Konferensi Nasional MATEMATIKA KNM 2021

PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX
Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by IndoMS

Organized by Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

"Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0"

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

e-ISSN: 2829-3770
DOI issue: https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX

Dipublikasikan online pada:
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:

Mei 2022

Editor:

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si., M.Si., Berny P. Tomasouw, S.Si., M.Si.,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si., M. I. Tilukay, S.Si., M.Si., Monalisa E. Rijoly, S.Si., M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si., M.Si, M. B. Mananggel, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si., M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si., M.Si. Vicardy Kempa, S.Si., M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si., M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si., M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si., M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumalun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

KOMBINATORIK

PENDIDIKAN MATEMATIKA

MATEMATIKA TERAPAN

STATISTIKA

https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX.51-60

KONTRAKSI PERTINGKATAN PADA PERTINGKATAN PAULI $\mathfrak{SL}(N, \mathbb{C})$

Reynald Saputra[1,*], **Gantina Rachmaputri**[2]

[1]Program Studi Sarjana Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Indonesia
[2] Kelompok Keahlian Aljabar, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Indonesia
[*]e-mail: reynaldsaputra@students.itb.ac.id

Abstrak. *Aljabar Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ merupakan salah satu jenis aljabar Lie klasik. Tujuan dari penelitian ini untuk melihat apa saja aljabar Lie lain yang dapat dihasilkan dari kontraksi pertingkatan aljabar Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Aljabar Lie yang diperoleh akan disebut sebagai solusi dari kontraksi pertingkatan. Secara khusus, akan ditinjau kasus pada nilai $n = 3$ dan pertingkatan yang ditinjau adalah pertingkatan Pauli. Pertingkatan Pauli pada $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ merupakan salah satu fine grading (pertingkatan yang terbaik) dari empat fine grading yang bisa dilakukan pada $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Untuk kontraksi pertingkatan Pauli pada $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, terdapat 48 persamaan kontraksi yang dapat digunakan untuk memperoleh solusi dari kontraksi pertingkatan Pauli pada $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Untuk menyelesaikan persamaan kontraksi tersebut, digunakan bantuan dari grup simetri pertingkatan Pauli $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Di akhir, penulis memberikan sedikit hasil lain yaitu kasus ketika $n = 2$ dan $n = 4$ serta dekomposisi Levi pada kontraksi pertingkatan Pauli $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.*

Kata kunci: aljabar lie, pertingkatan, pertingkatan pauli, kontraksi pertingkatan.

1 LATAR BELAKANG

Aljabar Lie merupakan salah satu hasil dari teori grup Lie yang dikembangkan oleh Sophus Marius Lie (1842-1899) pada tahun 1870-an [1]. Aljabar Lie berkaitan dengan grup Lie (grup yang juga merupakan manifold mulus) sebab aljabar Lie merupakan ruang singgung dari grup Lie di identitas. Dengan kata lain, suatu grup Lie akan menghasilkan suatu aljabar Lie. Sebagai contoh, $GL(n, \mathbb{C})$, himpunan seluruh matriks $n \times n$ atas $\mathbb{C}$ dengan determinan tak nol, merupakan suatu grup Lie dan aljabar Lie-nya adalah $M_n(\mathbb{C})$, himpunan seluruh matriks $n \times n$ atas $\mathbb{C}$. Secara umum, aljabar Lie merupakan ruang vektor yang dilengkapi dengan pemetaan bilinear yang memiliki sifat tertentu. Teori grup Lie saat ini dipakai dalam pengembangan fisika modern terutama teori relativitas [1]. Dalam matematika, teori grup Lie sendiri banyak digunakan dalam menyelesaikan permasalahan geometri dan persamaan diferensial. Salah satu penelitian yang dilakukan pada aljabar Lie adalah mencari kontraksi dari pertingkatan suatu aljabar Lie. Kontraksi aljabar Lie pertama kali perkenalkan oleh M de Montigny, J. Patera and R.V. Moody [2, 3]. Pada dasarnya, kontraksi aljabar Lie merupakan suatu metode untuk memperoleh aljabar Lie yang berbeda (tidak isomorfik) dari aljabar Lie yang telah diberikan. Oleh karena itu, pada tugas akhir ini, akan dibahas bagaimana kontraksi dari pertingkatan aljabar Lie $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ dimana pertingkatan yang ditinjau adalah pertingkatan Pauli.

2 PERTINGKATAN PAULI

Definisikan matriks berukuran $k \times k$, $Q = diag(1, \omega_k, \omega_k^2, \cdots, \omega_k^{k-1})$ dan $P = \left[\begin{array}{c|c} O & I_{k-1} \\ \hline 1 & O \end{array}\right]$ dimana $\omega_k = exp(2\pi i/k)$. Untuk $k = 1$, $Q_1 = P_1 = (1)$. Pertingkatan Pauli untuk $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ telah dijelaskan pada [4] . Untuk $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, pertingkatan Pauli-nya berbentuk

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathcal{L}_{01} \oplus \mathcal{L}_{02} \oplus \mathcal{L}_{10} \oplus \mathcal{L}_{20} \oplus \mathcal{L}_{11} \oplus \mathcal{L}_{22} \oplus \mathcal{L}_{12} \oplus \mathcal{L}_{21} \tag{1}$$

dimana $\mathcal{L}_{ij} = \{X_{ij}\}_{lin}$ dan $X_{ij} = Q^i P^j$ (matriks Q dan P merupakan matriks berukuran 3×3 seperti yang dijelaskan di awal) untuk setiap $(i, j) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ tak nol. Bentuk dekomposisi ini merupakan suatu pertingkatan karena untuk sembarang $(r, s), (r', s') \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ tak nol berlaku

$$[X_{rs}, X_{r's'}] = Q^r P^s Q^{r'} P^{s'} - Q^{r'} P^{s'} Q^r P^s = (\omega^{sr'} - \omega^{rs'}) X_{r+r', s+s'} \tag{2}$$

sehingga $[\mathcal{L}_{rs}, \mathcal{L}_{r's'}] \subseteq \mathcal{L}_{r+r', s+s'}$.

