Konferensi Nasional MATEMATIKA KNM 2021

PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by IndoMS

Organized by Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

"Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0"

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

e-ISSN: 2829-3770
DOI issue: https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX

Dipublikasikan online pada:
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:

Mei 2022

Editor:

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si., M.Si., Berny P. Tomasouw, S.Si., M.Si.,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si., M. I. Tilukay, S.Si., M.Si., Monalisa E. Rijoly, S.Si., M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si., M.Si, M. B. Mananggel, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si., M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si., M.Si. Vicardy Kempa, S.Si., M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si., M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si., M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si., M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumalun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

KOMBINATORIK

PENDIDIKAN MATEMATIKA

https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX.21-26

KNM XX
Universitas Pattimura Ambon, 6-7 Juli 2021

IDEAL TAK TEREDUKSI KUAT ATAS SEMIRING KOMUTATIF

Fitriana Hasnani[1,*], **Nikken Prima Puspita**[2]

[1] Alumni Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro, Indonesia
[2] Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro, Indonesia

*e-mail: fitriana.hasnani@gmail.com

Abstrak. *Himpunan tak kosong yang dilengkapi suatu operasi biner yang bersifat asosiatif disebut semigrup. Setiap semigrup yang memuat elemen identitas didalamnya disebut monoid. Selanjutnya, grup adalah sebuah monoid dimana setiap elemennya mempunyai elemen invers. Setiap grup yang memenuhi sifat komutatif disebut grup komutatif. Ring* $(R,+,\cdot)$ *didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan pergandaan serta memenuhi beberapa aksioma tertentu diantaranya* $(R,+)$ *adalah grup komutatif,* $(R,\cdot)$ *semigrup dan* $(R,+,\cdot)$ *memenuhi hukum distributif kiri beserta distributif kanan. Struktur aljabar semiring merupakan generalisasi dari ring dengan mengurangi keberadaan elemen invers pada operasi penjumlahan. Semiring disebut semiring komutatif asalkan operasi pergandaan pada semiring bersifat komutatif. Ideal pada semiring didefinisikan dengan cara yang sejalan dengan ideal pada ring. Suatu ideal* I *pada sebuah semiring dikatakan tak tereduksi jika ideal* I *adalah hasil irisan antara ideal* A *dan* B *maka* $I = A$ *atau* $I = B$ *dan suatu ideal* I *pada sebuah semiring dikatakan tak tereduksi kuat jika ideal* I *adalah himpunan bagian dari hasil irisan antara ideal* A *dan* B *maka* $I \subseteq A$ *atau* $I \subseteq B$*. Pada paper ini diperoleh hasil, setiap ideal tak tereduksi kuat merupakan ideal tak tereduksi.*

Kata kunci: semiring, semiring komutatif, ideal, ideal tak tereduksi, ideal tak tereduksi kuat.

1 PENDAHULUAN

Himpunan G dengan $G \neq \emptyset$ beserta operasi biner $*$ yang memenuhi sifat asosiatif yaitu $\forall a,b,c \in G, (a*b)*c = a*(b*c) \in G$ membentuk struktur yang disebut sebagai semi-grup. Jika pada G terdapat e sebagai elemen identitas terhadap operasi $*$, maka semigrup G disebut monoid. Selanjutnya, ketika setiap elemen dari monoid G mempunyai invers yaitu $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$ sedemikian hingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, maka G menjadi struktur yang disebut sebagai grup. Setiap grup yang memenuhi sifat komutatif terhadap operasi binernya disebut grup komutatif.

