

Konferensi Nasional MATEMATIKA 20 21



PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX
Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by
IndoMS



Organized by
Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

“Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0”

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

@Hak Cipta dilindungi Undang-undang

e-ISSN: 2829-3770

DOI issue: <https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX>

Dipublikasikan online pada:

Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:



Mei 2022

Editor:

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si, M.Si, Berny P. Tomasouw, S.Si, M.Si,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si, M. I. Tilukay, S.Si, M.Si, Monalisa E. Rijoly, S.Si, M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si, M.Si, M. B. Mananggal, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si, M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si, M.Si. Vicardy Kempa, S.Si, M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si, M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si, M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si, M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumulun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

Halaman Judul	i
Tim Reviewer	ii
Kata Pengantar	iii
Susunan Panitia KNM XX	iv
Daftar Isi	vii

ALJABAR

KLASIFIKASI TITIK KRITIS POLINOMIAL DUA VARIABEL BERDERAJAT TIGA	1 – 8
Afif Humam	
KAJIAN KEKUATAN \mathbb{Z} - MODUL \mathbb{Q} SEBAGAI INSPIRASI MUNCULNYA KONSEP DAN SIFAT DALAM TEORI MODUL	9 – 14
Sri Wahyuni, Yunita Septriana Anwar, I Putu Yudi Prabhadika	
GRAF PEMBAGI NOL DARI RING KOMUTATIF	15 – 20
Maria Vianney Any Herawati	
IDEAL TAK TEREDUKSI KUAT ATAS SEMIRING KOMUTATIF	21 – 26
Fitriana Hasnani, Nikken Prima Puspita	
BATAS ATAS PADA NORM – TAK HINGGA DARI INVERS MATRIKS NEKRASOV	27 – 32
Eddy Djauhari	
KOREPRESENTASI KOALJABAR $F[G]$	33 – 40
Na'imah Hijriati, Indah Emilia Wijayanti	
HUBUNGAN SIFAT BERSIH PADA RING, MODUL, KOMODUL DAN KOALJABAR	41 – 50
Nikken Prima Puspita, Indah Emilia Wijayanti, Budi Surodjo	
KONTRAKSI PERTINGKATAN PADA PERTINGKATAN PAULI $\mathfrak{S}\mathfrak{L}(N, \mathbb{C})$	51 – 60
Reynald Saputra, Gantina Rachmaputri	

ANALISIS

BUKTI ALTERNATIF INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG LEBESGUE DENGAN EKSPONEN PEUBAH	61 – 66
Dina Nur Amalina dan Denny Ivanal Hakim	
SEGITIGA TITIK CIRCUMCENTER PADA MODIFIKASI TEOREMA NAPOLEON	67 – 76
Yunisa Fadhilah Hartati, Mashadi	
FUNGSI SIMETRI TERHADAP TITIK (a, b) DAN BEBERAPA SIFATNYA	77 – 82
Firdaus Ubaidillah	
INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG MORREY-ADAMS DAN OPERATOR MAKSIMAL FRAKSIONAL	83 – 90
Daniel Salim, Moch. Taufik Hakiki, Denny Ivanal Hakim	
PENDEKATAN KALKULUS HIDA UNTUK PROSES HERMITE	91 – 98
Herry Pribawanto Suryawan	
KETAKSAMAAN HARDY DI RUANG HERZ HOMOGEN	99 – 106
Pebrudal Zanu, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi1	
OPERATOR KANTOROVICH PADA RUANG MORREY DIPERUMUM	107 – 114
Mu'afa Purwa Arsana, Denny Ivanal Hakim	
PERLUASAN DEFINISI RATA-RATA VIA TEOREMA NILAI RATA-RATA	115 – 124
Mochammad Idris	
SISTEM EIGEN OPERATOR LAPLACE BERBASIS RUAS PADA SUATU POHON KUANTUM	125 – 134
Moh. Januar I. Burhan, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi	

