Konferensi Nasional MATEMATIKA KNM 2021

PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX
Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by IndoMS

Organized by Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

"Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0"

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

e-ISSN: 2829-3770
DOI issue: https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX

Dipublikasikan online pada:
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:

Mei 2022

Editor:

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si., M.Si., Berny P. Tomasouw, S.Si., M.Si.,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si., M. I. Tilukay, S.Si., M.Si., Monalisa E. Rijoly, S.Si., M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si., M.Si, M. B. Mananggel, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si., M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si., M.Si. Vicardy Kempa, S.Si., M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si., M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si., M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si., M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumalun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

KOMBINATORIK

PENDIDIKAN MATEMATIKA

MATEMATIKA TERAPAN

STATISTIKA

https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX.83-90

KNM XX
Universitas Pattimura Ambon, 6-7Juli 2021

INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG MORREY-ADAMS DAN OPERATOR MAKSIMAL FRAKSIONAL

Daniel Salim[1,2,*], **Moch. Taufik Hakiki**[2], **dan Denny Ivanal Hakim**[2]

[1] Departemen Matematika, Universitas Katolik Parahyangan, Indonesia
[2] Kelompok Keahlian Analisis dan Geometri, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Indonesia
[*]e-mail: daniel.salim@unpar.ac.id

Abstrak. *Makalah ini membahas interpolasi kompleks dari ruang Morrey-Adams. Khususnya, kami memberikan deskripsi interpolasi kompleks metode pertama dan metode kedua dari ruang ini. Bukti hasil ini menggunakan karakterisasi hasil kali Calderón dari ruang Morrey Adams. Selain itu, kami juga membahas keterbatasan operator maksimal fraksional dari hasil kali Calderón antara ruang Morrey- Adams dengan ruang Morrey ke ruang Morrey. Hasil pada makalah ini terkait dengan interpolasi ruang Morrey, interpolasi ruang* B_w^u, *dan aplikasi interpolasi kompleks pada keterbatasan operator maksimal fraksional di ruang Morrey.*

Kata kunci: hasil kali Calderón, interpolasi kompleks, ruang Morrey, ruang Morrey-Adams, operator maksimal fraksional

1 LATAR BELAKANG

Interpolasi kompleks ruang Morrey, perumumannya dan ruang fungsi terkait merupakan salah satu topik penelitian tentang interpolasi ruang fungsi yang banyak dikaji pada beberapa tahun terakhir [3, 4, 5, 6, 7, 10, 11]. Secara umum, terdapat perbedaan deskripsi antara metode interpolasi kompleks pertama dan kedua dari ruang Morrey, yakni ruang Morrey tidak tertutup terhadap metode kompleks pertama tetapi ruang Morrey tertutup terhadap metode kompleks kedua. Hal ini juga menunjukkan pentingnya peranan metode interpolasi kompleks kedua yang selama ini hanya dipandang sebagai alat bantu untuk metode interpolasi kompleks pertama.

Pada penelitian ini, kami mengembangkan penelitian interpolasi ruang Morrey ke penelitian ruang Morrey-Adams. Ruang Morrey-Adams merupakan suatu perluasan ruang Morrey yang natural dan pada ruang ini juga dikaji keterbatasan operator integral yang juga diteliti di ruang Morrey seperti operator maksimal Hardy-Littlewood, operator maksimal fraksional, operator integral fraksional dan operator lain. Salah satu cara yang seringkali digunakan untuk mendeskripsikan ruang interpolasi kompleks dari ruang fungsi adalah dengan perhitungan hasil kali Calderón antara dua ruang fungsi yang dikaji. Oleh karena itu, kami memulai kajian interpolasi ruang Morrey-Adams dengan meneliti hasil kali Calderón dari ruang fungsi ini.

2 TUJUAN PENELITIAN

Pada penelitian ini, kami memberikan deskripsi interpolasi kompleks metode pertama dan kedua dari ruang Morrey-Adams melalui karakterisasi hasil kali Calderón ruang ini. Kami juga membuktikan bahwa operator fraksional maksimal terbatas dari hasil kali Calderón ruang Morrey dan ruang Morrey-Adams ke ruang Morrey.