Ring merupakan struktur aljabar dengan operasi biner penjumlahan $+$ dan pergandaan $\cdot$. Ring $(R,+,\cdot)$ didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan $+$ dan pergandaan $\cdot$ serta memenuhi beberapa aksioma tertentu yaitu $(R,+)$ ada-lah grup komutatif, $(R,\cdot)$ semigrup dan $(R,+,\cdot)$ memenuhi hukum distributif kiri beserta hukum distributif kanan. Pada tahun 1935, H.S. Vandiver memperkenalkan struktur yang disebut sebagai semiring. Saat struktur ring digeneralisasi dengan memperlemah grup komutatif terhadap operasi penjumlahan $+$ menjadi monoid komutatif dan struktur semigrup terhadap operasi pergandaan $\cdot$ dipertahankan maka terbentuk struktur yang disebut sebagai semiring. Berdasarkan hal tersebut, semiring merupakan generalisasi dari ring dengan mengurangi aksioma keberadaan elemen invers pada operasi penjumlahan $+$.

Semiring $(S,+,\cdot)$ merupakan himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan $+$ dan pergandaan $\cdot$ serta memenuhi beberapa aksioma tertentu yaitu S terhadap operasi penjumlahan + monoid komutatif, S terhadap operasi pergandaan · semigrup, terdapat $0 \in S$ sedemikian hingga $s \cdot 0 = 0 \cdot s = 0$, untuk setiap $s \in S$ dan S memenuhi hukum distributif kiri dan distibutif kanan. Semiring $(S,+,\cdot)$ disebut semiring komutatif asalkan $(S,\cdot)$ komutatif. Mengingat pada teori ring dikenalkan suatu substruktur ideal, maka sejalan dengan konsep ideal pada ring dikenalkan juga ideal pada semiring yang didefinisikan dengan cara yang serupa dengan ideal pada ring.

Di dalam teori ring terdapat beberapa macam ideal diantaranya pada tahun 2002 William J. Heinzer, Louis J. Ratliff dan David E. Rush melakukan penelitian tentang ideal tak tereduksi kuat dari ring komutatif. Kemudian pada tahun 2008 Reza Ebrahimi Atani dan Shahabaddin Ebrahimi Atani juga melakukan penelitian tentang teori ideal pada semiring komutatif. Berdasarkan hal demikian, menarik untuk dapat mengkaji tentang teori ideal pada semiring komutatif yang mencakup ideal tak tereduksi dan ideal tak tereduksi kuat atas semiring komutatif. Berdasarkan penjelasan yang telah diuraikan, hal tersebut melatarbelakangi untuk melakukan kajian yang terkait dengan ideal atas semiring yaitu diantaranya ideal tak tereduksi dan ideal tak tereduksi kuat atas semiring komutatif dan mengkaji hubungan antara ideal tak tereduksi dan ideal tak tereduksi kuat pada semiring.

2 HASIL DAN PEMBAHASAN

Ring adalah suatu himpunan tidak kosong yang memenuhi dua operasi yaitu operasi penjumlahan $+$ dan pergandaan $\cdot$ dimana terhadap operasi penjumlahan termasuk grup komutatif dan terhadap operasi pergandaan termasuk semigrup serta berlaku hukum distributif untuk kedua operasi tersebut. Untuk lebih jelas, berikut diberikan definisi dari ring.

Definisi 2.1 [1] *Ring $(R,+,\cdot)$ adalah himpunan R dengan $R \neq \emptyset$ dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan + dan pergandaan · yang memenuhi aksioma-aksioma :*

1. *$(R,+)$ grup komutatif*
2. *$(R,\cdot)$ semigrup*
3. *Untuk setiap $a,b,c \in R$, memenuhi hukum distributif kiri yaitu $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan hukum distributif kanan yaitu $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.*

Berikut ini contoh dari ring.

Contoh 2.2

Himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan ring terhadap penjumlahan $+$ dan pergandaan $\cdot$ dan dapat ditulis sebagai ring $(\mathbb{Z},+,\cdot)$.

Suatu ring dikatakan komutatif bila pada operasi pergandaan terpenuhi sifat komutatif. Secara singkat dijelaskan definisi ring komutatif sebagai berikut.

