Konferensi Nasional MATEMATIKA KNM 2021

PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX
Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by IndoMS

Organized by Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

"Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0"

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

e-ISSN: 2829-3770
DOI issue: https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX

Dipublikasikan online pada:
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:

Mei 2022

Editor:
Dr. Harmanus Batkunde, S.Si., M.Si., Berny P. Tomasouw, S.Si., M.Si.,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si., M. I. Tilukay, S.Si., M.Si., Monalisa E. Rijoly, S.Si., M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si., M.Si, M. B. Mananggel, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si., M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si., M.Si. Vicardy Kempa, S.Si., M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si., M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si., M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si., M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumalun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

MATEMATIKA TERAPAN

STATISTIKA

https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX.9-14

KAJIAN KEKUATAN $\mathbb{Z}$ - MODUL $\mathbb{Q}$ SEBAGAI INSPIRASI MUNCULNYA KONSEP DAN SIFAT DALAM TEORI MODUL

Sri Wahyuni[1,*], **Yunita Septriana Anwar**[2], **dan I Putu Yudi Prabhadika**[3]

[1]Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
[2] Mahasiswa PS Doktor Matematika, Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
[3] Mahasiwa PS Magister Matematika, Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
*e-mail: swahyuni@ugm.ac.id

Abstrak. *Grup bilangan rasional* $(\mathbb{Q}, +)$ *sebagai modul atas daerah integral bilangan bulat* $(\mathbb{Z}, +, \dot{})$ *($\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$) merupakan contoh modul khusus yang mempunyai sifat-sifat yang unik yang sangat penting dalam munculnya konsep dan sifat dalam aljabar, khususnya dalam teori modul. Sifat yang sudah sangat dikenal adalah $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ merupakan modul torsi yang tidak bebas, dan lebih jauh modul $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$ merupakan modul torsi tak hingga.*

Dalam paper ini akan dipersentasikan hasil kajian $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ dalam kaitannya dengan struktur modul faktorisasi tunggal. Diperoleh bahwa $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ mempunyai sifat tidak memiliki elemen primitif yang kemudian berakibat dalam $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ tidak terdapat submodul siklik yang dibangun oleh suatu elemen primitif yang merupakan submodul murni. Selanjutnya akan dikaji peran $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ dalam kaitannya dengan konsep D-submodul fraksional dan konsep M-ideal fraksional dalam teori modul aritmatik. Lebih jauh akan dikaji sifat $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ dalam kaitannya dengan modul injektif dan modul miskin. Diperoleh sifat $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ mempunyai sifat keterbagian, keinjektifan, dan merupakan amplop injektif bagi setiap submodul $\mathbb{Q}$. Sebagai ring, $\mathbb{Q}$ merupakan ring semisederhana dan Artinian sehingga setiap modul atas $\mathbb{Q}$ merupakan modul miskin.

Kata kunci: modul faktorisasi tunggal, submodul dan ideal fraksional, modul injektif, amplop injektif

1 Pendahuluan: Latar Belakang

Modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama dipandang mempunyai sifat yang relatif bagus dalam arti memiliki sifat mendekati sifat yang dimiliki oleh ruang vektor diantaranya: jika modul atas daerah ideal utama tersebut merupakan modul bebas torsi dibangun secara hingga maka modul tersebut merupakan modul bebas ([1]). Persyaratan dibangun secara hingga tersebut "sangat penting" untuk menjadi modul bebas, sebagai *counterexample* yang bagus adalah $\mathbb{Q}$ sebagai modul atas daerah ideal utama $\mathbb{Z}$. Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa modul $\mathbb{Q}$ sebagai modul atas daerah ideal utama $\mathbb{Z}$ merupakan bebas torsi namun bukan modul yang dibangun secara hingga karena untuk setiap himpunan bagian berhingga dalam $\mathbb{Q}$ sebut $S = \{\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \cdots, \frac{p_k}{q_k}\}$ akan selalu ada $x \in \mathbb{Q}$ yang tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear elemen-elemen dalam S.

Lebih jauh lagi jika D merupakan daerah integral, suatu D-module M dikatakan modul yang dapat dibagi (*divisible*) jika untuk setiap $m \in M$ dan untuk setiap $d \in D - \{0\}$ terdapat $m' \in M$ sedemikian hingga $dm' = m$. Dengan kata lain, suatu modul M atas daerah intergral D disebut dapat dibagi jika untuk setiap fungsi $\mu_d : M \to M$ dengan $m \to dm$ merupakan fungsi surjektif.