3 PENDAHULUAN

3.1 Ruang Morrey-Adams

Misalkan $1 \leq p < \infty$ dan $0 \leq \lambda \leq n$. Ruang Morrey $L^{p,\lambda} = L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, yang pertama kali diperkenalkan di [8], adalah himpunan semua fungsi $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ yang memenuhi

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy\right)^{1/p} < \infty. \tag{3.1}$$

Ekspresi pada (3.1) menyatakan norma ruang Morrey. Jika $\lambda = 0$, maka $L^{p,\lambda}$ adalah ruang Lebesgue L^p. Perhatikan bahwa, norma ruang Morrey dapat dituliskan sebagai

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|r^{-\lambda/p}\|f\|_{L^p(B(x,r))}\|_{L^\infty(0,\infty)}.$$

Berdasarkan pengamatan ini, ruang Morrey-Adams didefinisikan dengan mengganti peranan $L^\infty(0,\infty)$ dengan $L^\beta(0,\infty)$ untuk setiap $1 \leq \beta \leq \infty$. Persisnya, untuk $0 \leq \lambda < \infty$ dan $1 \leq p, \beta \leq \infty$, ruang Morrey-Adams $L^{p,\lambda}_\beta = L^{p,\lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai himpunan fungsi yang terintegralkan lokal pada $\mathbb{R}^n$ sedemikian hingga

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}_\beta} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|r^{-\lambda/p}\|f\|_{L^p(B(x,r))}\|_{L^\beta(0,\infty)} < \infty.$$

Secara khusus, dapat ditunjukkan bahwa $L^{p,0}_\infty = L^p$ dan $L^{p,\lambda}_\infty = L^{p,\lambda}$ untuk $0 \leq \lambda \leq n$. Salah satu perbedaan antara ruang Morrey dengan ruang Morrey-Adams adalah kondisi untuk parameter λ, yakni syarat $0 \leq \lambda \leq n$ untuk ruang Morrey dan syarat $\frac{p}{\beta} < \lambda < n + \frac{p}{\beta}$ untuk ruang Morrey-Adams.

3.2 Metode interpolasi kompleks dan hasil kali Calderón

Pada subbab ini, kami akan mengulang kembali definisi metode kompleks yang diperkenalkan oleh Calderón di dalam [2] dengan mengikuti notasi di dalam [1]. Misalkan (X_0, X_1) menyatakan pasangan ruang Banach dengan X_0 dan X_1 merupakan subhimpunan dari himpunan fungsi terukur pada $\mathbb{R}^n$, $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re } z < 1\}$, dan $\overline{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Re } z \leq 1\}$. Ruang $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ didefinisikan sebagai ruang semua fungsi kontinu dan terbatas $F : \overline{S} \to X_0 + X_1$ yang analitik di S dan memenuhi $t \in \mathbb{R} \mapsto F(j + it) \in X_j$ kontinu dan terbatas untuk setiap $j = 0, 1$. Untuk $\theta \in (0, 1)$, ruang interpolasi kompleks pertama $[X_0, X_1]_\theta$ didefinisikan dengan

$$[X_0, X_1]_\theta = \{F(\theta) : F \in \mathcal{F}(X_0, X_1)\}.$$

Ruang interpolasi kompleks metode kedua $[X_0, X_1]^\theta$ ($0 \leq \theta \leq 1$) didefinisikan sebagai

$$[X_0, X_1]^\theta = \{G'(\theta) : G \in \mathcal{G}(X_0, X_1)\},$$

dengan $\mathcal{G}(X_0, X_1)$ adalah himpunan semua fungsi kontinu $G : \overline{S} \to X_0 + X_1$ yang analitik di S dan memenuhi $\sup_{z\in\overline{S}} \frac{\|G(z)\|_{X_0+X_1}}{1 + |z|} < \infty$ dan $\sup_{t_1\neq t_2, j=0,1} \frac{\|G(j + it_2) - G(j + it_1)\|_{X_j}}{|t_2 - t_1|} < \infty$. Secara umum, $[X_0, X_1]_\theta \subseteq [X_0, X_1]^\theta$. Inklusi sebaliknya juga berlaku untuk kasus X_0 dan X_1

adalah ruang Lebesgue, namun inklusi ini adalah inklusi sejati ketika X_0 dan X_1 adalah ruang Morrey.