3 KONTRAKSI PERTINGKATAN PAULI $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

Misalkan $\mathcal{L}$ adalah aljabar Lie dengan pertingkatan $\Gamma : \mathcal{L} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i$. Definisikan bilangan κ_{ij} dimana $\kappa_{ij} = 0$ jika $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] = \{0\}$ dan $\kappa_{ij} = 1$ jika $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] \neq \{0\}$. Definisikan juga "braket Lie baru" $[x, y]_\gamma := \gamma_{ij}[x, y]$ untuk setiap $x \in \mathcal{L}_i,\ y \in \mathcal{L}_j$, dan $\gamma_{ij} \in \mathbb{C}$. Bilangan $\varepsilon_{ij} := \gamma_{ij}\kappa_{ij}$ disebut parameter kontraksi. Jika $\mathcal{L}^\varepsilon := (L, [\ ,\ ]_\varepsilon)$ (L adalah $\mathcal{L}$ jika dipandang sebagai ruang vektor) merupakan suatu aljabar Lie maka $\mathcal{L}^\varepsilon$ disebut kontraksi pertingkatan dari $\mathcal{L}$.

Tinjau sembarang $i, j \in I$. Misalkan $x \in \mathcal{L}_i$ dan $y \in \mathcal{L}_j$ sehingga $[x, y]_\varepsilon = \varepsilon_{ij}[x, y]$ maka agar $[\ ,\ ]_\varepsilon$ merupakan braket Lie haruslah memenuhi sifat antikomutatif

$$[y, x]_\varepsilon = -[x, y]_\varepsilon = -\varepsilon_{ij}[x, y] = \varepsilon_{ij}[y, x] \tag{3}$$

sehingga $\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}$. Selain itu, $[\ ,\ ]_\varepsilon$ juga harus memenuhi identitas Jacobi yaitu untuk setiap $i, j, k \in I$,

$$[x, [y, z]_\varepsilon]_\varepsilon + [y, [z, x]_\varepsilon]_\varepsilon + [z, [x, y]_\varepsilon]_\varepsilon = 0\ (\forall x \in \mathcal{L}_i)(\forall y \in \mathcal{L}_j)(\forall z \in \mathcal{L}_k). \tag{4}$$

Persamaan tersebut dinotasikan sebagai $e(i, j, k)$ dan disebut persamaan kontraksi.

Untuk pertingkatan Pauli $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, bilangan-bilangan ε_{ij} kita susun dalam bentuk matriks

$$\varepsilon = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \varepsilon_{(01)(10)} & \varepsilon_{(01)(20)} & \varepsilon_{(01)(11)} & \varepsilon_{(01)(22)} & \varepsilon_{(01)(12)} & \varepsilon_{(01)(21)} \\
0 & 0 & \varepsilon_{(02)(10)} & \varepsilon_{(02)(20)} & \varepsilon_{(02)(11)} & \varepsilon_{(02)(22)} & \varepsilon_{(02)(12)} & \varepsilon_{(02)(21)} \\
\varepsilon_{(01)(10)} & \varepsilon_{(02)(10)} & 0 & 0 & \varepsilon_{(10)(11)} & \varepsilon_{(10)(22)} & \varepsilon_{(10)(12)} & \varepsilon_{(10)(21)} \\
\varepsilon_{(01)(20)} & \varepsilon_{(02)(20)} & 0 & 0 & \varepsilon_{(20)(11)} & \varepsilon_{(20)(22)} & \varepsilon_{(20)(12)} & \varepsilon_{(20)(21)} \\
\varepsilon_{(01)(11)} & \varepsilon_{(02)(11)} & \varepsilon_{(10)(11)} & \varepsilon_{(20)(11)} & 0 & 0 & \varepsilon_{(11)(12)} & \varepsilon_{(11)(21)} \\
\varepsilon_{(01)(22)} & \varepsilon_{(02)(22)} & \varepsilon_{(10)(22)} & \varepsilon_{(20)(22)} & 0 & 0 & \varepsilon_{(22)(12)} & \varepsilon_{(22)(21)} \\
\varepsilon_{(01)(12)} & \varepsilon_{(02)(12)} & \varepsilon_{(10)(12)} & \varepsilon_{(20)(12)} & \varepsilon_{(11)(12)} & \varepsilon_{(22)(12)} & 0 & 0 \\
\varepsilon_{(01)(21)} & \varepsilon_{(02)(21)} & \varepsilon_{(10)(21)} & \varepsilon_{(20)(21)} & \varepsilon_{(11)(21)} & \varepsilon_{(22)(21)} & 0 & 0
\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Matriks ε disebut sebagai solusi kontraksi dan terdapat 24 bilangan ε_{ij} yang perlu dicari. Untuk mendapatkannya, tinjau persamaan kontraksi yang dihasilkan. Diperoleh $\binom{8}{3} = 56$ persamaan kontraksi. Tetapi, karena jika jumlah ketiga dari indeks bernilai nol akan otomatis memenuhi identitas Jacobi, persamaan kontraksi tersebut tidak dapat ditinjau. Karena terdapat 8 persamaan kontraksi dengan jumlah ketiga indeks bernilai nol maka tersisa 48 persamaan kontraksi dengan bentuk (setelah disederhanakan)

$$\varepsilon_{(\ldots)}\varepsilon_{(\ldots)} - \varepsilon_{(\ldots)}\varepsilon_{(\ldots)} = 0 \tag{6}$$

