Konferensi Nasional MATEMATIKA 2021

PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by IndoMS

Organized by Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

"Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0"

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

e-ISSN: 2829-3770
DOI issue: https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX

Dipublikasikan online pada:
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:

Mei 2022

Editor:

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si., M.Si., Berny P. Tomasouw, S.Si., M.Si.,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si., M. I. Tilukay, S.Si., M.Si., Monalisa E. Rijoly, S.Si., M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si., M.Si, M. B. Mananggel, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si., M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si., M.Si. Vicardy Kempa, S.Si., M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si., M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si., M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si., M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumalun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

MATEMATIKA TERAPAN

STATISTIKA

https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX.61-66

BUKTI ALTERNATIF INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG LEBESGUE DENGAN EKSPONEN PEUBAH

Dina Nur Amalina* **dan Denny Ivanal Hakim**

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Indonesia

*e-mail: dina.n.amalina@gmail.com

Abstrak. *Pada makalah ini, kami mengkaji ruang Lebesgue dengan eksponen peubah pada sebarang subhimpunan terukur dari $\mathbb{R}^n$. Khususnya, kami membahas suatu bukti alternatif dari deskripsi interpolasi kompleks metode pertama dan kedua dari ruang Lebesgue dengan eksponen peubah melalui hasil kali Calderon. Hasil deskripsi interpolasi kompleks metode pertama dan kedua dari ruang ini telah dibuktikan sebelumnya oleh Diening, dkk. Kami juga membuktikan inklusi ruang-ruang Lebesgue dengan eksponen peubah pada subhimpunan yang berukuran hingga, beserta kaitannya dengan interpolasi kompleks ruang ini.*

Kata Kunci: ruang Lebesgue, ruang Lebesgue dengan eksponen peubah, interpolasi kompleks, hasil kali Calderon.

1 LATAR BELAKANG

Ruang Lebesgue dengan eksponen peubah merupakan salah satu perumuman dari ruang Lebesgue yang telah diperkenalkan oleh Orlicz sejak 1931 [5]. Melalui pendekatan yang berbeda, ruang Lebesgue dengan eksponen peubah dapat memuat beberapa fungsi yang bukan termasuk pada suatu ruang Lebesgue L^p untuk $0 < p < \infty$. Pendekatan yang digunakan adalah mengubah pangkat konstanta p sebagai fungsi peubah $p(\cdot)$, sehingga tidak lagi memperhatikan daerah asal pengintegralan pada fungsi.

Pada tahun 1964, Calderón melalui [2] mengenalkan interpolasi kompleks dan juga hasil kali Calderón sebagai abstraksi Teorema Interpolasi Riesz-Thorin. Diening dkk telah memberikan deskripsi interpolasi kompleks untuk ruang Lebesgue dengan eksponen peubah pada [3] dengan kondisi $\left(p_i(\cdot)\right)_+ < \infty$. Kemudian pada [4] Diening dkk memperumum hasil sebelumnya yaitu fungsi terukur $p_i(\cdot): A \to [1, \infty]$ merupakan sebarang anggota dari $\mathcal{P}(A, \mu)$.

2 TUJUAN PENELITIAN

Tujuan penelitian ini adalah memberikan alternatif bukti interpolasi kompleks metode pertama dan kedua pada ruang Lebesgue dengan eksponen peubah yang lebih elementer menggunakan berbagai kaitan antara interpolasi kompleks dengan hasil kali Calderón. Lebih lanjut kami menunjukkan bahwa ruang interpolasi kompleks ini merupakan ruang antara yang sejati melalui inklusi ruang Lebesgue dengan eksponen peubah pada himpunan berukuran hingga.

3 METODOLOGI

Penelitian ini merupakan sebuah kajian studi literatur makalah-makalah berkaitan dengan interpolasi kompleks, hasil kali Calderón dan mengkaji ruang Lebesgue dengan eksponen peubah melalui buku karya Cruz-Uribe dan Fiorenza [1].