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $\mathbb{Q}$ sebagai modul atas daerah ideal utama $\mathbb{Z}$ merupakan modul yang dapat dibagi. Selanjutnya $\mathbb{Z}$ sendiri merupakan submodul dari $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ sehingga terbentuk $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$ yang dapat ditunjukkan merupakan modul yang dapat dibagi dan juga modul injektif. Dalam paper ini akan dipresentasikan lebih jauh sifat $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ di dalam struktur modul injektif.

2 Hasil dan Pembahasan: Sifat $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ terkait beberapa struktur modul.

Dalam bagian ini akan dikaji sifat keinjektifan, keterbagian, ketakterdekomposisian, dan perluasan esensial pada $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ yang mengilhami contoh-contoh lain sebagai generalisasi dari sifat pada $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$. Lebih lanjut, akan dikaji hubungan $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ dengan grup Prüfer $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.

(a) Keinjektifan dan Keterbagian di dalam $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$

Suatu R-modul M disebut modul injektif jika dan hanya jika untuk setiap monomorfisma $f\colon A \to B$ dan setiap homomorfisma $h\colon A \to M$, terdapat homomorfisma $g\colon B \to M$ sedemikian hingga $gf = h$, yaitu Gambar 1(a) komutatif. Definisi ini ekuivalen dengan pernyataan untuk setiap ideal kiri $I \subseteq R$ dan setiap homomorfisma $\varphi\colon I \to M$, terdapat homomorfisma $\psi\colon R \to M$ sedemikian hingga $\psi i = \varphi$, yaitu Gambar 1(b) komutatif [3].

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \\ & M & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & R \\ & M & \end{tikzcd}$$

(a) $\qquad$ (b)

Gambar 1. Diagram komutatif untuk modul injektif

Modul $\mathbb{Q}$ atas $\mathbb{Z}$ merupakan salah satu contoh dari modul injektif. Misalkan $f\colon n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sebarang monomorfisma dan $g\colon n\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ adalah sebarang homomorfisma. Misalkan $q \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga pada homomorfisma $g\colon n\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ didefinisikan $g(nz) = qz \in \mathbb{Q}$ untuk setiap $z \in \mathbb{Z}$. Pada Gambar 2, didefinisikan $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ sebagai $h(z) = (q/n)z$ untuk setiap $z \in \mathbb{Z}$. Sehingga:

$$g(nz) = qz = q(n/n)z = n(q/n)z = nh(z) = h(nz) = h(f(nz)) = (hf)(nz).$$

Sehingga, $g = hf$. Dengan demikian, $\mathbb{Q}$ merupakan $\mathbb{Z}$-modul injektif.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & n\mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{Z} \\ & \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

Gambar 2. Diagram komutatif untuk $\mathbb{Z}$-modul injektif $\mathbb{Q}$

Elemen x di dalam R-modul M dikatakan dapat dibagi (*divisible*) jika untuk setiap $r \in R$ yang bukan pembagi nol terdapat $y \in M$ sehingga $x = ry$. Jika untuk setiap elemen di dalam R-modul M merupakan elemen yang dapat dibagi, maka M disebut modul yang dapat dibagi (*divisible module*). Modul $\mathbb{Q}$ atas $\mathbb{Z}$ merupakan modul yang dapat dibagi. Misalkan $e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ dengan $p, q \in \mathbb{Z}$ dan $q \neq 0$, untuk setiap $0 \neq r \in \mathbb{Z}$, dipilih $e' = \frac{p}{qr} \in \mathbb{Q}$, sehingga

$$e = r \cdot e'.$$

Dengan demikian, $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ merupakan modul injektif sekaligus modul yang dapat dibagi. Jika D adalah daerah integral, sudah diketahui bahwa selalu dapat dibentuk lapangan hasil bagi $Q_D = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in D, q \neq 0\}$. Khususnya, jika D merupakan daerah ideal utama, diperoleh proposisi berikut sebagai generalisasi dari $\mathbb{Q}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul.

