

Konferensi Nasional MATEMATIKA 20 21



PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX
Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by
IndoMS



Organized by
Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

“Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0”

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

@Hak Cipta dilindungi Undang-undang

e-ISSN: 2829-3770

DOI issue: <https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX>

Dipublikasikan online pada:

Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:



Mei 2022

Editor:

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si, M.Si, Berny P. Tomasouw, S.Si, M.Si,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si, M. I. Tilukay, S.Si, M.Si, Monalisa E. Rijoly, S.Si, M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si, M.Si, M. B. Mananggal, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si, M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si, M.Si. Vicardy Kempa, S.Si, M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si, M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si, M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si, M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumulun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

Halaman Judul	i
Tim Reviewer	ii
Kata Pengantar	iii
Susunan Panitia KNM XX	iv
Daftar Isi	vii

ALJABAR

KLASIFIKASI TITIK KRITIS POLINOMIAL DUA VARIABEL BERDERAJAT TIGA	1 – 8
Afif Humam	
KAJIAN KEKUATAN \mathbb{Z} - MODUL \mathbb{Q} SEBAGAI INSPIRASI MUNCULNYA KONSEP DAN SIFAT DALAM TEORI MODUL	9 – 14
Sri Wahyuni, Yunita Septriana Anwar, I Putu Yudi Prabhadika	
GRAF PEMBAGI NOL DARI RING KOMUTATIF	15 – 20
Maria Vianney Any Herawati	
IDEAL TAK TEREDUKSI KUAT ATAS SEMIRING KOMUTATIF	21 – 26
Fitriana Hasnani, Nikken Prima Puspita	
BATAS ATAS PADA NORM – TAK HINGGA DARI INVERS MATRIKS NEKRASOV	27 – 32
Eddy Djauhari	
KOREPRESENTASI KOALJABAR $F[G]$	33 – 40
Na'imah Hijriati, Indah Emilia Wijayanti	
HUBUNGAN SIFAT BERSIH PADA RING, MODUL, KOMODUL DAN KOALJABAR	41 – 50
Nikken Prima Puspita, Indah Emilia Wijayanti, Budi Surodjo	
KONTRAKSI PERTINGKATAN PADA PERTINGKATAN PAULI $\mathfrak{S}\mathfrak{L}(N, \mathbb{C})$	51 – 60
Reynald Saputra, Gantina Rachmaputri	

ANALISIS

BUKTI ALTERNATIF INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG LEBESGUE DENGAN EKSPONEN PEUBAH	61 – 66
Dina Nur Amalina dan Denny Ivanal Hakim	
SEGITIGA TITIK CIRCUMCENTER PADA MODIFIKASI TEOREMA NAPOLEON	67 – 76
Yunisa Fadhilah Hartati, Mashadi	
FUNGSI SIMETRI TERHADAP TITIK (a, b) DAN BEBERAPA SIFATNYA	77 – 82
Firdaus Ubaidillah	
INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG MORREY-ADAMS DAN OPERATOR MAKSIMAL FRAKSIONAL	83 – 90
Daniel Salim, Moch. Taufik Hakiki, Denny Ivanal Hakim	
PENDEKATAN KALKULUS HIDA UNTUK PROSES HERMITE	91 – 98
Herry Pribawanto Suryawan	
KETAKSAMAAN HARDY DI RUANG HERZ HOMOGEN	99 – 106
Pebrudal Zanu, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi1	
OPERATOR KANTOROVICH PADA RUANG MORREY DIPERUMUM	107 – 114
Mu'afa Purwa Arsana, Denny Ivanal Hakim	
PERLUASAN DEFINISI RATA-RATA VIA TEOREMA NILAI RATA-RATA	115 – 124
Mochammad Idris	
SISTEM EIGEN OPERATOR LAPLACE BERBASIS RUAS PADA SUATU POHON KUANTUM	125 – 134
Moh. Januar I. Burhan, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi	