Deskripsi ruang interpolasi kompleks seringkali dapat diperoleh dengan lebih mudah melalui deskripsi hasil kali Calderón antara X_0 dan X_1. Untuk setiap $\theta \in [0,1]$, hasil kali Calderón antara X_0 dan X_1 didefinisikan dengan

$$X_0^{1-\theta}X_1^{\theta} := \{f : |f| \le |f_0|^{1-\theta}|f_1|^{\theta}, f_0 \in X_0, f_1 \in X_1\}.$$

Norma ruang ini didefinisikan dengan

$$\|f\|_{X_0^{1-\theta}X_1^{\theta}} := \inf\{\|f_0\|_{X_0}^{1-\theta}\|f_1\|_{X_1}^{\theta} : |f| \le |f_0|^{1-\theta}|f_1|^{\theta}, f_0 \in X_0, f_1 \in X_1\}.$$

Hubungan antara hasil kali Calderón dengan ruang interpolasi kompleks diberikan pada kedua teorema berikut.

Teorema 3.1. [9] *Untuk setiap* $\theta \in (0,1)$ *berlaku* $[X_0, X_1]_\theta = \overline{X_0 \cap X_1}^{X_0^{1-\theta}X_1^{\theta}}$.

Teorema 3.2. [2, 7] *Misalkan* $\theta \in (0,1)$. *Jika bola satuan dari* $X_0^{1-\theta}X_1^{\theta}$ *tutup di* $X_0 + X_1$, *maka* $[X_0, X_1]^\theta = X_0^{1-\theta}X_1^{\theta}$.

4 HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Hasil kali Calderón dan interpolasi kompleks ruang Morrey-Adams

Hasil awal kami mengenai interpolasi ruang Morrey-Adams adalah inklusi ruang hasil kali Calderón ruang Morrey-Adams ke ruang antara (*intermediate spaces*, lihat [1]).

Proposisi 4.1. *Jika* $1 < p_0, \beta_0, p_1, \beta_1, p, \beta < \infty$, $0 \le \lambda < \infty$, *dan* $0 < \theta < 1$ *memenuhi*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1-\theta}{\beta_0} + \frac{\theta}{\beta_1}, \quad \frac{p_0}{\beta_0} < \lambda < n + \frac{p_0}{\beta_0}, \quad \frac{p_1}{\beta_1} < \lambda < n + \frac{p_1}{\beta_1},$$

maka

$$\left(L^{p_0,\lambda}_{\beta_0}\right)^{1-\theta}\left(L^{p_1,\lambda}_{\beta_1}\right)^{\theta} \subseteq L^{p,\lambda}_{\beta}. \tag{4.1}$$

Bukti. Misalkan $f \in \left(L^{p_0,\lambda}_{\beta_0}\right)^{1-\theta}\left(L^{p_1,\lambda}_{\beta_1}\right)^{\theta}$, maka terdapat $f_0 \in L^{p_0,\lambda}_{\beta_0}$ dan $f_1 \in L^{p_1,\lambda}_{\beta_1}$ sedemikian hingga

$$|f| \le |f_0|^{1-\theta}|f_1|^{\theta} \quad \text{dan} \quad \|f_0\|^{1-\theta}_{L^{p_0,\lambda}_{\beta_0}}\|f_1\|^{\theta}_{L^{p_1,\lambda}_{\beta_1}} \le 2\|f\|_{(L^{p_0,\lambda}_{\beta_0})^{1-\theta}(L^{p_1,\lambda}_{\beta_1})^{\theta}} < \infty.$$

Dengan menerapkan ketaksamaan Hölder, untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$ berlaku

