

Konferensi Nasional MATEMATIKA 20 21



PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX
Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by
IndoMS



Organized by
Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

“Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0”

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

@Hak Cipta dilindungi Undang-undang

e-ISSN: 2829-3770

DOI issue: <https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX>

Dipublikasikan online pada:

Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:



Mei 2022

Editor:

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si, M.Si, Berny P. Tomasouw, S.Si, M.Si,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si, M. I. Tilukay, S.Si, M.Si, Monalisa E. Rijoly, S.Si, M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si, M.Si, M. B. Mananggal, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si, M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si, M.Si. Vicardy Kempa, S.Si, M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si, M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si, M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si, M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumulun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

| | |
|------------------------|-----|
| Halaman Judul | i |
| Tim Reviewer | ii |
| Kata Pengantar | iii |
| Susunan Panitia KNM XX | iv |
| Daftar Isi | vii |

ALJABAR

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| KLASIFIKASI TITIK KRITIS POLINOMIAL DUA VARIABEL BERDERAJAT TIGA | 1 – 8 |
| Afif Humam | |
| KAJIAN KEKUATAN \mathbb{Z} - MODUL \mathbb{Q} SEBAGAI INSPIRASI MUNCULNYA KONSEP DAN SIFAT DALAM TEORI MODUL | 9 – 14 |
| Sri Wahyuni, Yunita Septriana Anwar, I Putu Yudi Prabhadika | |
| GRAF PEMBAGI NOL DARI RING KOMUTATIF | 15 – 20 |
| Maria Vianney Any Herawati | |
| IDEAL TAK TEREDUKSI KUAT ATAS SEMIRING KOMUTATIF | 21 – 26 |
| Fitriana Hasnani, Nikken Prima Puspita | |
| BATAS ATAS PADA NORM – TAK HINGGA DARI INVERS MATRIKS NEKRASOV | 27 – 32 |
| Eddy Djauhari | |
| KOREPRESENTASI KOALJABAR $F[G]$ | 33 – 40 |
| Na'imah Hijriati, Indah Emilia Wijayanti | |
| HUBUNGAN SIFAT BERSIH PADA RING, MODUL, KOMODUL DAN KOALJABAR | 41 – 50 |
| Nikken Prima Puspita, Indah Emilia Wijayanti, Budi Surodjo | |
| KONTRAKSI PERTINGKATAN PADA PERTINGKATAN PAULI $\mathfrak{S}\mathfrak{L}(N, \mathbb{C})$ | 51 – 60 |
| Reynald Saputra, Gantina Rachmaputri | |

ANALISIS

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| BUKTI ALTERNATIF INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG LEBESGUE DENGAN EKSPONEN PEUBAH | 61 – 66 |
| Dina Nur Amalina dan Denny Ivanal Hakim | |
| SEGITIGA TITIK CIRCUMCENTER PADA MODIFIKASI TEOREMA NAPOLEON | 67 – 76 |
| Yunisa Fadhilah Hartati, Mashadi | |
| FUNGSI SIMETRI TERHADAP TITIK (a, b) DAN BEBERAPA SIFATNYA | 77 – 82 |
| Firdaus Ubaidillah | |
| INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG MORREY-ADAMS DAN OPERATOR MAKSIMAL FRAKSIONAL | 83 – 90 |
| Daniel Salim, Moch. Taufik Hakiki, Denny Ivanal Hakim | |
| PENDEKATAN KALKULUS HIDA UNTUK PROSES HERMITE | 91 – 98 |
| Herry Pribawanto Suryawan | |
| KETAKSAMAAN HARDY DI RUANG HERZ HOMOGEN | 99 – 106 |
| Pebrudal Zanu, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi1 | |
| OPERATOR KANTOROVICH PADA RUANG MORREY DIPERUMUM | 107 – 114 |
| Mu'afa Purwa Arsana, Denny Ivanal Hakim | |
| PERLUASAN DEFINISI RATA-RATA VIA TEOREMA NILAI RATA-RATA | 115 – 124 |
| Mochammad Idris | |
| SISTEM EIGEN OPERATOR LAPLACE BERBASIS RUAS PADA SUATU POHON KUANTUM | 125 – 134 |
| Moh. Januar I. Burhan, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi | |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| SUKU BANYAK BERNSTEIN DAN OPERATOR KANTOROVICH UNTUK BEBERAPA FUNGSI YANG TIDAK KONTINU Reinhart Gunadi, Denny I. Hakim | 135 – 142 |
| KETERBATASAN OPERATOR TIPE VOLTERRA PADA RUANG MORREY ANALITIK $L_{p,\lambda}$ Moch Taufik Hakiki, Wono Setya Budhi, dan Denny Ivanal Hakim | 585 - 590 |
| KOMBINATORIK | |
| PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF SIPUT DAN GRAF UBUR-UBUR Kevin Akbar, Kiki Ariyanti Sugeng | 143 – 148 |
| DIMENSI METRIK LOKAL PADA GRAF FLOWER DAN GRAF GEAR KORONA GRAF LINTASAN Salma Fauziyah Ashim, Tri Atmojo Kusmayadi, Titin Sri Martini | 149 – 154 |
| PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF LILIN Rizqi Rachmadhani, Kiki Ariyanti Sugeng | 155 – 160 |
| PELABELAN HARMONIS PADA GRAF SEGITIGA BELAH KETUPAT VARIASI LM_n Evi Maharani, Kurniawan Atmadja | 161 – 164 |
| PEWARNAAN SIMPUL r – DINAMIS PADA GRAF TERATAI T_n Audi Fierera, Kiki A. Sugeng | 165 – 170 |
| SIFAT-SIFAT GRAF CAYLEY GRUP S_n Afifan Hadi, Kiki Ariyanti Sugeng | 171-176 |
| PENDIDIKAN MATEMATIKA | |
| LKPD BERBASIS PENEMUAN TERBIMBING BERBANTUAN ALAT PERAGA PADA MATERI LUAS PERMUKAAN DAN VOLUME PRISMA DAN LIMAS Fithroh Nafa Dzillah, Latifah Mustofa Lestyanto | 177 – 182 |
| PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA DARING BERBASIS MODEL PENEMUAN TERBIMBING MENGGUNAKAN LIVEWORKSHEETS PADA MATERI PRISMA DAN LIMAS Sania Sururul Khususna, Latifah Mustofa Lestyanto, Eddy Budiono | 183 – 188 |
| PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA BERBASIS MASALAH BERBANTUAN GOOGLE FORM UNTUK PEMAHAMAN KONSEP SISWA KELAS VII SMP PADA MATERI SEGITIGA DAN SEGIEMPAT Herlin Oktavita, Latifah Mustofa Lestyanto2 | 189 – 194 |
| EKSPLORASI ETNOMATEMATIKA PADA GELANG MANIK-MANIK KHAS DAYAK KALIMANTAN SEBAGAI SUMBER PENYUSUNAN LKPD Silvia | 195 – 206 |
| ANALISIS KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIS SISWA DENGAN PEMBELAJARAN MODEL BRAIN BASED LEARNING BERBASIS LEARNING MANANGEMENT SYSTEM N. R. Mumtaz, M. Asikin | 207 – 214 |
| PENGEMBANGAN ASESMEN ALTERNATIF DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA KONTEKS LINGKUNGAN LAHAN BASAH UNTUK SISWA TINGKAT SMP/MTS Muhammad Rizal, Noor Fajriah, Agni Danaryanti | 215 – 222 |
| MATERI PENGAYAAN TEORI BILANGAN DASAR DI SEKOLAH DASAR Awanga Dijayangrana, Hilda Assiyatun | 223-228 |
| KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS TULIS MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH VOLUME BENDA PUTAR MELALUI MODEL PERKULIAHAN KOLABORATIF Fadhila Kartika Sari, Anies Fuady | 229 – 236 |
| PERAN PENULISAN JURNAL DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA SECARA DARING DI MASA PANDEMI COVID-19 | 237 – 244 |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Gusti Firda Khairunnisa, Frida Siswiyanti | |
| ANALISIS KRUSKAL WALLIS UNTUK MENGETAHUI TINGKAT KOSENTRASI BELAJAR MAHASISWA BERDASARKAN PROGRAM STUDI | 245 – 250 |
| Venessa Y. A. Brabar, Grace A. V. Hikoyabi, Agustinus Langowuyo | |
| ANALISIS PENGARUH PEMANFAATAN INTERNET TERHADAP MINAT BELAJAR MAHASISWA PRODI STATISTIKA | 251 – 258 |
| Mariana Tanawani, Meilani Yarangga, dan Agustinus Langowuy | |
| PENGARUH PROSES BELAJAR MENGAJAR LURING DAN DARING TERHADAP HASIL BELAJAR MAHASISWA JURUSAN MATEMATIKA ANGAKATAN 2018 FMIPA UNIVERSITAS CENDERAWASIH | 259 – 264 |
| Dewi Rahmawati, Tiara A. Nadapdap, Agustinus Langowuyo | |
| PENILAIAN ESAI MENGGUNAKAN MODEL PEMBELAJARAN MESIN | 265 – 270 |
| Farah Qotrunnada, Marcus Wono Setya Budhi, Hilda Assiyatun | |
| PENGEMBANGAN PERANGKAT PEMBELAJARAN BERBASIS ETNOMATEMATIKA BUDAYA MASYARAKAT NEGERI TULEHU PADA MATERI SEGIEMPAT DAN SEGITIGA UNTUK SISWA DI KELAS VII MTS NEGERI I MALUKU TENGAH. | 271 – 276 |
| Heni Rahim, W. Mataheru, J. Takaria | |
| PENERAPAN FUZZY LINEAR PROGRAMMING UNTUK OPTIMASI PRODUKSI TAHU (STUDI KASUS DI DESA TANJUNGREJO KABUPATEN JEMBER) | 277 – 284 |
| Anisa Wahyu Illahi, Agustina Pradjaningsih, Abduh Riski | |
| PENENTUAN SOLUSI FISIBEL AWAL MASALAH TRANSPORTASI DENGAN MINIMUM DEMAND METHOD | 285 – 292 |
| Ulniyatul Ula, Siti Khabibah, Robertus Heri S.U | |
| OPTIMALISASI RUTE DAN PENJADWALAN PENGANGKUTAN SAMPAH DENGAN METODE INSERTION HEURISTIC DAN INTRA- ROUTE IMPROVEMENT (STUDI KASUS: UNIVERSITAS BRAWIJAYA MALANG) | 293 – 298 |
| Fara El Nandhita Pratiwi | |
| MODEL MATEMATIS RUTE WISATA DI RIAU DENGAN MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN GOL | 299 – 312 |
| Ihda Hasbiyati, Hasriati, T. P. Nababan | |

