Konferensi Nasional MATEMATIKA 2021

PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by IndoMS

Organized by Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

"Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0"

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

e-ISSN: 2829-3770
DOI issue: https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX

Dipublikasikan online pada:
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:

Mei 2022

Editor:

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si., M.Si., Berny P. Tomasouw, S.Si., M.Si.,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si., M. I. Tilukay, S.Si., M.Si., Monalisa E. Rijoly, S.Si., M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si., M.Si, M. B. Mananggel, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si., M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si., M.Si. Vicardy Kempa, S.Si., M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si., M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si., M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si., M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumalun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

ALJABAR

ANALISIS

MATEMATIKA TERAPAN

STATISTIKA

https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX.41-50

HUBUNGAN SIFAT BERSIH PADA RING, MODUL, KOMODUL DAN KOALJABAR

Nikken Prima Puspita[1,*], Indah Emilia Wijayanti[2], Budi Surodjo[2]

[1] Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro, Indonesia
[2] Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
*e-mail: nikkenprima@gmail.com

Abstrak. *Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan. Ring R disebut bersih jika setiap elemennya dapat dinyatakan sebagai jumlahan elemen unit dan idempoten. Sebuah R-modul M disebut modul bersih jika ring endomorfisma dari M adalah ring bersih.*
Misalkan C adalah R-koaljabar yang bersifat koasosiatif dan kounital. Sebuah C-komodul M dikatakan bersih jika ring endomorfisma dari C-komodul M adalah ring bersih. Oleh karena setiap koaljabar merupakan komodul atas dirinya sendiri, koaljabar bersih didefinisikan sebagai kejadian khusus dari komodul bersih. Pada paper ini akan dilihat keterkaitan sifat bersih pada struktur ring, modul, koaljabar dan komodul.

Kata kunci: koaljabar bersih, komodul bersih,modul bersih, ring bersih

1 PENDAHULUAN

Pada paper ini jika tidak diberikan keterangan lanjutan, R adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan M adalah modul unital atas ring R. Ring R disebut bersih jika setiap elemennya dapat dinyatakan sebagai jumlahan elemen unit dan idempoten [1, 2]. Penelitian tentang ring bersih awalnya bermula dari hasil riset tentang modul dengan sifat pertukaran [3]. Ring pertukaran adalah sebuah ring yang sekaligus modul dengan sifat pertukaran atas dirinya sendiri [4]. Ring bersih didefiniskan berdasarkan sebuah sifat dari ring pertukaran, sehingga setiap ring pertukaran merupakan ring bersih.

Pandang perkalian di R sebagai perkalian skalar antara R dengan dirinnya sendiri. Hal ini akan mengakibatkan setiap R dapat dipandang sebagai modul atas dirinya sendiri [5, 6] dengan ring endomorfisma dari R-modul R dinotasikan dengan $End_R(R)$. Lebih lanjut dengan memetakan setiap setiap $f \in End_R(R), f \mapsto f(1)$ diperoleh bahwa ring $R \simeq End_R(R)$ [7, 8, 9]. Penelitian tentang modul bersih berkembang dari fakta-fakta ini. Sebuah R-modul M disebut modul bersih jika ring $End_R(M)$ adalah ring bersih [10, 11, 12]. Pada saat kondisi trivial, oleh karena $R \simeq End_R(R)$ maka diperoleh bahwa R merupakan ring bersih jika dan hanya jika R adalah modul bersih atas dirinya sendiri.

Setiap lapangan merupakan ring bersih, namun faktanya subring dari sebuah ring bersih belum tentu merupakan ring bersih. Contohnya himpunan bilangan bulat adalah subring dari lapangan himpunan bilangan real (ring bersih), namun ring himpunan bilangan bulat bukan merupakan ring bersih. Fakta ini yang menjadi salah satu motivasi Ismarwati, dkk (2016) mendefinsikan struktur yang disebut modul bagus [13]. Modul bagus adalah sebuah modul dimana setiap submodulnya merupakan modul bersih.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes_R C \arrow[d, "I_C \otimes \Delta"] \\ C \otimes_R C \arrow[r, "\Delta \otimes I_C"] & C \otimes_R C \otimes_R C \end{tikzcd}$$