Sebagai contoh, jika kita ambil persamaan kontraksi $e((01),(10),(31))$ diperoleh bentuk

$$\varepsilon_{(01)(12)}\varepsilon_{(02)(10)} - \varepsilon_{(02)(11)}\varepsilon_{(10)(01)} = 0 \tag{7}$$

4 SOLUSI KONTRAKSI PERTINGKATAN PAULI $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$

Untuk menyelesaikan 48 persamaan kontraksi tersebut, diperlukan beberapa konsep terlebih dahulu.

4.1 Grup simetri pertingkatan Pauli

Misalkan $\Gamma : \mathcal{L} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{L}_i$ pertingkatan dari $\mathcal{L}$. Grup simetri dari pertingkatan Γ, notasi Aut Γ, adalah subgrup dari Aut $\mathcal{L}$ yang memuat automorfisma g dengan sifat $g\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{\pi_g(i)}$ untuk setiap $i \in I$ dimana $\pi_g : I \to I$ merupakan permutasi pada himpunan indeks I. Misalkan juga Δ_Γ : Aut $\Gamma \to$ Sym I dimana $\Delta_\Gamma(g) := \pi_g$ merupakan representasi dari permutasi yang dihasilkan dari grup simetri. Definisikan suatu grup

$$H_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}_n, ad - bc = \pm 1 \text{ mod n} \right\}. \tag{8}$$

Dari [5] telah dibuktikan bahwa untuk pertingkatan Pauli pada $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, Δ_Γ Aut $\Gamma \cong H_n$ sehingga meninjau permutasi dari indeks akan ekivalen dengan meninjau perkalian indeks dengan matriks di H_n atau $\pi_A(i\,j) = (i\,j)A$ dimana π_A merupakan permutasi yang bersesuaian dengan matriks $A \in H_n$.

Lema 4.1 *Misalkan $\mathcal{L}^\varepsilon$ merupakan kontraksi pertingkatan dari pertingkatan $\Gamma : \mathcal{L} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{L}_i$ maka untuk setiap $\pi \in \Delta_\Gamma$ Aut Γ, $\mathcal{L}^{\varepsilon^\pi}$ merupakan kontraksi pertingkatan dari $\mathcal{L}$ dan $\mathcal{L}^\varepsilon \cong \mathcal{L}^{\varepsilon^\pi}$.*

4.2 Matriks normalisasi

Misalkan $A = (A_{ij})$ dan $B = (B_{ij})$ matriks dengan dengan ukuran yang sama. Definisikan $C := A \bullet B$ dimana $C_{ij} = A_{ij}B_{ij}$. Matriks normalisasi didefinisikan sebagai matriks $\alpha := (\alpha_{ij})$ dimana $\alpha_{ij} = \frac{a_i a_j}{a_{i+j}}$ untuk setiap $i,j \in I$ dan $a_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ untuk setiap $i \in I$.

Lema 4.2 *Misalkan $\mathcal{L}^\varepsilon$ merupakan kontraksi pertingkatan dari pertingkatan $\Gamma : \mathcal{L} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{L}_i$. Jika α matriks normalisasi dan $\tilde{\varepsilon} = \alpha \bullet \varepsilon$ maka $\mathcal{L}^{\tilde{\varepsilon}}$ merupakan kontraksi pertingkatan dari $\mathcal{L}$ dan $\mathcal{L}^\varepsilon \cong \mathcal{L}^{\tilde{\varepsilon}}$.*

Berdasarkan lema 4.1 dan lema 4.2 dapat didefinisikan ekivalensi dari solusi (didasarkan pada dua kontraksi pertingkatan yang isomorfik). Misalkan $\mathcal{S}$ menyatakan sistem persamaan kontraksi dan $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ menyatakan solusi dari $\mathcal{S}$. Dua solusi $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ disebut ekivalen, $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$, jika terdapat matriks normalisasi α dan $\pi \in \Delta_\Gamma$ Aut Γ sehingga $\varepsilon_1 = \alpha \bullet \varepsilon_2^\pi$. Relasi $\sim$ merupakan relasi ekivalen.

4.3 Algoritma solusi

Berdasarkan hasil pembahasan sebelumnya, dapat diperoleh lema berikut

Lema 4.3 *Misalkan $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ himpunan solusi dari $\mathcal{S}$ dan $\mathcal{I}$ himpunan pasangan tak terurut dari indeks yang relevan dari sistem persamaan kontraksi $\mathcal{S}$. Untuk setiap*

$$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{S}) \text{ dan } \mathcal{P} = \{k_1, k_2, ..., k_m\} \subseteq \mathcal{I} \tag{9}$$

notasikan

$$\mathcal{R}_0 := \{\varepsilon \in \mathcal{R}(\mathcal{S}) | (\forall \varepsilon_1 \in \mathcal{Q})(\varepsilon \nsim \varepsilon_1)\} \text{ dan } \mathcal{R}_1 := \{\varepsilon \in \mathcal{R}_0 | (\forall k \in \mathcal{P})(\varepsilon_k \neq 0)\} \tag{10}$$

maka solusi $\varepsilon \in \mathcal{R}_0$ tidak ekivalen terhadap semua solusi di $\mathcal{R}_1$ jika dan hanya jika memenuhi persamaan:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\pi_1(k_1)} \quad \varepsilon_{\pi_1(k_2)} \cdots \varepsilon_{\pi_1(k_m)} &= 0 \\ &\vdots \\ \varepsilon_{\pi_n(k_1)} \quad \varepsilon_{\pi_n(k_2)} \cdots \varepsilon_{\pi_n(k_m)} &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

dimana $\{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n\} = \Delta_\Gamma$ Aut Γ.