MATEMATIKA TERAPAN

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| MODEL SUSCEPTIBLE INFECTED RECOVERED (SIR) PADA DEMAM BERDARAH DENGUE (DBD) | 313 – 320 |
| Oscar Andhry Barata, Rahmat, Rengga Nanda Pramudya | |
| ANALISA PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE FRAKSIONAL NUMERIK MENGGUNAKAN METODE EULER DAN APLIKASINYA | 321 – 326 |
| Leli Deswita, Syamsudhuha, Asral. M | |
| TERAPAN FUNGSI SIGMOID UNTUK MENENTUKAN NILAI MAKSIMAL KOEFISIEN GAYA ANGKAT DAN SUDUT STALL PADA KURVA LINEAR C_L TERHADAP α | 327 – 334 |
| Angga Septiyana, Singgih Satrio W, Fuad Surastyo P, Try Kusuma Wardana, Ardian Rizaldi, Novita Atmasari, Eries Bagita Jayanti, Prasetyo Ardi P | |
| IMPLEMENTASI DEEP LEARNING UNTUK KLASIFIKASI GAMBAR MENGGUNAKAN CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORK (CNN) PADA BATIK SASAMBO | 335 – 340 |
| Muna Malika, Edy Widodo | |

STATISTIKA

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| PENERAPAN MODEL SPACE TIME AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (STARI(1,1,1)) PADA DATA NTP TANAMAN PANGAN DARI TIGA PROVINSI DI PULAU JAWA | 341 - 350 |
| Fajriatus Sholihah, Kartika Sari, Budi Nurani Ruchjana, Toni Toharudin | |
| ANALISIS KORESPONDENSI BERGANDA UNTUK MENGETAHUI INDIKATOR-INDIKATOR YANG MEMPENGARUHI KEJADIAN LOW BACK PAIN PADA KUSIR | 351 - 358 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| KUDA/DELMAN DI KOTA CIMAH I TAHUN 2019 | |
| Dhita Diana Dewi, Fajriatus Sholihah, Rosa Rosmanah, Lucy Fitria Dewi, Mochamad Yudhi Afrizal, Irlandia Ginanjar | |
| PROSES POISSON NON HOMOGEN DAN PENERAPANNYA PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT | 359 – 362 |
| Viona Prisyella Balqis, Muhammad Herlambang Prakasa Yudha, Budi Nurani Ruchjana | |
| PENERAPAN DISTRIBUSI STASIONER RANTAI MARKOV PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT | 363 – 370 |
| Tubagus Robbi Megantara, Ayun Sri Rahmani, Budi Nurani Ruchjana | |
| SPATIAL CLUSTER ING DENGAN METODE SKATER (K'LUSTER ANALYSIS BY TREE EDGE REMOVAL) UNTUK PENGELOMPOKAN SEBARAN COVID-19 DI KABUPATEN TULUNGAGUNG | 371 – 380 |
| Danang Ariyanto, Henny Pramodyo, Novi Nur Aini | |
| ANALISIS KLASTER KABUPATEN/KOTA INDONESIA BERDASARKAN INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DENGAN MODEL MIXTURE SKEW-T | 381 – 388 |
| Kristoforus Exelsis Pratama, Irwan Susanto, Yuliana Susanti | |
| ANALISIS INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DI KABUPATEN BURU SELATAN DENGAN MENGGUNAKAN REGRESI LINIER BERGANDA | 389 – 396 |
| Muhidin Jariyah, Inayah. P. F. Solong, Juan C. S. Jamco | |
| TINJAUAN KEPUTUSAN HIPOTESA FUZZY BERBASIS P-VALUE FUZZY (STUDI KASUS DATA COVID-19 DI NUSA TENGGARA BARAT) | 397 – 404 |
| Wahidaturrahmi | |
| PENERAPAN METODE AUTO SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS PADA PERAMALAN DATA INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DI INDONESIA | 405 – 410 |
| Andreas Reza Chrisantama*, Winita Sulandari, Sugiyanto | |
| PERAMALAN JUMLAH PRODUKSI PERIKANAN DI KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE PEMULUSAN EKSPONENSIAL | 411 – 418 |
| Asrul Irfanullah, Claudia Sumanik, Romy Makatita | |
| ANALISIS PENGARUH STRUKTUR KONSUMSI AKHIR RUMAH TANGGA BERDASARKAN KOMPONEN PENGELUARAN KABUPATEN BURU SELATAN PERIODE 2015 – 2019 DENGAN RAKL | 419 – 424 |
| Nikita A. Putiray, Dea M. Tuhumury, Angel M.P. Manuputty | |
| EKSPLORASI SISA USIA BEARING MENGGUNAKAN DISTRIBUSI WEIBULL | 425 – 430 |
| Sutawanir Darwis, Nusar Hajarisman, Suliadi, Achmad Widodo | |
| PENERAPAN MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED MOVING AVERAGE (VARIMA) UNTUK PRAKIRAAN INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DAN KURS RUPIAH TERHADAP USD | 431 – 442 |
| Ani Pertiwi, Lucy Fitria Dewi, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana | |
| PENGELOMPOKKAN JUMLAH PENDUDUK KABUPATEN BURU SELATAN BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA TAHUN 2018 DENGAN ALGORITMA K- MEANS | 443 – 450 |
| Samir Radjid, Nadia Istifarin, Meylani Tuasella | |
| PENERAPAN METODE ARIMAX PADA PERAMALAN PRODUKSI DAGING SAPI DI SUKOHARJO | 451 – 458 |
| Fitrian Nur Ardyansyah, Winita Sulandari, Sugiyanto | |
| ANALISIS KEPUASAN DAN POSITIONING SELLER E-MARKETPLACE DENGAN MENGGUNAKAN IMPORTANCE PERFORMANCE ANALYSIS DAN BILOT | 459 – 464 |
| Farah Dibah, Dwi Endah Kusri | |
| KLASTERISASI LOKASI PASAR KABUPATEN BANYUMAS GUNA MEMPERMUDAH UPTD DALAM MENGELOLA KELAS PASAR | 465 – 470 |
| Pradini Nurul Safitri, Abdullah Ahmad Dzikrullah | |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| PENGARUH MOTIVASI INTRINSIK DAN KEPUASAN KERJA TERHADAP ORGANIZATIONAL CITIZENSHIP BEHAVIOR | 471 – 476 |
| Diya Kasih Puspitasari, Dwi Endah Kusrini | |
| KLASTERING JUMLAH PENDUDUK BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA KECAMATAN LEKSULA TAHUN 2018 DENGAN MENGGUNAKAN METODE ALGORITMA K-MEANS | 477 – 484 |
| Morensi T. Risakotta, Rensya Siwalette, Rola E. Leasa | |
| PERAMALAN DENGAN METODE SIMPLE MOVING AVERAGE DAN DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING BROWN (STUDI KASUS: JUMLAH CURAH HUJAN DAN JUMLAH HARI HUJAN KABUPATEN BURU SELATAN) | 485 – 494 |
| Apriano R. Narahawarin, Ravensky Silangen, Rahania Patiekon | |
| PERAMALAN GARIS KEMISKINAN KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING DARI HOLT | 495 – 502 |
| Ade Irma La Murdani, Intan Gainau, Unique Resiloy | |
| ANALISIS PERBEDAAN PENDAPATAN TOKO WALET MAS SEBELUM DAN SESUDAH PANDEMI COVID-19 DENGAN METODE MANN-WHITNEY | 503 – 508 |
| Marselina Ema Koten, Yunida Kurniasih, Agustinus Langowuyo | |
| ANALISIS PENGARUH BELANJA DAERAH, JUMLAH PENDUDUK, DAN PDRB TERHADAP PENDAPATAN DAERAH DI KABUPATEN BURU SELATAN TAHUN 2013-2020 | 509 – 516 |
| Dephie Latumahina, Martje Riry, Olfen Sabono | |
| UJI KECOCOKAN DISTRIBUSI RAYLEIGH BIVARIAT MENGGUNAKAN UJI KOLMOGOROV-SMIRNOV BIVARIAT PADA DATA HASIL PERTANDINGAN PERSIB BANDUNG | 517 – 522 |
| Wulan Jati Nuraya, Aceng Komarudin Mutaqin | |
| MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) UNTUK PERAMALAN BANYAKNYA KASUS TERKONFIRMASI DAN KASUS SEMBUH COVID-19 DI INDONESIA | 523 – 532 |
| Sri Indra Maiyanti, Mahrudinda, Al Fataa W. Haq, Budi Nurani Ruchjana | |
| MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) DAN PENERAPANNYA PADA DATA PERKEMBANGAN HARGA ECERAN BERAS DI TIGA IBU KOTA PROVINSI WILAYAH PULAU JAWA | 533 – 544 |
| Zulfa Hidayah Satria Putri, Asri Yuniar, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana | |
| PENERAPAN METODE REGRESI LINEAR BERGANDA UNTUK MELIHAT PENGARUH JUMLAH PENDUDUK DAN LUAS WILAYAH TERHADAP JUMLAH PENGGUNA LISTRIK DI KECAMATAN AMBALAU KABUPATEN BURU SELATAN | 545 – 552 |
| Fadly Ode, Nur Statib J, Elsy Malwewar | |
| ANALISIS TINGKAT KEGEMARAN AYAM GEPUK PAK GEMBUS DARI BERBAGAI JENIS PAKET MELALUI PENDEKATAN UJI STATISTIK | 553 – 558 |
| Maharani Tiara Pramuditya, Evan Claude Boudewijn Kainama, Agustinus Langowuyo | |
| SIMULASI PERGERAKAN HARGA SAHAM MENGGUNAKAN MODEL GERAK BROWN GEOMETRIK DENGAN R STUDIO | 559 – 564 |
| Ahmad Fawaid Ridwan, Rizki Apriva Hidayana, Budi Nurani Ruchjana | |
| PENAKSIRAN RATA-RATA <i>EXCESS CLAIM</i> PESERTA DARI PERUSAHAAN PEMBERI LAYANAN KESEHATAN PT. X | 565 – 572 |
| Wildan*, Indah Permatasari, and Aceng Komarudin Mutaqin | |
| PENGARUH SELF EFFICACY DAN MOTIVASI BELAJAR TERHADAP HASIL BELAJAR SISWA KELAS VII SMP NEGERI 3 GANTUNG | 573 – 584 |
| Alperu, Nerru Pranuta Murnaka*, Indra Bayu M, Andy Wahyu H | |