SUKU BANYAK BERNSTEIN DAN OPERATOR KANTOROVICH UNTUK BEBERAPA FUNGSI YANG TIDAK KONTINU Reinhart Gunadi, Denny I. Hakim	135 – 142
KETERBATASAN OPERATOR TIPE VOLTERRA PADA RUANG MORREY ANALITIK $L_{p,\lambda}$ Moch Taufik Hakiki, Wono Setya Budhi, dan Denny Ivanal Hakim	585 - 590
KOMBINATORIK	
PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF SIPUT DAN GRAF UBUR-UBUR Kevin Akbar, Kiki Ariyanti Sugeng	143 – 148
DIMENSI METRIK LOKAL PADA GRAF FLOWER DAN GRAF GEAR KORONA GRAF LINTASAN Salma Fauziyah Ashim, Tri Atmojo Kusmayadi, Titin Sri Martini	149 – 154
PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF LILIN Rizqi Rachmadhani, Kiki Ariyanti Sugeng	155 – 160
PELABELAN HARMONIS PADA GRAF SEGITIGA BELAH KETUPAT VARIASI LM_n Evi Maharani, Kurniawan Atmadja	161 – 164
PEWARNAAN SIMPUL r – DINAMIS PADA GRAF TERATAI T_n Audi Fierera, Kiki A. Sugeng	165 – 170
SIFAT-SIFAT GRAF CAYLEY GRUP S_n Afifan Hadi, Kiki Ariyanti Sugeng	171-176
PENDIDIKAN MATEMATIKA	
LKPD BERBASIS PENEMUAN TERBIMBING BERBANTUAN ALAT PERAGA PADA MATERI LUAS PERMUKAAN DAN VOLUME PRISMA DAN LIMAS Fithroh Nafa Dzillah, Latifah Mustofa Lestyanto	177 – 182
PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA DARING BERBASIS MODEL PENEMUAN TERBIMBING MENGGUNAKAN LIVEWORKSHEETS PADA MATERI PRISMA DAN LIMAS Sania Sururul Khususna, Latifah Mustofa Lestyanto, Eddy Budiono	183 – 188
PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA BERBASIS MASALAH BERBANTUAN GOOGLE FORM UNTUK PEMAHAMAN KONSEP SISWA KELAS VII SMP PADA MATERI SEGITIGA DAN SEGIEMPAT Herlin Oktavita, Latifah Mustofa Lestyanto2	189 – 194
EKSPLORASI ETNOMATEMATIKA PADA GELANG MANIK-MANIK KHAS DAYAK KALIMANTAN SEBAGAI SUMBER PENYUSUNAN LKPD Silvia	195 – 206
ANALISIS KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIS SISWA DENGAN PEMBELAJARAN MODEL BRAIN BASED LEARNING BERBASIS LEARNING MANANGEMENT SYSTEM N. R. Mumtaz, M. Asikin	207 – 214
PENGEMBANGAN ASESMEN ALTERNATIF DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA KONTEKS LINGKUNGAN LAHAN BASAH UNTUK SISWA TINGKAT SMP/MTS Muhammad Rizal, Noor Fajriah, Agni Danaryanti	215 – 222
MATERI PENGAYAAN TEORI BILANGAN DASAR DI SEKOLAH DASAR Awanga Dijayangrana, Hilda Assiyatun	223-228
KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS TULIS MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH VOLUME BENDA PUTAR MELALUI MODEL PERKULIAHAN KOLABORATIF Fadhila Kartika Sari, Anies Fuady	229 – 236
PERAN PENULISAN JURNAL DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA SECARA DARING DI MASA PANDEMI COVID-19	237 – 244

Gusti Firda Khairunnisa, Frida Siswiyanti	
ANALISIS KRUSKAL WALLIS UNTUK MENGETAHUI TINGKAT KOSENTRASI BELAJAR MAHASISWA BERDASARKAN PROGRAM STUDI	245 – 250
Venessa Y. A. Brabar, Grace A. V. Hikoyabi, Agustinus Langowuyo	
ANALISIS PENGARUH PEMANFAATAN INTERNET TERHADAP MINAT BELAJAR MAHASISWA PRODI STATISTIKA	251 – 258
Mariana Tanawani, Meilani Yarangga, dan Agustinus Langowuy	
PENGARUH PROSES BELAJAR MENGAJAR LURING DAN DARING TERHADAP HASIL BELAJAR MAHASISWA JURUSAN MATEMATIKA ANGAKATAN 2018 FMIPA UNIVERSITAS CENDERAWASIH	259 – 264
Dewi Rahmawati, Tiara A. Nadapdap, Agustinus Langowuyo	
PENILAIAN ESAI MENGGUNAKAN MODEL PEMBELAJARAN MESIN	265 – 270
Farah Qotrunnada, Marcus Wono Setya Budhi, Hilda Assiyatun	
PENGEMBANGAN PERANGKAT PEMBELAJARAN BERBASIS ETNOMATEMATIKA BUDAYA MASYARAKAT NEGERI TULEHU PADA MATERI SEGIEMPAT DAN SEGITIGA UNTUK SISWA DI KELAS VII MTS NEGERI I MALUKU TENGAH.	271 – 276
Heni Rahim, W. Mataheru, J. Takaria	
PENERAPAN FUZZY LINEAR PROGRAMMING UNTUK OPTIMASI PRODUKSI TAHU (STUDI KASUS DI DESA TANJUNGREJO KABUPATEN JEMBER)	277 – 284
Anisa Wahyu Illahi, Agustina Pradjaningsih, Abduh Riski	
PENENTUAN SOLUSI FISIBEL AWAL MASALAH TRANSPORTASI DENGAN MINIMUM DEMAND METHOD	285 – 292
Ulniyatul Ula, Siti Khabibah, Robertus Heri S.U	
OPTIMALISASI RUTE DAN PENJADWALAN PENGANGKUTAN SAMPAH DENGAN METODE INSERTION HEURISTIC DAN INTRA- ROUTE IMPROVEMENT (STUDI KASUS: UNIVERSITAS BRAWIJAYA MALANG)	293 – 298
Fara El Nandhita Pratiwi	
MODEL MATEMATIS RUTE WISATA DI RIAU DENGAN MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN GOL	299 – 312
Ihda Hasbiyati, Hasriati, T. P. Nababan	
MATEMATIKA TERAPAN	
MODEL SUSCEPTIBLE INFECTED RECOVERED (SIR) PADA DEMAM BERDARAH DENGUE (DBD)	313 – 320
Oscar Andhry Barata, Rahmat, Rengga Nanda Pramudya	
ANALISA PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE FRAKSIONAL NUMERIK MENGGUNAKAN METODE EULER DAN APLIKASINYA	321 – 326
Leli Deswita, Syamsudhuha, Asral. M	
TERAPAN FUNGSI SIGMOID UNTUK MENENTUKAN NILAI MAKSIMAL KOEFISIEN GAYA ANGKAT DAN SUDUT STALL PADA KURVA LINEAR C_L TERHADAP α	327 – 334
Angga Septiyana, Singgih Satrio W, Fuad Surastyo P, Try Kusuma Wardana, Ardian Rizaldi, Novita Atmasari, Eries Bagita Jayanti, Prasetyo Ardi P	
IMPLEMENTASI DEEP LEARNING UNTUK KLASIFIKASI GAMBAR MENGGUNAKAN CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORK (CNN) PADA BATIK SASAMBO	335 – 340
Muna Malika, Edy Widodo	
STATISTIKA	
PENERAPAN MODEL SPACE TIME AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (STARI(1,1,1)) PADA DATA NTP TANAMAN PANGAN DARI TIGA PROVINSI DI PULAU JAWA	341 -350
Fajriatus Sholihah, Kartika Sari, Budi Nurani Ruchjana, Toni Toharudin	
ANALISIS KORESPONDENSI BERGANDA UNTUK MENGETAHUI INDIKATOR-INDIKATOR YANG MEMPENGARUHI KEJADIAN LOW BACK PAIN PADA KUSIR	351 - 358