Gambar 1. Diagram Koasosiatif

Berdasarkan konsep bersih pada ring dan modul, sifat ini dibawa ke bentuk dual dari ring dan modul menjadi koaljabar dan komodul bersih [14]. Diberikan R-koaljabar koasosiatif dan kounital (C, Δ, ε). Setiap C-komodul M dengan C-koaksi $\varrho^M : M \to M \otimes_R C$ disebut bersih jika ring co-endomorfisma dari C-komodul M (dinotasikan dengan $End^C(M)$) adalah ring bersih. Koaljabar bersih didefiniskan sebagai kejadian khusus dari komodul bersih saat koaljabar C dipandang sebagai komodul atas dirinya sendiri.

Pada paper ini akan dilihat hubungan bersih pada keempat struktur aljabar tersebut, yaitu ring, modul, komodul dan koaljabar. Hubungan sifat bersih dari ke-empat struktur tersebut dapat ditemukan berdasarkan fakta bahwa selain sebagai dualisasi dari struktur ring dan modul, koaljabar dan komodul juga merupakan generalisasi dari ring dan modul [15, 16]. Hal ini akan dijelaskan lebih terperinci pada paper ini sehingga dapat membantu investigasi tentang hubungan bersih dari ke-empat struktur tersebut. Pada proses pembuktiannya, akan diperlukan beberapa pengertian dan pemahaman tentang modul proyektif [7] dan kondisi α pada koaljabar beserta dengan hubungan antara keduanya yang dapat dipelajari pada [16].

2 KOMODUL DAN KOALJABAR

Sebagai dualisasi dan generalisasi dari aljabar (ring), konsep koaljabar dan komodul menjadi bagian penting pada paper ini. Pada tahun 1969, [15] mendefinisikan koaljabar dari modul atas lapangan (ruang vektor). Penelitian terus berkembang hingga ditemukan koaljabar atas ring dasar yang berupa sebarang ring dan disebut sebagai koring. Namun, pada paper ini akan dibahas mengenai koaljabar bersih dan komodul bersih dimana ring dasarnya adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Pemahaman pembaca tentang hasil kali tensor juga dibutuhkan dan dapat dipelajari pada [7] serta referensi lainnya. Berikut diberikan definisi dan konsep-konsep yang berkaitan dengan koaljabar dan komodul.

Definisi 2.1. [16] Sebuah R-modul C disebut koaljabar atas R (atau R-koaljabar) jika dilengkapi dengan pemetaan R-linear

$$\Delta : C \to C \otimes_R C \text{ (disebut komultiplikasi) dan}$$
$$\varepsilon : C \to R.$$

Pemetaan Δ dan ε secara berurutan dikatakan bersifat koasosiatif dan kounital asalkan memenuhi:

$$(I_C \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes I_C) \circ \Delta \text{ and } (I_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = I_C = (\varepsilon \otimes I_C) \circ \Delta,$$

atau dapat diilustrasikan dalam diagram komutatif berikut: dan Sebuah R-koaljabar C dengan komultiplikasi Δ dan kounit ε dituliskan dengan (C, Δ, ε). Triple (C, Δ, ε) dikatakan kokomutatif asalkan $\Delta = tw \circ \Delta$, dimana

$$tw : C \otimes_R C \to C \otimes_R C, a \otimes b \mapsto b \otimes a,$$

adalah pemetaan *twist*.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "I_C"] & C \otimes_R C \arrow[d, "\varepsilon \otimes I_C"] \\ C \otimes_R C \arrow[r, "I_C \otimes \varepsilon"'] & C \end{tikzcd}$$

Gambar 2. Diagram Kounital

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varrho^M} & M \otimes_R C \\ \Big\downarrow \varrho^M & & \Big\downarrow I_M \otimes \Delta \\ M \otimes_R C & \xrightarrow{\varrho^M \otimes I_C} & M \otimes_R C \otimes_R C \end{array}$$

Dengan menggunakan notasi Sweedler [15]. Sifat koasosiatif dari komultiplikasi Δ berarti

$$\sum \Delta(c_{\underline{1}}) \otimes c_{\underline{2}} = \sum c_{\underline{11}} \otimes c_{\underline{12}} \otimes c_{\underline{2}} = \sum c_{\underline{1}} \otimes c_{\underline{21}} \otimes c_{\underline{22}} = \sum c_{\underline{1}} \otimes \Delta(c_{\underline{2}}),$$

dan kounit ε bersifat kounital jika

$$\sum \varepsilon(c_{\underline{1}})c_{\underline{2}} = c = \sum c_{\underline{1}}\varepsilon(c_{\underline{2}}).$$

Lebih lanjut, sifat kokomutatif dari C artinya $\sum c_{\underline{1}} \otimes c_{\underline{2}} = \sum c_{\underline{2}} \otimes c_{\underline{1}}$.