HUBUNGAN SIFAT BERSIH PADA RING, MODUL, KOMODUL DAN KOALJABAR

Nikken Prima Puspita^{1,*}, Indah Emilia Wijayanti², Budi Surodjo²

¹ Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro, Indonesia

² Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia

*e-mail: nikkenprima@gmail.com

Abstrak. Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan. Ring R disebut bersih jika setiap elemennya dapat dinyatakan sebagai jumlahan elemen unit dan idempoten. Sebuah R -modul M disebut modul bersih jika ring endomorfisma dari M adalah ring bersih. Misalkan C adalah R -koaljabar yang bersifat koasosiatif dan kounital. Sebuah C -komodul M dikatakan bersih jika ring endomorfisma dari C -komodul M adalah ring bersih. Oleh karena setiap koaljabar merupakan komodul atas dirinya sendiri, koaljabar bersih didefinisikan sebagai kejadian khusus dari komodul bersih. Pada paper ini akan dilihat keterkaitan sifat bersih pada struktur ring, modul, koaljabar dan komodul.

Kata kunci: koaljabar bersih, komodul bersih, modul bersih, ring bersih

1 PENDAHULUAN

Pada paper ini jika tidak diberikan keterangan lanjutan, R adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan M adalah modul unital atas ring R . Ring R disebut bersih jika setiap elemennya dapat dinyatakan sebagai jumlahan elemen unit dan idempoten [1, 2]. Penelitian tentang ring bersih awalnya bermula dari hasil riset tentang modul dengan sifat pertukaran [3]. Ring pertukaran adalah sebuah ring yang sekaligus modul dengan sifat pertukaran atas dirinya sendiri [4]. Ring bersih didefinisikan berdasarkan sebuah sifat dari ring pertukaran, sehingga setiap ring pertukaran merupakan ring bersih.

Pandang perkalian di R sebagai perkalian skalar antara R dengan dirinya sendiri. Hal ini akan mengakibatkan setiap R dapat dipandang sebagai modul atas dirinya sendiri [5, 6] dengan ring endomorfisma dari R -modul R dinotasikan dengan $End_R(R)$. Lebih lanjut dengan memetakan setiap $f \in End_R(R)$, $f \mapsto f(1)$ diperoleh bahwa ring $R \simeq End_R(R)$ [7, 8, 9]. Penelitian tentang modul bersih berkembang dari fakta-fakta ini. Sebuah R -modul M disebut modul bersih jika ring $End_R(M)$ adalah ring bersih [10, 11, 12]. Pada saat kondisi trivial, oleh karena $R \simeq End_R(R)$ maka diperoleh bahwa R merupakan ring bersih jika dan hanya jika R adalah modul bersih atas dirinya sendiri.

Setiap lapangan merupakan ring bersih, namun faktanya subring dari sebuah ring bersih belum tentu merupakan ring bersih. Contohnya himpunan bilangan bulat adalah subring dari lapangan himpunan bilangan real (ring bersih), namun ring himpunan bilangan bulat bukan merupakan ring bersih. Fakta ini yang menjadi salah satu motivasi Ismarwati, dkk (2016) mendefinisikan struktur yang disebut modul bagus [13]. Modul bagus adalah sebuah modul dimana setiap submodulnya merupakan modul bersih.

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes_R C \\
 \downarrow \Delta & & \downarrow I_C \otimes \Delta \\
 C \otimes_R C & \xrightarrow{\Delta \otimes I_C} & C \otimes_R C \otimes_R C
 \end{array}$$

Gambar 1. Diagram Koasosiatif

Berdasarkan konsep bersih pada ring dan modul, sifat ini dibawa ke bentuk dual dari ring dan modul menjadi koaljabar dan komodul bersih [14]. Diberikan R -koaljabar koasosiatif dan kounital (C, Δ, ε) . Setiap C -komodul M dengan C -koaksi $\varrho^M : M \rightarrow M \otimes_R C$ disebut bersih jika ring co-endorfisma dari C -komodul M (dinotasikan dengan $End^C(M)$) adalah ring bersih. Koaljabar bersih didefinisikan sebagai kejadian khusus dari komodul bersih saat koaljabar C dipandang sebagai komodul atas dirinya sendiri.

Pada paper ini akan dilihat hubungan bersih pada keempat struktur aljabar tersebut, yaitu ring, modul, komodul dan koaljabar. Hubungan sifat bersih dari ke-empat struktur tersebut dapat ditemukan berdasarkan fakta bahwa selain sebagai dualisasi dari struktur ring dan modul, koaljabar dan komodul juga merupakan generalisasi dari ring dan modul [15, 16]. Hal ini akan dijelaskan lebih terperinci pada paper ini sehingga dapat membantu investigasi tentang hubungan bersih dari ke-empat struktur tersebut. Pada proses pembuktiannya, akan diperlukan beberapa pengertian dan pemahaman tentang modul proyektif [7] dan kondisi α pada koaljabar beserta dengan hubungan antara keduanya yang dapat dipelajari pada [16].

2 KOMODUL DAN KOALJABAR

Sebagai dualisasi dan generalisasi dari aljabar (ring), konsep koaljabar dan komodul menjadi bagian penting pada paper ini. Pada tahun 1969, [15] mendefinisikan koaljabar dari modul atas lapangan (ruang vektor). Penelitian terus berkembang hingga ditemukan koaljabar atas ring dasar yang berupa sebarang ring dan disebut sebagai koring. Namun, pada paper ini akan dibahas mengenai koaljabar bersih dan komodul bersih dimana ring dasarnya adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Pemahaman pembaca tentang hasil kali tensor juga dibutuhkan dan dapat dipelajari pada [7] serta referensi lainnya. Berikut diberikan definisi dan konsep-konsep yang berkaitan dengan koaljabar dan komodul.