KUDA/DELMAN DI KOTA CIMAH I TAHUN 2019	
Dhita Diana Dewi, Fajriatus Sholihah, Rosa Rosmanah, Lucy Fitria Dewi, Mochamad Yudhi Afrizal, Irlandia Ginanjar	
PROSES POISSON NON HOMOGEN DAN PENERAPANNYA PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT	359 – 362
Viona Prisyella Balqis, Muhammad Herlambang Prakasa Yudha, Budi Nurani Ruchjana	
PENERAPAN DISTRIBUSI STASIONER RANTAI MARKOV PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT	363 – 370
Tubagus Robbi Megantara, Ayun Sri Rahmani, Budi Nurani Ruchjana	
SPATIAL CLUSTER ING DENGAN METODE SKATER (K'LUSTER ANALYSIS BY TREE EDGE REMOVAL) UNTUK PENGELOMPOKAN SEBARAN COVID-19 DI KABUPATEN TULUNGAGUNG	371 – 380
Danang Ariyanto, Henny Pramodyo, Novi Nur Aini	
ANALISIS KLASTER KABUPATEN/KOTA INDONESIA BERDASARKAN INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DENGAN MODEL MIXTURE SKEW-T	381 – 388
Kristoforus Exelsis Pratama, Irwan Susanto, Yuliana Susanti	
ANALISIS INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DI KABUPATEN BURU SELATAN DENGAN MENGGUNAKAN REGRESI LINIER BERGANDA	389 – 396
Muhidin Jariyah, Inayah. P. F. Solong, Juan C. S. Jamco	
TINJAUAN KEPUTUSAN HIPOTESA FUZZY BERBASIS P-VALUE FUZZY (STUDI KASUS DATA COVID-19 DI NUSA TENGGARA BARAT)	397 – 404
Wahidaturrahmi	
PENERAPAN METODE AUTO SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS PADA PERAMALAN DATA INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DI INDONESIA	405 – 410
Andreas Reza Chrisantama*, Winita Sulandari, Sugiyanto	
PERAMALAN JUMLAH PRODUKSI PERIKANAN DI KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE PEMULUSAN EKSPONENSIAL	411 – 418
Asrul Irfanullah, Claudia Sumanik, Romy Makatita	
ANALISIS PENGARUH STRUKTUR KONSUMSI AKHIR RUMAH TANGGA BERDASARKAN KOMPONEN PENGELUARAN KABUPATEN BURU SELATAN PERIODE 2015 – 2019 DENGAN RAKL	419 – 424
Nikita A. Putiray, Dea M. Tuhumury, Angel M.P. Manuputty	
EKSPLORASI SISA USIA BEARING MENGGUNAKAN DISTRIBUSI WEIBULL	425 – 430
Sutawanir Darwis, Nusar Hajarisman, Suliadi, Achmad Widodo	
PENERAPAN MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED MOVING AVERAGE (VARIMA) UNTUK PRAKIRAAN INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DAN KURS RUPIAH TERHADAP USD	431 – 442
Ani Pertiwi, Lucy Fitria Dewi, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana	
PENGELOMPOKKAN JUMLAH PENDUDUK KABUPATEN BURU SELATAN BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA TAHUN 2018 DENGAN ALGORITMA K- MEANS	443 – 450
Samin Radjid, Nadia Istifarin, Meylani Tuasella	
PENERAPAN METODE ARIMAX PADA PERAMALAN PRODUKSI DAGING SAPI DI SUKOHARJO	451 – 458
Fitrian Nur Ardyansyah, Winita Sulandari, Sugiyanto	
ANALISIS KEPUASAN DAN POSITIONING SELLER E-MARKETPLACE DENGAN MENGGUNAKAN IMPORTANCE PERFORMANCE ANALYSIS DAN BILOT	459 – 464
Farah Dibah, Dwi Endah Kusri	
KLASTERISASI LOKASI PASAR KABUPATEN BANYUMAS GUNA MEMPERMUDAH UPTD DALAM MENGELOLA KELAS PASAR	465 – 470
Pradini Nurul Safitri, Abdullah Ahmad Dzikrullah	