4 HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Ruang Lebesgue dengan Eksponen Peubah

Sebagai perumuman dari ruang Lebesgue, ruang Lebesgue dengan eksponen peubah memiliki pangkat berupa fungsi peubah. Berikut ini merupakan definisi dari fungsi peubah dan beberapa pendefinisian terkait fungsi peubah. Pada makalah ini subhimpunan terukur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ merupakan himpunan berukuran hingga.

Definisi 4.1.1 [1] Misalkan $\mathcal{P}(\Omega)$ merupakan himpunan semua fungsi terukur $p(\cdot): \Omega \to [1, \infty]$. Lebih jauh, $p(\cdot)$ disebut sebagai fungsi eksponen. Untuk $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ dapat didefinisikan notasi $p_- = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x)$, $p_+ = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x)$. Didefinisikan pula subhimpunan dari Ω sebagai berikut:

$$\Omega_1^{p(\cdot)} = \{x \in \Omega: p(x) = 1\}, \Omega_\infty^{p(\cdot)} = \{x \in \Omega: p(x) = \infty\}, \Omega_*^{p(\cdot)} = \{x \in \Omega: 1 < p(x) < \infty\}.$$

Eksponen konjugat dari $p(\cdot)$, dinotasikan dengan $p'(\cdot)$, didefinisikan sebagai $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$.

Berikut merupakan definisi dari ruang Lebesgue dengan eksponen peubah.

Definisi 4.1.2 [1] Ruang Lebesgue dengan eksponen peubah $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ didefinisikan sebagai himpunan dari fungsi terukur f sehingga untuk $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ berlaku

$$\rho(f/\lambda) = \int_{\Omega\setminus\Omega_\infty^{p(\cdot)}} |f(x)/\lambda|^{p(x)} + \|f/\lambda\|_{L^\infty} < \infty$$

untuk suatu $\lambda > 0$.

Dengan norma untuk $f \in L^{p(\cdot)}$ didefinisikan dengan

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \inf \left\{\lambda > 0: \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

Catatan 4.1.3 Untuk $p(\cdot) = p$ maka $L^{p(\cdot)}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Berdasarkan definisi norma pada ruang Lebesgue dengan eksponen peubah dapat diperoleh beberapa sifat terkait norma dari ruang Lebesgue dengan eksponen peubah.

Proposisi 4.1.4 [1] Misalkan $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ dengan $p(\cdot)/\alpha \in \mathcal{P}(\Omega)$ sedemikian sehingga $|\Omega_\infty| = 0$ maka untuk setiap $\alpha > 0$, $\||f|^\alpha\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{\alpha}}} = \|f\|_{L^{p(\cdot)}}^\alpha$ untuk setiap $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Proposisi 4.1.5 [6] Misalkan $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Jika $f \in L^{p(\cdot)}$ dengan $\|f\|_{L^{p(\cdot)}} \leq 1$ maka $\left\||f|^{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}\right\|_{L^{q(\cdot)}} \leq 1$.

4.2 Inklusi Ruang Lebesgue dengan Eksponen Peubah

Ruang Lebesgue dengan eksponen peubah pada himpunan berukuran hingga juga memiliki inklusi dari kedua ruang berdasarkan urutan dari pangkatnya. Dalam penelitian ini khususnya akan disampaikan beberapa inklusi dari subhimpunan berukuran hingga.

Teorema 4.2.1 [1] Misalkan $\boldsymbol{p}(\cdot), \boldsymbol{q}(\cdot) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\Omega})$. Misalkan $\left|\boldsymbol{\Omega}\setminus\boldsymbol{\Omega}_\infty^{\boldsymbol{p}(\cdot)}\right| < \infty$, maka $\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{q}(\cdot)}(\boldsymbol{\Omega}) \subset \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{p}(\cdot)}(\boldsymbol{\Omega})$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ hampir dimana-mana

$$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{p}(\cdot)}} \leq \left(\boldsymbol{1} + \left|\boldsymbol{\Omega}\setminus\boldsymbol{\Omega}_\infty^{\boldsymbol{p}(\cdot)}\right|\right) \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{q}(\cdot)}}.$$

Berikut ini akan disampaikan contoh yang menunjukkan inklusi tersebut sejati.