Definisi 2.1. [16] Sebuah R -modul C disebut koaljabar atas R (atau R -koaljabar) jika dilengkapi dengan pemetaan R -linear

$$\begin{aligned}
 \Delta : C &\rightarrow C \otimes_R C \text{ (disebut komultiplikasi) dan} \\
 \varepsilon : C &\rightarrow R.
 \end{aligned}$$

Pemetaan Δ dan ε secara berurutan dikatakan bersifat koasosiatif dan kounital asalkan memenuhi:

$$(I_C \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes I_C) \circ \Delta \text{ and } (I_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = I_C = (\varepsilon \otimes I_C) \circ \Delta,$$

atau dapat diilustrasikan dalam diagram komutatif berikut: dan Sebuah R -koaljabar C dengan komultiplikasi Δ dan kounit ε dituliskan dengan (C, Δ, ε) . Triple (C, Δ, ε) dikatakan kokomutatif asalkan $\Delta = tw \circ \Delta$, dimana

$$tw : C \otimes_R C \rightarrow C \otimes_R C, a \otimes b \mapsto b \otimes a,$$

adalah pemetaan *twist*.

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes_R C \\
 \Delta \downarrow & \searrow I_C & \downarrow \varepsilon \otimes I_C \\
 C \otimes_R C & \xrightarrow{I_C \otimes \varepsilon} & C
 \end{array}$$

Gambar 2. Diagram Kounital

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\varrho^M} & M \otimes_R C \\
 \downarrow \varrho^M & & \downarrow I_M \otimes \Delta \\
 M \otimes_R C & \xrightarrow{\varrho^M \otimes I_C} & M \otimes_R C \otimes_R C
 \end{array}$$

Dengan menggunakan notasi Sweedler [15]. Sifat koasosiatif dari komultiplikasi Δ berarti

$$\sum \Delta(c_1) \otimes c_2 = \sum c_{1\bar{1}} \otimes c_{1\bar{2}} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_{2\bar{1}} \otimes c_{2\bar{2}} = \sum c_1 \otimes \Delta(c_2),$$

dan kounit ε bersifat kounital jika

$$\sum \varepsilon(c_1)c_2 = c = \sum c_1\varepsilon(c_2).$$

Lebih lanjut, sifat kokomutatif dari C artinya $\sum c_1 \otimes c_2 = \sum c_2 \otimes c_1$.

Contoh 2.2. Contoh-contoh dari R -koaljabar antara lain :

1. Ring Semigrup $R[G]$ merupakan R -koaljabar (koasosiatif dan kounital) dengan komultiplikasi $\Delta : R[G] \rightarrow R[G] \otimes_R R[G], g \mapsto g \otimes g$ dan kounit $\varepsilon : R[G] \rightarrow R, g \mapsto 1$.
2. Ring polinomial $R[x]$ merupakan R -koaljabar (koasosiatif dan kounital) dengan komultiplikasi dan kounit $\Delta_1 : R[x] \rightarrow R[x] \otimes_R R[x], x^i \mapsto x^i \otimes x^i, \varepsilon_1 : R[x] \rightarrow R, x^i \mapsto 1$.

Kategori dari C -komodul kanan dinotasikan dengan \mathbf{M}^C dan kategori dari R -modul (kiri dan kanan) dinotasikan dengan \mathbf{M}_R . Pada paper ini diasumsikan triple (C, Δ, ε) adalah R -koaljabar yang koasosiatif dan kounital. Sebagai dual dari aksi (perkalian skalar yang ada pada teori modul, pada komodul dikenal istilah koaksi kiri atau kanan. Berikut didefinisikan C -koaksi kanan.

Definisi 2.3. [16] Diberikan R -modul M dan R -koaljabar (C, Δ, ε) . Pemetaan R -linier

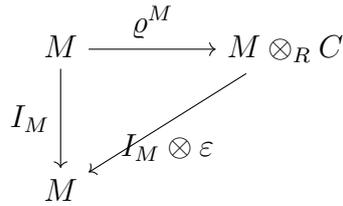
$$\varrho^M : M \rightarrow M \otimes_R C$$

disebut C -koaksi kanan pada M . Lebih lanjut, koaksi kanan ϱ^M dengan notasi Sweeder berarti untuk setiap $m \in M, \varrho^M(m) = \sum m_{\bar{0}} \otimes m_{\bar{1}}$.

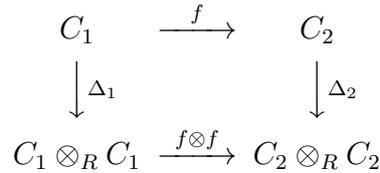
Definisi 2.4. [16] Sebuah C -koaksi kanan ϱ^M dikatakan koasosiatif dan kounital asalkan memenuhi diagram komutatif berikut:

Secara eksplisit berarti untuk setiap $m \in M,$

$$\sum \varrho^M(m_{\bar{0}}) \otimes m_{\bar{1}} = \sum m_{\bar{0}} \otimes \Delta(m_{\bar{1}}) \text{ dan } m = \sum m_{\bar{0}}\varepsilon(m_{\bar{1}}).$$



Gambar 3. Diagram of Coassociative and Counital of ϱ^M



Definisi 2.5. [16] Sebuah R -modul M dengan koasosiatif dan kounital C -koaksi kanan disebut dengan C -komodul kanan.

Sifat bersih pada koaljabar dan komodul sangat bergantung pada ring co-endomorfismanya, sehingga definisi tentang morfisma koaljabar dan komodul berikut cukup penting untuk diketahui.

Definisi 2.6. [16] Diberikan R -koaljabar $(C_1, \Delta_1, \varepsilon_1)$ dan $(C_2, \Delta_2, \varepsilon_2)$. Pemetaan R -linier $f : C_1 \rightarrow C_2$ disebut morfisma koaljabar jika memenuhi diagram komutatif berikut:

Artinya,

$$\Delta_2 \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_1, \text{ and } \varepsilon_2 \circ f = \varepsilon_1,$$

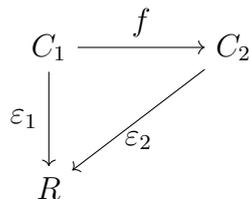
sehingga untuk setiap $c \in C$ berlaku:

$$\sum f(c_1) \otimes f(c_2) = \sum f(c)_1 \otimes f(c)_2 \text{ and } \varepsilon_2(f(c)) = \varepsilon_1(c).$$

Pada [16, 14], setiap R -modul bertingkat M tipe G merupakan modul bersih jika dan hanya jika M merupakan komodul bersih atas koaljabar $R[G]$ (ring grup).

Setiap ring adalah modul atas dirinya sendiri. Sejalan dengan sifat ini, setiap koaljabar dapat dipandang sebagai komodul atas dirinya sendiri.

