Konferensi Nasional MATEMATIKA KNM 2021

PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by IndoMS

Organized by Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

"Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0"

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

e-ISSN: 2829-3770
DOI issue: https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX

Dipublikasikan online pada:
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:

Mei 2022

Editor:

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si., M.Si., Berny P. Tomasouw, S.Si., M.Si.,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si., M. I. Tilukay, S.Si., M.Si., Monalisa E. Rijoly, S.Si., M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si., M.Si, M. B. Mananggel, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si., M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si., M.Si. Vicardy Kempa, S.Si., M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si., M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si., M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si., M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumalun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

KOMBINATORIK

PENDIDIKAN MATEMATIKA

MATEMATIKA TERAPAN

STATISTIKA

https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX.15-20

GRAF PEMBAGI NOL DARI RING KOMUTATIF

Maria Vianney Any Herawati

Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta, Indonesia
e-mail: any@usd.ac.id

Abstrak. *Suatu elemen r dalam ring komutatif R, adalah pembagi nol bila ada elemen tak nol s sedemikian hingga rs = 0. Pencarian pembagi nol dalam suatu ring merupakan masalah yang penting untuk dipelajari, di antaranya untuk menentukan himpunan penyelesaian dari suatu persamaan suku banyak. Persamaan suku banyak yang sama bisa mempunyai himpunan penyelesaian yang berbeda bila dikerjakan dalam sistem bilangan yang berbeda. Secara umum, himpunan yang terdiri dari semua pembagi nol dalam R tidak dapat menjadi struktur aljabar karena belum tentu tertutup terhadap penjumlahan. Beberapa tahun ini dikembangkan suatu pendekatan dalam mempelajari himpunan pembagi nol dari ring komutatif, yang muncul dari cabang matematika yang tidak diduga yaitu teori graf, khususnya melalui graf pembagi nol dari R.*

Kata kunci: graf, pembagi nol, ring komutatif

1 PENDAHULUAN

Persamaan suku banyak, sebagai contoh $x^2 = 2x$, dalam sistem bilangan real dapat diselesaikan dengan menuliskan ulang persamaan tersebut menjadi $x(x-2) = 0$, kemudian disimpulkan bahwa penyelesaiannya adalah $x = 0$ atau $x = 2$. Tetapi, persamaan yang sama tersebut dalam sistem bilangan yang berbeda dapat menghasilkan himpunan penyelesaian yang berbeda. Sebagai contoh, dalam $\mathbb{Z}_{12}$ (himpunan bilangan bulat modulo 12) penyelesaiannya tidak hanya 0 dan 2, tapi juga 6 dan 8.

Pembagi nolnya dalam $\mathbb{Z}_{12}$ adalah 0, 2, 3, 4, 6, dan 8, karena $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 8 \cdot 3 = 0$. Suatu elemen $1 \in R$ disebut *elemen satuan* (identitas terhadap operasi perkalian) bila $1.r = r, \forall r \in R$. Ring komutatif dengan elemen satuan tanpa pembagi nol disebut *daerah integral*. Sifat faktor-nol yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan di atas yang berbunyi $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ berlaku untuk daerah integral, tapi tidak berlaku untuk semua ring komutatif. Oleh karena itulah, maka teori ring untuk pencarian pembagi nol merupakan hal yang penting.

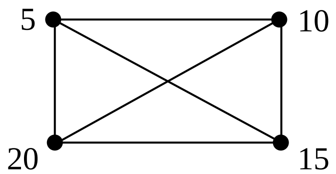
Himpunan semua pembagi nol dari ring komutatif R, dinotasikan dengan $Z(R)$, umumnya tidak bisa menjadi struktur aljabar, karena belum tentu $Z(R)$ tertutup terhadap penjumlahan. Dalam $\mathbb{Z}_{12}$, 3 dan 4 adalah pembagi nol, tapi $3 + 4$ bukan. Jadi, $Z(R)$ bukan ring bagian dari $\mathbb{Z}_{12}$, dan akibatnya juga bukan ideal. Beberapa tahun belakangan, dikembangkan suatu pendekatan baru untuk mempelajari himpunan pembagi nol yang muncul dari arah yang tidak diduga yaitu teori graf. Dalam tulisan ini akan dibahas beberapa hal tentang graf pembagi nol dari suatu ring komutatif yang dimulai dari memperkenalkan definisinya untuk membentuk $\Gamma(R)$ dari beberapa ring komutatif R, lalu dicari diameter dan ukuran lilitannya. Selanjutnya dibuat dugaan tentang diameter dan ukuran lilitan dari $\Gamma(R)$ secara umum juga mengenai selalu terhubung atau tidaknya $\Gamma(R)$. Yang terakhir diperiksa mungkinkah suatu graf Γ yang diberikan menjadi graf pembagi nol dari suatu ring komutatif.