Berdasarkan lema diatas dapat diperoleh suatu algoritma untuk menyelesaikan sistem persamaan kontraksi:

1. Misalkan $\mathcal{Q} = \emptyset$ dan asumsikan kita memiliki $\mathcal{P}^0 \subseteq \mathcal{I}$. Maka, $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}(\mathcal{S})$ dan kita dapat mengevaluasi $\mathcal{R}^0 = \{\varepsilon \in \mathcal{R}(\mathcal{S}) | (\forall k \in \mathcal{P}^0)(\varepsilon_k \neq 0)\}$. Notasikan persamaan (*) yang bersesuaian dengan $\mathcal{Q} = \emptyset$ dan $\mathcal{P}^0$ sebagai $\mathcal{S}^0$.

2. Misalkan $\mathcal{Q} = \mathcal{R}^0$ dan asumsikan kita memiliki $\mathcal{P}^1 \subseteq \mathcal{I}$. Maka, $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^0)$ dan kita dapat mengevaluasi $\mathcal{R}^1 = \{\varepsilon \in \mathcal{R}(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^0) | (\forall k \in \mathcal{P}^1)(\varepsilon_k \neq 0)\}$. Notasikan persamaan (*) yang bersesuaian dengan $\mathcal{Q} = \mathcal{R}^0$ dan $\mathcal{P}^1$ sebagai $\mathcal{S}^1$.

3. Misalkan $\mathcal{Q} = \mathcal{R}^0 \cup \mathcal{R}^1$ dan asumsikan kita memiliki $\mathcal{P}^2 \subseteq \mathcal{I}$. Maka, $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^0 \cup \mathcal{S}^1)$ dan kita dapat mengevaluasi $\mathcal{R}^2 = \{\varepsilon \in \mathcal{R}(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^0 \cup \mathcal{S}^1) | (\forall k \in \mathcal{P}^2)(\varepsilon_k \neq 0)\}$. Notasikan persamaan (*) yang bersesuaian dengan $\mathcal{Q} = \mathcal{R}^0$ dan $\mathcal{P}^2$ sebagai $\mathcal{S}^2$.

4. Lakukan terus sampai kita memiliki $\mathcal{Q}$ sehingga $\mathcal{R}_0$ himpunan kosong.

Untuk $n = 3$, sistem persamaan kontraksi dinotasikan sebagai $\mathcal{S}_3$. Dengan menerapkan algoritma diatas dan dengan pemilihan suatu indeks diperoleh hasi algoritma diatas sebagai berikut:

1. $\mathcal{R}^0 = \{\varepsilon \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_3) | \varepsilon_{(01)(10)} \neq 0, \varepsilon_{(22)(21)} \neq 0\}$
   $\mathcal{S}^0 : \varepsilon_{(01)(10)A}\varepsilon_{(22)(21)A} = 0 \; \forall A \in H_3$

2. $\mathcal{R}^1 = \{\varepsilon \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}^0) | \varepsilon_{(01)(10)} \neq 0, \varepsilon_{(10)(11)} \neq 0, \varepsilon_{(01)(22)} \neq 0\}$
   $\mathcal{S}^1 : \varepsilon_{(01)(10)A}\varepsilon_{(10)(11)A}\varepsilon_{(01)(22)A} = 0 \; \forall A \in H_3$

3. $\mathcal{R}^2 = \{\varepsilon \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}^0 \cup \mathcal{S}^1) | \varepsilon_{(01)(10)} \neq 0, \varepsilon_{(10)(11)} \neq 0\}$
   $\mathcal{S}^2 : \varepsilon_{(01)(10)A}\varepsilon_{(10)(11)A} = 0 \; \forall A \in H_3$

4. $\mathcal{R}^3 = \{\varepsilon \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}^0 \cup \mathcal{S}^1 \cup \mathcal{S}^2) | \varepsilon_{(01)(10)} \neq 0, \varepsilon_{(02)(22)} \neq 0\}$
   $\mathcal{S}^3 : \varepsilon_{(01)(10)A}\varepsilon_{(02)(22)A} = 0 \, \forall A \in H_3$
5. $\mathcal{R}^4 = \{\varepsilon \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}^0 \cup \mathcal{S}^1 \cup \mathcal{S}^2 \cup \mathcal{S}^3) | \varepsilon_{(01)(10)} \neq 0\}$
   $\mathcal{S}^4 : \varepsilon_{(01)(10)A} = 0 \, \forall A \in H_3$

Dengan mengevaluasi masing-masing himpunan $\mathcal{R}^0, \mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2, \mathcal{R}^3, \mathcal{R}^4$ maka akan diperoleh solusi dari kontraksi pertingkatan dari pertingkatan Pauli $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