Teorema 2.7. [16] Setiap R -koaljabar (C, Δ, ε) merupakan C -komodul kiri dan kanan dengan C -koaksi kiri dan kanan $\Delta : C \rightarrow C \otimes_R C$.



Gambar 4. Diagram Morfisma Koaljabar

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \downarrow \varrho^M & & \downarrow \varrho^N \\
 M \otimes_R C & \xrightarrow{f \otimes I_C} & N \otimes_R C
 \end{array}$$

Gambar 5. Morfisma Komodul

Modul bersih adalah modul dimana ring endomorfisma $End_R(M)$ adalah ring bersih [12]. Hal ini menyebabkan definisi tentang endomorfisma pada komodul dan koaljabar perlu dilihat kembali sebagai berikut.

Definisi 2.8. [16] Diberikan C -komodul kanan M dan N . Pemetaan R -linier $f : M \rightarrow N$ disebut morfisma C -komodul kanan (morfisma kanan) jika diagram berikut komutatif:

Definisi 2.8 berarti $\varrho^N \circ f = f \otimes I_C \circ \varrho^M$ dan untuk setiap $m \in M$, maka

$$\sum f(m)_0 \otimes f(m)_1 = \sum f(m_0) \otimes m_1.$$

Himpunan semua morfisma C -komodul kanan dari M ke N dinotasikan dengan $Hom^C(M, N)$, sedangkan himpunan semua endomorfisma C -komodul kanan dinotasikan dengan $End^C(M)$.

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Komodul Bersih dan Koaljabar Bersih

Pada kategori M_R , himpunan endomorfisma $End_R(M)$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan komposisi fungsi. Lebih lanjut $End^C(M) \in M^C$ merupakan subring dari $End_R(M)$. Faktanya, meskipun ring $End_R(M)$ merupakan ring bersih bukan berarti bahwa subring-nya yaitu $(End^C(M), +, \circ)$ menjadi ring bersih. Hal ini merupakan motivasi munculnya pembahasan tentang komodul bersih dan koaljabar bersih yang didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 3.1. [14] Sebuah C -komodul kanan (kiri) M disebut komodul bersih jika ring $(End^C(M), +, \circ)$ (${}^C End(M), +, \circ$) adalah ring bersih.

Setiap R -koaljabar (C, Δ, ε) merupakan komodul kiri dan kanan atas C dengan C -koaksi kiri dan kanan dari C adalah $\Delta : C \rightarrow C \otimes_R C$ [16]. Berdasarkan sifat ini, berikut akan diberikan definisi koaljabar bersih.

Definisi 3.2. Sebuah R -koaljabar (C, Δ, ε) disebut koaljabar bersih jika C dengan koaksi kiri dan kanan Δ adalah komodul bersih atas C .

Definisi 3.2 berarti C bersih jika ${}^C End(C) \simeq End^C(C)$ adalah ring bersih.

Tujuan utama dari paper ini adalah mencari hubungan sifat bersih antara ring, modul, koaljabar dan komodul. Untuk itu terlebih dahulu akan dijelaskan bahwa setiap ring dan modul merupakan koaljabar dan komodul. Artinya koaljabar dan Komodul merupakan generalisasi dari ring dan modul.

3.2 Ring dan Modul sebagai Koaljabar Trivial dan Komodul Trivial

Berikut diberikan penjelasan bahwa setiap ring merupakan koaljabar. Akan diberikan komultiplikasi (trivial) sedemikian sehingga R merupakan R -koaljabar.

Proposisi 3.3. *Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan. Ring R merupakan R -koaljabar.*

Bukti:

Setiap ring R merupakan modul kiri dan kanan atas dirinya sendiri, sehingga dapat dikonstruksikan hasil kali tensor $R \otimes_R R$. Diberikan pemetaan R -linier :

$$\Delta_T : R \rightarrow R \otimes_R R, r \mapsto r \otimes 1$$

sebagai komultiplikasi dari R dan pemetaan identitas

$$\varepsilon_T : R \rightarrow R, r \mapsto r.$$

sebagai kounit dari R dengan sifat sebagai berikut :

1. Δ_T bersifat koasosiatif. Untuk setiap $r \in R$,

$$\begin{aligned} (\Delta_T \otimes I_R) \circ \Delta_T(r) &= (\Delta_T \otimes I_R)(r \otimes 1) \\ &= (r \otimes 1) \otimes 1 \\ &= r \otimes (1 \otimes 1) \\ &= (I_R \otimes \Delta_T)(r \otimes 1) \\ &= (I_R \otimes \Delta_T) \circ \Delta_T(r). \end{aligned}$$

2. Pemetaan R -linier ε bersifat kounital, sebab untuk setiap $r \in R$,

$$\begin{aligned} (\varepsilon_T \otimes I_R) \circ \Delta_T(r) &= (\varepsilon_T \otimes I_R)(r \otimes 1) \\ &= r \otimes 1 \\ &= r \\ &= I_R(r), \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} (I_R \otimes \varepsilon_T) \circ \Delta_T(r) &= (I_R \otimes \varepsilon_T)(r \otimes 1) \\ &= r \otimes 1 \\ &= r \\ &= I_R(r) \end{aligned}$$

Dari (1) and (2), $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$ merupakan R -koaljabar yang bersifat koasosiatif dan kounital. Lebih lanjut, Δ_T juga bersifat kokomutatif ■.

Dari Proposisi 3.3, ring R merupakan koaljabar atas dirinya sendiri dan biasa disebut dengan koaljabar trivial. Berdasarkan hal ini dapat ditemukan R -koaksi kanan (kiri) untuk setiap modul atas R sedemikian hingga M merupakan komodul (trivial) atas koaljabar R .

Proposisi 3.4. Diberikan ring R dan R -koaljabar trivial $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$. Setiap R -modul M merupakan R -komodul kanan dengan R -koaksi kanan berikut:

$$\varrho_T^M : M \rightarrow M \otimes_R R, m \mapsto m \otimes 1$$

Bukti:

Dapat dibuktikan dengan mudah bahwa koaksi ϱ_T^M bersifat koasosiatif dan kounital. Jadi (M, ϱ_T^M) merupakan komodul kanan atas R -koaljabar trivial $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$. Secara analog dapat dibuktikan juga bahwa M merupakan R -komodul kiri dengan koaksi kiri ${}_T \varrho^M : M \rightarrow R \otimes_R M, m \mapsto 1 \otimes m$. ■.

Contoh 3.5. Berdasarkan Proposisi 3.4, \mathbb{Z} -modul $M_2(\mathbb{Z})$ (matriks berukuran 2×2 atas \mathbb{Z}) merupakan komodul (trivial) atas koaljabar $(\mathbb{Z}, \Delta_T, \varepsilon_T)$ dengan koaksi :

$$\varrho^{M_2(\mathbb{Z})} : M \rightarrow M_2(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}, A \mapsto A \otimes 1$$

3.3 Sifat Bersih pada Ring, Modul, Koaljabar dan Komodul

Dari Proposisi 3.3 telah dihasilkan koaljabar trivial dari sebarang ring R dan sebaliknya. Sifat berikut menjelaskan hubungan sifat bersih antara ring dan dualnya yaitu koaljabar.