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(x,r)} |f(y)|^p \, \mathrm{d}y\right)^{\beta/p} \mathrm{d}r \\
&\le \int_0^\infty \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(x,r)} |f_0(y)|^{1-\theta}|f_1(y)|^{\theta} \, \mathrm{d}y\right)^{\beta/p} \mathrm{d}r \\
&\le \int_0^\infty \left(\frac{1}{r^\lambda}\left(\int_{B(x,r)} |f_0(y)|^{p_0} \, \mathrm{d}y\right)^{p(1-\theta)/p_0}\left(\int_{B(x,r)} |f_1(y)|^{p_1} \, \mathrm{d}y\right)^{p\theta/p_1}\right)^{\beta/p} \mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(x,r)} |f_0(y)|^{p_0} \, \mathrm{d}y\right)^{\beta(1-\theta)/p_0}\left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(x,r)} |f_1(y)|^{p_1} \, \mathrm{d}y\right)^{\beta\theta/p_1} \mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Dengan ketaksamaan Hölder sekali lagi, diperoleh

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(x,r)} |f_0(y)|^{p_0}\,\mathrm{d}y\right)^{\beta(1-\theta)/p_0} \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(x,r)} |f_1(y)|^{p_1}\,\mathrm{d}y\right)^{\beta\theta/p_1} \mathrm{d}r \\
&\quad\le \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(x,r)} |f_0(y)|^{p_0}\,\mathrm{d}y\right)^{\beta_0/p_0} \mathrm{d}r\right)^{\beta(1-\theta_0)/\beta_0} \\
&\qquad\times \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(x,r)} |f_1(y)|^{p_1}\,\mathrm{d}y\right)^{\beta_1/p_1} \mathrm{d}r\right)^{\beta(\theta_0)/\beta_1} \\
&\quad\le \left(\|f_0\|^{1-\theta}_{L^{p_0,\lambda}_{\beta_0}} \|f_1\|^{\theta}_{L^{p_1,\lambda}_{\beta_1}}\right)^{\beta}.
\end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(x,r)} |f(y)|^{p}\,\mathrm{d}y\right)^{\beta/p} \mathrm{d}r\right)^{1/\beta} &\le \|f_0\|^{1-\theta}_{L^{p_0,\lambda}_{\beta_0}} \|f_1\|^{\theta}_{L^{p_1,\lambda}_{\beta_1}} \\
&\le 2\,\|f\|_{(L^{p_0,\lambda}_{\beta_0})^{1-\theta}(L^{p_1,\lambda}_{\beta_1})^{\theta}} < \infty.
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, $f \in L^{p,\lambda}_{\beta}$. Jadi, terbukti bahwa (4.1) berlaku. □

Dengan asumsi tambahan $\frac{\beta_0}{p_0} = \frac{\beta_1}{p_1}$, diperoleh deskripsi hasil kali Calderón ruang Morrey-Adams sebagai berikut.

Proposisi 4.2. *Jika* $1 < p_0, \beta_0, p_1, \beta_1, p, \beta < \infty$, $0 \le \lambda < \infty$, *dan* $0 < \theta < 1$ *memenuhi*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1-\theta}{\beta_0} + \frac{\theta}{\beta_1}, \quad \frac{\beta_0}{p_0} = \frac{\beta_1}{p_1}, \quad , \frac{p_0}{\beta_0} < \lambda < n + \frac{p_0}{\beta_0}, \quad \frac{p_1}{\beta_1} < \lambda < n + \frac{p_1}{\beta_1},$$

maka

$$\left(L^{p_0,\lambda}_{\beta_0}\right)^{1-\theta} \left(L^{p_1,\lambda}_{\beta_1}\right)^{\theta} = L^{p,\lambda}_{\beta}. \tag{4.2}$$

Bukti. Sekarang, kita tunjukkan inklusi sebaliknya, yaitu

$$L^{p,\lambda}_{\beta} \subseteq \left(L^{p_0,\lambda}_{\beta_0}\right)^{1-\theta} \left(L^{p_1,\lambda}_{\beta_1}\right)^{\theta}.$$