Contoh 2.2. *Contoh-contoh dari R-koaljabar antara lain :*

1. *Ring Semigrup $R[G]$ merupakan R-koaljabar (koasosiatif dan kounital) dengan komultiplikasi $\Delta : R[G] \to R[G] \otimes_R R[G], g \mapsto g \otimes g$ dan kounit $\varepsilon : R[G] \to R, g \mapsto 1$.*

2. *Ring polinomial $R[x]$ merupakan R-koaljabar (koasosiatif dan kounital) dengan komultiplikasi dan kounit $\Delta_1 : R[x] \to R[x] \otimes_R R[x], x^i \mapsto x^i \otimes x^i$, $\varepsilon_1 : R[x] \to R, x^i \mapsto 1$.*

Kategori dari C-komodul kanan dinotasikan dengan $\mathbf{M}^C$ dan kategori dari R-modul (kiri dan kanan) dinotasikan dengan $\mathbf{M}_R$. Pada paper ini diasumsikan triple (C, Δ, ε) adalah R-koaljabar yang koasosiatif dan kounital. Sebagai dual dari aksi (perkalian skalar yang ada pada teori modul, pada komodul dikenal istilah koaksi kiri atau kanan. Berikut didefinisikan C-koaksi kanan.

Definisi 2.3. [16] Diberikan R-modul M dan R-koaljabar (C, Δ, ε). Pemetaan R-linier

$$\varrho^M : M \to M \otimes_R C$$

disebut C-koaksi kanan pada M. Lebih lanjut, koaksi kanan ϱ^M dengan notasi Sweeder berarti untuk setiap $m \in M, \varrho^M(m) = \sum m_{\underline{0}} \otimes m_{\underline{1}}$.

Definisi 2.4. [16] Sebuah C-koaksi kanan ϱ^M dikatakan koasosiatif dan kounital asalkan memenuhi diagram komutatif berikut:

Secara eksplisit berarti untuk setiap $m \in M$,

$$\sum \varrho^M(m_{\underline{0}}) \otimes m_{\underline{1}} = \sum m_{\underline{0}} \otimes \Delta(m_{\underline{1}}) \text{ dan } m = \sum m_{\underline{0}}\varepsilon(m_{\underline{1}}).$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varrho^M"] \arrow[d, "I_M"'] & M \otimes_R C \arrow[dl, "I_M \otimes \varepsilon"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Gambar 3. Diagram of Coassocative and Counital of ϱ^M

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_1"] & C_2 \arrow[d, "\Delta_2"] \\ C_1 \otimes_R C_1 \arrow[r, "f\otimes f"] & C_2 \otimes_R C_2 \end{tikzcd}$$

Definisi 2.5. [16] Sebuah R-modul M dengan koasosiatif dan kounital C-koaksi kanan disebut dengan C-komodul kanan.

Sifat bersih pada koaljabar dan komodul sangat bergantung pada ring co-endomorfismanya, sehingan definisi tentang morfisma koaljabar dan komodul berikut cukup penting untuk diketahui.

Definisi 2.6. [16] Diberikan R-koaljabar $(C_1, \Delta_1, \varepsilon_1)$ dan $(C_2, \Delta_2, \varepsilon_2)$. Pemetaan R-linier $f : C_1 \to C_2$ disebut morfisma koaljabar jika memenuhi diagram komutatif berikut:

Artinya,

$$\Delta_2 \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_1, \text{ and } \varepsilon_2 \circ f = \varepsilon_1,$$

sehingga untuk setiap $c \in C$ berlaku:

$$\sum f(c_{\underline{1}}) \otimes f(c_{\underline{2}}) = \sum f(c)_{\underline{1}} \otimes f(c)_{\underline{2}} \text{ and } \varepsilon_2(f(c)) = \varepsilon_1(c).$$

Pada [16, 14], setiap R-modul bertingkat M tipe G merupakan modul bersih jika dan hanya jika M merupakan komodul bersih atas koaljabar $R[G]$ (ring grup).