4.4 Solusi

1. Langkah 1: $\mathcal{R}^0 = \{\varepsilon \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_3) \mid \varepsilon_{(01)(10)} \neq 0, \varepsilon_{(22)(21)} \neq 0\}$.

$$\bar{\varepsilon}_3^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_1 & 0 & 0 & t_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_{12}x_{18}t_1}{t_4t_{20}} & 0 & 0 & \frac{x_{18}x_{11}}{t_{20}} & x_{11} & x_{12} \\ t_1 & \frac{x_{12}x_{18}t_1}{t_4t_{20}} & 0 & 0 & 0 & x_{14} & 0 & \frac{x_{14}x_{12}}{t_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{18} & 0 & t_{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_4 & \frac{x_{18}x_{11}}{t_{20}} & x_{14} & x_{18} & 0 & 0 & \frac{x_{14}x_{11}}{t_1} & \frac{t_4t_{20}}{t_1} \\ 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & \frac{x_{14}x_{11}}{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & x_{12} & \frac{x_{14}x_{12}}{t_4} & t_{20} & 0 & \frac{t_4t_{20}}{t_1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\varepsilon}_4^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_1 & 0 & \frac{x_6x_{18}}{t_{20}} & t_4 & 0 & x_6 \\ 0 & 0 & \frac{x_{12}x_{18}t_1}{t_4t_{20}} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{12} \\ t_1 & \frac{x_{12}x_{18}t_1}{t_4t_{20}} & 0 & 0 & 0 & x_{14} & 0 & \frac{x_{14}x_{12}}{t_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{18} & 0 & t_{20} \\ \frac{x_6x_{18}}{t_{20}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_6x_{14}}{t_1} \\ t_4 & 0 & x_{14} & x_{18} & 0 & 0 & 0 & \frac{t_4t_{20}}{t_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & x_{12} & \frac{x_{14}x_{12}}{t_4} & t_{20} & \frac{x_6x_{14}}{t_1} & \frac{t_4t_{20}}{t_1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\varepsilon}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_1 & \frac{x_{18}t_5t_1}{t_4t_{20}} & \frac{x_6x_{18}}{t_{20}} & t_4 & t_5 & x_6 \\ 0 & 0 & \frac{x_{11}x_6x_{18}}{t_5t_{20}} & \frac{x_{11}x_6x_{18}}{t_{20}t_4} & \frac{x_6x_{18}x_{11}}{t_{20}t_1} & \frac{x_{18}x_{11}}{t_{20}} & x_{11} & x_{12} \\ t_1 & \frac{x_{11}x_6x_{18}}{t_5t_{20}} & 0 & 0 & \frac{x_{18}x_{14}x_{11}x_6}{t_4t_{20}^2} & x_{14} & \frac{x_{14}x_{11}x_6}{t_{20}t_4} & \frac{x_{14}x_{11}x_6}{t_5t_1} \\ \frac{x_{18}t_5t_1}{t_4t_{20}} & \frac{x_{11}x_6x_{18}}{t_{20}t_4} & 0 & 0 & \frac{x_6x_{18}x_{14}x_{11}}{t_{20}t_1t_4} & x_{18} & \frac{t_5x_{14}}{t_4} & t_{20} \\ \frac{x_6x_{18}}{t_{20}} & \frac{x_6x_{18}x_{11}}{t_{20}t_1} & \frac{x_{18}x_{14}x_{11}x_6}{t_4t_{20}^2} & \frac{x_6x_{18}x_{14}x_{11}}{t_{20}t_1t_4} & 0 & 0 & \frac{x_{11}x_6x_{14}}{t_{20}t_1} & \frac{x_6x_{14}}{t_1} \\ t_4 & \frac{x_6x_{18}x_{11}}{t_{20}t_1} & x_{14} & x_{18} & 0 & 0 & \frac{x_{14}x_{11}}{t_1} & \frac{t_4t_{20}}{t_1} \\ t_5 & x_{11} & \frac{x_{14}x_{11}x_6}{t_{20}t_4} & \frac{t_5x_{14}}{t_4} & \frac{x_{11}x_6x_{14}}{t_{20}t_1} & \frac{x_{14}x_{11}}{t_1} & 0 & 0 \\ x_6 & x_{12} & \frac{x_{14}x_{11}x_6}{t_5t_1} & t_{20} & \frac{x_6x_{14}}{t_1} & \frac{t_4t_{20}}{t_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Langkah 2: $\mathcal{R}^1 = \{\varepsilon \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}^0) \mid \varepsilon_{(01)(10)} \neq 0, \varepsilon_{(10)(11)} \neq 0, \varepsilon_{(01)(22)} \neq 0\}$,
   $\mathcal{S}^0 : \varepsilon_{(01)(10)A}\varepsilon_{(22)(21)A} = 0$ untuk setiap $A \in H_3$.

$$\bar{\varepsilon}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_1 & x_2 & x_3 & t_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_7 & 0 & 0 & x_{10} & 0 & 0 \\ t_1 & x_7 & 0 & 0 & t_{13} & x_{14} & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{18} & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & t_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_4 & x_{10} & x_{14} & x_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Langkah 3: $\mathcal{R}^2 = \{\varepsilon \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}^0 \cup \mathcal{S}^1) \mid \varepsilon_{(01)(10)} \neq 0, \varepsilon_{(10)(11)} \neq 0\}$,
   $\mathcal{S}^0 : \varepsilon_{(01)(10)A}\varepsilon_{(22)(21)A} = 0$ untuk setiap $A \in H_3$, dan
   $\mathcal{S}^1 : \varepsilon_{(01)(10)A}\varepsilon_{(10)(11)A}\varepsilon_{(01)(22)A} = 0$ untuk setiap $A \in H_3$.