Definisi 2.3 [1] *Misalkan ring $(R,+,\cdot)$. Ring $(R,+,\cdot)$ disebut ring komutatif bila untuk setiap $p,q \in R$, berlaku $p \cdot q = q \cdot p$.*

Pada Contoh 2.2 termasuk dalam contoh dari ring yang memenuhi sifat komutatif.

Contoh 2.4

Ring $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ disebut ring komutatif sebab untuk sebarang $p,q \in \mathbb{Z}$ berlaku sifat komutatif pada pergandaan bilangan bulat yaitu $p \cdot q = q \cdot p \in \mathbb{Z}$.

Di dalam teori ring dikenal suatu himpunan bagian yang memiliki sifat istimewa yaitu tertutup terhadap operasi pergandaan elemen dari luar himpunan bagian tersebut. Himpunan bagian ini dinamakan sebagai ideal yang dijelaskan dalam definisi berikut.

Definisi 2.5 [2] *Misalkan ring $(R,+,\cdot)$ dan $H \neq \emptyset$ dengan $(H,+,\cdot)$ himpunan bagian dari $(R,+,\cdot)$. Himpunan H disebut ideal kiri dan ideal kanan bila $rh \in H$ dan $hr \in H$, untuk setiap $r \in R$ dan untuk setiap $h \in H$*

Salah satu ideal di dalam teori ring adalah ideal tak tereduksi kuat dari ring komutatif. Berikut definisi ideal tak tereduksi kuat dari ring komutatif.

Definisi 2.6 [3] *Misalkan ring $(R,+,\cdot)$. Ideal I dari ring $(R,+,\cdot)$ dikatakan tak tereduksi kuat jika untuk setiap J dan K ideal dari ring $(R,+,\cdot)$ dengan $J \cap K \subseteq I$, maka $J \subseteq I$ atau $K \subseteq I$.*

Semiring merupakan himpunan S, dengan $S \neq \emptyset$ yang dilengkapi oleh dua operasi yaitu penjumlahan $+$ dan pergandaan $\cdot$ serta memenuhi beberapa aksioma tertentu yaitu terhadap operasi penjumlahan merupakan monoid komutatif, terhadap operasi pergandaan merupakan semigrup, terdapat $0 \in S$ sedemikian sehingga $s \cdot 0 = 0 \cdot s = 0$, untuk setiap $s \in S$ dan himpunan S memenuhi hukum distributif kiri dan distibutif kanan. Berikut ini definisi tentang semiring.

Definisi 2.7 [4] *Misalkan himpunan S, $S \neq \emptyset$ dilengkapi dengan operasi penjumlahan + dan pergandaan $\cdot$. Triple $(S,+,\cdot)$ disebut semiring saat memenuhi aksioma berikut*

1. *$(S,+)$ monoid komutatif*
2. *$(S,\cdot)$ semigrup*
3. *terdapat $0 \in S$ sedemikian sehingga $s \cdot 0 = 0 \cdot s = 0$, untuk setiap $s \in S$*
4. *$(S,+,\cdot)$ memenuhi hukum distributif, yaitu*
   a. *untuk setiap $a, b, c \in S$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (hukum distributif kiri)*
   b. *untuk setiap $a, b, c \in S$, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (hukum distributif kanan)*

Untuk memperjelas definisi dari semiring, berikut ini diberikan contoh dari semiring.

Contoh 2.8

Diketahui himpunan semua bilangan bulat non negatif $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq 0\}$. Himpunan $\mathbb{Z}^+$ merupakan semiring yang dikenakan dengan operasi penjumlahan $+$ dan pergandaan $\cdot$.

Semiring disebut semiring komutatif apabila operasi pergandaan memenuhi sifat komutatif. Berikut ini definisi tentang semiring komutatif.

Definisi 2.9 [4] *Misalkan semiring $(S,+,\cdot)$. Semiring $(S,+,\cdot)$ disebut semiring komutatif saat untuk setiap $x, y \in S$, berlaku $x \cdot y = y \cdot x$.*

Berikut diberikan contoh dari semiring komutatif.