Proposisi 1. *Jika D adalah daerah ideal utama, maka Q_D sebagai D-modul merupakan modul injektif sekaligus modul yang dapat dibagi.*

Bukti: Misalkan A, B adalah sebarang D-modul, $f\colon A \to D$ adalah monomorfisma, dan $g\colon A \to Q_D$ sebarang homomorfisma. Karena $f\colon A \to D$ adalah monomorfisma, maka A dapat dinyatakan sebagai $A = \langle a \rangle = Da = \{da \mid d \in D\}$ untuk suatu $0 \neq a \in A$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Da \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & D \\ & Q_D & \end{tikzcd}$$

Gambar 3. Diagram komutatif untuk D-modul injektif Q_D

Pada Gambar 3, didefinisikan $h\colon D \to Q_D$ sebagai $h(d) = d \cdot \frac{q}{a}$, dan

$$g(da) = dq = d(\frac{a}{a})q = d(\frac{q}{a})a = h(da) = h(f(da)) = (hf)(da)$$

Diperoleh $g = hf$. Sehingga Q_D adalah D-modul injektif. Lebih lanjut, Q_D merupakan modul yang dapat dibagi. Misalkan $\frac{p}{q} \in Q_D$, untuk setiap $0 \neq r \in D$, dipilih $\frac{p}{qr} \in Q_D$, sehingga

$$\frac{p}{q} = r \cdot \frac{p}{qr}$$

Sehingga Q_D adalah D-modul yang dapat dibagi. Dengan demikian, Q_D sebagai D-modul merupakan modul injektif sekaligus modul yang dapat dibagi. $\square$

Setiap modul injektif merupakan modul yang dapat dibagi, tetapi sebaliknya belum tentu berlaku. Sebagai contoh, $\mathbb{Z}[x]$-modul $M = \mathbb{Q}(x)/\mathbb{Z}[x]$ dengan $\mathbb{Q}(x)$ lapangan hasil bagi dari $\mathbb{Z}[x]$ merupakan modul yang dapat dibagi tetapi bukan merupakan modul injektif [2].

(b) Sifat Perluasan Esensial di dalam $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$

Suatu R-modul M dikatakan perluasan esensial dari R-modul N jika untuk setiap submodul tak nol K dari M berlaku $K \cap N \neq 0$. Pernyataan ini ekuivalen dengan mengatakan untuk setiap $0 \neq x \in M$ terdapat $r \in R$ sedemikian hingga $0 \neq rx \in N$. Jika M merupakan perluasan esensial maksimal bagi N, maka M disebut amplop injektif bagi modul N.

Modul $\mathbb{Q}$ atas $\mathbb{Z}$ merupakan amplop injektif untuk $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Untuk setiap $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, dengan $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $b \neq 0$, diambil $r = b \in \mathbb{Z}$ sehingga $0 \neq b \cdot q = b \cdot \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$. Sehingga, $\mathbb{Q}$ merupakan perluasan esensial dari $\mathbb{Z}$. Kemudian mengingat $\mathbb{Q}$ merupakan $\mathbb{Z}$-modul injektif dan setiap modul injektif tidak memiliki perluasan esensial sejati, maka $\mathbb{Q}$ merupakan perluasan esensial maksimal bagi $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Dengan kata lain, $\mathbb{Q}$ merupakan amplop injektif bagi modul $\mathbb{Z}$. Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan bahwa lapangan hasil bagi $Q_D = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in D, q \neq 0\}$ atas daerah ideal utama D merupakan amplop injektif bagi D sebagai D-modul. Setiap modul dapat dibagi M atas daerah integral utama D merupakan modul injektif. Khususnya jika D daerah ideal utama, maka modul Q_D dan $Q_D/_D$ merupakan modul injektif atas D. Jika D merupakan daerah ideal utama maka D-modul M injektif jika dan hanya jika M dapat dibagi. Mengingat $\mathbb{Z}$ merupakan daerah ideal utama maka setiap modul M atas $\mathbb{Z}$ merupakan modul yang dapat dibagi. Jika D merupakan daerah ideal utama, dan M merupakan modul injektif atas D maka $M/_K$ juga injektif atas R untuk setiap submodul K dalam M.

(c) Ketakterdekomposisian di dalam $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$

Suatu R-modul M disebut modul yang tak terdekomposisi jika penjumlah langsung dari M hanyalah submodul 0 dan M sendiri. Modul $\mathbb{Q}$ atas $\mathbb{Z}$ merupakan modul yang tak terdekomposisi. Andaikan $\mathbb{Q} = A \oplus B$, dengan A dan B submodul $\mathbb{Q}$ yang tak nol. Berarti terdapat $0 \neq a \in A$ dan $0 \neq b \in B$. Elemen a dan b dapat dinyatakan sebagai $a = \frac{x_1}{y_1}$ dan $b = \frac{x_2}{y_2}$ dengan $0 \neq x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan $A \cap B \neq 0$. Karena A dan B merupakan $\mathbb{Z}$-modul, dipilih $z_1 = x_2 y_1 \in \mathbb{Z}$ dan $z_2 = x_1 y_2 \in \mathbb{Z}$, sehingga

$$z_1 a = (x_2 y_1)\frac{x_1}{y_1} = x_1 x_2 = (x_1 y_2)\frac{x_2}{y_2} = z_2 b$$

Dengan demikian, $x_1 x_2 \in A \cap B$. Jadi $A \cap B \neq 0$. Sehingga $\mathbb{Q}$ tidak dapat dinyatakan sebagai jumlahan dua submodul yang tak nol. Dengan demikian, $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ merupakan modul yang tak terdekomposisi.