Setiap ring adalah modul atas dirinya sendiri. Sejalan dengan sifat ini, setiap koaljabar dapat dipandang sebagai komodul atas dirinya sendiri.

Teorema 2.7. [16] Setiap R-koaljabar (C, Δ, ε) merupakan C-komodul kiri dan kanan dengan C-koaksi kiri dan kanan $\Delta : C \to C \otimes_R C$.

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_1"'] & C_2 \arrow[dl, "\varepsilon_2"] \\ R & \end{tikzcd}$$

Gambar 4. Diagram Morfisma Koaljabar

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \Big\downarrow \varrho^M & & \Big\downarrow \varrho^N \\ M \otimes_R C & \xrightarrow{f \otimes I_C} & N \otimes_R C \end{array}$$

Gambar 5. Morfisma Komodul

Modul bersih adalah modul dimana ring endomorfisma $End_R(M)$ adalah ring bersih [12]. Hal ini menyebabkan definisi tentang endomorfisma pada komodul dan koaljabar perlu dilihat kembali sebagai beikut.

Definisi 2.8. [16] Diberikan C-komodul kanan M dan N. Pemetaan R-linier $f : M \to N$ disebut morfisma C-komodul kanan (morfisma kanan) jika diagram berikut komutatif:

Definisi 2.8 berarti $\varrho^N \circ f = f \otimes I_C \circ \varrho^M$ dan untuk setiap $m \in M$, maka

$$\sum f(m)_{\underline{0}} \otimes f(m)_{\underline{1}} = \sum f(m_{\underline{0}}) \otimes m_{\underline{1}}.$$

Himpunan semua morfisma C-komodul kanan dari M ke N dinotasikan dengan $Hom^C(M, N)$, sedangkan himpunan semua endomorfisma C-komodul kanan dinotasikan dengan $End^C(M)$.

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Komodul Bersih dan Koaljabar Bersih

Pada kategori $\mathbf{M}_R$, himpunan endomrofisma $End_R(M)$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan komposisi fungsi. Lebih lanjut $End^C(M) \in \mathbf{M}^C$ merupakan subring dari $End_R(M)$. Faktanya, meskipun ring $End_R(M)$ merupakan ring bersih bukan berarti bahwa subring-nya yaitu $(End^C(M), +, \circ)$ menjadi ring bersih. Hal ini merupakan motivasi muncul-nya pembahasan tentang komodul bersih dan koaljabar bersih yang didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 3.1. [14] Sebuah C-komodul kanan (kiri) M disebut komodul bersih jika ring $(End^C(M), +, \circ)$ $(({}^C End(M), +, \circ))$ adalah ring bersih.

Setiap R-koaljabar (C, Δ, ε) merupakan komodul kiri dan kanan atas C dengan C-koaksi kiri dan kanan dari C adalah $\Delta : C \to C \otimes_R C$ [16]. Berdasarkan sifat ini, berikut akan diberikan definisi koaljabar bersih.

Definisi 3.2. *Sebuah R-koaljabar (C, Δ, ε) disebut koaljabar bersih jika C dengan koaksi kiri dan kanan Δ adalah komodul bersih atas C.*

Definisi 3.2 berarti C bersih jika ${}^C End(C) \simeq End^C(C)$ adalah ring bersih.

Tujuan utama dari paper ini adalah mencari hubungan sifat bersih antara ring, modul, koaljabar dan komodul. Untuk itu terlebih dahulu akan dijelaskan bahwa setiap ring dan modul merupakan koaljabar dan komodul. Artinya kolajabar dan Komodul merupakan generalisasi dari ring dan modul.

3.2 Ring dan Modul sebagai Koaljabar Trivial dan Komodul Trivial

Berikut diberikan penjelasan bahwa setiap ring merupakan koaljabar. Akan diberikan komultiplikasi (trivial) sedemikian sehingga R merupakan R-koaljabar.