Contoh 2.10

Diketahui semiring $(\mathbb{Z}^+,+,\cdot)$. Himpunan $\mathbb{Z}^+$ termasuk semiring komutatif sebab diambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}^+$ karena pergandaan dua bilangan bulat bersifat komutatif maka $a \cdot b = b \cdot a \in \mathbb{Z}^+$. Berdasarkan demikian $(\mathbb{Z}^+,+,\cdot)$ merupakan semiring komutatif.

Selanjutnya sejalan dengan konsep ideal pada ring, ideal pada semiring didefinisikan dengan cara serupa dengan ideal pada ring. Berikut ini didefinisikan ideal atas semiring.

Definisi 2.11 [5] *Misalkan semiring $(R,+,\cdot)$. Himpunan bagian $I \subseteq R$, $I \neq \emptyset$ disebut ideal atas semiring R bila untuk setiap $a, b \in I$ dan $r \in R$ berlaku $a + b \in I$, $ra \in I$ dan $ar \in I$.*

Untuk menambah pemahaman definisi dari ideal, berikut contoh dari ideal atas semiring.

Contoh 2.12

Misalkan semiring $(\mathbb{Z}^+,+,\cdot)$ dan himpunan $2\mathbb{Z}^+ = \{2m | m \in \mathbb{Z}^+\}$ adalah ideal atas semiring $(\mathbb{Z}^+,+,\cdot)$.

Jenis-jenis ideal atas semiring diantaranya ideal subtraktif (*k*-ideal) yang tercantum dalam definisi berikut.

Definisi 2.13 [4] *Misalkan semiring* $(R,+,\cdot)$. *Ideal subtraktif (k-ideal) adalah ideal* I *atas semiring* $(R,+,\cdot)$ *yang memenuhi aturan jika untuk setiap* $x,y \in R$, $x, x+y \in I$, *maka* $y \in I$.

Berikut definisi tentang *k-closure* yang termasuk himpunan bagian atas semiring.

Definisi 2.14 [6] *Misalkan semiring* $(R,+,\cdot)$ *dan* I *ideal atas semiring* $(R,+,\cdot)$. *Himpunan k-closure dari* I $(cl(I))$ *didefinisikan sebagai himpunan*

$$cl(I) = \{a \in R \mid a + c = d, \text{untuk suatu } c \in I \text{ dan untuk suatu } d \in I\}$$

Di dalam teori ideal, diketahui ketika untuk suatu ideal maka ideal tersebut juga merupakan himpunan bagian. Akan tetapi hal sebaliknya belum tentu berlaku yaitu untuk suatu himpunan bagian belum tentu termasuk ideal. Namun, untuk himpunan *k-closure* yang himpunan bagian atas semiring juga termasuk ideal atas semiring yang dicantumkan dalam sifat sebagai berikut.

Sifat 2.15 [6] *Misalkan semiring* $(R,+,\cdot)$ *dan* I *ideal atas semiring* $(R,+,\cdot)$. *Himpunan* $cl(I)$ *merupakan ideal atas semiring* $(R,+,\cdot)$.

Bukti.

Diketahui himpunan $cl(I) = \{a \in R \mid a + c = d, \text{untuk suatu } c \in I \text{ dan untuk suatu } d \in I\}$. Himpunan $cl(I) \neq \emptyset$ sebab terdapat $0 \in R$ sehingga $0 = 0 + 0$ untuk suatu $0 \in I$. Himpunan $cl(I) \subseteq R$ berdasarkan Definisi 2.8. Diambil sebarang $p, q \in cl(I)$, dengan $p + a = b$ untuk suatu $a, b \in I$ dan $q + a' = b'$ untuk suatu $a', b' \in I$ sehingga $(p+q) + (a+a') = (b+b')$ untuk suatu $a, b, a', b' \in I$ dan karena I ideal maka $a + a' \in I$ dan $b + b' \in I$ berakibat $p + q \in cl(I)$. Diambil sebarang $p \in cl(I)$ dan $x \in R$ dengan $p + a = b$ untuk suatu $a, b \in I$ sehingga $(p+a)x = bx \leftrightarrow px + ax = bx$ untuk suatu $a, b \in I$ dan I merupakan ideal maka $ax, bx \in I$ berakibat $px \in cl(I)$. Berdasarkan demikian, $cl(I)$ merupakan ideal atas semiring $(R,+,\cdot)$.