PENGARUH MOTIVASI INTRINSIK DAN KEPUASAN KERJA TERHADAP ORGANIZATIONAL CITIZENSHIP BEHAVIOR	471 – 476
Diya Kasih Puspitasari, Dwi Endah Kusrini	
KLASTERING JUMLAH PENDUDUK BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA KECAMATAN LEKSULA TAHUN 2018 DENGAN MENGGUNAKAN METODE ALGORITMA K-MEANS	477 – 484
Morensi T. Risakotta, Rensya Siwalette, Rola E. Leasa	
PERAMALAN DENGAN METODE SIMPLE MOVING AVERAGE DAN DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING BROWN (STUDI KASUS: JUMLAH CURAH HUJAN DAN JUMLAH HARI HUJAN KABUPATEN BURU SELATAN)	485 – 494
Apriano R. Narahawarin, Ravensky Silangen, Rahania Patiekon	
PERAMALAN GARIS KEMISKINAN KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING DARI HOLT	495 – 502
Ade Irma La Murdani, Intan Gainau, Unique Resiloy	
ANALISIS PERBEDAAN PENDAPATAN TOKO WALET MAS SEBELUM DAN SESUDAH PANDEMI COVID-19 DENGAN METODE MANN-WHITNEY	503 – 508
Marselina Ema Koten, Yunida Kurniasih, Agustinus Langowuyo	
ANALISIS PENGARUH BELANJA DAERAH, JUMLAH PENDUDUK, DAN PDRB TERHADAP PENDAPATAN DAERAH DI KABUPATEN BURU SELATAN TAHUN 2013-2020	509 – 516
Dephie Latumahina, Martje Riry, Olfen Sabono	
UJI KECOCOKAN DISTRIBUSI RAYLEIGH BIVARIAT MENGGUNAKAN UJI KOLMOGOROV-SMIRNOV BIVARIAT PADA DATA HASIL PERTANDINGAN PERSIB BANDUNG	517 – 522
Wulan Jati Nuraya, Aceng Komarudin Mutaqin	
MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) UNTUK PERAMALAN BANYAKNYA KASUS TERKONFIRMASI DAN KASUS SEMBUH COVID-19 DI INDONESIA	523 – 532
Sri Indra Maiyanti, Mahrudinda, Al Fataa W. Haq, Budi Nurani Ruchjana	
MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) DAN PENERAPANNYA PADA DATA PERKEMBANGAN HARGA ECERAN BERAS DI TIGA IBU KOTA PROVINSI WILAYAH PULAU JAWA	533 – 544
Zulfa Hidayah Satria Putri, Asri Yuniar, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana	
PENERAPAN METODE REGRESI LINEAR BERGANDA UNTUK MELIHAT PENGARUH JUMLAH PENDUDUK DAN LUAS WILAYAH TERHADAP JUMLAH PENGGUNA LISTRIK DI KECAMATAN AMBALAU KABUPATEN BURU SELATAN	545 – 552
Fadly Ode, Nur Statib J, Elsy Malwewar	
ANALISIS TINGKAT KEGEMARAN AYAM GEPUK PAK GEMBUS DARI BERBAGAI JENIS PAKET MELALUI PENDEKATAN UJI STATISTIK	553 – 558
Maharani Tiara Pramuditya, Evan Claude Boudewijn Kainama, Agustinus Langowuyo	
SIMULASI PERGERAKAN HARGA SAHAM MENGGUNAKAN MODEL GERAK BROWN GEOMETRIK DENGAN R STUDIO	559 – 564
Ahmad Fawaid Ridwan, Rizki Apriva Hidayana, Budi Nurani Ruchjana	
PENAKSIRAN RATA-RATA <i>EXCESS CLAIM</i> PESERTA DARI PERUSAHAAN PEMBERI LAYANAN KESEHATAN PT. X	565 – 572
Wildan*, Indah Permatasari, and Aceng Komarudin Mutaqin	
PENGARUH SELF EFFICACY DAN MOTIVASI BELAJAR TERHADAP HASIL BELAJAR SISWA KELAS VII SMP NEGERI 3 GANTUNG	573 – 584
Alperu, Nerru Pranuta Murnaka*, Indra Bayu M, Andy Wahyu H	

KAJIAN KEKUATAN \mathbb{Z} - MODUL \mathbb{Q} SEBAGAI INSPIRASI MUNCULNYA KONSEP DAN SIFAT DALAM TEORI MODUL

Sri Wahyuni^{1,*}, Yunita Septriana Anwar², dan I Putu Yudi Prabhadika³

¹Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia

² Mahasiswa PS Doktor Matematika, Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia

³ Mahasiswa PS Magister Matematika, Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia

*e-mail: swahyuni@ugm.ac.id

Abstrak. Grup bilangan rasional $(\mathbb{Q}, +)$ sebagai modul atas daerah integral bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (\mathbb{Z} -modul \mathbb{Q}) merupakan contoh modul khusus yang mempunyai sifat-sifat yang unik yang sangat penting dalam munculnya konsep dan sifat dalam aljabar, khususnya dalam teori modul. Sifat yang sudah sangat dikenal adalah \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} merupakan modul torsi yang tidak bebas, dan lebih jauh modul \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q}/\mathbb{Z} merupakan modul torsi tak hingga.