Perhatikan bahwa dari hubungan

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1-\theta}{\beta_0} + \frac{\theta}{\beta_1}, \quad \frac{\beta_0}{p_0} = \frac{\beta_1}{p_1},$$

maka

$$\frac{\beta_0}{p_0} = \frac{\beta_1}{p_1} = \frac{\beta}{p}.$$

Misalkan $f \in L^{p,\lambda}_{\beta}$. Definisikan $f_0 := |f|^{p/p_0}$ dan $f_1 := |f|^{p/p_1}$. Maka

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(x,r)} |f_0(y)|^{p_0}\,\mathrm{d}y\right)^{\beta_0/p_0} \mathrm{d}r &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(x,r)} |f(y)|^{p}\,\mathrm{d}y\right)^{\beta/p} \mathrm{d}r \\
&\le \|f\|^{\beta}_{L^{p,\lambda}_{\beta}} < \infty.
\end{aligned}$$

Jadi, $f_0 \in L^{p_0,\lambda}_{\beta_0}$ dan $\|f_0\|_{L^{p_0,\lambda}_{\beta_0}} = \|f\|^{\beta/\beta_0}_{L^{p,\lambda}_{\beta}}$. Dengan cara yang sama, $f_1 \in L^{p_1,\lambda}_{\beta_1}$ dan $\|f_1\|_{L^{p_1,\lambda}_{\beta_1}} = \|f\|^{\beta/\beta_1}_{L^{p,\lambda}_{\beta}}$. Dengan hasil ini, maka

$$\begin{aligned}\|f_0\|^{1-\theta}_{L^{p_0,\lambda}_{\beta_0}} \|f\|^{\theta}_{L^{p_1,\lambda}_{\beta_1}} &= \|f\|^{\beta(1-\theta)/\beta_0+\beta\theta/\beta_1}_{L^{p,\lambda}_{\beta}} \\ &= \|f\|_{L^{p,\lambda}_{\beta}} < \infty.\end{aligned}$$

Karena $\|f\|_{(L^{p_0,\lambda}_{\beta_0})^{1-\theta}(L^{p_1,\lambda}_{\beta_1})^{\theta}} \le \|f_0\|^{1-\theta}_{L^{p_0,\lambda}_{\beta_0}} \|f\|^{\theta}_{L^{p_1,\lambda}_{\beta_1}}$, maka $f \in \left(L^{p_0,\lambda}_{\beta_0}\right)^{1-\theta} \left(L^{p_1,\lambda}_{\beta_1}\right)^{\theta}$. $\square$

Berdasarkan Proposisi 4.2 dan Teorema 3.1 dan 3.2 diperoleh deskripsi interpolasi kompleks berikut.

Teorema 4.3. *Misalkan* $\theta \in (0,1)$. *Jika* $1 < p_0, \beta_0, p_1, \beta_1, p, \beta < \infty$ *memenuhi*

$$\frac{\beta_0}{p_0} = \frac{\beta_1}{p_1}, \quad , \frac{p_0}{\beta_0} < \lambda < n + \frac{p_0}{\beta_0}, \quad \frac{p_1}{\beta_1} < \lambda < n + \frac{p_1}{\beta_1},$$

dan definisikan

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1-\theta}{\beta_0} + \frac{\theta}{\beta_1},$$

maka

$$[L^{p_0,\lambda}_{\beta_0}, L^{p_1,\lambda}_{\beta_1}]_{\theta} = \overline{L^{p_0,\lambda}_{\beta_0} \cap L^{p_1,\lambda}_{\beta_1}}^{L^{p,\lambda}_{\beta}}. \tag{4.3}$$

dan

$$[L^{p_0,\lambda}_{\beta_0}, L^{p_1,\lambda}_{\beta_1}]^{\theta} = L^{p,\lambda}_{\beta}. \tag{4.4}$$

Bukti. Identitas (4.3) adalah akibat dari Teorema 3.1 dan Proposisi 4.2. Identitas 4.4 diperoleh dari Teorema 3.2 dan Proposisi 4.2 serta fakta bahwa bola satuan di $L^{p,\lambda}_{\beta}$ tutup di $L^{p_0,\lambda}_{\beta_0} + L^{p_1,\lambda}_{\beta_1}$. $\square$

Untuk pembahasan keterbatasan operator maksimal fraksional pada bagian berikutnya, kami juga membuktikan inklusi hasil kali Calderón antara ruang Morrey-Adams dan ruang Morrey ke ruang Morrey-Adams yang lain.