Proposisi 3.3. *Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan. Ring R merupakan R-koaljabar.*

Bukti:
Setiap ring R merupakan modul kiri dan kanan atas dirinya sendiri, sehingga dapat dikonstruksikan hasil kali tensor $R \otimes_R R$. Diberikan pemetaan R-linier :

$$\Delta_T : R \to R \otimes_R R, r \mapsto r \otimes 1$$

sebagai komultiplikasi dari R dan pemetaan identitas

$$\varepsilon_T : R \to R, r \mapsto r.$$

sebagai kounit dari R dengan sifat sebagai berikut :

1. Δ_T bersifat koasosiatif. Untuk setiap $r \in R$,

$$\begin{aligned}(\Delta_T \otimes I_R) \circ \Delta_T(r) &= (\Delta_T \otimes I_R)(r \otimes 1)\\ &= (r \otimes 1) \otimes 1\\ &= r \otimes (1 \otimes 1)\\ &= (I_R \otimes \Delta_T)(r \otimes 1)\\ &= (I_R \otimes \Delta_T) \circ \Delta_T(r).\end{aligned}$$

2. Pemetaan R-linier ε bersifat kounital, sebab untuk setiap $r \in R$,

$$\begin{aligned}(\varepsilon_T \otimes I_R) \circ \Delta_T(r) &= (\varepsilon_T \otimes I_R)(r \otimes 1)\\ &= r \otimes 1\\ &= r\\ &= I_R(r),\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}(I_R \otimes \varepsilon_T) \circ \Delta_T(r) &= (I_R \otimes \varepsilon_T)(r \otimes 1)\\ &= r \otimes 1\\ &= r\\ &= I_R(r)\end{aligned}$$

Dari (1) and (2), $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$ merupakan R-koaljabar yang bersifat koasosiatif dan kounital. Lebih lanjut, Δ_T juga bersifat kokomutatif ■.

Dari Proposisi 3.3, ring R merupakan koaljabar atas dirinya sendiri dan biasa disebut dengan koaljabar trivial. Berdasarkan hal ini dapat ditemukan R-koaksi kanan (kiri) untuk setiap modul atas R sedemikian hingga M merupakan komodul (trivial) atas koaljabar R.

Proposisi 3.4. *Diberikan ring R dan R-koaljabar trivial $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$. Setiap R-modul M merupakan R-komodul kanan dengan R-koaksi kanan berikut:*

$$\varrho_T^M : M \to M \otimes_R R, m \mapsto m \otimes 1$$

Bukti:
Dapat dibuktikan dengan mudah bahwa koaksi ϱ_T^M bersifat koasosiatif dan kounital. Jadi (M, ϱ_T^M) merupakan komodul kanan atas R-koaljabar trivial $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$. Secara analog dapat dibuktikan juga bahwa M merupakan R-komodul kiri dengan koaksi kiri ${}_T\varrho^M : M \to R \otimes_R M, m \mapsto 1 \otimes m$. ■.

Contoh 3.5. *Berdasarkan Proposisi 3.4, $\mathbb{Z}$-modul $M_2(\mathbb{Z})$ (matriks berukuran 2×2 atas $\mathbb{Z}$) merupakan komodul (trivial) atas koaljabar $(\mathbb{Z}, \Delta_T, \varepsilon_T)$ dengan koaksi :*

$$\varrho^{M_2(\mathbb{Z})} : M \to M_2(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}, A \mapsto A \otimes 1$$

3.3 Sifat Bersih pada Ring, Modul, Koaljabar dan Komodul

Dari Proposisi 3.3 telah dihasilkan koaljabar trivial dari sebarang ring R dan sebaliknya. Sifat berikut menjelaskan hubungan sifat bersih antara ring dan dualnya yaitu koaljabar.