Teorema 3.6. Ring R merupakan ring bersih jika dan hanya jika $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$ merupakan R -koaljabar bersih.

Bukti:

Telah diketahui bahwa ring $(R, +, \cdot)$ isomorfis dengan ring $(\text{End}_R(R), +, \circ)$ dengan sebuah isomorfisma dari $\text{End}_R(R) \rightarrow R, f \mapsto f(1)$. Berikut akan dibuktikan bahwa ring $(R^*, +, *) \simeq (\text{End}_R(R), +, \circ)$ dengan menggunakan pemetaan berikut:

$$\tau : (R^*, +, *) \rightarrow (\text{End}_R(R), +, \circ), f \mapsto f,$$

Jelas bahwa τ merupakan isomorfisma grup. Lebih lanjut, untuk setiap $f, g \in \text{End}_R(R), r \in R$

$$\begin{aligned} \tau(f * g)(r) &= (f * g)(r) \\ &= (f \otimes g) \circ \Delta_T(r) \\ &= (f \otimes g)(r \otimes 1) \\ &= f(r) \otimes g(1) \\ &= f(r)g(1), \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \tau(f) \circ \tau(g)(r) &= f \circ g(r) \\ &= f(g(r.1)) \\ &= f(rg(1)) \\ &= f(r)g(1). \end{aligned}$$

Oleh karena $\tau(f * g) = \tau(f) \circ \tau(g)$, maka τ merupakan isomorfisma ring. Hal ini berakibat ring $R^* \simeq \text{End}_R(R) \simeq R$. Jika hal ini dihubungkan dengan sifat endomorfisma dari R -koaljabar $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$, maka akan diperoleh bahwa ring endomorfisma $\text{End}^R(R) \simeq \text{End}_{R^*}(R) \simeq \text{End}_R(R) \simeq R$. Akibatnya, R merupakan ring bersih jika dan hanya jika $\text{End}^R(R)$ merupakan ring bersih, yaitu R -koaljabar $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$ merupakan koaljabar bersih. ■

Teorema 3.6 menjelaskan hubungan antara sifat bersih yang sangat dekat antara ring dan koaljabar. Dengan menggunakan komultiplikasi trivial Δ_T , sifat bersih antara keduanya merupakan hal yang sama (secara isomorfis). Berdasarkan Teorema 3.6 diberikan contoh berikut:

Contoh 3.7. *Himpunan semua bilangan real \mathbb{R} yang merupakan lapangan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian biasa. Lebih lanjut, \mathbb{R} adalah modul proyektif atas \mathbb{R} . Diberikan komultiplikasi $\Delta_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}, r \mapsto r \otimes 1$ dan kounit $\varepsilon_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, r \mapsto r$. Triple $(\mathbb{R}, \Delta_T, \varepsilon_T)$ merupakan \mathbb{R} -coalgebra, sehingga $\text{End}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$ dan $\mathbb{R}^* \simeq \mathbb{R}$. Jadi, \mathbb{R} -koaljabar $(\mathbb{R}, \Delta_T, \varepsilon_T)$ merupakan koaljabar bersih, karena \mathbb{R} merupakan ring bersih.*

Termotivasi dari sifat bersih antara ring dan koaljabar dan fakta bahwa setiap ring dapat dipandang sebagai koaljabar trivial, maka dihasilkan teorema berikut. Teorema di bawah ini menjelaskan hubungan sifat bersih anatar modul dan komodul.

Teorema 3.8. *Sebuah R -modul M merupakan modul bersih jika dan hanya jika (M, ϱ_T^M) merupakan komodul kiri dan kanan atas R -koaljabar $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$.*

Bukti:

(\Rightarrow) Diberikan R -modul bersih M dan R -koaljabar trivial R dengan komultiplikasi $\Delta_T : R \rightarrow R \otimes_R R, r \mapsto r \otimes 1$ (Proposisi 3.3). Oleh karena R adalah ring komutatif, pada teorema ini cukup dibuktikan untuk komodul bersih kanan (untuk sisi kiri dapat dilakukan secara analog). Didefinisikan R -koaksi kanan pada M :

$$\varrho_T^M : M \rightarrow M \otimes_R R, m \mapsto m \otimes 1. \quad (1)$$

1. Oleh karena $1 \in R$, jelas bahwa ϱ_T^M tertutup dan terdefinisi dengan baik;
2. Dibuktikan ϱ_T^M merupakan pemetaan R -linear. Diambil sebarang m_1, m_2 dan $r \in R$, diperoleh:

(a)

$$\begin{aligned} \varrho^M(m_1 + m_2) &= (m_1 + m_2) \otimes 1 \\ &= m_1 \otimes 1 + m_2 \otimes 1 \\ &= \varrho^M(m_1) + \varrho^M(m_2) \end{aligned}$$

(b) and

$$\begin{aligned} \varrho_T^M(m_1 r) &= m_1 r \otimes 1 \\ &= m_1 \otimes r (R\text{-balanced}) \\ &= m_1 r \\ &= m_1 (1 \cdot r) \\ &= (m_1 1) r (M \text{ is a right } R\text{-module}) \\ &= (m_1 \otimes 1) r \\ &= \varrho^M(m_1) r. \end{aligned}$$

Jadi, ϱ_T^M merupakan pemetaan R -linear;

3. Selanjutnya dibuktikan ϱ_T^M bersifat koasosiatif. Diambil sebarang $m \in M$, diperoleh:

$$\begin{aligned} (I_M \otimes \Delta) \circ \varrho_T^M(m) &= (I_M \otimes \Delta)(m \otimes 1) \\ &= m \otimes 1 \otimes 1 \\ &= (\varrho_T^M \otimes I_C)(m \otimes 1) \\ &= (\varrho_T^M \otimes I_C) \circ \varrho(m); \end{aligned}$$

4. Dibuktikan ϱ_T^M kounital. Untuk setiap $m \in M$, diperoleh :

$$(I_M \otimes \varepsilon) \circ \varrho_T^M(m) = (I_M \otimes \varepsilon)(m \otimes 1) = m.1 = m = I_M.$$

Jadi, (M, ϱ_T^M) merupakan R -komodul kanan. Lebih jelas artinya bahwa setiap R -modul M dapat dipandang sebagai komodul atas koaljabar $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$. Oleh karena $R \simeq R^*$, maka M merupakan R^* -modul. Oleh karena $R^* = \text{Hom}_R(R, R) \simeq R$ dan R merupakan R -modul proyektif (memenuhi kondisi α , lihat referensi [16]), maka $\text{End}^R(M) \simeq \text{End}_{R^*}(M)$ [16]. Lebih lanjut, M merupakan R -modul bersih, sehingga $\text{End}^R(M) \simeq \text{End}_{R^*}(M) \simeq \text{End}_R(M)$ merupakan ring bersih. Akibatnya, M merupakan komodul bersih atas $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$.