$$\bar{\varepsilon}_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_7 & x_8 & 0 & x_{10} & 0 & 0 \\ t_1 & x_7 & 0 & 0 & t_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \\ x_2 & x_8 & 0 & 0 & \frac{x_2x_{16}}{t_1} & x_{18} & x_{19} & \frac{x_2x_{16}}{t_{13}} \\ 0 & 0 & t_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{10} & x_{14} & x_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{15} & \frac{x_2x_{16}}{t_1} & x_{19} & \frac{x_2x_{16}}{t_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\varepsilon}_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_7 & x_8 & 0 & x_{10} & 0 & 0 \\ t_1 & x_7 & 0 & 0 & t_{13} & x_{14} & 0 & x_{16} \\ x_2 & x_8 & 0 & 0 & \frac{x_2x_{16}}{t_1} & x_{18} & x_{19} & \frac{x_2x_{16}}{t_{13}} \\ x_3 & 0 & t_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{10} & x_{14} & x_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x_2x_{16}}{t_1} & x_{19} & \frac{x_2x_{16}}{t_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Langkah 4: $\mathcal{R}^2 = \{\varepsilon \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}^0 \cup \mathcal{S}^1) \mid \varepsilon_{(01)(10)} \neq 0, \varepsilon_{(10)(11)} \neq 0\}$,
   $\mathcal{S}^0 : \varepsilon_{(01)(10)A}\varepsilon_{(22)(21)A} = 0$ untuk setiap $A \in H_3$,
   $\mathcal{S}^1 : \varepsilon_{(01)(10)A}\varepsilon_{(10)(11)A}\varepsilon_{(01)(22)A} = 0$ untuk setiap $A \in H_3$, dan
   $\mathcal{S}^2 : \varepsilon_{(01)(10)A}\varepsilon_{(10)(11)A} = 0$ untuk setiap $A \in H_3$.

$$\bar{\varepsilon}_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_1 & x_2 & 0 & x_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_7 & 0 & 0 & t_{10} & x_{11} & 0 \\ t_1 & x_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{18} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & t_{10} & 0 & x_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Langkah 5: $\mathcal{R}^4 = \{\varepsilon \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}^0 \cup \mathcal{S}^1 \cup \mathcal{S}^2 \cup \mathcal{S}^3) \mid \varepsilon_{(01)(10)} \neq 0\}$,
   $\mathcal{S}^0$: $\varepsilon_{(01)(10)A}\varepsilon_{(22)(21)A} = 0$ untuk setiap $A \in H_3$,
   $\mathcal{S}^1$: $\varepsilon_{(01)(10)A}\varepsilon_{(10)(11)A}\varepsilon_{(01)(22)A} = 0$ untuk setiap $A \in H_3$,
   $\mathcal{S}^2$: $\varepsilon_{(01)(10)A}\varepsilon_{(10)(11)A} = 0$ untuk setiap $A \in H_3$, dan
   $\mathcal{S}^3$: $\varepsilon_{(01)(10)A}\varepsilon_{(02)(22)A} = 0$ untuk setiap $A \in H_3$.

$$\bar{\varepsilon}_1^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_1 & x_2 & 0 & x_4 & 0 & x_6 \\ 0 & 0 & x_7 & x_8 & 0 & 0 & x_{11} & 0 \\ t_1 & x_7 & 0 & 0 & 0 & x_{14} & x_{15} & 0 \\ x_2 & x_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & x_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & x_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & x_{20} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.5 Ekivalensi solusi

Solusi yang telah diperoleh pada pembahasan sebelumnya dapat dikelompokkan berdasarkan banyak entri nol dari 24 bilangan ε_{ij} yang diperoleh. Pada paper ini hanya akan dibahas jumlah entri nol sebanyak 0 dan 9. Untuk jumlah entri nol lainnya dapat dilihat pada lampiran di [6].

1. Jumlah entri nol: 0

   Matriks kontraksi yang mungkin pada kasus ini adalah $\bar{\varepsilon}_0^2$. Untuk matriks normalisasi