Dalam paper ini akan dipresentasikan hasil kajian \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} dalam kaitannya dengan struktur modul faktorisasi tunggal. Diperoleh bahwa \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} mempunyai sifat tidak memiliki elemen primitif yang kemudian berakibat dalam \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} tidak terdapat submodul siklik yang dibangun oleh suatu elemen primitif yang merupakan submodul murni. Selanjutnya akan dikaji peran \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} dalam kaitannya dengan konsep D -submodul fraksional dan konsep M -ideal fraksional dalam teori modul aritmatik. Lebih jauh akan dikaji sifat \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} dalam kaitannya dengan modul injektif dan modul miskin. Diperoleh sifat \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} mempunyai sifat keterbagian, keinjektifan, dan merupakan amplop injektif bagi setiap submodul \mathbb{Q} . Sebagai ring, \mathbb{Q} merupakan ring semisederhana dan Artinian sehingga setiap modul atas \mathbb{Q} merupakan modul miskin.

Kata kunci: modul faktorisasi tunggal, submodul dan ideal fraksional, modul injektif, amplop injektif

1 Pendahuluan: Latar Belakang

Modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama dipandang mempunyai sifat yang relatif bagus dalam arti memiliki sifat mendekati sifat yang dimiliki oleh ruang vektor diantaranya: jika modul atas daerah ideal utama tersebut merupakan modul bebas torsi dibangun secara hingga maka modul tersebut merupakan modul bebas ([1]). Persyaratan dibangun secara hingga tersebut "sangat penting" untuk menjadi modul bebas, sebagai *counterexample* yang bagus adalah \mathbb{Q} sebagai modul atas daerah ideal utama \mathbb{Z} . Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa modul \mathbb{Q} sebagai modul atas daerah ideal utama \mathbb{Z} merupakan bebas torsi namun bukan modul yang dibangun secara hingga karena untuk setiap himpunan bagian berhingga dalam \mathbb{Q} sebut $S = \{\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_k}{q_k}\}$ akan selalu ada $x \in \mathbb{Q}$ yang tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear elemen-elemen dalam S .

Lebih jauh lagi jika D merupakan daerah integral, suatu D -module M dikatakan modul yang dapat dibagi (*divisible*) jika untuk setiap $m \in M$ dan untuk setiap $d \in D - \{0\}$ terdapat $m' \in M$ sedemikian hingga $dm' = m$. Dengan kata lain, suatu modul M atas daerah intergral D disebut dapat dibagi jika untuk setiap fungsi $\mu_d : M \rightarrow M$ dengan $m \rightarrow dm$ merupakan fungsi surjektif.

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa \mathbb{Q} sebagai modul atas daerah ideal utama \mathbb{Z} merupakan modul yang dapat dibagi. Selanjutnya \mathbb{Z} sendiri merupakan submodul dari \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} sehingga terbentuk \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q}/\mathbb{Z} yang dapat ditunjukkan merupakan modul yang dapat dibagi dan juga modul injektif. Dalam paper ini akan dipresentasikan lebih jauh sifat \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} di dalam struktur modul injektif.

2 Hasil dan Pembahasan: Sifat \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} terkait beberapa struktur modul.

Dalam bagian ini akan dikaji sifat keinjektifan, keterbagian, ketakterdekomposisian, dan perluasan esensial pada \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} yang mengilhami contoh-contoh lain sebagai generalisasi dari sifat pada \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} . Lebih lanjut, akan dikaji hubungan \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} dengan grup Prüfer \mathbb{Z}_{p^∞} .

(a) Keinjektifan dan Keterbagian di dalam \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q}

Suatu R -modul M disebut modul injektif jika dan hanya jika untuk setiap monomorfisma $f: A \rightarrow B$ dan setiap homomorfisma $h: A \rightarrow M$, terdapat homomorfisma $g: B \rightarrow M$ sedemikian hingga $gf = h$, yaitu Gambar 1(a) komutatif. Definisi ini ekuivalen dengan pernyataan untuk setiap ideal kiri $I \subseteq R$ dan setiap homomorfisma $\varphi: I \rightarrow M$, terdapat homomorfisma $\psi: R \rightarrow M$ sedemikian hingga $\psi i = \varphi$, yaitu Gambar 1(b) komutatif [3].

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \\
 & & \downarrow h & & \\
 & & M & & \\
 & & & & (a)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{i} & R \\
 & & \downarrow \varphi & & \\
 & & M & & \\
 & & & & (b)
 \end{array}$$

Gambar 1. Diagram komutatif untuk modul injektif

Modul \mathbb{Q} atas \mathbb{Z} merupakan salah satu contoh dari modul injektif. Misalkan $f: n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sebarang monomorfisma dan $g: n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ adalah sebarang homomorfisma. Misalkan $q \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga pada homomorfisma $g: n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ didefinisikan $g(nz) = qz \in \mathbb{Q}$ untuk setiap $z \in \mathbb{Z}$. Pada Gambar 2, didefinisikan $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ sebagai $h(z) = (q/n)z$ untuk setiap $z \in \mathbb{Z}$. Sehingga:

$$g(nz) = qz = q(n/n)z = n(q/n)z = nh(z) = h(nz) = h(f(nz)) = (hf)(nz).$$

Sehingga, $g = hf$. Dengan demikian, \mathbb{Q} merupakan \mathbb{Z} -modul injektif.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & n\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \\ & & \downarrow g \\ & & \mathbb{Q} \end{array}$$