SUKU BANYAK BERNSTEIN DAN OPERATOR KANTOROVICH UNTUK BEBERAPA FUNGSI YANG TIDAK KONTINU	135 – 142
Reinhart Gunadi, Denny I. Hakim	
KETERBATASAN OPERATOR TIPE VOLTERRA PADA RUANG MORREY ANALITIK $L_{p,\lambda}$	585 - 590
Moch Taufik Hakiki, Wono Setya Budhi, dan Denny Ivanal Hakim	
KOMBINATORIK	
PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF SIPUT DAN GRAF UBUR-UBUR	143 – 148
Kevin Akbar, Kiki Ariyanti Sugeng	
DIMENSI METRIK LOKAL PADA GRAF FLOWER DAN GRAF GEAR KORONA GRAF LINTASAN	149 – 154
Salma Fauziyah Ashim, Tri Atmojo Kusmayadi, Titin Sri Martini	
PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF LILIN	155 – 160
Rizqi Rachmadhani, Kiki Ariyanti Sugeng	
PELABELAN HARMONIS PADA GRAF SEGITIGA BELAH KETUPAT VARIASI LM_n	161 – 164
Evi Maharani, Kurniawan Atmadja	
PEWARNAAN SIMPUL r – DINAMIS PADA GRAF TERATAI T_n	165 – 170
Audi Fierera, Kiki A. Sugeng	
SIFAT-SIFAT GRAF CAYLEY GRUP S_n	171-176
Afifan Hadi, Kiki Ariyanti Sugeng	
PENDIDIKAN MATEMATIKA	
LKPD BERBASIS PENEMUAN TERBIMBING BERBANTUAN ALAT PERAGA PADA MATERI LUAS PERMUKAAN DAN VOLUME PRISMA DAN LIMAS	177 – 182
Fithroh Nafa Dzillah, Latifah Mustofa Lestyanto	
PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA DARING BERBASIS MODEL PENEMUAN TERBIMBING MENGGUNAKAN LIVEWORKSHEETS PADA MATERI PRISMA DAN LIMAS	183 – 188
Sania Sururul Khususna, Latifah Mustofa Lestyanto, Eddy Budiono	
PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA BERBASIS MASALAH BERBANTUAN GOOGLE FORM UNTUK PEMAHAMAN KONSEP SISWA KELAS VII SMP PADA MATERI SEGITIGA DAN SEGIEMPAT	189 – 194
Herlin Oktavita, Latifah Mustofa Lestyanto2	
EKSPLORASI ETNOMATEMATIKA PADA GELANG MANIK-MANIK KHAS DAYAK KALIMANTAN SEBAGAI SUMBER PENYUSUNAN LKPD	195 – 206
Silvia	
ANALISIS KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIS SISWA DENGAN PEMBELAJARAN MODEL BRAIN BASED LEARNING BERBASIS LEARNING MANANGEMENT SYSTEM	207 – 214
N. R. Mumtaz, M. Asikin	
PENGEMBANGAN ASESMEN ALTERNATIF DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA KONTEKS LINGKUNGAN LAHAN BASAH UNTUK SISWA TINGKAT SMP/MTS	215 – 222
Muhammad Rizal, Noor Fajriah, Agni Danaryanti	
MATERI PENGAYAAN TEORI BILANGAN DASAR DI SEKOLAH DASAR	223-228
Awanga Dijayangrana, Hilda Assiyatun	
KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS TULIS MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH VOLUME BENDA PUTAR MELALUI MODEL PERKULIAHAN KOLABORATIF	229 – 236
Fadhila Kartika Sari, Anies Fuady	
PERAN PENULISAN JURNAL DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA SECARA DARING DI MASA PANDEMI COVID-19	237 – 244