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a_{10}a_{01}}{a_{11}} & \frac{a_{01}a_{20}}{a_{21}} & \frac{a_{01}a_{11}}{a_{12}} & \frac{a_{01}a_{22}}{a_{20}} & \frac{a_{01}a_{12}}{a_{10}} & \frac{a_{01}a_{21}}{a_{22}} \\ 0 & 0 & \frac{a_{02}a_{10}}{a_{12}} & \frac{a_{02}a_{20}}{a_{22}} & \frac{a_{02}a_{11}}{a_{10}} & \frac{a_{02}a_{22}}{a_{21}} & \frac{a_{02}a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{02}a_{21}}{a_{20}} \\ \frac{a_{10}a_{01}}{a_{11}} & \frac{a_{02}a_{10}}{a_{12}} & 0 & 0 & \frac{a_{10}a_{11}}{a_{21}} & \frac{a_{10}a_{22}}{a_{02}} & \frac{a_{10}a_{12}}{a_{22}} & \frac{a_{10}a_{21}}{a_{01}} \\ \frac{a_{01}a_{20}}{a_{21}} & \frac{a_{02}a_{20}}{a_{22}} & 0 & 0 & \frac{a_{20}a_{11}}{a_{01}} & \frac{a_{10}a_{22}}{a_{02}} & \frac{a_{20}a_{12}}{a_{02}} & \frac{a_{20}a_{21}}{a_{11}} \\ \frac{a_{01}a_{11}}{a_{12}} & \frac{a_{02}a_{11}}{a_{10}} & \frac{a_{10}a_{11}}{a_{21}} & \frac{a_{20}a_{11}}{a_{01}} & 0 & 0 & \frac{a_{11}a_{12}}{a_{20}} & \frac{a_{11}a_{21}}{a_{02}} \\ \frac{a_{01}a_{22}}{a_{20}} & \frac{a_{02}a_{22}}{a_{21}} & \frac{a_{10}a_{22}}{a_{02}} & \frac{a_{10}a_{22}}{a_{02}} & 0 & 0 & \frac{a_{22}a_{12}}{a_{01}} & \frac{a_{22}a_{21}}{a_{10}} \\ \frac{a_{01}a_{12}}{a_{10}} & \frac{a_{02}a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{10}a_{12}}{a_{22}} & \frac{a_{20}a_{12}}{a_{02}} & \frac{a_{11}a_{12}}{a_{20}} & \frac{a_{22}a_{12}}{a_{01}} & 0 & 0 \\ \frac{a_{01}a_{21}}{a_{22}} & \frac{a_{02}a_{21}}{a_{20}} & \frac{a_{10}a_{21}}{a_{01}} & \frac{a_{20}a_{21}}{a_{11}} & \frac{a_{11}a_{21}}{a_{02}} & \frac{a_{22}a_{21}}{a_{10}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

   dimana

   - $a_{22} = p_1 = \frac{(t_1)^{1/3}(t_{15})^{1/3}(t_3)^{1/3}(t_{20})^{2/3}}{(t_{14})^{2/3}(t_{11})^{2/3}(t_6)^{2/3}(t_{18})^{2/3}}$
   - $a_{21} = p_2 = \frac{p_1 t_{13}}{t_{15}} \left(\frac{t_1 t_5}{t_3^2}\right)^{1/3}$
   - $a_{11} = \sqrt{\frac{p_1 t_1}{t_3 t_{15}}}$
   - $a_{12} = \sqrt{\frac{p_2 t_3}{t_5 t_{13}}}$
   - $a_{10} = \frac{p_2}{t_{13}} \sqrt{\frac{t_3 t_{15}}{p_1 t_1}}$
   - $a_{01} = \frac{p_1 t_{13}}{p_2 t_3 t_{15}}$
   - $a_{02} = \frac{1}{t_7} \sqrt{\frac{t_1 p_1 t_{13}}{p_2 t_{15} t_5}}$

- $a_{20} = \frac{p_2^2 t_3 t_{15}}{p_1 t_{13} t_2}$.

diperoleh $\bar{\varepsilon}_2^0 \bullet \alpha = \varepsilon_I$ dimana

$$\varepsilon_I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Karena matriks ε_I merupakan representasi dari aljabar Lie $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ dan $\bar{\varepsilon}_2^0 \bullet \alpha = \varepsilon_I$ maka aljabar Lie yang bersesuaian dengan $\bar{\varepsilon}_2^0$ isomorfik dengan $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$.

2. Jumlah entri nol: 9

   Terdapat dua matriks kontraksi yang memenuhi yaitu $\bar{\varepsilon}_2^0$ ketika $x_{14} = 0$ dan ketika $x_{18} = 0$. Untuk $x_{14} = 0$, notasikan matriks kontraksi tersebut sebagai ε_9 dan untuk $x_{18} = 0$, notasikan sebagai $\varepsilon_{9,2}$. Untuk matriks normalisasi α_1 dimana

   - $a_{01} = p_1 = \left(\frac{t_{20}}{t_1 t_6 t_{18} t_5}\right)^{1/3}$
   - $a_{10} = p_2 \neq 0$
   - $a_{11} = p_1 p_2 t_1$
   - $a_{22} = p_3 = \sqrt{\frac{p_2 (t_1)^{2/3} (t_6)^{2/3}}{(t_{20})^{2/3} t_4 (t_{18})^{1/3} (t_5)^{1/3}}}$
   - $a_{12} = \frac{p_1^2 p_2 t_1 t_6 t_{18}}{t_{20}}$
   - $a_{02} = \frac{p_1^2 t_1 t_5}{t_{11}}$
   - $a_{21} = \frac{p_2 t_1}{p_3 t_4 t_{20}}$
   - $a_{20} = p_1 p_3 t_4$

   berlaku $\varepsilon_9 \bullet \alpha_1 = \varepsilon_{9,I}$ dimana

$$\varepsilon_{9,I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

   Jadi $\varepsilon_9 \sim \varepsilon_{9,I}$. Perhatikan bahwa $\varepsilon_{9,I}$ ekivalen dengan $(\varepsilon_{9,I})^{\pi_A}, A \in H_3$. Untuk memperoleh matriks-matriks di $\{(\varepsilon_{9,I})^{\pi_A} | A \in H_3\}$ dapat menggunakan *software* seperti MATLAB. Untuk matriks normalisasi α_2 dimana