Gambar 2. Diagram komutatif untuk \mathbb{Z} -modul injektif \mathbb{Q}

Elemen x di dalam R -modul M dikatakan dapat dibagi (*divisible*) jika untuk setiap $r \in R$ yang bukan pembagi nol terdapat $y \in M$ sehingga $x = ry$. Jika untuk setiap elemen di dalam R -modul M merupakan elemen yang dapat dibagi, maka M disebut modul yang dapat dibagi (*divisible module*). Modul \mathbb{Q} atas \mathbb{Z} merupakan modul yang dapat dibagi. Misalkan $e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ dengan $p, q \in \mathbb{Z}$ dan $q \neq 0$, untuk setiap $0 \neq r \in \mathbb{Z}$, dipilih $e' = \frac{p}{qr} \in \mathbb{Q}$, sehingga

$$e = r \cdot e'.$$

Dengan demikian, \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} merupakan modul injektif sekaligus modul yang dapat dibagi. Jika D adalah daerah integral, sudah diketahui bahwa selalu dapat dibentuk lapangan hasil bagi $Q_D = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in D, q \neq 0\}$. Khususnya, jika D merupakan daerah ideal utama, diperoleh proposisi berikut sebagai generalisasi dari \mathbb{Q} sebagai \mathbb{Z} -modul.

Proposisi 1. *Jika D adalah daerah ideal utama, maka Q_D sebagai D -modul merupakan modul injektif sekaligus modul yang dapat dibagi.*

Bukti: Misalkan A, B adalah sebarang D -modul, $f: A \rightarrow D$ adalah monomorfisma, dan $g: A \rightarrow Q_D$ sebarang homomorfisma. Karena $f: A \rightarrow D$ adalah monomorfisma, maka A dapat dinyatakan sebagai $A = \langle a \rangle = Da = \{da \mid d \in D\}$ untuk suatu $0 \neq a \in A$.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & Da \xrightarrow{f} D \\ & & \downarrow g \\ & & Q_D \end{array}$$

Gambar 3. Diagram komutatif untuk D -modul injektif Q_D

Pada Gambar 3, didefinisikan $h: D \rightarrow Q_D$ sebagai $h(d) = d \cdot \frac{q}{a}$, dan

$$g(da) = dq = d\left(\frac{a}{a}\right)q = d\left(\frac{q}{a}\right)a = h(da) = h(f(da)) = (hf)(da)$$

Diperoleh $g = hf$. Sehingga Q_D adalah D -modul injektif. Lebih lanjut, Q_D merupakan modul yang dapat dibagi. Misalkan $\frac{p}{q} \in Q_D$, untuk setiap $0 \neq r \in D$, dipilih $\frac{p}{qr} \in Q_D$, sehingga

$$\frac{p}{q} = r \cdot \frac{p}{qr}$$

Sehingga Q_D adalah D -modul yang dapat dibagi. Dengan demikian, Q_D sebagai D -modul merupakan modul injektif sekaligus modul yang dapat dibagi. \square

Setiap modul injektif merupakan modul yang dapat dibagi, tetapi sebaliknya belum tentu berlaku. Sebagai contoh, $\mathbb{Z}[x]$ -modul $M = \mathbb{Q}(x)/\mathbb{Z}[x]$ dengan $\mathbb{Q}(x)$ lapangan hasil bagi dari $\mathbb{Z}[x]$ merupakan modul yang dapat dibagi tetapi bukan merupakan modul injektif [2].

(b) Sifat Perluasan Esensial di dalam \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q}

Suatu R -modul M dikatakan perluasan esensial dari R -modul N jika untuk setiap submodul tak nol K dari M berlaku $K \cap N \neq 0$. Pernyataan ini ekuivalen dengan mengatakan untuk setiap $0 \neq x \in M$ terdapat $r \in R$ sedemikian hingga $0 \neq rx \in N$. Jika M merupakan perluasan esensial maksimal bagi N , maka M disebut amplop injektif bagi modul N .

Modul \mathbb{Q} atas \mathbb{Z} merupakan amplop injektif untuk \mathbb{Z} sebagai \mathbb{Z} -modul. Untuk setiap $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, dengan $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $b \neq 0$, diambil $r = b \in \mathbb{Z}$ sehingga $0 \neq b \cdot q = b \cdot \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$. Sehingga, \mathbb{Q} merupakan perluasan esensial dari \mathbb{Z} . Kemudian mengingat \mathbb{Q} merupakan \mathbb{Z} -modul injektif dan setiap modul injektif tidak memiliki perluasan esensial sejati, maka \mathbb{Q} merupakan perluasan esensial maksimal bagi \mathbb{Z} sebagai \mathbb{Z} -modul. Dengan kata lain, \mathbb{Q} merupakan amplop injektif bagi modul \mathbb{Z} . Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan bahwa lapangan hasil bagi $Q_D = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in D, q \neq 0\}$ atas daerah ideal utama D merupakan amplop injektif bagi D sebagai D -modul. Setiap modul dapat dibagi M atas daerah integral utama D merupakan modul injektif. Khususnya jika D daerah ideal utama, maka modul Q_D dan Q_D/D merupakan modul injektif atas D . Jika D merupakan daerah ideal utama maka D -modul M injektif jika dan hanya jika M dapat dibagi. Mengingat \mathbb{Z} merupakan daerah ideal utama maka setiap modul M atas \mathbb{Z} merupakan modul yang dapat dibagi. Jika D merupakan daerah ideal utama, dan M merupakan modul injektif atas D maka M/K juga injektif atas R untuk setiap submodul K dalam M .