2 DEFINISI DAN NOTASI

Pada tahun 1988 Istvan Beck menuliskan suatu hubungan antara teori graf dan teori ring komutatif yang diharapkan memberikan keuntungan timbal balik untuk kedua cabang matematika tersebut [1]. Definisi yang ditulis oleh Beck untuk graf pembagi nol dari ring komutatif muncul saat meneliti masalah pewarnaan ring. Definisi tersebut kemudian dimodifikasi oleh D.F.Anderson dan P.Livingston [2] dengan mengeluarkan elemen nol , dan menjadi definisi yang baku sampai sekarang. Misal $Z(R)$ adalah himpunan semua pembagi nol dari ring komutatif R sedangkan $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$, didefinisikan $\Gamma(R)$ adalah graf yang titik-titiknya adalah elemen-elemen dari $Z(R)^*$, dan dua titik yang berbeda a dan b dihubungkan dengan suatu garis, ditulis dengan $a - b$, bila dan hanya bila $ab = 0$. Graf $\Gamma(R)$ disebut *graf pembagi nol dari R*. Sebelum diperiksa sifat-sifat yang dimiliki oleh graf pembagi nol diberikan beberapa definisi yang diperlukan. Misal Γ adalah suatu graf dan misal v dan w adalah titik-titik dalam Γ. *Jalan* dari v ke w adalah barisan selang-seling titik dan garis. *Panjang jalan* adalah banyaknya garis dalam jalan tersebut. *Lintasan* dari v ke w adalah jalan dari v ke w yang tidak terjadi pengulangan titik maupun garis. Graf Γ dikatakan *terhubung* bila untuk setiap dua titik v dan w terdapat lintasan dari v ke w. *Jarak* antara dua titik a dan b, dinyatakan dengan $d(a,b)$, adalah panjang lintasan terpendek dari a ke b ($d(x,y) = \infty$ bila tidak ada lintasan dari a ke b). *Diameter* dari Γ adalah diam(Γ) = sup$\{d(x,y)|\ x$ dan y adalah titik-titik yang berbeda dari $\Gamma\}$. *Siklus* adalah lintasan yang titik awal dan akhirnya sama. Untuk graf Γ yang memuat siklus, didefinisikan ukuran lilitan dari Γ adalah panjang siklus terpendek dalam Γ. *Ukuran lilitan (girth)* dari Γ, ditulis dengan $g(\Gamma)$, didefinisikan sebagai panjang siklus terpendek dalam Γ ($g(\Gamma) = \infty$ bila Γ tidak memuat siklus). Suatu graf dikatakan mempunyai *loop* di x bila ada garis $x - x$. Apabila Γ adalah graf pembagi nol dari ring komutatif R, maka suatu loop di x ekivalen dengan $x^2 = 0$. Seperti biasa, ring bilangan bulat modulo n disimbolkan dengan $\mathbb{Z}_n$ dan lapangan berhingga dengan q elemen dinyatakan dengan F_q. Referensi untuk teori ring menggunakan [3] sedangkan untuk teori graf menggunakan [4].

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

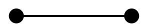
Contoh berikut menggambarkan cara membentuk graf pembagi nol dari ring $\mathbb{Z}_{25}$. Karena 5.10 = 5.15 = 5.20 = 0 (mod 25), maka $\mathbb{Z}_{25}$ memiliki empat pembagi nol yang tak nol yaitu 5, 10, 15, dan 20. Dan graf pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{25}$, yang dinotasikan dengan $\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$, dapat dilihat di Gambar 1.



Gambar 1. $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$

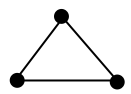
Graf pembagi nol dari beberapa ring komutatif yang lain disajikan dalam Gambar 2, 3, 4, 5, 6,dan 7 dan untuk penyederhanaan gambar titik-titiknya tanpa diberi label.