Contoh 4.2.2 Misalkan $f(x) = |x|^{-1/q}$ untuk $x \in [-1,1]$. Definisikan $p(\cdot) = p$ dan $q(\cdot) = q$. Untuk $p < q$, diperoleh

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \|f\|_{L^p} = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} = \left(\int_{-1}^{1} |x|^{-p/q} \, dx\right)^{1/p} < \infty$$

$$\|f\|_{L^{q(\cdot)}} = \|f\|_{L^q} = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^q \, dx\right)^{1/q} = \left(\int_{-1}^{1} |x|^{-q/q} \, dx\right)^{1/q} = \infty.$$

Hal ini menunjukkan $f \in L^{p(\cdot)}([-1,1])$ namun $f \notin L^{q(\cdot)}([-1,1])$.

Pada Teorema 4.2.3 akan disampaikan inklusi antara ruang Lebesgue dengan eksponen peubah dengan L^{p_-} dan L^{p_+}. Contoh 4.2.4 akan menunjukkan inklusi tersebut sejati.

Teorema 4.2.3 [1] Misalkan $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ dengan $1 \le p_- < p(x) < p_+ \le \infty,\ x \in \Omega$ dan $\left|\Omega_\infty^{p_+}\right| = 0$ maka $L^{p(\cdot)}(\Omega) \subseteq L^{p_-}(\Omega) + L^{p_+}(\Omega)$.

Contoh 4.2.4 Misalkan $f(x) = |x|^{-1}$ dengan $p(x) = \begin{cases} |x|^{-1}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ untuk $x \in [-2,2]$. Maka $p_- = \frac{1}{2}$ dan $p_+ = +\infty$. Misalkan $f = f_0 + f_1$ dengan $f_0 = f\chi_{\{x \in [-2,2]: |f(x)| > 1\}}$ dan $f_1 = f\chi_{\{x \in [-2,2]: |f(x)| \le 1\}}$. Maka,

$$\|f\|_{L^{p_-} + L^{p_+}} \le \|f_0\|_{L^{p_-}} + \|f_1\|_{L^{p_+}} \le \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^{p_-} \, dx\right)^{1/p_-} + \|f\|_{L^\infty}$$

$$\le \left(\int_{-1}^{1} |x|^{-\frac{1}{2}} \, dx\right)^{\frac{1}{p_-}} + 1 < \infty.$$

Teorema berikut menyatakan bahwa ruang Lebesgue dengan eksponen peubah merupakan ruang antara dari ruang $L^{p_0(\cdot)}$ dan $L^{p_1(\cdot)}$.

Teorema 4.2.5 Misalkan $p_0(\cdot), p_1(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ dengan $1 \le p_0(x) < p_1(x) \le \infty$ untuk $x \in \Omega$ dan $\left|\Omega_\infty^{p_1(\cdot)}\right|$. Jika $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ yang didefinisikan oleh $\frac{1}{p(x)} = \frac{1-\theta}{p_0(x)} + \frac{\theta}{p_1(x)}$ dengan $\theta \in (0,1)$ maka $L^{p_0(\cdot)}(\Omega) \cap L^{p_1(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p_0(\cdot)}(\Omega) + L^{p_1(\cdot)}(\Omega)$.

Inklusi $L^{p_0(\cdot)}(\Omega) \cap L^{p_1(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ dapat dibuktikan dengan menggunakan ketaksamaan Hölder dan definisi norma pada irisan dua ruang. Kemudian inklusi lainnya, dapat dibuktikan dengan mendefinisikan $f_0 = f\chi_{\{x \in \Omega: |f(x)| \le 1\}}$ dan $f_1 = f - f_0$ di mana $\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = 1$.

4.3 Hasil Kali Calderon Ruang Lebesgue dengan Eksponen Peubah

Berikut akan dibahas hasil kali Calderón pada ruang Lebesgue dengan eksponen peubah. Namun sebelum itu akan disampaikan definisi dari hasil kali Calderón melalui definisi berikut.