Teorema 3.6. *Ring R merupakan ring bersih jika dan hanya jika $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$ merupakan R-koaljabar bersih.*

Bukti:
Telah diketahui bahwa ring $(R, +, \dot{})$ isomorfis dengan ring $(End_R(R), +, \circ)$ dengan sebuah isomorfisma dari $End_R(R) \to R, f \mapsto f(1)$. Berikut akan dibuktikan bahwa ring $(R^*, +, *) \simeq (End_R(R), +, \circ)$ dengan menggunakan pemetaan berikut:

$$\tau : (R^*, +, *) \to (End_R(R), +, \circ), f \mapsto f,$$

Jelas bahwa τ merupakan isomorfisma grup. Lebih lanjut, untuk setiap $f, g \in End_R(R), r \in R$

$$\begin{aligned} \tau(f * g)(r) &= (f * g)(r) \\ &= (f \otimes g) \circ \Delta_T(r) \\ &= (f \otimes g)(r \otimes 1) \\ &= f(r) \otimes g(1) \\ &= f(r)g(1), \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \tau(f) \circ \tau(g)(r) &= f \circ g(r) \\ &= f(g(r.1)) \\ &= f(rg(1)) \\ &= f(r)g(1). \end{aligned}$$

Oleh karena $\tau(f * g) = \tau(f) \circ \tau(g)$, maka τ merupakan isomorfisma ring. Hal ini berakibat ring $R^* \simeq End_R(R) \simeq R$. Jika hal ini dihubungkan dengan sifat endomorfisma dari R-koaljabar $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$, maka akan diperoleh bahwa ring endomorfisma $End^R(R) \simeq End_{R^*}(R) \simeq End_R(R) \simeq R$. Akibatnya, R merupakan ring bersih jika dan hanya jika $End^R(R)$ merupakan ring bersih, yaitu R-koaljabar $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$ merupakan koaljabar bersih.■

Teorema 3.6 menjelaskan hubungan antara sifat bersih yang sangat dekat antara ring dan koaljabar. Dengan menggunakan komultilplikasi trivial Δ_T, sifat bersih antara keduanya merupakan hal yang sama (secara isomorfis). Berdasarkan Teorema 3.6 diberikan contoh berikut:

Contoh 3.7. *Himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ yang merupakan lapangan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian biasa. Lebih lanjut, $\mathbb{R}$ adalah modul proyektif atas $\mathbb{R}$. Diberikan komultiplikasi $\Delta_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}, r \mapsto r \otimes 1$ dan kounit $\varepsilon_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, r \mapsto r$. Triple $(\mathbb{R}, \Delta_T, \varepsilon_T)$ merupakan $\mathbb{R}$-coalgebra, sehingga $End^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$ dan $\mathbb{R}^* \simeq \mathbb{R}$. Jadi, $\mathbb{R}$-koaljabar $(\mathbb{R}, \Delta_T, \varepsilon_T)$ merupakan koaljabar bersih, karena $\mathbb{R}$ merupakan ring bersih.*

Termotivasi dari sifat bersih antara ring dan koaljabar dan fakta bahwa setiap ring dapat dipandang sebagai koaljabar trivial, maka dihasilkan teorema berikut. Teorema di bawah ini menjelaskan hubungan sifat bersih anatar modul dan komodul.

Teorema 3.8. *Sebuah R-modul M merupakan modul bersih jika dan hanya jika (M, ϱ_T^M) merupakan komodul kiri dan kanan atas R-koaljabar $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$.*

Bukti:
$(\Rightarrow)$ Diberikan R-modul bersih M dan R-koaljabar trivial R dengan komultiplikasi $\Delta_T : R \to R \otimes_R R, r \mapsto r \otimes 1$ (Proposisi 3.3). Oleh karena R adalah ring komutatif, pada teorema ini cukup dibuktikan untuk komodul bersih kanan (untuk sisi kiri dapat dilakukan secara analog). Didefinisikan R-koaksi kanan pada M :

$$\varrho_T^M : M \to M \otimes_R R, m \mapsto m \otimes 1. \tag{1}$$

1. Oleh karena $1 \in R$, jelas bahwa ϱ_T^M tertutup dan terdefinisi dengan baik;
2. Dibuktikan ϱ_T^M merupakan pemetaan R-linear. Diambil sebarang m_1, m_2 dan $r \in R$, diperoleh:

   (a)

   $$\begin{aligned} \varrho^M(m_1 + m_2) &= (m_1 + m_2) \otimes 1 \\ &= m_1 \otimes 1 + m_2 \otimes 1 \\ &= \varrho^M(m_1) + \varrho^M(m_2) \end{aligned}$$