Lebih lanjut memanfaatkan ketakterdekomposisian pada $\mathbb{Q}$, dapat ditunjukkan bahwa $\mathbb{Q}$ merupakan amplop injektif bagi setiap submodul $\mathbb{Q}$. Misalkan A submodul taknol dari $\mathbb{Q}$. Karena $\mathbb{Q}$ adalah modul injektif, maka terdapat submodul B dari $\mathbb{Q}$ sedemikian hingga B merupakan amplop injektif bagi A. Dilain pihak, $\mathbb{Q}$ adalah perluasan esensial bagi modul injektif B, maka B merupakan penjumlah langsung $\mathbb{Q}$. Mengingat $\mathbb{Q}$ merupakan modul yang tak terdekomposisi dan A submodul tak nol dari $\mathbb{Q}$, maka harusah $B = \mathbb{Q}$. Dengan demikian $\mathbb{Q}$ merupakan amplop injektif dari setiap submodulnya. Sifat ini dapat digeneralisasi untuk setiap R-modul M yang injektif dan tak terdekomposisi sepertinya dinyatakan dalam proposisi berikut.

Proposisi 2. *[3] Misalkan E adalah R-modul injektif. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:*

(a) E adalah modul yang tak terdekomposisi,

(b) $E \neq 0$ dan E adalah amplop injektif bagi setiap submodul E,

(c) submodul 0 merupakan submodul irreducible.

Khususnya, untuk lapangan hasil bagi $Q_D = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in D, q \neq 0\}$ atas daerah ideal utama D dapat ditunjukkan Q_D merupakan modul yang tak terdekomposisi. Sehingga modul Q_D atas daerah ideal utama D merupakan amplop injektif dari setiap submodul Q_D.

(d) Hubungan $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ dengan Grup Prüfer $\mathbb{Z}_{p^\infty}$

Suatu p-komponen dari $\mathbb{Z}$-modul M, dengan p bilangan prima, didefinisikan sebagai $p(M) = \{a \in M \mid p^k a = 0 \text{ untuk suatu } k \in \mathbb{N}\}$. Jika M adalah $\mathbb{Z}$-modul torsi, maka M dapat dinyatakan sebagai hasil tambah langsung dari p komponennya, yaitu

$$M = \bigoplus \{p(M) \mid p \text{ adalah bilangan prima}\}$$

dengan $p(M) = \{a \in M \mid p^k a = 0 \text{ untuk suatu } k \in \mathbb{N}\}$. Pada $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, dinotasikan p-komponen untuk $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ (disebut grup Prüfer). Karena $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ adalah modul torsi, maka $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dapat dinayatakan sebagai:

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \bigoplus \{\mathbb{Z}_{p^\infty} \mid p \text{ adalah bilangan prima}\}$$

Sifat dari grup Prüfer $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ disajikan pada proposisi berikut.

Proposisi 3. *[4] Grup Prüfer $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ merupakan amplop injektif dari $\mathbb{Z}_p$ dengan p bilangan prima.*

Bukti: Untuk membuktikan $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ adalah amplop injektif dari $\mathbb{Z}_p$, akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ merupakan modul injektif dan perluasan essential dari $\mathbb{Z}_p$. Karena $\mathbb{Q}$ adalah $\mathbb{Z}$-modul yang dapat dibagi dan $\mathbb{Z}$ merupakan submodul $\mathbb{Q}$, maka $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ juga merupakan modul yang dapat dibagi. Akibatnya, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ adalah $\mathbb{Z}$-modul yang dapat dibagi. Lebih lanjut, karena $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ modul atas daerah ideal utama $\mathbb{Z}$, maka $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ modul injektif. Karena $\mathbb{Z}_p \simeq \{\frac{z}{p} + \mathbb{Z} \mid z \in \mathbb{Z}\}$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_p$ termuat di setiap submodul taknol dari $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Misalkan K sebarang submodul sejati dari $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Dipilih $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga

$$\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \in K \text{ tetapi } \frac{1}{p^{n+1}} + \mathbb{Z} \notin K.$$