Gusti Firda Khairunnisa, Frida Siswiyanti	
ANALISIS KRUSKAL WALLIS UNTUK MENGETAHUI TINGKAT KOSENTRASI BELAJAR MAHASISWA BERDASARKAN PROGRAM STUDI	245 – 250
Venessa Y. A. Brabar, Grace A. V. Hikoyabi, Agustinus Langowuyo	
ANALISIS PENGARUH PEMANFAATAN INTERNET TERHADAP MINAT BELAJAR MAHASISWA PRODI STATISTIKA	251 – 258
Mariana Tanawani, Meilani Yarangga, dan Agustinus Langowuy	
PENGARUH PROSES BELAJAR MENGAJAR LURING DAN DARING TERHADAP HASIL BELAJAR MAHASISWA JURUSAN MATEMATIKA ANGAKATAN 2018 FMIPA UNIVERSITAS CENDERAWASIH	259 – 264
Dewi Rahmawati, Tiara A. Nadapdap, Agustinus Langowuyo	
PENILAIAN ESAI MENGGUNAKAN MODEL PEMBELAJARAN MESIN	265 – 270
Farah Qotrunnada, Marcus Wono Setya Budhi, Hilda Assiyatun	
PENGEMBANGAN PERANGKAT PEMBELAJARAN BERBASIS ETNOMATEMATIKA BUDAYA MASYARAKAT NEGERI TULEHU PADA MATERI SEGIEMPAT DAN SEGITIGA UNTUK SISWA DI KELAS VII MTS NEGERI I MALUKU TENGAH.	271 – 276
Heni Rahim, W. Mataheru, J. Takaria	
PENERAPAN FUZZY LINEAR PROGRAMMING UNTUK OPTIMASI PRODUKSI TAHU (STUDI KASUS DI DESA TANJUNGREJO KABUPATEN JEMBER)	277 – 284
Anisa Wahyu Illahi, Agustina Pradjaningsih, Abduh Riski	
PENENTUAN SOLUSI FISIBEL AWAL MASALAH TRANSPORTASI DENGAN MINIMUM DEMAND METHOD	285 – 292
Ulniyatul Ula, Siti Khabibah, Robertus Heri S.U	
OPTIMALISASI RUTE DAN PENJADWALAN PENGANGKUTAN SAMPAH DENGAN METODE INSERTION HEURISTIC DAN INTRA- ROUTE IMPROVEMENT (STUDI KASUS: UNIVERSITAS BRAWIJAYA MALANG)	293 – 298
Fara El Nandhita Pratiwi	
MODEL MATEMATIS RUTE WISATA DI RIAU DENGAN MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN GOL	299 – 312
Ihda Hasbiyati, Hasriati, T. P. Nababan	
MATEMATIKA TERAPAN	
MODEL SUSCEPTIBLE INFECTED RECOVERED (SIR) PADA DEMAM BERDARAH DENGUE (DBD)	313 – 320
Oscar Andhry Barata, Rahmat, Rengga Nanda Pramudya	
ANALISA PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE FRAKSIONAL NUMERIK MENGGUNAKAN METODE EULER DAN APLIKASINYA	321 – 326
Leli Deswita, Syamsudhuha, Asral. M	
TERAPAN FUNGSI SIGMOID UNTUK MENENTUKAN NILAI MAKSIMAL KOEFISIEN GAYA ANGKAT DAN SUDUT STALL PADA KURVA LINEAR C_L TERHADAP α	327 – 334
Angga Septiyana, Singgih Satrio W, Fuad Surastyo P, Try Kusuma Wardana, Ardian Rizaldi, Novita Atmasari, Eries Bagita Jayanti, Prasetyo Ardi P	
IMPLEMENTASI DEEP LEARNING UNTUK KLASIFIKASI GAMBAR MENGGUNAKAN CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORK (CNN) PADA BATIK SASAMBO	335 – 340
Muna Malika, Edy Widodo	
STATISTIKA	
PENERAPAN MODEL SPACE TIME AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (STARI(1,1,1)) PADA DATA NTP TANAMAN PANGAN DARI TIGA PROVINSI DI PULAU JAWA	341 -350
Fajriatus Sholihah, Kartika Sari, Budi Nurani Ruchjana, Toni Toharudin	
ANALISIS KORESPONDENSI BERGANDA UNTUK MENGETAHUI INDIKATOR-INDIKATOR YANG MEMPENGARUHI KEJADIAN LOW BACK PAIN PADA KUSIR	351 - 358

KUDA/DELMAN DI KOTA CIMAH I TAHUN 2019	
Dhita Diana Dewi, Fajriatus Sholihah, Rosa Rosmanah, Lucy Fitria Dewi, Mochamad Yudhi Afrizal, Irlandia Ginanjar	
PROSES POISSON NON HOMOGEN DAN PENERAPANNYA PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT	359 – 362
Viona Prisyella Balqis, Muhammad Herlambang Prakasa Yudha, Budi Nurani Ruchjana	
PENERAPAN DISTRIBUSI STASIONER RANTAI MARKOV PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT	363 – 370
Tubagus Robbi Megantara, Ayun Sri Rahmani, Budi Nurani Ruchjana	
SPATIAL CLUSTER ING DENGAN METODE SKATER (K'LUSTER ANALYSIS BY TREE EDGE REMOVAL) UNTUK PENGELOMPOKAN SEBARAN COVID-19 DI KABUPATEN TULUNGAGUNG	371 – 380
Danang Ariyanto, Henny Pramodyo, Novi Nur Aini	
ANALISIS KLASTER KABUPATEN/KOTA INDONESIA BERDASARKAN INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DENGAN MODEL MIXTURE SKEW-T	381 – 388
Kristoforus Exelsis Pratama, Irwan Susanto, Yuliana Susanti	
ANALISIS INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DI KABUPATEN BURU SELATAN DENGAN MENGGUNAKAN REGRESI LINIER BERGANDA	389 – 396
Muhidin Jariyah, Inayah. P. F. Solong, Juan C. S. Jamco	
TINJAUAN KEPUTUSAN HIPOTESA FUZZY BERBASIS P-VALUE FUZZY (STUDI KASUS DATA COVID-19 DI NUSA TENGGARA BARAT)	397 – 404
Wahidaturrahmi	
PENERAPAN METODE AUTO SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS PADA PERAMALAN DATA INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DI INDONESIA	405 – 410
Andreas Reza Chrisantama*, Winita Sulandari, Sugiyanto	
PERAMALAN JUMLAH PRODUKSI PERIKANAN DI KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE PEMULUSAN EKSPONENSIAL	411 – 418
Asrul Irfanullah, Claudia Sumanik, Romy Makatita	
ANALISIS PENGARUH STRUKTUR KONSUMSI AKHIR RUMAH TANGGA BERDASARKAN KOMPONEN PENGELUARAN KABUPATEN BURU SELATAN PERIODE 2015 – 2019 DENGAN RAKL	419 – 424
Nikita A. Putiray, Dea M. Tuhumury, Angel M.P. Manuputty	
EKSPLORASI SISA USIA BEARING MENGGUNAKAN DISTRIBUSI WEIBULL	425 – 430
Sutawanir Darwis, Nusar Hajarisman, Suliadi, Achmad Widodo	
PENERAPAN MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED MOVING AVERAGE (VARIMA) UNTUK PRAKIRAAN INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DAN KURS RUPIAH TERHADAP USD	431 – 442
Ani Pertiwi, Lucy Fitria Dewi, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana	
PENGELOMPOKKAN JUMLAH PENDUDUK KABUPATEN BURU SELATAN BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA TAHUN 2018 DENGAN ALGORITMA K- MEANS	443 – 450
Samir Radjid, Nadia Istifarin, Meylani Tuasella	
PENERAPAN METODE ARIMAX PADA PERAMALAN PRODUKSI DAGING SAPI DI SUKOHARJO	451 – 458
Fitrian Nur Ardyansyah, Winita Sulandari, Sugiyanto	
ANALISIS KEPUASAN DAN POSITIONING SELLER E-MARKETPLACE DENGAN MENGGUNAKAN IMPORTANCE PERFORMANCE ANALYSIS DAN BILOT	459 – 464
Farah Dibah, Dwi Endah Kusri	
KLASTERISASI LOKASI PASAR KABUPATEN BANYUMAS GUNA MEMPERMUDAH UPTD DALAM MENGELOLA KELAS PASAR	465 – 470
Pradini Nurul Safitri, Abdullah Ahmad Dzikrullah	