Definisi 4.3.1 [2] Misalkan (X_0, X_1) adalah pasangan ruang Banach dari fungsi terukur pada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dan $\theta \in (0,1)$. Hasil kali Calderón antara X_0 dan X_1 didefinisikan sebagai:

$$X_0^{1-\theta} X_1^{\theta} := \left\{f : |f(x)| \le |f_0(x)|^{1-\theta} |f_1(x)|^{\theta} \text{ hdm}, f_0 \in X_0, f_1 \in X_1\right\}.$$

Untuk $f \in X_0^{1-\theta} X_1^{\theta}$ norma pada $X_0^{1-\theta} X_1^{\theta}$ didefinisikan dengan

$$\|f\|_{X_0^{1-\theta} X_1^{\theta}} := \inf\left\{\|f_0\|_{X_0}^{1-\theta} \|f_1\|_{X_1}^{\theta} : |f(x)| \le |f_0(x)|^{1-\theta} |f_1(x)|^{\theta}\right\}.$$

Adapun hasil kali Calderón pada ruang Lebesgue dengan eksponen peubah dinyatakan pada Teorema 4.3.2 berikut ini memiliki hasil yang serupa dengan [7] namun menggunakan pembuktian yang berbeda.

Teorema 4.3.2 [7] Misalkan $p_0(\cdot)$, $p_1(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ dan $\theta \in (0,1)$. Jika $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ didefinisikan oleh $\frac{1}{p(x)} = \frac{1-\theta}{p_0(x)} + \frac{\theta}{p_1(x)}$ untuk setiap $x \in \Omega$, maka

$$\left(L^{p_0(\cdot)}(\Omega)\right)^{1-\theta}\left(L^{p_1(\cdot)}(\Omega)\right)^{\theta} = L^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Inklusi $\left(L^{p_0(\cdot)}(\Omega)\right)^{1-\theta}\left(L^{p_1(\cdot)}(\Omega)\right)^{\theta} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ dapat dibuktikan dengan ketaksamaan Hölder dan sifat pada Proposisi 4.1.4. Untuk membuktikan inklusi $L^{p(\cdot)} \subset \left(L^{p_0(\cdot)}(\Omega)\right)^{1-\theta}\left(L^{p_1(\cdot)}(\Omega)\right)^{\theta}$ dapat digunakan sifat pada Proposisi 4.1.5.

4.4 Interpolasi Kompleks Ruang Lebesgue dengan Eksponen Peubah

Pada makalah ini diasumsikan bahwa (X_0, X_1) adalah ruang Banach yang kompatibel yakni terdapat ruang vektor topologi Hausdorff Z sedemikian sehingga X_0 dan X_1 merupakan subruang dari Z dan inklusi dari X_0 dan X_1 ke Z kontinu. Misalkan $\bar{S} = \{z \in \mathbb{C}: 0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1\}$ dan $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$.

Berikut akan disampaikan definisi fungtor interpolasi kompleks metode pertama.

Definisi 4.4.1 [2] Fungtor $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ adalah ruang semua fungsi kontinu dan terbatas $F: \bar{S} \to X_0 + X_1$ yang analitik pada S dan memenuhi fungsi $t \mapsto F(j + it)$, dengan $j = 0,1$ merupakan fungsi kontinu dari $\mathbb{R}$ ke X_j. Norma di $\mathcal{F}$ didefinisikan dengan

$$\|F\|_{\mathcal{F}} = \underset{j=0,1}{\mathrm{maks}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(j + it)\|_{X_j}.$$

Berikut merupakan definisi dari interpolasi kompleks pertama.

Definisi 4.4.2 [2] Misalkan $\theta \in [0,1]$. Definisikan

$$[X_0, X_1]_\theta = \{f \in X_0 + X_1 : f = F(\theta), F \in \mathcal{F}(X_0, X_1)\}.$$

Norma pada $[X_0, X_1]_\theta$ didefinisikan dengan

$$\|f\|_{[X_0,X_1]_\theta} = \inf\{\|F\|_{\mathcal{F}}: f = F(\theta), \text{untuk suatu } F \in \mathcal{F}\}.$$

Adapun kaitan antara interpolasi kompleks pertama dengan hasil kali Calderón dari pasangan (X_0, X_1) adalah sebagai berikut.