Proposisi 4.4. *Misal* $p_0, p_1, \beta \in [1,\infty)$ $\theta \in [0,1]$ *dan*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Untuk $\lambda \in [\frac{\max\{p_0,p\}}{\beta}, n)$, *berlaku* $\left(L^{p_0,\lambda}_{\beta(1-\theta)}\right)^{1-\theta} \left(L^{p_1,\lambda}\right)^{\theta} \subset L^{p,\lambda}_{\beta}$

Bukti. Misalkan $f \in \left(L^{p_0,\lambda}_{\beta(1-\theta)}\right)^{1-\theta} \left(L^{p_1,\lambda}\right)^{\theta}$, maka terdapat $f_0 \in L^{p_0,\lambda}_{\beta}$ dan $f_1 \in L^{p_1,\lambda}$ dengan $|f(x)| \le |f_0(x)|^{1-\theta}|f_1(x)|^{\theta}$. Berdasarkan ketaksamaan Hölder diperoleh

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} r^{-\frac{\lambda\beta}{p}} \|f\|^{\beta}_{L_p(B(x,r))} \mathrm{d}r &\le \int_0^{\infty} r^{-\frac{\lambda\beta(1-\theta)}{p_0} - \frac{\lambda\beta\theta}{p_1}} \|f_0\|^{\beta(1-\theta)}_{L_{p_0}(B(x,r))} \|f_1\|^{\beta(\theta)}_{L_{p_1}(B(x,r))} \mathrm{d}r \\ &\le \|f_0\|^{\beta(1-\theta)}_{L^{p_0,\lambda}_{\beta(1-\theta)}} \|f_1\|^{\beta\theta}_{L^{p_1,\lambda}}.\end{aligned}$$

Oleh karena itu, $f \in L^{p,\lambda}_{\beta}$. $\square$

4.2 Keterbatasan operator maksimal fraksional

Pada bagian ini, kami akan membuktikan keterbatasan operator maksimal fraksional dari hasil kali Calderón antara ruang Morrey dan ruang Morrey-Adams ke ruang Morrey. Misalkan $0 < \alpha < n$ dan $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Operator maksimal fraksional didefinisikan dengan

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} r^{\alpha-n} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy.$$

Jika $\alpha = 0$, maka $M_0 f = Mf$ adalah fungsi maksimal Hardy-Littlewood. Hasil keterbatasan operator ini diberikan pada kedua teorema berikut.

Teorema 4.5. *Misalkan* $\tilde{\lambda} \in (0, n)$*,* $\alpha \in (0, n - \tilde{\lambda})$*,* $\theta = \frac{\alpha}{n-\tilde{\lambda}}$*,* $p \in (1, \infty)$*,* $q = \frac{p}{1-\theta}$*,* $\gamma \in [\frac{q}{p}, \infty)$ $\beta = \frac{p\gamma}{q}$*,* $\mu \in (\frac{p}{\beta}, n + \frac{p}{\beta})$*, maka* $M_\alpha \left(\left(L^{p,\mu}_\beta\right)^{1-\theta} \left(L^{1,\tilde{\lambda}}\right)^\theta \right) \subseteq L^{q,\mu}_\gamma$*.*

Bukti. Misalkan $f \in \left(L^{p,\mu}_\beta\right)^{1-\theta} \left(L^{1,\tilde{\lambda}}\right)^\theta$, maka terdapat $f_0 \in L^{p,\mu}_\beta$ dan $f_1 \in L^{1,\tilde{\lambda}}$ sedemikian hingga $|f| \le |f_0|^{1-\theta} |f_1|^\theta$. Misalkan $x \in \mathbb{R}^n$. Berdasarkan ketaksamaan Hölder dengan eksponen $\frac{\alpha}{n-\tilde{\lambda}}$, diperoleh

$$r^{\alpha-n} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy \lesssim (Mf_0(x))^{1-\theta} \|f_1\|^\theta_{L^{1,\tilde{\lambda}}}.$$