PENGARUH MOTIVASI INTRINSIK DAN KEPUASAN KERJA TERHADAP ORGANIZATIONAL CITIZENSHIP BEHAVIOR	471 – 476
Diya Kasih Puspitasari, Dwi Endah Kusrini	
KLASTERING JUMLAH PENDUDUK BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA KECAMATAN LEKSULA TAHUN 2018 DENGAN MENGGUNAKAN METODE ALGORITMA K-MEANS	477 – 484
Morensi T. Risakotta, Rensya Siwalette, Rola E. Leasa	
PERAMALAN DENGAN METODE SIMPLE MOVING AVERAGE DAN DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING BROWN (STUDI KASUS: JUMLAH CURAH HUJAN DAN JUMLAH HARI HUJAN KABUPATEN BURU SELATAN)	485 – 494
Apriano R. Narahawarin, Ravensky Silangen, Rahania Patiekon	
PERAMALAN GARIS KEMISKINAN KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING DARI HOLT	495 – 502
Ade Irma La Murdani, Intan Gainau, Unique Resiloy	
ANALISIS PERBEDAAN PENDAPATAN TOKO WALET MAS SEBELUM DAN SESUDAH PANDEMI COVID-19 DENGAN METODE MANN-WHITNEY	503 – 508
Marselina Ema Koten, Yunida Kurniasih, Agustinus Langowuyo	
ANALISIS PENGARUH BELANJA DAERAH, JUMLAH PENDUDUK, DAN PDRB TERHADAP PENDAPATAN DAERAH DI KABUPATEN BURU SELATAN TAHUN 2013-2020	509 – 516
Dephie Latumahina, Martje Riry, Olfen Sabono	
UJI KECOCOKAN DISTRIBUSI RAYLEIGH BIVARIAT MENGGUNAKAN UJI KOLMOGOROV-SMIRNOV BIVARIAT PADA DATA HASIL PERTANDINGAN PERSIB BANDUNG	517 – 522
Wulan Jati Nuraya, Aceng Komarudin Mutaqin	
MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) UNTUK PERAMALAN BANYAKNYA KASUS TERKONFIRMASI DAN KASUS SEMBUH COVID-19 DI INDONESIA	523 – 532
Sri Indra Maiyanti, Mahrudinda, Al Fataa W. Haq, Budi Nurani Ruchjana	
MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) DAN PENERAPANNYA PADA DATA PERKEMBANGAN HARGA ECERAN BERAS DI TIGA IBU KOTA PROVINSI WILAYAH PULAU JAWA	533 – 544
Zulfa Hidayah Satria Putri, Asri Yuniar, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana	
PENERAPAN METODE REGRESI LINEAR BERGANDA UNTUK MELIHAT PENGARUH JUMLAH PENDUDUK DAN LUAS WILAYAH TERHADAP JUMLAH PENGGUNA LISTRIK DI KECAMATAN AMBALAU KABUPATEN BURU SELATAN	545 – 552
Fadly Ode, Nur Statib J, Elsy Malwewar	
ANALISIS TINGKAT KEGEMARAN AYAM GEPUK PAK GEMBUS DARI BERBAGAI JENIS PAKET MELALUI PENDEKATAN UJI STATISTIK	553 – 558
Maharani Tiara Pramuditya, Evan Claude Boudewijn Kainama, Agustinus Langowuyo	
SIMULASI PERGERAKAN HARGA SAHAM MENGGUNAKAN MODEL GERAK BROWN GEOMETRIK DENGAN R STUDIO	559 – 564
Ahmad Fawaid Ridwan, Rizki Apriva Hidayana, Budi Nurani Ruchjana	
PENAKSIRAN RATA-RATA <i>EXCESS CLAIM</i> PESERTA DARI PERUSAHAAN PEMBERI LAYANAN KESEHATAN PT. X	565 – 572
Wildan*, Indah Permatasari, and Aceng Komarudin Mutaqin	
PENGARUH SELF EFFICACY DAN MOTIVASI BELAJAR TERHADAP HASIL BELAJAR SISWA KELAS VII SMP NEGERI 3 GANTUNG	573 – 584
Alperu, Nerru Pranuta Murnaka*, Indra Bayu M, Andy Wahyu H	