Lema 4.4.3 [2] Untuk $\theta \in [0,1]$ berlaku $[X_0, X_1]_\theta \subseteq X_0^{1-\theta} X_1^{\theta}$.

Selanjutnya akan disampaikan definisi fungtor interpolasi kompleks metode kedua.

Definisi 4.4.4 [2] Fungtor $\mathcal{G}(X_0, X_1)$ adalah ruang semua fungsi kontinu $G: \bar{S} \to X_0 + X_1$ yang analitik pada S dan memenuhi:

1) $\|G(z)\|_{X_0+X_1} \leq c(1 + |z|)$ untuk suatu $c > 0$ dan $z \in \bar{S}$.
2) Fungsi $t \mapsto G(j + it)$, dengan $j = 0,1$ merupakan fungsi kontinu Lipschitz dari $\mathbb{R}$ ke X_j dan

$$\max_{j=0,1} \sup_{t_1\neq t_2} \left\| \frac{G(j + it_2) - G(j + it_1)}{t_2 - t_1} \right\|_{X_j} < \infty.$$

Dengan norma pada $\mathcal{G}(X_0, X_1)$ didefinisikan seperti pada poin 2.

Berikut merupakan definisi dari interpolasi kompleks pertama.

Definisi 4.4.5 [2] Misalkan $\theta \in [0,1]$. Definisikan,

$$[X_0, X_1]^\theta = \{g \in X_0 + X_1 : g = G'(\theta), G \in \mathcal{G}(X_0, X_1)\}.$$

Norma pada $[X_0, X_1]^\theta$ didefinisikan dengan

$$\|g\|_{[X_0,X_1]^\theta} = \inf\{\|G\|_{\mathcal{G}}: g = G'(\theta), \text{untuk suatu } G \in \mathcal{G}(X_0, X_1)\}.$$

Adapun kaitan antara interpolasi kompleks kedua dengan hasil kali Calderón dari pasangan (X_0, X_1) adalah sebagai berikut.

Lema 4.4.6 [2] Untuk $\theta \in [0,1]$ maka $X_0^{1-\theta} X_1^{\theta} \subseteq [X_0, X_1]^\theta$.

Adapun deskripsi interpolasi kompleks metode pertama ruang Lebesgue dengan eksponen peubah yang telah dibuktikan oleh Diening dkk pada [3, 4] sebagai berikut.

Teorema 4.4.7 [3, 4] Misalkan $p_i(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ dan $\theta \in [0,1]$ dengan $1 \le p_0(\cdot), p_1(\cdot) \le \infty$. Definisikan $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ dengan $\frac{1}{p(x)} = \frac{1-\theta}{p_0(x)} + \frac{\theta}{p_1(x)}$ untuk setiap $x \in \Omega$, maka $\left[L^{p_0(\cdot)}(\Omega), L^{p_1(\cdot)}(\Omega)\right]_\theta = L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Bukti alternatif untuk membuktikan Teorema 4.4.7 dapat dengan menggunakan Lema 4.4.3 untuk menunjukkan inklusi $\left[L^{p_0(\cdot)}(\Omega), L^{p_1(\cdot)}(\Omega)\right]_\theta \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Selanjutnya untuk membuktikan inklusi sebaliknya, dapat dengan mendefinisikan

$$F(z) = |f(x)|^{\frac{(1-z)p(x)}{p_0(x)} + \frac{zp(x)}{p_1(x)}} \operatorname{sgn}(f(x)). \tag{1}$$

Kemudian dengan menunjukkan bahwa $F \in \mathcal{F}\left(L^{p_0(\cdot)}(\Omega), L^{p_1(\cdot)}(\Omega)\right)$ dengan menggunakan definisi dari fungtor $\mathcal{F}$ akan diperoleh inklusi yang diinginkan. Untuk menunjukkan bahwa $F \in \mathcal{F}\left(L^{p_0(\cdot)}(\Omega), L^{p_1(\cdot)}(\Omega)\right)$ dapat dengan menggunakan kedua Lema berikut.