Gambar 2. $\Gamma(\mathbb{Z}_4)$ atau $\Gamma(\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle$



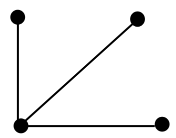
Gambar 3. $\Gamma(\mathbb{Z}_9), \Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$, atau $\Gamma(\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2\rangle$

Gambar 4. $\Gamma(\mathbb{Z}_6), \Gamma(\mathbb{Z}_8)$, atau $\Gamma(\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3\rangle$



Gambar 5. $\Gamma(\mathbb{Z}_2[x,y]/\langle x^2, xy, y^2\rangle$ atau $\Gamma(F_4[x]/\langle x^2\rangle$

Gambar 6. $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$



Gambar 7. $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times F_4)$

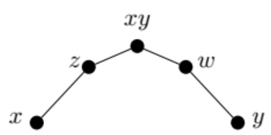
3.1 Sifat-sifat graf pembagi nol

Dari beberapa contoh graf pembagi nol di atas akan dibuktikan dugaan bahwa graf pembagi nol merupakan graf terhubung dan diameternya tidak melampaui tiga .

Teorema 1. [5] Misal R adalah ring komutatif (tidak harus berhingga). Maka $\Gamma(R)$ terhubung dan diam($\Gamma(R) \leq 3$.

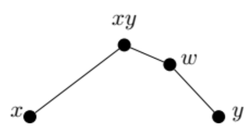
Bukti : Ambil sebarang x dan y di $\Gamma(R)$. Bila x dan y dihubungkan dengan garis berarti $\Gamma(R)$ terhubung. Sedangkan bila bila x dan y tidak dihubungkan dengan garis dan karena x dan y adalah pembagi nol, maka $xz = 0$ dan $yw = 0$ untuk suatu $z, w \in \Gamma(R)$.

Kasus 1 (Gambar 8): $z \neq x$ dan $w \neq y$.



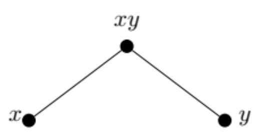
Gambar 8. Kasus 1.

Kasus 2 (Gambar 9): $z = x$ dan $w \neq y$.



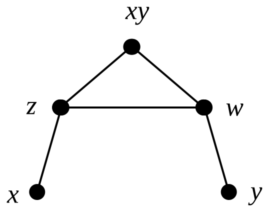
Gambar 9. Kasus 2.

Kasus 3 (Gambar 10): $z = x$ dan $w = y$.



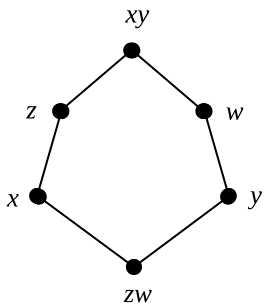
Gambar 10: Kasus 3.

Karena x dan y adalah sebarang titik yang berbeda di $\Gamma(R)$, berdasarkan ketiga kasus di atas disimpulkan bahwa $\Gamma(R)$ terhubung. Selanjutnya untuk membuktikan tentang diameternya, cukup melihat kasus 1. Bila $z = w$, maka grafnya seperti Gambar 9 dengan titik *z* berimpit dengan *w*. Jadi $d(x, y) = 3$. Karena *x* dan y sebarang maka diam($\Gamma(R) = 3$. Sedangkan bila $z \neq w$, ada 2 kasus, yaitu kasus $zw = 0$, yang berarti grafnya seperti Gambar 11.



Gambar 11. Kasus $zw = 0$.

Untuk kasus $zw \neq 0$, berarti zw adalah pembagi nol karena $x(zw) = (xz)w = 0.w = 0$ dan $(zw)y = z(wy) = z.0 = 0$. Jadi ada garis yang menghubungkan titik *x* dengan titik *zw* begitu pula ada garis yang menghubungkan titik *z* dengan titik *wy*. Sehingga grafnya adalah seperti Gambar 12 dan diperoleh $d(x, y) = 2$. Karena *x* dan *y* sebarang maka diam($\Gamma(R) = 2$.



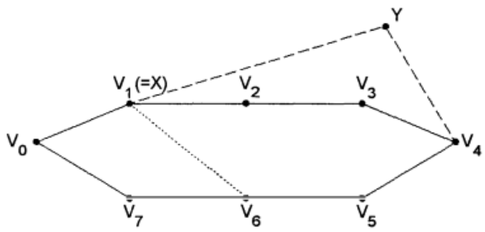
Gambar 12. Kasus $zw \neq 0$.

Terbukti diam($\Gamma(R) \leq 3$. □

Fakta bahwa jarak antara dua titik dalam graf pembagi nol relatif kecil akan membatasi juga panjang siklus terpendeknya, yaitu girth (ukuran lilitan)nya. Akibat berikut memberikan batas atas untuk girth(ukuran lilitan) untuk graf pembagi nol.

Teorema 2 [6] Bila *R* adalah ring, maka ukuran lilitan dari $\Gamma(R)$ kurang dari delapan.