GRAF PEMBAGI NOL DARI RING KOMUTATIF

Maria Vianney Any Herawati

Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta,
Indonesia
e-mail: any@usd.ac.id

Abstrak. Suatu elemen r dalam ring komutatif R , adalah pembagi nol bila ada elemen tak nol s sedemikian hingga $rs = 0$. Pencarian pembagi nol dalam suatu ring merupakan masalah yang penting untuk dipelajari, di antaranya untuk menentukan himpunan penyelesaian dari suatu persamaan suku banyak. Persamaan suku banyak yang sama bisa mempunyai himpunan penyelesaian yang berbeda bila dikerjakan dalam sistem bilangan yang berbeda. Secara umum, himpunan yang terdiri dari semua pembagi nol dalam R tidak dapat menjadi struktur aljabar karena belum tentu tertutup terhadap penjumlahan. Beberapa tahun ini dikembangkan suatu pendekatan dalam mempelajari himpunan pembagi nol dari ring komutatif, yang muncul dari cabang matematika yang tidak diduga yaitu teori graf, khususnya melalui graf pembagi nol dari R .

Kata kunci: graf, pembagi nol, ring komutatif

1 PENDAHULUAN

Persamaan suku banyak, sebagai contoh $x^2 = 2x$, dalam sistem bilangan real dapat diselesaikan dengan menuliskan ulang persamaan tersebut menjadi $x(x - 2) = 0$, kemudian disimpulkan bahwa penyelesaiannya adalah $x = 0$ atau $x = 2$. Tetapi, persamaan yang sama tersebut dalam sistem bilangan yang berbeda dapat menghasilkan himpunan penyelesaian yang berbeda. Sebagai contoh, dalam \mathbb{Z}_{12} (himpunan bilangan bulat modulo 12) penyelesaiannya tidak hanya 0 dan 2, tapi juga 6 dan 8.

Pembagi nolnya dalam \mathbb{Z}_{12} adalah 0, 2, 3, 4, 6, dan 8, karena $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 8 \cdot 3 = 0$. Suatu elemen $1 \in R$ disebut *elemen satuan* (identitas terhadap operasi perkalian) bila $1 \cdot r = r, \forall r \in R$. Ring komutatif dengan elemen satuan tanpa pembagi nol disebut *daerah integral*. Sifat faktor-nol yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan di atas yang berbunyi $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ berlaku untuk daerah integral, tapi tidak berlaku untuk semua ring komutatif. Oleh karena itulah, maka teori ring untuk pencarian pembagi nol merupakan hal yang penting.

Himpunan semua pembagi nol dari ring komutatif R , dinotasikan dengan $Z(R)$, umumnya tidak bisa menjadi struktur aljabar, karena belum tentu $Z(R)$ tertutup terhadap penjumlahan. Dalam \mathbb{Z}_{12} , 3 dan 4 adalah pembagi nol, tapi $3 + 4$ bukan. Jadi, $Z(R)$ bukan ring bagian dari \mathbb{Z}_{12} , dan akibatnya juga bukan ideal. Beberapa tahun belakangan, dikembangkan suatu pendekatan baru untuk mempelajari himpunan pembagi nol yang muncul dari arah yang tidak diduga yaitu teori graf. Dalam tulisan ini akan dibahas beberapa hal tentang graf pembagi nol

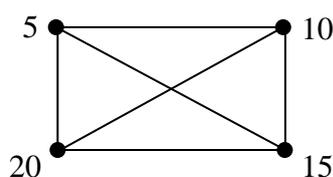
dari suatu ring komutatif yang dimulai dari memperkenalkan definisinya untuk membentuk $\Gamma(R)$ dari beberapa ring komutatif R , lalu dicari diameter dan ukuran lilitannya. Selanjutnya dibuat dugaan tentang diameter dan ukuran lilitan dari $\Gamma(R)$ secara umum juga mengenai selalu terhubung atau tidaknya $\Gamma(R)$. Yang terakhir diperiksa mungkinkah suatu graf Γ yang diberikan menjadi graf pembagi nol dari suatu ring komutatif.

