d} < 0$ atau $a = c = 0$. Di sini, $(0, 0)$ adalah titik kritis *nondegenerate* jika $a^2 + 8\frac{c}{d} < 0$ dan *degenerate* jika $a = c = 0$.

(b) Ada titik kritis lain
Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $(1, 1)$ adalah titik kritis lain dari $F(x, y)$, maka $2d = -1$ dan $a + 2c = -2$. Diperoleh $a^2 + 8\frac{c}{d} = 4(c - 1)^2$.

i. Tidak ada titik kritis lain
Kasus ini terjadi saat $c = 0$ atau $c = 1$. Jika $c = 0$, maka $(0, 0)$ adalah titik kritis *degenerate* dan $(1, 1)$ adalah titik kritis *nondegenerate*. Sebaliknya, jika $c = 1$, maka $(0, 0)$ adalah titik kritis *nondegenerate* dan $(1, 1)$ adalah titik kritis *degenerate*

ii. Ada titik kritis lain
Kasus ini terjadi saat $0 \neq c \neq 1$. Titik kritis lainnya adalah (c, c^2). Di sini, $(0, 0)$, $(1, 1)$, dan (c, c^2) adalah titik-titik kritis *nondegenerate*.

2. Kondisi $d = 0 \neq b$
   Pada kasus ini, $F_x(x,y) = F_y(x,y) = 0$ terjadi saat $x^2 = -by^2$ dan $x(ax+2y+2c) = 0$.
   (a) Tidak ada titik kritis lain
   Kasus ini terjadi saat $b > 0$. Di sini, $(0,0)$ adalah titik kritis *degenerate*.
   (b) Ada titik kritis lain
   Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $(1,1)$ adalah titik kritis lain dari $F(x,y)$, maka $b = -1$ dan $a + 2c = -2$. Diperoleh $2y = a + 2 \pm ay$, yaitu $y(2 \pm a) = 2 + a$
      i. Tidak ada titik kritis lain
      Kasus ini terjadi saat $a = 2$. Di sini, $(0,0)$ adalah titik kritis *degenerate* dan $(1,1)$ adalah titik kritis *nondegenerate*.
      ii. Ada tepat satu titik kritis lain
      Kasus ini terjadi saat $-2 \neq a \neq 2$. Titik kritis lainnya adalah $\left(\frac{2+a}{a-2}, \frac{2+a}{2-a}\right)$.
      Di sini, $(0,0)$ adalah titik kritis *degenerate* dan dua titik lainnya adalah titik-titik kritis *nondegenerate*.
      iii. Terdapat garis persekutuan
      Kasus ini terjadi saat $a = -2$. Garis $y = x$ memenuhi $F_x(x,y) = F_y(x,y) = 0$. Setiap titik yang dilalui oleh garis tersebut adalah titik kritis *degenerate*.

3 POLINOMIAL BERBENTUK $F(x,y) = ax^3 + 3x^2y + 3xy^2 + by^3 + 3cx^2 + 3dy^2$

Pada bagian terakhir, kita akan meninjau polinom dengan kedua koefisien x^2y dan xy^2 tidak bernilai nol. Tanpa mengurangi keumuman, dengan dilatasi tertentu pada sumbu-x dan sumbu-y, kita dapat memilih kedua koefisien tersebut bernilai sama. Selanjutnya dengan sifat simetri (pencerminan terhadap bidang $y = x$), kita cukup meninjau kasus $a \geq b$.

Perhatikan bahwa turunan parsial dari $F(x,y)$ adalah

$$\begin{aligned} F_x(x,y) &= 3ax^2 + 6xy + 3y^2 + 6cx \\ F_y(x,y) &= 3x^2 + 6xy + 3by^2 + 6dy \end{aligned} \tag{3}$$