   (b) and

   $$\begin{aligned} \varrho_T^M(m_1 r) &= m_1 r \otimes 1 \\ &= m_1 \otimes r (R\text{-balanced}) \\ &= m_1 r \\ &= m_1(1.r) \\ &= (m_1 1) r (M \text{ is a right } R\text{-module}) \\ &= (m_1 \otimes 1) r \\ &= \varrho^M(m_1) r. \end{aligned}$$

   Jadi, ϱ_T^M merupakan pemetaan R-linear;

3. Selanjutnya dibuktikan ϱ_T^M bersifat koasosiatif. Diambil sebarang $m \in M$, diperoleh:
$$\begin{aligned}(I_M \otimes \Delta) \circ \varrho_T^M(m) &= (I_M \otimes \Delta)(m \otimes 1)\\ &= m \otimes 1 \otimes 1\\ &= (\varrho_T^M \otimes I_C)(m \otimes 1)\\ &= (\varrho_T^M \otimes I_C) \circ \varrho(m);\end{aligned}$$

4. Dibuktikan ϱ_T^M kounital. Untuk setiap $m \in M$, diperoleh :
$$(I_M \otimes \varepsilon) \circ \varrho_T^M(m) = (I_M \otimes \varepsilon)(m \otimes 1) = m.1 = m = I_M.$$

Jadi, (M, ϱ_T^M) merupakan R-komodul kanan. Lebih jelas artinya bahwa setiap R-modul M dapat dipandang sebagai komodul atas koaljabar $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$. Oleh karena $R \simeq R^*$, maka M merupakan R^*-modul. Oleh karena $R^* = Hom_R(R,R) \simeq R$ dan R merupakan R-modul proyektif (memenuhi kondisi α, lihat referensi [16]), maka $End^R(M) \simeq End_{R^*}(M)$ [16]. Lebih lanjut, M merupakan R-modul bersih, sehingga $End^R(M) \simeq End_{R^*}(M) \simeq End_R(M)$ merupakan ring bersih. Akibatnya, M merupakan komodul bersih atas $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$.
$\Leftarrow$ Diketahui M adalah komodul bersih atas R-koaljabar $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$. Jelas bahwa R adalah modul proyektif atas dirinya sendiri, sehingga $End^R(M) \simeq End_{R^*}(M)$ merupakan ring bersih. Oleh karena $R^* = Hom_R(R,R) \simeq R$ dan $End_{R^*}(M)$ ring bersih, maka $End_{R^*}(M) \simeq End_R(M)$ juga merupakan ring bersih. Hal ini berakibat M merupakan modul bersih atas R. ■

Pada Teorema 3.8, telah ditunjukkan bahwa sifat bersih pada teori modul merupakan kejadian khusus dari sifat bersih yang ada pada kategori komodul pada saat kondisi trivial. Diperoleh kesimpulan bahwa setiap modul atas ring R merupakan modul bersih jika dan hanya jika M merupakan komodul bersih atas R-koaksi trivial ϱ_T^M.

Pada contoh di bawah ini, diambil $M = R = \mathbb{Z}$. Telah diketahui bahwa $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}$ tidak bersih, hal ini menyebabkan sifat pada contoh berikut:

Contoh 3.9. *Diketahui bahwa $(\mathbb{Z}, \Delta_T, \varepsilon_T)$ adalah $\mathbb{Z}$-koaljabar. Artinya, $\mathbb{Z}$ merupakan $\mathbb{Z}$-komodul dimana $End_{\mathbb{Z}^*}(\mathbb{Z}) \simeq End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. Oleh karena ring $\mathbb{Z}$ bukan merupakan ring bersih, maka $End_{\mathbb{Z}^*}(\mathbb{Z})$ juga bukan merupakan ring bersih. Akibatnya, $\mathbb{Z}$ bukan $\mathbb{Z}^*$-modul bersih. Berdasarkan sifat proyektif dan kondisi α, diperoleh bahwa $\mathbb{Z}$ bukan $\mathbb{Z}$-comodul bersih sebab $End_{\mathbb{Z}^*}(\mathbb{Z}) \simeq End^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$.*

Pada Teorema 3.8, jika M adalah R-komodul trivial, maka relasi antara sifat bersih pada modul dan komodul menjadi sangat dekat. Namun, pembaca harus berhati-hati terhadap koaksi dan komultiplikasi dari koaljabarnya. Pada kondisi umum, yaitu saat M merupakan komodul non trivial atas R-koaljabar R (dengan komultiplikasi non-trivial), sifat-sifat pada paper ini belum tentu berlaku sebab $End^C(M)$ hanya merupakan subring dari $End_R(M)$. Untuk membahas kasus ini diperlukan materi tentang Relasi Hom-tensor antara kategori $\mathbf{M}_R$ dan $\mathbf{M}^C$.