2 DEFINISI DAN NOTASI

Pada tahun 1988 Istvan Beck menuliskan suatu hubungan antara teori graf dan teori ring komutatif yang diharapkan memberikan keuntungan timbal balik untuk kedua cabang matematika tersebut [1]. Definisi yang ditulis oleh Beck untuk graf pembagi nol dari ring komutatif muncul saat meneliti masalah pewarnaan ring. Definisi tersebut kemudian dimodifikasi oleh D.F.Anderson dan P.Livingston [2] dengan mengeluarkan elemen nol, dan menjadi definisi yang baku sampai sekarang. Misal $Z(R)$ adalah himpunan semua pembagi nol dari ring komutatif R sedangkan $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$, didefinisikan $\Gamma(R)$ adalah graf yang titik-titiknya adalah elemen-elemen dari $Z(R)^*$, dan dua titik yang berbeda a dan b dihubungkan dengan suatu garis, ditulis dengan $a - b$, bila dan hanya bila $ab = 0$. Graf $\Gamma(R)$ disebut *graf pembagi nol dari R* . Sebelum diperiksa sifat-sifat yang dimiliki oleh graf pembagi nol diberikan beberapa definisi yang diperlukan. Misal Γ adalah suatu graf dan misal v dan w adalah titik-titik dalam Γ . *Jalan* dari v ke w adalah barisan selang-seling titik dan garis. *Panjang jalan* adalah banyaknya garis dalam jalan tersebut. *Lintasan* dari v ke w adalah jalan dari v ke w yang tidak terjadi pengulangan titik maupun garis. Graf Γ dikatakan *terhubung* bila untuk setiap dua titik v dan w terdapat lintasan dari v ke w . *Jarak* antara dua titik a dan b , dinyatakan dengan $d(a, b)$, adalah panjang lintasan terpendek dari a ke b ($d(x, y) = \infty$ bila tidak ada lintasan dari a ke b). *Diameter* dari Γ adalah $\text{diam}(\Gamma) = \sup\{d(x, y) \mid x \text{ dan } y \text{ adalah titik-titik yang berbeda dari } \Gamma\}$. *Siklus* adalah lintasan yang titik awal dan akhirnya sama. Untuk graf Γ yang memuat siklus, didefinisikan ukuran lilitan dari Γ adalah panjang siklus terpendek dalam Γ . *Ukuran lilitan (girth)* dari Γ , ditulis dengan $g(\Gamma)$, didefinisikan sebagai panjang siklus terpendek dalam Γ ($g(\Gamma) = \infty$ bila Γ tidak memuat siklus). Suatu graf dikatakan mempunyai *loop* di x bila ada garis $x - x$. Apabila Γ adalah graf pembagi nol dari ring komutatif R , maka suatu loop di x ekuivalen dengan $x^2 = 0$. Seperti biasa, ring bilangan bulat modulo n disimbolkan dengan \mathbb{Z}_n dan lapangan berhingga dengan q elemen dinyatakan dengan F_q . Referensi untuk teori ring menggunakan [3] sedangkan untuk teori graf menggunakan [4].

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Contoh berikut menggambarkan cara membentuk graf pembagi nol dari ring \mathbb{Z}_{25} . Karena $5 \cdot 10 = 5 \cdot 15 = 5 \cdot 20 = 0 \pmod{25}$, maka \mathbb{Z}_{25} memiliki empat pembagi nol yang tak nol yaitu 5, 10, 15, dan 20. Dan graf pembagi nol dari \mathbb{Z}_{25} , yang dinotasikan dengan $\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$, dapat dilihat di Gambar 1.

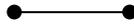


Gambar 1. $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$

Graf pembagi nol dari beberapa ring komutatif yang lain disajikan dalam Gambar 2, 3, 4, 5, 6, dan 7 dan untuk penyederhanaan gambar titik-titiknya tanpa diberi label.