Dari bentuk di atas dapat diperiksa bahwa tidak ada titik kritis selain $(0,0)$ pada sumbu-sumbu koordinat. Selanjutnya kita menghitung resultan kedua fungsi di atas

$$\begin{aligned} Res(F_x, F_y, x) &= \det \begin{bmatrix} 3a & 0 & 3 & 0 \\ 6(y+c) & 3a & 6y & 3 \\ 3y^2 & 6(y+c) & 3by^2 + 6dy & 6y \\ 0 & 3y^2 & 0 & 3by^2 + 6dy \end{bmatrix} \\ &= 3^4(Py^4 + Qy^3 + Ry^2 + Sy) \end{aligned} \tag{4}$$

dengan

$$\begin{aligned} P &= a^2b^2 - 6ab + 4a + 4b - 3 \\ Q &= 4a^2bd - 4abc - 12ad + 8bc - 4c + 8d \\ R &= 4a^2d^2 - 8acd + 16cd + 4bc^2 \\ S &= 8c^2d \end{aligned} \tag{5}$$

Kita akan memeriksa kemungkinan titik kritis berdasarkan bentuk kurva $F_x(x,y) = 0$ dan $F_y(x,y) = 0$ yang merupakan irisan kerucut.

3.1 Persamaan $F_x(x, y) = 0$ berbentuk elips atau sebuah titik $(a > 1)$

Bentuk sebuah titik terjadi saat $c = 0$. Jelas bahwa dalam bentuk ini, $(0, 0)$ adalah satu-satunya titik kritis yang bersifat *degenerate*. Bentuk elips terjadi saat $c \neq 0$.

1. Elips-Elips, Elips-Parabola, dan Elips-Hiperbola
   Kasus ini terjadi saat $d \neq 0$. Terdapat tiga kemungkinan.
   (a) Total terdapat dua titik kritis, keduanya *nondegenerate*.
   (b) Total terdapat tiga titik kritis, salah satunya *degenerate*. (saat kedua kurva bersinggungan)
   (c) Total terdapat empat titik kritis *nondegenerate*.
2. Elips-Sebuah Garis
   Kasus ini terjadi saat $b = 1$ dan $d = 0$, menghasilkan fungsi yang memiliki tepat dua titik kritis, keduanya *degenerate*.
3. Elips-Dua Garis Berpotongan
   Kasus ini terjadi saat $b < 1$ dan $d = 0$. Karena $(0, 0)$ adalah titik perpotongan dari dua garis yang berpotongan, maka kasus ini menghasilkan dua kemungkinan
   (a) Tepat dua titik kritis berbeda dengan $(0, 0)$ *degenerate* dan titik lainnya bersifat *nondegenerate*. Kasus ini terjadi saat $b = 0$.
   (b) Tepat tiga titik kritis berbeda dengan $(0, 0)$ *degenerate* dan dua titik sisanya bersifat *nondegenerate*. Kasus ini terjadi saat $b \neq 0$.

3.2 Persamaan $F_x(x, y) = 0$ berbentuk parabola atau sebuah garis $(a = 1)$

Bentuk sebuah garis terjadi saat $c = 0$.

1. Jika $F_y(x, y) = 0$ juga berbentuk sebuah garis, yakni $b = 1$ dan $d = 0$, maka setiap titik yang dilalui garis $x + y = 0$ adalah titik-titik kritis *degenerate*.
2. Jika $F_y(x, y) = 0$ berbentuk parabola, yakni $b = 1$, maka $(0, 0)$ adalah satu-satunya titik kritis dan bersifat *degenerate*.
3. Jika $F_y(x, y) = 0$ berbentuk dua garis berpotongan, yakni $b < 1$ dan $d = 0$, maka $(0, 0)$ adalah satu-satunya titik kritis dan bersifat *degenerate*.
4. Jika $F_y(x, y) = 0$ berbentuk hiperbola, yakni $b < 1$ dan $d \neq 0$, maka terdapat tepat dua titik kritis yang merupakan titik kritis *degenerate*.

Adapun bentuk parabola terjadi saat $c \neq 0$.