(c) Ketakterdekomposisian di dalam \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q}

Suatu R -modul M disebut modul yang tak terdekomposisi jika penjumlahan langsung dari M hanyalah submodul 0 dan M sendiri. Modul \mathbb{Q} atas \mathbb{Z} merupakan modul yang tak terdekomposisi. Andaikan $\mathbb{Q} = A \oplus B$, dengan A dan B submodul \mathbb{Q} yang tak nol. Berarti terdapat $0 \neq a \in A$ dan $0 \neq b \in B$. Elemen a dan b dapat dinyatakan sebagai $a = \frac{x_1}{y_1}$ dan $b = \frac{x_2}{y_2}$ dengan $0 \neq x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan $A \cap B \neq 0$. Karena A dan B merupakan \mathbb{Z} -modul, dipilih $z_1 = x_2 y_1 \in \mathbb{Z}$ dan $z_2 = x_1 y_2 \in \mathbb{Z}$, sehingga

$$z_1 a = (x_2 y_1) \frac{x_1}{y_1} = x_1 x_2 = (x_1 y_2) \frac{x_2}{y_2} = z_2 b$$

Dengan demikian, $x_1 x_2 \in A \cap B$. Jadi $A \cap B \neq 0$. Sehingga \mathbb{Q} tidak dapat dinyatakan sebagai jumlahan dua submodul yang tak nol. Dengan demikian, \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} merupakan modul yang tak terdekomposisi.

Lebih lanjut memanfaatkan ketakterdekomposisian pada \mathbb{Q} , dapat ditunjukkan bahwa \mathbb{Q} merupakan amplop injektif bagi setiap submodul \mathbb{Q} . Misalkan A submodul tak nol dari \mathbb{Q} . Karena \mathbb{Q} adalah modul injektif, maka terdapat submodul B dari \mathbb{Q} sedemikian hingga B merupakan amplop injektif bagi A . Dilain pihak, \mathbb{Q} adalah perluasan esensial bagi modul injektif B , maka B merupakan penjumlahan langsung \mathbb{Q} . Mengingat \mathbb{Q} merupakan modul yang tak terdekomposisi dan A submodul tak nol dari \mathbb{Q} , maka haruslah $B = \mathbb{Q}$. Dengan demikian \mathbb{Q} merupakan amplop injektif dari setiap submodulnya. Sifat ini dapat digeneralisasi untuk setiap R -modul M yang injektif dan tak terdekomposisi seperti dinyatakan dalam proposisi berikut.

Proposisi 2. [3] Misalkan E adalah R -modul injektif. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

- (a) E adalah modul yang tak terdekomposisi,
- (b) $E \neq 0$ dan E adalah amplop injektif bagi setiap submodul E ,
- (c) submodul 0 merupakan submodul irreducible.

Khususnya, untuk lapangan hasil bagi $Q_D = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in D, q \neq 0\}$ atas daerah ideal utama D dapat ditunjukkan Q_D merupakan modul yang tak terdekomposisi. Sehingga modul Q_D atas daerah ideal utama D merupakan amplop injektif dari setiap submodul Q_D .

(d) Hubungan \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} dengan Grup Prüfer \mathbb{Z}_{p^∞}

Suatu p -komponen dari \mathbb{Z} -modul M , dengan p bilangan prima, didefinisikan sebagai $p(M) = \{a \in M \mid p^k a = 0 \text{ untuk suatu } k \in \mathbb{N}\}$. Jika M adalah \mathbb{Z} -modul torsi, maka M dapat dinyatakan sebagai hasil tambah langsung dari p komponennya, yaitu

$$M = \bigoplus \{p(M) \mid p \text{ adalah bilangan prima}\}$$

dengan $p(M) = \{a \in M \mid p^k a = 0 \text{ untuk suatu } k \in \mathbb{N}\}$. Pada \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q}/\mathbb{Z} , dinotasikan p -komponen untuk \mathbb{Q}/\mathbb{Z} sebagai \mathbb{Z}_{p^∞} (disebut grup Prüfer). Karena \mathbb{Q}/\mathbb{Z} adalah modul torsi, maka \mathbb{Q}/\mathbb{Z} dapat dinyatakan sebagai:

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \bigoplus \{\mathbb{Z}_{p^\infty} \mid p \text{ adalah bilangan prima}\}$$

Sifat dari grup Prüfer \mathbb{Z}_{p^∞} disajikan pada proposisi berikut.

Proposisi 3. [4] Grup Prüfer \mathbb{Z}_{p^∞} merupakan amplop injektif dari \mathbb{Z}_p dengan p bilangan prima.

Bukti: Untuk membuktikan \mathbb{Z}_{p^∞} adalah amplop injektif dari \mathbb{Z}_p , akan ditunjukkan \mathbb{Z}_{p^∞} merupakan modul injektif dan perluasan essential dari \mathbb{Z}_p . Karena \mathbb{Q} adalah \mathbb{Z} -modul yang dapat dibagi dan \mathbb{Z} merupakan submodul \mathbb{Q} , maka \mathbb{Q}/\mathbb{Z} juga merupakan modul yang dapat dibagi. Akibatnya, \mathbb{Z}_{p^∞} adalah \mathbb{Z} -modul yang dapat dibagi. Lebih lanjut, karena \mathbb{Z}_{p^∞} modul atas daerah ideal utama \mathbb{Z} , maka \mathbb{Z}_{p^∞} modul injektif. Karena $\mathbb{Z}_p \simeq \{\frac{z}{p} + \mathbb{Z} \mid z \in \mathbb{Z}\}$ merupakan submodul dari \mathbb{Z}_{p^∞} , akan ditunjukkan \mathbb{Z}_p termuat di setiap submodul tak nol dari \mathbb{Z}_{p^∞} . Misalkan K sebarang submodul sejati dari \mathbb{Z}_{p^∞} . Dipilih $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga

$$\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \in K \text{ tetapi } \frac{1}{p^{n+1}} + \mathbb{Z} \notin K.$$