Notasi $A \lesssim B$ menyatakan ketaksamaan $A \le CB$ untuk suatu konstanta $C > 0$ yang tidak bergantung dari A dan B. Akibatnya,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty r^{-\frac{\mu\gamma}{q}} \|M_\alpha f\|^\gamma_{L_q(B(x,r))} \mathrm{d}r &\lesssim \|f_1\|^{\theta\gamma}_{L^{1,\tilde{\lambda}}} \int_0^\infty r^{-\frac{\mu\beta}{p}} \|Mf_0^{1-\theta}\|^\gamma_{L_q(B(x,r))} \mathrm{d}r \\
&= \|f_1\|^{\theta\gamma}_{L^{1,\tilde{\lambda}}} \int_0^\infty r^{-\frac{\mu\beta}{p}} \|Mf_0\|^\beta_{L_p(B(x,r))} \mathrm{d}r \\
&\le \|f_0\|^{(1-\theta)\gamma}_{L^{p,\mu}_\beta} \|f_1\|^{\theta\gamma}_{L^{1,\tilde{\lambda}}}.
\end{aligned}$$

Karena ketaksamaan di atas berlaku untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$, maka $M_\alpha f \in L^{q,\mu}_\gamma$. $\square$

Teorema 4.6. *Misalkan* $\tilde{\lambda} \in (0, n)$*,* $\alpha \in (0, n - \tilde{\lambda})$*,* $\theta = \frac{\alpha}{n-\tilde{\lambda}}$*,* $p \in (1, \infty)$*,* $q = \frac{1}{1-\theta}$*,* $\gamma \in [q, \infty)$ $\beta = \frac{\gamma}{q}$*,* $\lambda \in (\frac{p}{\beta}, n + \frac{p}{\beta})$*,* $\mu = n - \frac{n-\lambda}{p}$ *sedemikian hingga* $\mu \in (\frac{q}{\gamma}, n + \frac{q}{\gamma})$*, maka* $M_\alpha \left(\left(L^{p,\lambda}_\beta\right)^{1-\theta} \left(L^{1,\tilde{\lambda}}\right)^\theta \right) \subseteq L^{q,\mu}_\gamma$*.*

Bukti. Misalkan $x \in \mathbb{R}^n$. Misalkan $|f| \le |f_0|^{1-\theta} |f_1|^\theta$ dengan $f_0 \in L^{p,\lambda}_\beta$ dan $f_1 \in L^{1,\tilde{\lambda}}$. Berdasarkan ketaksamaan Hölder dengan eksponen $\frac{\alpha}{n-\tilde{\lambda}}$, diperoleh

$$r^{\alpha-n} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy \lesssim (Mf_0(x))^{1-\theta} \|f_1\|^\theta_{L^{1,\tilde{\lambda}}}.$$

Ketaksamaan terakhir, ketaksamaan Hölder dan keterbatasan operator maksimal Hardy-Littlewood mengakibatkan

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^{-\frac{\mu\gamma}{q}}\|M_\alpha f\|_{L_q(B(x,r))}^\gamma \mathrm{d}r &\lesssim \|f_1\|_{L^{1,\tilde\lambda}}^{\theta\gamma}\int_0^\infty r^{-\frac{\mu\gamma}{q}}\|Mf_0\|_{L_1(B(x,r))}^{\frac{\gamma}{q}}\mathrm{d}r\\ &\lesssim \|f_1\|_{L^{1,\tilde\lambda}}^{\theta\gamma}\int_0^\infty r^{\frac{(n-\mu)\gamma}{q}-\frac{n\gamma}{pq}}\|Mf_0\|_{L_p(B(x,r))}^{\beta}\mathrm{d}r\\ &= \|f_1\|_{L^{1,\tilde\lambda}}^{\theta\gamma}\int_0^\infty r^{-\frac{\lambda\beta}{p}}\|Mf_0\|_{L_p(B(x,r))}^{\beta}\mathrm{d}r\\ &\le \|f_0\|_{L_\beta^{p,\lambda}}^{(1-\theta)\gamma}\|f_1\|_{L^{1,\tilde\lambda}}^{\theta\gamma}.\end{aligned}$$