1. Parabola-Parabola
   Kasus ini terjadi saat $b = 1$ dan $d \neq 0$. Terdapat dua kemungkinan:
   (a) Titik $(0, 0)$ menjadi satu-satunya titik kritis dan bersifat *nondegenerate*.
   (b) Total terdapat dua titik kritis, keduanya *nondegenerate*. (saat $c + d \neq 0$)
2. Parabola-Dua Garis Berpotongan
   Kasus ini terjadi saat $b < 1$ dan $d = 0$. Terdapat dua kemungkinan:

(a) Tepat dua titik kritis berbeda dengan $(0,0)$ *degenerate* dan titik lainnya bersifat *non-degenerate*. Kasus ini terjadi saat $b = 0$.

(b) Tepat tiga titik kritis berbeda dengan $(0,0)$ *degenerate* dan dua titik sisanya bersifat *nondegenerate*. Kasus ini terjadi saat $b \neq 0$.

3. Parabola-Hiperbola
Kasus ini terjadi saat $b < 1$ dan $d \neq 0$. Terdapat tiga kemungkinan:

(a) Total terdapat dua titik kritis, keduanya *nondegenerate*.

(b) Total terdapat tiga titik kritis, salah satunya *degenerate*. (saat parabola dan hiperbola bersinggungan)

(c) Total terdapat empat titik kritis *nondegenerate*.

3.3 Persamaan $F_x(x, y) = 0$ berbentuk hiperbola atau sepasang garis berpotongan $(a < 1)$

Kondisi terakhir ini akan kita bagi menjadi tiga kasus:

1. Dua Garis Berpotongan-Dua Garis Berpotongan
Kasus ini terjadi saat $b < 1$ dan $c = d = 0$. Terdapat dua kemungkinan pada kasus ini:

(a) Titik $(0,0)$ menjadi satu-satunya titik kritis dan bersifat *degenerate*.

(b) Terdapat sebuah garis yang melalui $(0,0)$ dan setiap titik yang dilalui adalah titik kritis *degenerate*. (saat $P = 0$)

2. Dua Garis Berpotongan-Hiperbola
Kasus ini terjadi saat $b < 1$ dan $c = 0 \neq d$. Terdapat dua kemungkinan pada kasus ini:

(a) Titik kritis $(0,0)$ adalah titik *degenerate* dan terdapat tepat satu titik kritis lain yang bersifat *nondegenerate*. (saat $P = 0$)

(b) Titik kritis $(0,0)$ adalah titik *degenerate* dan terdapat tepat dua titik kritis lain yang bersifat *nondegenerate*.

3. Hiperbola-Hiperbola
Kasus ini terjadi saat $b < 1$ dan $cd \neq 0$. Kemungkinan pada kasus ini antara lain:

(a) Terdapat tepat satu titik kritis *nondegenerate*.

(b) Terdapat tepat dua titik kritis *nondegenerate*.

(c) Terdapat tepat satu titik kritis *nondegenerate* dan satu titik kritis *degenerate*.

(d) Terdapat tepat tiga titik kritis *nondegenerate*.

(e) Terdapat tepat dua titik kritis *nondegenerate* dan satu titik kritis *degenerate*.

(f) Terdapat empat titik kritis *nondegenerate*.

4 KESIMPULAN

- Fungsi polinomial dua variabel berderajat total tiga dapat memiliki tak berhingga banyaknya titik kritis yang membentuk sebuah garis, atau berhingga banyaknya titik kritis dengan jumlah tidak lebih dari empat buah.
- Kemungkinan paling banyak terjadi pada kondisi kedua kurva ketinggian fungsi turunan parsial pertama di ketinggian nol berbentuk hiperbola.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Y. Matsumoto, *An Introduction to Morse Theory (Translations of Mathematical Monographs, Vol. 208).* American Mathematical Society, 2001.

[2] D. A. Cox, L. John, and D. O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms. 3rd ed.* Springer, 2007.

[3] D. Lazard, "Quantifier elimination: Optimal solution for two classical examples," *Journal of Symbolic Computation.* 5 (1-2): 261-266. doi:10.1016/S0747-7171(88)80015-4, 1988.

[4] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra Applications Version, 9th Edition.* Wiley, 2005.

ISSN 2829-3770
9 772829 377007