Berikut sifat yang berkaitan dengan himpunan *k-closure* diantaranya sebagai berikut.

Sifat 2.16 [6] *Misalkan semiring* $(R,+,\cdot)$ *dan* I *ideal atas semiring* $(R,+,\cdot)$. *Himpunan* $cl(I)$ *adalah ideal atas semiring* $(R,+,\cdot)$ *yang memenuhi*

i. $I \subseteq cl(I)$

ii. $cl\big(cl(I)\big) = cl(I)$

Dari Sifat 2.16, untuk I ideal atas semiring dan himpunan $cl(I)$ adalah ideal atas semiring berlaku $I \subseteq cl(I)$. Syarat cukup dan perlu agar $I = cl(I)$ yakni I merupakan *k*-ideal atas semiring yang dijelaskan sebagai berikut.

Sifat 2.17 [6] *Misalkan semiring* $(R,+,\cdot)$. *Ideal* I *atas semiring* $(R,+,\cdot)$ *adalah k-ideal jika dan hanya jika* $I = cl(I)$.

Beberapa jenis lainnya dari ideal atas semiring diantaranya ideal prima atas semiring. Berikut ini definisi tentang ideal prima atas semiring.

Definisi 2.18 [7] *Misalkan semiring* $(R,+,\cdot)$ *dan* P *ideal atas semiring* $(R,+,\cdot)$. *Ideal* P *dinamakan ideal prima atas semiring* $(R,+,\cdot)$ *jika untuk setiap* $x, y \in R$ *dengan* $xy \in P$, *maka* $x \in P$ *atau* $y \in P$.

Pada semiring juga dikenal ideal maksimal dengan definisi berikut.

Definisi 2.19 [6] *Misalkan semiring* $(R,+,\cdot)$. *Ideal* I *atas semiring* $(R,+,\cdot)$ *dikatakan maksimal jika terdapat* J *ideal atas semiring* $(R,+,\cdot)$ *sedemikian sehingga* $I \subseteq J \subseteq R$, *maka* $I = J$ *atau* $J = R$.

Beberapa penelitian telah melakukan kajian tentang ideal tak tereduksi kuat atas ring komutatif. Hal ini memunculkan ketertarikan untuk dapat mengkaji tentang teori ideal pada semiring komutatif dengan cakupan ideal tak tereduksi kuat atas semiring komutatif. Terlebih dahulu berikut ini definisi tentang ideal tak tereduksi atas semiring.

Definisi 2.20 [8] *Misalkan semiring* $(R,+,\cdot)$. *Ideal* I *atas semiring* $(R,+,\cdot)$ *dikatakan tak tereduksi, apabila untuk setiap* A, B *ideal atas semiring* $(R,+,\cdot)$ *dengan* $A\cap B=I$, *maka* $A=I$ *atau* $B=I$.

Berikut ini contoh dari ideal tak tereduksi atas semiring.