Lema 4.4.8 Dengan asumsi yang sama seperti pada Teorema 4.4.7. Jika $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ dan definisikan F seperti persamaan (1), maka $\|F_0\|_{L^{p_0(\cdot)}} = 1$ dan $\|F_1\|_{L^{p_1(\cdot)}} = 1$.

Lema ini dapat dibuktikan dengan definisi norma pada masing-masing ruang dan mendefinisikan $F_0 = f\chi_{\left\{x : |f(x)|^{\left(\frac{p(x)}{p_1(x)} - \frac{p(x)}{p_0(x)}\right)} \le 1\right\}}$ dan $F_1 = F - F_0$ dimana $\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = 1$.

Lema 4.4.9 Dengan asumsi yang sama seperti pada Teorema 4.4.7. Jika $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ dan definisikan F seperti persamaan (1), maka fungsi $t \mapsto F(j + it)$, dengan $j = 0,1$ merupakan fungsi kontinu dari $\mathbb{R}$ ke $L^{p_j(\cdot)}(\Omega)$.

Untuk membuktikan Lema 4.4.9 dapat dengan menggunakan fakta, $|F(it)| = |f(x)|^{\frac{p(x)}{p_0(x)}}$ dan $|F(1+it)| = |f(x)|^{\frac{p(x)}{p_1(x)}}$. Karena $f \in L^{p(\cdot)}$ diperoleh bahwa $\rho_{p_0(\cdot)}(F(it)) < \infty$ dan $\rho_{p_1(\cdot)}(F(1+it)) < \infty$.

Melalui Lema 4.4.8 akan diperoleh bahwa $\sup_{z \in \bar{S}} \left\{\|F(z)\|_{L^{p_0(\cdot)} + L^{p_1(\cdot)}}\right\} < \infty$. Hal ini menunjukkan bahwa F kontinu dan terbatas pada $\bar{S}$ dengan norma $\|F(z)\|_{L^{p_0(\cdot)} + L^{p_1(\cdot)}}$. Dari Lema 4.4.9 serta fakta bahwa fungsi pangkat selalu memiliki turunan pertama sehingga F analitik untuk setiap $z \in S$, maka $F \in \mathcal{F}\left(L^{p_0(\cdot)}(\Omega), L^{p_1(\cdot)}(\Omega)\right)$. Dari pendefinisian $\frac{1}{p(x)} = \frac{1-\theta}{p_0(x)} + \frac{\theta}{p_1(x)}$ maka untuk $z = \theta$, $F(\theta) = f(x)$ untuk setiap $x \in \Omega$. Berdasarkan definisi $\left[L^{p_0(\cdot)}(\Omega), L^{p_1(\cdot)}(\Omega)\right]_\theta$ maka $f \in \left[L^{p_0(\cdot)}(\Omega), L^{p_1(\cdot)}(\Omega)\right]_\theta$.

Pada Teorema 4.4.10 akan disampaikan deskripsi interpolasi kompleks metode kedua ruang Lebesgue dengan eksponen peubah.

Teorema 4.4.10 Misalkan $p_i(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ dan $\theta \in [0,1]$ dengan $1 \le p_0(\cdot), p_1(\cdot) \le \infty$. Definisikan $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ dengan $\frac{1}{p(x)} = \frac{1-\theta}{p_0(x)} + \frac{\theta}{p_1(x)}$ untuk setiap $x \in \Omega$, maka $\left[L^{p_0(\cdot)}(\Omega), L^{p_1(\cdot)}(\Omega)\right]^\theta = L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Bukti alternatif untuk membuktikan Teorema 4.4.10 dapat dengan mengguakan Lema 4.4.6 untuk menunjukkan inklusi $L^{p(\cdot)}(\Omega) \subset \left[L^{p_0(\cdot)}(\Omega), L^{p_1(\cdot)}(\Omega)\right]^\theta$ dan untuk membuktikan inklusi sebaliknya, definisikan $G(z) = \int_\theta^z F(w)\, dw$, dengan definisi $F(z)$ seperti persamaan (1). Kemudian dengan menunjukkan $G'(\theta) = F(\theta) \le |g_0|^{1-\theta} |g_1|^\theta$ dengan $g_0 \in L^{p_0(\cdot)}$ dan $g_1 \in L^{p_1(\cdot)}$ akan diperoleh inklusi yang diinginkan.