Bukti: Andaikan $\Gamma(R)$ mempunyai siklus terkecil *C* dengan panjang delapan, yaitu $v_0 - v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_8 = v_0$. Misal P_1 menyatakan lintasan $v_0 - v_1 - v_2 - v_3 - v_4$ dan P_2 menyatakan lintasan $v_0 - v_7 - v_6 - v_5 - v_4$. Perhatikan Gambar 13.

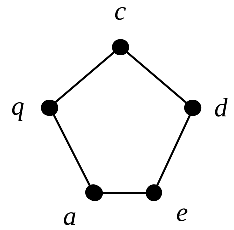


Gambar 13.

Pertama, perhatikan bahwa untuk $0 < i < 4 < j < 8$, v_i dan v_j tidak terhubung. Sebab andaikan v_i dan v_j terhubung maka $v_0 - \cdots - v_i - v_j - \cdots - v_0$ adalah siklus dengan panjang kurang dari delapan yang kontradiksi dengan asumsi bahwa C adalah siklus terpendek. Asumsikan ada lintasan $v_0 - x - y - v_4$ (Bila tidak, maka ada lintasan $v_0 - x - v_4$. Yang berarti tidak mungkin (v_0 dan v_4 tidak mungkin dihubungkan dengan suatu garis). Jadi lintasan $v_0 - x - y - v_4$ berpotongan dengan P_1, atau P_2, tapi tidak keduanya. Asumsi ini menghasilkan siklus $v_0 - x - y - v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_8 = v_0$ dengan panjang tujuh. Kontradiksi. □

Berdasar contoh di atas pembentukan graf pembagi nol untuk ring komutatif yang diberikan tidaklah sulit, namun yang tidak mudah adalah usaha sebaliknya yaitu mencari ring komutatifnya untuk sejumlah graf yang diberikan. Beberapa cara yang bisa dilakukan untuk memeriksa apakah suatu graf merupakan graf pembagi nol dari ring komutatif atau bukan di antaranya adalah dengan menggunakan teorema yaitu bila graf tersebut tidak terhubung maka tidak mungkin menjadi graf pembagi nol. Sedangkan untuk pembuktian bahwa graf tersebut bukan graf pembagi nol bisa digunakan strategi berikut:

Pertama, andaikan graf tersebut adalah graf pembagi nol. Kedua, perhatikan hasil penjumlahan dan perkalian elemen-elemennya. Ketiga, carilah kontradiksi yang muncul dari elemen-elemen tersebut, misalnya adanya titik nol, atau adanya dua titik yang sama, atau adanya pembagi nol yang tidak muncul dalam graf tersebut. Sebagai contoh, perhatikan graf dalam Gambar 14 [5].



Gambar 14 Graf yang bukan merupakan graf pembagi nol.

Akan dibuktikan bahwa graf di atas tidak mungkin menjadi graf pembagi nol dari ring komutatif. Perhatikan *a.d* yang menghasilkan 0 bila dikalikan dengan *b,c,* dan *e*, karena

$$(a \cdot d) \cdot b = (d \cdot a) \cdot b = d \cdot (a \cdot b) = d \cdot 0 = 0,$$

$$(a \cdot d) \cdot c = a \cdot (d \cdot c) = a \cdot 0 = 0,$$

$$(a \cdot d) \cdot e = a \cdot (d \cdot e) = a \cdot 0 = 0.$$

Jadi $a \cdot d$ adalah pembagi nol selain itu $a \cdot d$ berderajat minimal 3. Padahal semua titik dalam graf di atas berderajat 2. Muncul kontradiksi. □

4 KESIMPULAN

Bila R adalah ring komutatif (tidak harus berhingga), disimpulkan bahwa $\Gamma(R)$ terhubung dan diam($\Gamma(R) \leq 3$, selain itu ukuran lilitan dari $\Gamma(R)$ kurang dari delapan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] I. Beck, "Coloring of commutative rings", *Journal of Algebra*, 116(1), 208-226, (1988).
[2] D. F. Anderson dan P. S. Livingston, "The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring", Journal of Algebra, 217, 434-447, (1999).
[3] D. Dummit dan R. Foote., "Abstract Algebra", 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, (2004).
[4] R. Diestel, R., "Graph Theory", Springer-Verlag, New York, (1997).
[5] A. Guillory, M. Lazo, L. Mondello, and T. Naugle, "Realizing zero divisor graphs", 1–9, https://www.math.lsu.edu/system/files/ZeroDivGraphsPaper.pdf [Diakses 1 Juli 2021]
[6] P. S. Livingston, "Structure in Zero-Divisor Graphs of Commutative Rings", Master's Thesis, University of Tennesse (1997).

ISSN 2829-3770