Contoh 2.21

Misalkan semiring $(\mathbb{Z}^+,+,\cdot)$ dan himpunan $2\mathbb{Z}^+$ merupakan ideal atas semiring $(\mathbb{Z}^+,+,\cdot)$. Himpunan $2\mathbb{Z}^+$ merupakan ideal tak tereduksi sebab diambil sebarang A,B ideal atas semiring $(\mathbb{Z}^+,+,\cdot)$ dengan $A\cap B=2\mathbb{Z}^+$. Ditunjukkan $2\mathbb{Z}^+$ merupakan ideal tak tereduksi, yaitu $A=2\mathbb{Z}^+$ atau $B=2\mathbb{Z}^+$. Oleh karena $A\cap B=2\mathbb{Z}^+$, maka A dan B memuat $2\mathbb{Z}^+$. Ideal di $\mathbb{Z}^+$ yang memuat $2\mathbb{Z}^+$ adalah $\mathbb{Z}^+$ dan $2\mathbb{Z}^+$. Hal ini menunjukkan kemungkinan A dan B diantara keduanya, yaitu :

1. $A\cap B=2\mathbb{Z}^+$, maka $A=2\mathbb{Z}^+$ dan $B=\mathbb{Z}^+$.
2. $A\cap B=2\mathbb{Z}^+$, maka $A=\mathbb{Z}^+$ dan $B=2\mathbb{Z}^+$.
3. $A\cap B=2\mathbb{Z}^+$, maka $A=2\mathbb{Z}^+$ dan $B=2\mathbb{Z}^+$.

Dari 1 hingga 3 kemungkinan, $A\cap B=2\mathbb{Z}^+$ maka haruslah $A=2\mathbb{Z}^+$ atau $B=2\mathbb{Z}^+$. Jadi, diperoleh bahwa $2\mathbb{Z}^+$ merupakan ideal tak tereduksi.

Selanjutnya, berikut definisi tentang ideal tak tereduksi kuat atas semiring.

Definisi 2.22 [8] *Misalkan semiring* $(R,+,\cdot)$. *Ideal* I *atas semiring* $(R,+,\cdot)$ *dikatakan tak tereduksi kuat jika untuk setiap* J *dan* K *ideal atas semiring* $(R,+,\cdot)$ *dengan* $J\cap K\subseteq I$, *maka* $J\subseteq I$ *atau* $K\subseteq I$.

Berikut contoh dari ideal tak tereduksi kuat atas semiring.

Contoh 2.23

Misalkan semiring $(\mathbb{Z}^+,+,\cdot)$ dan himpunan $2\mathbb{Z}^+$ merupakan ideal atas semiring $(\mathbb{Z}^+,+,\cdot)$. Himpunan $2\mathbb{Z}^+$ merupakan ideal tak tereduksi kuat sebab diambil sebarang A,B ideal atas semiring $(\mathbb{Z}^+,+,\cdot)$ dengan $A\cap B\subseteq 2\mathbb{Z}^+$. Ditunjukkan $2\mathbb{Z}^+$ merupakan ideal tak tereduksi kuat, maka haruslah $A\subseteq 2\mathbb{Z}^+$ atau $B\subseteq 2\mathbb{Z}^+$. Oleh karena $\mathbb{Z}^+$ dan $2\mathbb{Z}^+$ merupakan ideal di $\mathbb{Z}^+$ serta himpunan $2\mathbb{Z}^+$ merupakan ideal maksimal, maka haruslah $A\cap B\subseteq 2\mathbb{Z}^+$ berarti $A\subseteq 2\mathbb{Z}^+$ dan $B\subseteq 2\mathbb{Z}^+$ serta $A\subseteq 2\mathbb{Z}^+$ atau $B\subseteq 2\mathbb{Z}^+$. Jadi, terbukti $2\mathbb{Z}^+$ termasuk dalam ideal tak tereduksi kuat.

Telah diuraikan bahwa pada semiring terdapat ideal tak tereduksi dan ideal tak tereduksi kuat atas semiring. Kemudian, teorema berikut menjelaskan hubungan antara ideal tak tereduksi dan ideal tak tereduksi kuat.