Selanjutnya akan disampaikan akibat langsung dari Teorema 4.4.7 bahwa interpolasi kompleks metode pertama ruang Lebesgue dengan eksponen peubah merupakan ruang antara sejati dari pasangan ruang $\left(L^{p(\cdot)}, L^{q(\cdot)}\right)$.

Teorema 4.4.11 Misalkan $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ dengan $1 < p(x) < q(x) < \infty$ untuk $x \in \Omega$. Jika $\theta \in (0,1)$ maka

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) \cap L^{q(\cdot)}(\Omega) \subset \left[L^{p(\cdot)}(\Omega), L^{q(\cdot)}(\Omega)\right]_\theta \subset L^{p(\cdot)}(\Omega) + L^{q(\cdot)}(\Omega)$$

dan inklusi di atas adalah inklusi sejati.

Untuk membuktikan Teorema 4.4.11 dapat dengan menggunakan hasil dari interpolasi kompleks metode pertama pada Teorema 4.4.7 dan inklusi pada Teorema 4.2.1. Persisnya, $\left[L^{p(\cdot)}(\Omega), L^{q(\cdot)}(\Omega)\right]_\theta = L^{r(\cdot)}(\Omega)$ dan $L^{q(\cdot)} \subset L^{r(\cdot)} \subset L^{p(\cdot)}$ dengan $r(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ yang didefinisikan oleh $\frac{1}{r(x)} = \frac{1-\theta}{p(x)} + \frac{\theta}{q(x)}$. Lebih lanjut, $L^{p(\cdot)}(\Omega) \cap L^{q(\cdot)}(\Omega) = L^{q(\cdot)}$ dan $L^{p(\cdot)}(\Omega) + L^{q(\cdot)}(\Omega) = L^{p(\cdot)}$. Perhatikan bahwa, hasil interpolasi kompleks metode pertama dan kedua pada ruang Lebesgue dengan eksponen peubah menghasilkan ruang yang sama. Oleh karena itu,

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) \cap L^{q(\cdot)}(\Omega) \subset \left[L^{p(\cdot)}(\Omega), L^{q(\cdot)}(\Omega)\right]^\theta \subset L^{p(\cdot)}(\Omega) + L^{q(\cdot)}(\Omega)$$

juga merupakan inklusi sejati.

5 KESIMPULAN

Deskripsi interpolasi kompleks metode pertama dan kedua ruang Lebesgue dengan eksponen peubah dapat diperoleh melalui deskripsi hasil kali Calderónnya. Dari inklusi sejati antara dua ruang Lebesgue dengan eksponen peubah akan diperoleh bahwa interpolasi kompleks pertama dan kedua merupakan ruang antara sejati dari pasangan ruangnya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didanai oleh Program Riset Peningkatan Kapasitas ITB 2020.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Cruz-Uribe, D. V. dan Fiorenza, A., *Variable Lebesgue spaces: foundations and harmonic analysis*, Springer, Heidelberg (2013).

[2] Calderón, A. P., "Intermediate spaces and interpolation, the complex method", *Studia Mathematica*, **24**(2), hal 113-190 (1964).

[3] Diening, L., Hästö, P., dan Nekvinda, A., "Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces", *FSDONA04 proceedings*, Prague, hal 38-58 (2005).

[4] Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P., dan Ruzicka, M., *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Springer, Heidelberg (2017).

[5] Orlicz, W., "Über konjugierte Exponentenfolgen", *Studia Mathematica*, **3**, hal 200 – 211 (1931).

[6] Hakim, D. dan Sawano, Y., "Complex interpolation of variable Morrey spaces" to appear in *Math. Nachr*.

[7] Kopaliani, T. dan Chelidze, G., "Gagliardo-Nirenberg type inequality for variable exponent Lebesgue spaces", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **356**, hal 232-236 (2009).

ISSN 2829-3770