Untuk setiap elemen $\frac{k}{p^m} + \mathbb{Z} \in K$ dengan $k \in \mathbb{Z}$, p tidak membagi k , dan dapat ditemukan $r, s \in \mathbb{Z}$ dengan $kr + p^m s = 1$. Sehingga

$$\frac{1}{p^m} + \mathbb{Z} = \frac{kr + p^m s}{p^m} + \mathbb{Z} = r\left(\frac{k}{p^m} + \mathbb{Z}\right) \in K.$$

Dari pemilihan n , maka $m \leq n$ dan $K = \mathbb{Z}(\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z})$. Jadi $\mathbb{Z}_p \subset K$ sehingga \mathbb{Z}_p termuat di setiap submodul tak nol \mathbb{Z}_{p^∞} . Dengan demikian, \mathbb{Z}_{p^∞} adalah perluasan essential dari \mathbb{Z}_p , yaitu \mathbb{Z}_{p^∞} merupakan amplop injektif dari \mathbb{Z}_p . \square

Hubungan antara \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} dan grup Prüfer \mathbb{Z}_{p^∞} disajikan pada proposisi-proposisi berikut.

Proposisi 4. [3] Sebagai \mathbb{Z} -modul, \mathbb{Q} dan grup Prüfer \mathbb{Z}_{p^∞} dengan p bilangan prima, merupakan modul injektif, tak terdekomposisi, dan tidak isomorfik.

Bukti: Telah ditunjukkan sebelumnya bahwa \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} merupakan modul injektif dan tak terdekomposisi, dan juga grup Prüfer \mathbb{Z}_{p^∞} merupakan modul injektif. Tinggal ditunjukkan sifat tak terdekomposisi pada \mathbb{Z}_{p^∞} dan sifat tak isomorfis pada \mathbb{Q} dan \mathbb{Z}_{p^∞} . Pada Proposisi 3, diperoleh bahwa $\mathbb{Z}_p \simeq \{\frac{z}{p} + \mathbb{Z} \mid z \in \mathbb{Z}\}$ merupakan submodule dari \mathbb{Z}_{p^∞} yang termuat di setiap submodule tak nol dari \mathbb{Z}_{p^∞} . Sehingga, \mathbb{Z}_{p^∞} merupakan modul yang tak terdekomposisi. Lebih lanjut, untuk bilangan prima $p \in \mathbb{Z}$ dan $\frac{1}{p} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$, diperoleh $p(\frac{1}{p} + \mathbb{Z}) = 0 + \mathbb{Z}$. Sehingga \mathbb{Z}_{p^∞} merupakan modul tak bebas torsi. Karena \mathbb{Q} merupakan modul bebas torsi, maka \mathbb{Q} dan grup Prüfer \mathbb{Z}_{p^∞} tidak isomorfik. \square

Proposisi 5. [3] Misalkan R ring Noetherian komutatif. Modul M atas R merupakan modul injektif tak terdekomposisi jika dan hanya jika terdapat ideal prima P dari R sedemikian hingga $M \cong E(R/P)$, dimana $E(R/P)$ adalah amplop injektif dari R/P .

Proposisi 6. [3] Setiap \mathbb{Z} -modul injektif yang tidak terdekomposisi akan isomorfik dengan \mathbb{Q} atau \mathbb{Z}_{p^∞} , dengan p bilangan prima.

Bukti: Misalkan M adalah R -modul injektif, tak terdekomposisi, dan M tidak isomorfik dengan \mathbb{Z}_{p^∞} . Akan ditunjukkan M isomorfik dengan \mathbb{Q} . Memanfaatkan Proposisi 5, karena \mathbb{Z} merupakan ring Noetherian yang komutatif, maka M adalah amplop injektif untuk \mathbb{Z}/P untuk suatu P ideal prima \mathbb{Z} . Satu-satunya ideal prima yang memenuhi hanyalah $P = 0$, sehingga M isomorfik dengan amplop injektif dari \mathbb{Z} , yaitu \mathbb{Q} . \square

3 Kesimpulan

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa \mathbb{Z} -modul \mathbb{Q} merupakan contoh modul yang secara elemen demi elemen (*element wise*) mudah dikenali dan mempunyai struktur yang mudah diamati namun juga merupakan modul yang memperjelas konsep-konsep dalam teori modul dari yang sederhana terkait dengan konsep kebebasan dan ketorsian namun juga memperjelas konsep yang lanjut (*advanced*) seperti keinjektifan dan amplop injektif.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Adkins, A., Weintraub, S.H. *Algebra: an approach via module theory*, Cambridge University Press, (2016).
- [2] Lam, T., *Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag, New York (1991).
- [3] Sharpe, D. and Vamos, P., *Injective Modules*, Cambridge University Press, London (1972).
- [4] Wisbauer, R., *Foundation of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach Science Publisher, (1991).

ISSN 2829-3770



9

772829

377007