Untuk setiap elemen $\frac{k}{p^m} + \mathbb{Z} \in K$ dengan $k \in \mathbb{Z}$, p tidak membagi k, dan dapat ditemukan $r, s \in \mathbb{Z}$ dengan $kr + p^m s = 1$. Sehingga

$$\frac{1}{p^m} + \mathbb{Z} = \frac{kr + p^m s}{p^m} + \mathbb{Z} = r(\frac{k}{p^m} + \mathbb{Z}) \in K.$$

Dari pemilihan n, maka $m \leq n$ dan $K = \mathbb{Z}(\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z})$. Jadi $\mathbb{Z}_p \subset K$ sehingga $\mathbb{Z}_p$ termuat di setiap submodul taknol $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Dengan demikian, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ adalah perluasan essential dari $\mathbb{Z}_p$, yaitu $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ merupakan amplop injektif dari $\mathbb{Z}_p$. $\square$

Hubungan antara $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ dan grup Prüfer $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ disajikan pada proposisi-proposisi berikut.

Proposisi 4. *[3] Sebagai $\mathbb{Z}$-modul, $\mathbb{Q}$ dan grup Prüfer $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ dengan p bilangan prima, merupakan modul injektif, tak terdekomposisi, dan tidak isomorfik.*

Bukti: Telah ditunjukkan sebelumnya bahwa $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ merupakan modul injektif dan tak terdekomposisi, dan juga grup Prüfer $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ merupakan modul injektif. Tinggal ditunjukkan sifat tak terdekomposisi pada $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ dan sifat tak isomorfis pada $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Pada Proposisi 3, diperoleh bahwa $\mathbb{Z}_p \simeq \{\frac{z}{p} + \mathbb{Z} \mid z \in \mathbb{Z}\}$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ yang termuat di setiap submodul taknol dari $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Sehingga, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ merupakan modul yang tak terdekomposisi. Lebih lanjut, untuk bilangan prima $p \in \mathbb{Z}$ dan $\frac{1}{p} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$, diperoleh $p(\frac{1}{p} + \mathbb{Z}) = 0 + \mathbb{Z}$. Sehingga $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ merupakan modul tak bebas torsi. Karena $\mathbb{Q}$ merupakan modul bebas torsi, maka $\mathbb{Q}$ dan grup Prüfer $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ tidak isomorfik. $\square$

Proposisi 5. *[3] Misalkan R ring Noetherian komutatif. Modul M atas R merupakan modul injektif tak terdekomposisi jika dan hanya jika terdapat ideal prima P dari R sedemikian hingga $M \cong E(R/P)$, dimana $E(R/P)$ adalah amplop injektif dari R/P.*

Proposisi 6. *[3] Setiap $\mathbb{Z}$-modul injektif yang tidak terdekomposisi akan isomorfik dengan $\mathbb{Q}$ atau $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, dengan p bilangan prima.*

Bukti: Misalkan M adalah R-modul injektif, tak terdekomposisi, dan M tidak isomorfik dengan $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Akan ditunjukkan M isomorfik dengan $\mathbb{Q}$. Memanfaatkan Proposisi 5, karena $\mathbb{Z}$ merupakan ring Noetherian yang komutatif, maka M adalah amplop injektif untuk $\mathbb{Z}/P$ untuk suatu P ideal prima $\mathbb{Z}$. Satu-satunya ideal prima yang memenuhi hanyalah $P = 0$, sehingga M isomorfik dengan amplop injektif dari $\mathbb{Z}$, yaitu $\mathbb{Q}$. $\square$

3 Kesimpulan

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ merupakan contoh modul yang secara elemen demi elemen (*element wise*) mudah dikenali dan mempunyai struktur yang mudah diamati namun juga merupakan modul yang memperjelas konsep-konsep dalam teori modul dari yang sederhana terkait dengan konsep kebebasan dan ketorsian namun juga memperjelas konsep yang lanjut (âdvanced) seperti keinjektifan dan amplop injektif.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Adkins, A., Weintraub, S.H. *Algebra: an approach via module theory*, Cambridge University Press, (2016).

[2] Lam, T., *Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag, New York (1991).

[3] Sharpe, D. and Vamos, P., *Injective Modules*, Cambridge University Press, London (1972).

[4] Wisbauer, R., *Foundation of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach Science Publisher, (1991).

ISSN 2829-3770
9 772829 377007