Teorema 2.24 [6] *Misalkan semiring* $(R,+,\cdot)$ *dan* I *ideal atas semiring* $(R,+,\cdot)$. *Jika* I *tak tereduksi kuat, maka* I *tak tereduksi.*

Bukti.

Diketahui I tak tereduksi kuat. Dibuktikan bahwa I tak tereduksi. Diambil sebarang J,K ideal atas semiring $(R,+,\cdot)$ dengan $J\cap K=I$. Untuk membuktikan I tak tereduksi, berarti di-tunjukkan $J=I$ atau $K=I$. Misal diasumsikan $K\neq I$, jadi dibuktikan $J=I$. Berdasarkan diketahui I tak tereduksi kuat yaitu jika $J\cap K\subseteq I$ maka $J\subseteq I$ atau $K\subseteq I$. Oleh dikarenakan $K\neq I$ dan $I\subseteq J\cap K$ dimana $I\subseteq J$ dan $I\subseteq K$, maka $K\nsubseteq$ I haruslah $J\subseteq I$. Berdasarkan demikian berakibat $J\subseteq I$ dan $I\subseteq J$ atau terbukti bahwa $J=I$. Jadi jika $J\cap K=I$, berakibat $J=I$ atau $K=I$. Jadi, terbukti I tak tereduksi.

3 KESIMPULAN

Semiring $(S,+,\cdot)$ merupakan himpunan tidak kosong yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan $+$ dan pergandaan $\cdot$ serta memenuhi beberapa aksioma tertentu yaitu S terhadap operasi "+" monoid komutatif, S terhadap operasi "·" semigrup, terdapat $0 \in S$ sedemikian sehingga $s \cdot 0 = 0 \cdot s = 0$, untuk setiap $s \in S$ dan S memenuhi hukum distributif kiri dan distibutif kanan. Semiring $(S,+,\cdot)$ disebut semiring komutatif asalkan $(S,\cdot)$ komutatif. Sejalan dengan ring, dalam semiring juga dipelajari tentang ideal atas semiring diantaranya *k*-ideal, ideal prima dan ideal maksimal. Ideal I atas semiring R termasuk ideal tak tereduksi asalkan untuk setiap A, B ideal dengan $A \cap B = I$, maka $A = I$ atau $B = I$ dan ideal I termasuk ideal tak tereduksi kuat asalkan untuk setiap J, K ideal dengan $J \cap K \subseteq I$, maka $J \subseteq I$ atau $K \subseteq I$. Setiap ideal tak tereduksi kuat atas semiring merupakan ideal tak tereduksi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Frailegh, John B., *A First Course In Abstract Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, United States of America, (1994).

[2] Gilbert, Jimmie, Linda Gilbert, *Element Of Modern Algebra*, Kent Publishing Company, Boston, (1984).

[3] Heinzer W.J., Ratlif L.J., Rush D.E., "Strongly Irreducible Ideals Of A Commutative Ring," *Journal of Pure and Applied Algebra*, 166(3), 267-275, (2002).

[4] A. Shahabaddin Ebrahimi, "The Ideal Theory in Quetients Of Commutative Semirings," *Glasnik Matematicki*, 42(2), 301-308, (2007).

[5] Allen, P.J., "A Fundamental Theorem Of Homomorphisms For Semirings," *Proceedings of the American Mathematical Society*, 21(2), 412-416, (1969).

[6] A. Reza Ebrahimi, Shahabaddin Ebrahimi Atani, "Ideal Theory in Commutative Semirings," *Buletinul Academiei De Ştiinţe A Republicii Moldova*, 57(2), 14-23, (2008).

[7] Allen P.J., J. Neggers, "Ideal Theory in Commutative A-semirings," *Kyungpook Math. Journal*, 46(2), 261-271, (2006).

[8] Iséki, Kiyoshi, "Ideal Theory of Semirings," *Proceedings of the Japan Academy Series A Mathematical Sciences*, 32(8), 554-559, (1956).

ISSN 2829-3770
9 772829 377007