Dengan mengambil supremum atas $x \in \mathbb{R}^n$, diperoleh $M_\alpha f \in L_\gamma^{q,\mu}$. □

Berdasarkan Teorema 4.6, jika $\tilde\lambda = \lambda$, $\delta = \frac{\beta}{(1-\theta)}$, maka $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \theta$, sehingga

$$\frac{n-\mu}{q} + \frac{1}{\gamma} = \frac{n-\lambda}{r} + \frac{1}{\delta} - \alpha.$$

Kondisi ini merupakan kondisi keterbatasan operator M_α dari $L_\delta^{r,\lambda}$ ke $L_\gamma^{q,\mu}$ dan berdasarkan Proposisi 4.4 berlaku $\left(L_\beta^{p,\lambda}\right)^{1-\theta}\left(L^{1,\lambda}\right)^\theta \subseteq L_\delta^{r,\lambda}$.

5 KESIMPULAN DAN RENCANA PENELITIAN

Ruang interpolasi kompleks metode pertama dari ruang Morrey-Adams dibuktikan sama dengan tutupan dari irisan dua ruang Morrey-Adams relatif terhadap ruang antara yang berupa Morrey-Adams. Ruang Morrey-Adams juga dibuktikan tertutup terhadap interpolasi kompleks metode kedua. Selain kedua hasil ini, keterbatasan operator maksimal fraksional dengan daerah asal berupa hasil kali Calderón antara ruang Morrey dan ruang Morrey-Adams juga berhasil dibuktikan. Salah satu rencana penelitian selanjutnya yang terkait dengan topik ini adalah penggunaan interpolasi kompleks ruang Morrey-Adams dalam keterbatasan operator integral fraksional dan perumumannya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didanai oleh program PPMI FMIPA ITB 2021.

DAFTAR PUSTAKA

[1] J. Bergh and J. Löfström, Interpolation spaces. An introduction, Grundlehren Math. Wiss. **223**, Springer, New York (1976).

[2] A.P. Calderón, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math. **24**, no.2, 113–190 (1964).

[3] D.I. Hakim and Y. Sawano, Interpolation of generalized Morrey spaces, Rev. Mat. Complut. **29**, 295–340 (2016).

[4] D.I. Hakim and Y. Sawano, Calderón's first and second complex interpolations of closed subspaces of Morrey spaces, J. Fourier Anal. Appl. **23**, no. 5, 1195–1226 (2017).

[5] P. G. Lemarié-Rieusset, Erratum to: Multipliers and Morrey spaces, Potential Anal. **41**, no.4, 1359–1362 (2014).

[6] Y. Lu, D. Yang, and W. Yuan, Interpolation of Morrey spaces on metric measure spaces, Canad. Math. Bull. **57**, 598–608 (2014).

[7] M. Mastylo and Y. Sawano, Complex interpolation and Calderón-Mityagin couples of Morrey spaces, Anal. PDE. **12**, 1711–1740 (2019).

[8] C.B. Morrey, On the solutions of quasi linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 126–166 (1938).

[9] V.A. Sestakov, On complex interpolation of Banach space of measurable functions, Vestnik Leningrad, **19** (4), 64–68 (1974).

[10] W. Yuan, Complex interpolation for predual spaces of Morrey-type spaces, Taiwan. J. Math. **18**(5), 1527–1548 (2014).

[11] W. Yuan, W. Sickel and D. Yang, Interpolation of Morrey–Campanato and related smoothness spaces, Sci. China Math. **58** (9), 1835–1908 (2015).

ISSN 2829-3770
9 772829 377007