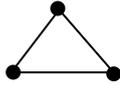
Gambar 2. $\Gamma(\mathbb{Z}_4)$ atau $\Gamma(\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle)$



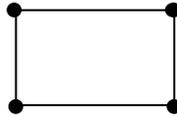
Gambar 3. $\Gamma(\mathbb{Z}_9), \Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$, atau $\Gamma(\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 \rangle)$



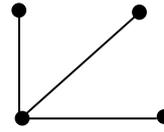
Gambar 4. $\Gamma(\mathbb{Z}_6), \Gamma(\mathbb{Z}_8)$, atau $\Gamma(\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 \rangle)$



Gambar 5. $\Gamma(\mathbb{Z}_2[x, y]/\langle x^2, xy, y^2 \rangle)$ atau $\Gamma(F_4[x]/\langle x^2 \rangle)$



Gambar 6. $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$



Gambar 7. $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times F_4)$

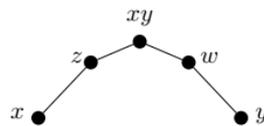
3.1 Sifat-sifat graf pembagi nol

Dari beberapa contoh graf pembagi nol di atas akan dibuktikan dugaan bahwa graf pembagi nol merupakan graf terhubung dan diameternya tidak melampaui tiga .

Teorema 1. [5] Misal R adalah ring komutatif (tidak harus berhingga). Maka $\Gamma(R)$ terhubung dan $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$.

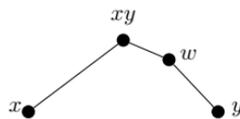
Bukti : Ambil sebarang x dan y di $\Gamma(R)$. Bila x dan y dihubungkan dengan garis berarti $\Gamma(R)$ terhubung. Sedangkan bila x dan y tidak dihubungkan dengan garis dan karena x dan y adalah pembagi nol, maka $xz = 0$ dan $yw = 0$ untuk suatu $z, w \in \Gamma(R)$.

Kasus 1 (Gambar 8): $z \neq x$ dan $w \neq y$.



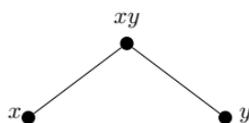
Gambar 8. Kasus 1.

Kasus 2 (Gambar 9): $z = x$ dan $w \neq y$.



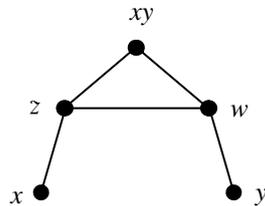
Gambar 9. Kasus 2.

Kasus 3 (Gambar 10): $z = x$ dan $w = y$.



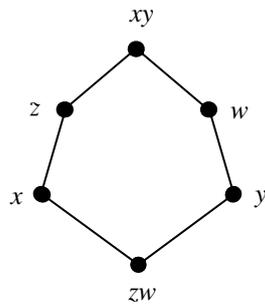
Gambar 10: Kasus 3.

Karena x dan y adalah sebarang titik yang berbeda di $\Gamma(R)$, berdasarkan ketiga kasus di atas disimpulkan bahwa $\Gamma(R)$ terhubung. Selanjutnya untuk membuktikan tentang diameternya, cukup melihat kasus 1. Bila $z = w$, maka grafnya seperti Gambar 9 dengan titik z berimpit dengan w . Jadi $d(x, y) = 3$. Karena x dan y sebarang maka $\text{diam}(\Gamma(R)) = 3$. Sedangkan bila $z \neq w$, ada 2 kasus, yaitu kasus $zw = 0$, yang berarti grafnya seperti Gambar 11.



Gambar 11. Kasus $zw = 0$.

Untuk kasus $zw \neq 0$, berarti zw adalah pembagi nol karena $x(zw) = (xz)w = 0 \cdot w = 0$ dan $(zw)y = z(wy) = z \cdot 0 = 0$. Jadi ada garis yang menghubungkan titik x dengan titik zw begitu pula ada garis yang menghubungkan titik z dengan titik wy . Sehingga grafnya adalah seperti Gambar 12 dan diperoleh $d(x, y) = 2$. Karena x dan y sebarang maka $\text{diam}(\Gamma(R)) = 2$.



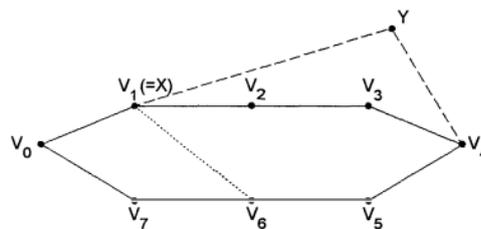
Gambar 12. Kasus $zw \neq 0$.

Terbukti $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$. □

Fakta bahwa jarak antara dua titik dalam graf pembagi nol relatif kecil akan membatasi juga panjang siklus terpendeknya, yaitu girth (ukuran lilitan)nya. Akibat berikut memberikan batas atas untuk girth(ukuran lilitan) untuk graf pembagi nol.

Teorema 2 [6] Bila R adalah ring, maka ukuran lilitan dari $\Gamma(R)$ kurang dari delapan.