\Leftarrow Diketahui M adalah komodul bersih atas R -koaljabar $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$. Jelas bahwa R adalah modul proyektif atas dirinya sendiri, sehingga $\text{End}^R(M) \simeq \text{End}_{R^*}(M)$ merupakan ring bersih. Oleh karena $R^* = \text{Hom}_R(R, R) \simeq R$ dan $\text{End}_{R^*}(M)$ ring bersih, maka $\text{End}_{R^*}(M) \simeq \text{End}_R(M)$ juga merupakan ring bersih. Hal ini berakibat M merupakan modul bersih atas R . ■

Pada Teorema 3.8, telah ditunjukkan bahwa sifat bersih pada teori modul merupakan keajaiban khusus dari sifat bersih yang ada pada kategori komodul pada saat kondisi trivial. Diperoleh kesimpulan bahwa setiap modul atas ring R merupakan modul bersih jika dan hanya jika M merupakan komodul bersih atas R -koaksi trivial ϱ_T^M .

Pada contoh di bawah ini, diambil $M = R = \mathbb{Z}$. Telah diketahui bahwa \mathbb{Z} -modul \mathbb{Z} tidak bersih, hal ini menyebabkan sifat pada contoh berikut:

Contoh 3.9. *Diketahui bahwa $(\mathbb{Z}, \Delta_T, \varepsilon_T)$ adalah \mathbb{Z} -koaljabar. Artinya, \mathbb{Z} merupakan \mathbb{Z} -komodul dimana $\text{End}_{\mathbb{Z}^*}(\mathbb{Z}) \simeq \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. Oleh karena ring \mathbb{Z} bukan merupakan ring bersih, maka $\text{End}_{\mathbb{Z}^*}(\mathbb{Z})$ juga bukan merupakan ring bersih. Akibatnya, \mathbb{Z} bukan \mathbb{Z}^* -modul bersih. Berdasarkan sifat proyektif dan kondisi α , diperoleh bahwa \mathbb{Z} bukan \mathbb{Z} -komodul bersih sebab $\text{End}_{\mathbb{Z}^*}(\mathbb{Z}) \simeq \text{End}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$.*

Pada Teorema 3.8, jika M adalah R -komodul trivial, maka relasi antara sifat bersih pada modul dan komodul menjadi sangat dekat. Namun, pembaca harus berhati-hati terhadap koaksi dan komultiplikasi dari koaljabarnya. Pada kondisi umum, yaitu saat M merupakan komodul non trivial atas R -koaljabar R (dengan komultiplikasi non-trivial), sifat-sifat pada paper ini belum tentu berlaku sebab $\text{End}^C(M)$ hanya merupakan subring dari $\text{End}_R(M)$. Untuk membahas kasus ini diperlukan materi tentang Relasi Hom-tensor antara kategori \mathbf{M}_R dan \mathbf{M}^C .

4 KESIMPULAN

Setiap ring R merupakan R -koaljabar (koasosiatif dan kounital) dengan komultiplikasi trivial $\Delta_T : R \rightarrow R \otimes R, r \mapsto r \otimes 1$ dan kounit $\varepsilon_T : R \rightarrow R, r \mapsto r$. Lebih lanjut, setiap R -modul M juga dapat dipandang sebagai komodul atas R -koaljabar $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$ dengan R -koaksi trivial $\varrho_T^M : M \rightarrow M \otimes_R R, m \mapsto m \otimes 1$ [15, 16]. Pada teori modul, setiap ring R merupakan ring

bersih jika dan hanya jika R merupakan modul bersih atas dirinya sendiri. Lebih lanjut, pada paper ini dapat terlihat hubungan antara ring bersih dengan kolajabar bersih dan modul bersih dengan komodul bersih. Telah dibuktikan bahwa R merupakan ring bersih jika dan hanya jika $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$ merupakan R -koaljabar bersih dan M merupakan R -modul bersih jika dan hanya jika (M, ϱ_T^M) merupakan R -komodul bersih.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] W.K. Nicholson, "Lifting idempotents and exchange rings," *Trans. Amer. Math. Soc.*, 229, pp 269 – 278 (1977).
- [2] D.D. Anderson and V.P Camillo, "Commutative rings whose elements are a sum of a unit and idempotent," *Comm. Algebra*, 30, No. 7, pp 3327 – 3336 (2002).
- [3] P. Crawley and B. Jónsson, "Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems," *Pacific J. Math.*, 14, pp 797 – 855, 1964.
- [4] Jr. R. B. Warfield, "Exchange rings and decompositions of modules," *Math. Ann.*, 199, pp 31-36, 1972.
- [5] F. Kasch, *Modules and Rings*, Academic Press, Inc., London, UK (1982).
- [6] W.A. Adkins and S.H Weintraub, *Algebra "An Approach via Module Theory"*, Springer-Verlag New York, Inc., USA (1992).
- [7] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Reading, Paris (1991).
- [8] F.W. Anderson and K.R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag New York, Inc., USA (1992).
- [9] T.Y. Lam, *Graduate Texts in Mathematics: Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag New York, Inc., USA (2003).
- [10] W.K. Nicholson and K. Varadarajan, "Countable linear transformations are clean", *Proceedings of American Mathematical Society*, 126, pp 61 – 64 (1998).
- [11] W.K. Nicholson, K. Varadarajan and Y. Zhou, "Clean endomorphism rings," *Archiv der Mathematik*, 83, pp 340 – 343 (2004).
- [12] V.P. Camillo, D. Khurana, T.Y. Lam, W.K. Nicholson and Y. Zhou, "Continuous modules are clean," *Journal of Algebra*, 304, pp 94 – 111 (2006).
- [13] A. Ismarwati, H. France-Jackson, S. Wahyuni and I.E. Wijayanti, "On nice modules," *JP Journal of Algebra, Number Theory and Application*, 38, No. 3, pp 213 – 225, 2016.
- [14] N.P. Puspita, I.E. Wijayanti and B. Surodjo, "Graded modules as a clean comodules," *Journal of Mathematics Reseach*, 12, No. 6, 2020.
- [15] M.E. Sweedler, M.E., "Hopf Algebras," *Mathematics Lecture Note Series*, W.A. Benjamin, Inc., New York, USA (1969).
- [16] T. Brzeziński and R. Wisbauer, *Corings and Comodules*, Cambridge University Press, UK, (2003).

ISSN 2829-3770



9

772829

377007