- $a_{01} = p_1 \neq 0$
- $a_{10} = p_2 \neq 0$
- $a_{22} = p_3 \neq 0 \Rightarrow p_1 = \frac{p_2(t_{14})^{2/3}(t_1 1)^{2/3}(t_6)^{1/3}}{(t_1)^{1/3}(t_5)^{2/3}(t_{20})^{1/3}(t_4)^{1/3}}, p_2 = \frac{p_3(t_5)^{1/3}(t_{20})^{2/3}(t_4)^{2/3}}{(t_1)^{1/3}(t_{14})^{1/3}(t_{11})^{1/3}(t_6)^{1/3}}$
- $a_{20} = p_1 p_3 t_4$
- $a_{11} = p_1 p_2 t_1$
- $a_{12} = \frac{p_2}{p_1 t_5}$
- $a_{21} = \frac{p_3}{p_1 t_6}$
- $a_{02} = \frac{p_1^2 t_1 t_5}{t_{11}}$

berlaku $\varepsilon_{9,2} \bullet \alpha_2 = \varepsilon_{9,VIII}$ dimana

$$\varepsilon_{9,VIII} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

sehingga $\varepsilon_{9,2} \sim \varepsilon_{9,VIII}$. Karena $\varepsilon_{9,VIII} \in \{(\varepsilon_{9,I})^{\pi_A} | A \in H_3\}$ maka $\varepsilon_{9,VIII} \sim \varepsilon_{9,I}$. Akibatnya, $\varepsilon_{9,2} \sim \varepsilon_{9,I}$. Jadi setiap aljabar Lie yang berkaitan dengan matriks kontraksi dengan jumlah entri nol pada posisi indeks yang tidak relevan 9 isomorfik dengan aljabar Lie yang berkaitan dengan $\varepsilon_{9,I}$.

5 HASIL LAINNYA

Pada bagian ini akan ditunjukkan sedikit hasil pengamatan penulis (bukan merupakan hasil lengkap).

5.1 Solusi kontraksi pertingkatan Pauli $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Dengan melakukan proses yang sama ketika membentuk kontraksi pertingkatan Pauli $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, diperoleh bahwa hanya ada satu persamaan kontraksi yaitu $e(01, 10, 11)$. Karena jumlah dari indeksnya bernilai nol maka identitas Jacobi terpenuhi untuk berapapun nilai ε_{ij}. Jadi solusinya,

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & 0 & x_3 \\ x_2 & x_3 & 0 \end{pmatrix}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}. \tag{16}$$

5.2 Solusi kontraksi pertingkatan Pauli $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$

Dengan melakukan proses yang sama ketika membentuk kontraksi pertingkatan Pauli $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, diperoleh bahwa terdapat 411 persamaan kontraksi yang dapat ditinjau. Penulis belum dapat memperoleh solusi dari kontraksi pertingkatan pada $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$ dikarenakan banyaknya persamaan yang perlu ditinjau (diperlukan bantuan dari suatu algoritma pemrograman).

5.3 Dekomposisi Levi dari solusi kontraksi pertingkatan Pauli $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

Teori Levi (dekomposisi Levi) menyatakan bahwa untuk setiap aljabar Lie $\mathcal{L}$ yang berdimensi hingga atas lapangan berkarakteristik 0, terdapat subaljabar Lie dari $\mathcal{L}$ yang semi sederhana, namakan $\mathcal{S}$ sehingga

$$\mathcal{L} = \mathcal{S} \oplus SR(\mathcal{L}). \tag{17}$$

Perhatikan bahwa jika $\mathcal{L}$ semi sederhana maka $\mathcal{L}$ memiliki dekomposisi Levi yang trivial. Karena aljabar Lie $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ semi sederhana dan aljabar Lie yang bersesuaian dengan matriks $\bar{\varepsilon}_2^0$ isomorfik dengan $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ maka aljabar Lie tersebut memiliki dekomposisi Levi yang trivial. Untuk solusi kontraksi lainnya, penulis belum dapat memutuskan apakah memiliki dekomposisi Levi yang trivial atau tidak. Tetapi penulis memiliki konjektur bahwa solusi kontraksi pertingkatan Pauli $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ memiliki dekomposisi Levi yang trivial.

6 KESIMPULAN

Dengan melakukan kontraksi, kita dapat memperoleh aljabar Lie yang baru. Pada kontraksi pertingkatan Pauli $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ diperoleh aljabar Lie yang baru, dua diantaranya adalah aljabar Lie yang bersesuaian dengan $\bar{\varepsilon}_2^0$ dimana isomorfik dengan $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ dan aljabar Lie yang bersesuaian dengan $\varepsilon_{9,I}$ dimana tidak isomorfik dengan $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

REFERENCES

[1] Boza, L., Martel, E. M. F., nez Valdés, J. N. and Tenorio, A. F., ”A Historical Review of the Classifications of Lie Algebras”, *Revista de la Unión Matemática Argentina*, **54**(2), 75–99, (2013).

[2] de Montigny, M. and Patera, J., ”Discrete and continuous graded contractions of Lie algebras and superalgebras”, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **24**(3), 525–547, (1991).

[3] Moody, R. and Patera, J., ”Discrete and continuous graded contractions of representations of Lie algebras”, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **24**(10), 2227–2257, (1991).

[4] J. Patera, H. Zassenhaus, ”The Pauli matrices in n dimensions and finest gradings of simple Lie algebras of type An-1”, *J. Math. Phys*, **29**, 665–673, (1988).

[5] Havlíček, M., Pelantová, E. and Tolar, J., ”Automorphisms of the fine grading of $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ associated with the generalized pauli matrices”, *Journal of Mathematical Physics* , **43**(2), 1082–1094, (2002).

[6] Hrivnák, J., Novotný, P., Patera, J. and Tolar, J., ”Graded contractions of thePauli graded $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$”, *Linear Algebra and Its Applications*, **418**(2-3), 498–550, (2006).

ISSN 2829-3770