4 KESIMPULAN

Setiap ring R merupakan R-koaljabar (koasosiatif dan kounital) dengan komultiplikasi trivial $\Delta_T : R \to R \otimes R, r \mapsto r \otimes 1$ dan kounit $\varepsilon_T : R \to R, r \mapsto r$. Lebih lanjut, setiap R-modul M juga dapat dipandang sebagai komodul atas R-koaljabar $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$ dengan R-koaksi trivial $\varrho_T^M : M \to M \otimes_R R, m \mapsto m \otimes 1$ [15, 16]. Pada teori modul, setiap ring R merupakan ring bersih jika dan hanya jika R merupakan modul bersih atas dirinya sendiri. Lebih lanjut, pada paper ini dapat terlihat hubungan antara ring bersih dengan kolajabar bersih dan modul bersih dengan komodul bersih. Telah dibuktikan bahwa R merupakan ring bersih jika dan hanya jika $(R, \Delta_T, \varepsilon_T)$ merupakan R-koaljabar bersih dan M merupakan R-modul bersih jika dan hanya jika (M, ϱ_T^M) merupakan R-komodul bersih.

DAFTAR PUSTAKA

[1] W.K. Nicholson, "Lifting idempotents and exchange rings," *Trans. Amer. Math. Soc.*, 229, pp $269 - 278$ (1977).

[2] D.D. Anderson and V.P Camillo, "Commutative rings whose elements are a sum of a unit and idempotent," *Comm. Algebra*, 30, No. 7, pp $3327 - 3336$ (2002).

[3] P. Crawley and B. Jónsson, "Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems," *Pacific J. Math.*, 14, pp $797 - 855$, 1964.

[4] Jr. R. B. Warfield, "Exchange rings and decompositions of modules," *Math. Ann.*, 199, pp 31-36, 1972.

[5] F. Kasch, *Modules and Rings*, Academic Press, Inc., London, UK (1982).

[6] W.A. Adkins and S.H Weintraub, *Algebra "An Approach via Module Theory"*, Springer-Verlag New York, Inc., USA (1992).

[7] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Reading, Paris (1991).

[8] F.W. Anderson and K.R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag New York, Inc., USA (1992).

[9] T.Y. Lam, *Graduate Texts in Mathematics: Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag New York, Inc., USA (2003).

[10] W.K. Nicholson and K. Varadarajan, "Countable linear transformations are clean", *Proceedings of American Mathematical Society*, 126, pp $61 - 64$ (1998).

[11] W.K. Nicholson, K. Varadarajan and Y. Zhou, "Clean endomorphism rings," *Archiv der Mathematik*, 83, pp $340 - 343$ (2004).

[12] V.P. Camillo, D. Khurana, T.Y. Lam, W.K. Nicholson and Y. Zhou, "Continuous modules are clean," *Journal of Algebra*, 304, pp $94 - 111$ (2006).

[13] A. Ismarwati, H. France-Jackson, S. Wahyuni and I.E. Wijayanti, "On nice modules," *JP Journal of Algebra, Number Theory and Application*, 38, No. 3, pp $213 - 225$, 2016.

[14] N.P. Puspita, I.E. Wijayanti and B. Surodjo, "Graded modules as a clean comodules," *Journal of Mathematics Reseacrh*, 12, No. 6, 2020.

[15] M.E. Sweedler, M.E., "Hopf Algebras," *Mathematics Lecture Note Series*, W.A. Benjamin, Inc., New York, USA (1969).

[16] T. Brzeziński and R. Wisbauer, *Corings and Comodules*, Cambridge University Press, UK, (2003).

ISSN 2829-3770
9 772829 377007