Bukti: Andaikan $\Gamma(R)$ mempunyai siklus terkecil C dengan panjang delapan, yaitu $v_0 - v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_8 = v_0$. Misal P_1 menyatakan lintasan $v_0 - v_1 - v_2 - v_3 - v_4$ dan P_2 menyatakan lintasan $v_0 - v_7 - v_6 - v_5 - v_4$. Perhatikan Gambar 13.

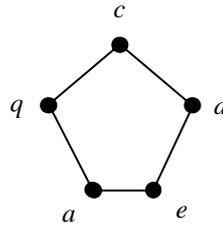


Gambar 13.

Pertama, perhatikan bahwa untuk $0 < i < 4 < j < 8$, v_i dan v_j tidak terhubung. Sebab andaikan v_i dan v_j terhubung maka $v_0 - \dots - v_i - v_j - \dots - v_0$ adalah siklus dengan panjang kurang dari delapan yang kontradiksi dengan asumsi bahwa C adalah siklus terpendek. Asumsikan ada lintasan $v_0 - x - y - v_4$ (Bila tidak, maka ada lintasan $v_0 - x - v_4$. Yang berarti tidak mungkin (v_0 dan v_4 tidak mungkin dihubungkan dengan suatu garis). Jadi lintasan $v_0 - x - y - v_4$ berpotongan dengan P_1 , atau P_2 , tapi tidak keduanya. Asumsi ini menghasilkan siklus $v_0 - x - y - v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_8 = v_0$ dengan panjang tujuh. Kontradiksi. \square

Berdasar contoh di atas pembentukan graf pembagi nol untuk ring komutatif yang diberikan tidaklah sulit, namun yang tidak mudah adalah usaha sebaliknya yaitu mencari ring komutatifnya untuk sejumlah graf yang diberikan. Beberapa cara yang bisa dilakukan untuk memeriksa apakah suatu graf merupakan graf pembagi nol dari ring komutatif atau bukan di antaranya adalah dengan menggunakan teorema yaitu bila graf tersebut tidak terhubung maka tidak mungkin menjadi graf pembagi nol. Sedangkan untuk pembuktian bahwa graf tersebut bukan graf pembagi nol bisa digunakan strategi berikut:

Pertama, andaikan graf tersebut adalah graf pembagi nol. Kedua, perhatikan hasil penjumlahan dan perkalian elemen-elemennya. Ketiga, carilah kontradiksi yang muncul dari elemen-elemen tersebut, misalnya adanya titik nol, atau adanya dua titik yang sama, atau adanya pembagi nol yang tidak muncul dalam graf tersebut. Sebagai contoh, perhatikan graf dalam Gambar 14 [5].



Gambar 14 Graf yang bukan merupakan graf pembagi nol.

Akan dibuktikan bahwa graf di atas tidak mungkin menjadi graf pembagi nol dari ring komutatif. Perhatikan $a \cdot d$ yang menghasilkan 0 bila dikalikan dengan b, c , dan e , karena

$$(a \cdot d) \cdot b = (d \cdot a) \cdot b = d \cdot (a \cdot b) = d \cdot 0 = 0,$$

$$(a \cdot d) \cdot c = a \cdot (d \cdot c) = a \cdot 0 = 0,$$

$$(a \cdot d) \cdot e = a \cdot (d \cdot e) = a \cdot 0 = 0.$$

Jadi $a \cdot d$ adalah pembagi nol selain itu $a \cdot d$ berderajat minimal 3. Padahal semua titik dalam graf di atas berderajat 2. Muncul kontradiksi. \square

4 KESIMPULAN

Bila R adalah ring komutatif (tidak harus berhingga), disimpulkan bahwa $\Gamma(R)$ terhubung dan $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$, selain itu ukuran lilitan dari $\Gamma(R)$ kurang dari delapan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] I. Beck, “Coloring of commutative rings”, *Journal of Algebra*, 116(1), 208-226, (1988).
- [2] D. F. Anderson dan P. S. Livingston, “The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring”, *Journal of Algebra*, 217, 434-447, (1999).
- [3] D. Dummit dan R. Foote., “Abstract Algebra”, 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, (2004).
- [4] R. Diestel, R., “Graph Theory”, Springer-Verlag, New York, (1997).
- [5] A. Guillory, M. Lazo, L. Mondello, and T. Naugle, “Realizing zero divisor graphs”, 1–9, <https://www.math.lsu.edu/system/files/ZeroDivGraphsPaper.pdf> [Diakses 1 Juli 2021]
- [6] P. S. Livingston, “Structure in Zero-Divisor Graphs of Commutative Rings”, Master’s Thesis, University of Tennessee (1997).

ISSN 2829-3770



9

772829

377007