

# Konferensi Nasional MATEMATIKA 20 21



## PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX  
Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :  
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology  
e-ISSN : 2829-3770

Powered by  
IndoMS



Organized by  
Universitas Pattimura

# PROSIDING

## KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

“Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0”

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

@Hak Cipta dilindungi Undang-undang

e-ISSN: 2829-3770

DOI issue: <https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX>

Dipublikasikan online pada:

Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:



Mei 2022

## **Editor:**

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si, M.Si, Berny P. Tomasouw, S.Si, M.Si,  
Taufan Talib, S.Pd., M.Si, M. I. Tilukay, S.Si, M.Si, Monalisa E. Rijoly, S.Si, M.Sc.  
Z.A. Leleury, S.Si, M.Si, M. B. Mananggal, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si, M.Sc.,  
Y. A. Lesnussa, S.Si, M.Si. Vicardy Kempa, S.Si, M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si, M.Si.  
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si, M.Si.

## **Design cover:**

L. J. Sinay, S.Si, M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

## **Tim *Reviewer***

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumulun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

## DAFTAR ISI

Halaman Judul	i
Tim Reviewer	ii
Kata Pengantar	iii
Susunan Panitia KNM XX	iv
Daftar Isi	vii

### ALJABAR

<b>KLASIFIKASI TITIK KRITIS POLINOMIAL DUA VARIABEL BERDERAJAT TIGA</b> Afif Humam	1 – 8
<b>KAJIAN KEKUATAN <math>\mathbb{Z}</math> - MODUL <math>\mathbb{Q}</math> SEBAGAI INSPIRASI MUNCULNYA KONSEP DAN SIFAT DALAM TEORI MODUL</b> Sri Wahyuni, Yunita Septriana Anwar, I Putu Yudi Prabhadika	9 – 14
<b>GRAF PEMBAGI NOL DARI RING KOMUTATIF</b> Maria Vianney Any Herawati	15 – 20
<b>IDEAL TAK TEREDUKSI KUAT ATAS SEMIRING KOMUTATIF</b> Fitriana Hasnani, Nikken Prima Puspita	21 – 26
<b>BATAS ATAS PADA NORM – TAK HINGGA DARI INVERS MATRIKS NEKRASOV</b> Eddy Djauhari	27 – 32
<b>KOREPRESENTASI KOALJABAR <math>F[G]</math></b> Na'imah Hijriati, Indah Emilia Wijayanti	33 – 40
<b>HUBUNGAN SIFAT BERSIH PADA RING, MODUL, KOMODUL DAN KOALJABAR</b> Nikken Prima Puspita, Indah Emilia Wijayanti, Budi Surodjo	41 – 50
<b>KONTRAKSI PERTINGKATAN PADA PERTINGKATAN PAULI <math>\mathfrak{S}\mathfrak{L}(N, \mathbb{C})</math></b> Reynald Saputra, Gantina Rachmaputri	51 – 60

### ANALISIS

<b>BUKTI ALTERNATIF INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG LEBESGUE DENGAN EKSPONEN PEUBAH</b> Dina Nur Amalina dan Denny Ivanal Hakim	61 – 66
<b>SEGITIGA TITIK CIRCUMCENTER PADA MODIFIKASI TEOREMA NAPOLEON</b> Yunisa Fadhilah Hartati, Mashadi	67 – 76
<b>FUNGSI SIMETRI TERHADAP TITIK <math>(a, b)</math> DAN BEBERAPA SIFATNYA</b> Firdaus Ubaidillah	77 – 82
<b>INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG MORREY-ADAMS DAN OPERATOR MAKSIMAL FRAKSIONAL</b> Daniel Salim, Moch. Taufik Hakiki, Denny Ivanal Hakim	83 – 90
<b>PENDEKATAN KALKULUS HIDA UNTUK PROSES HERMITE</b> Herry Pribawanto Suryawan	91 – 98
<b>KETAKSAMAAN HARDY DI RUANG HERZ HOMOGEN</b> Pebrudal Zanu, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi1	99 – 106
<b>OPERATOR KANTOROVICH PADA RUANG MORREY DIPERUMUM</b> Mu'afa Purwa Arsana, Denny Ivanal Hakim	107 – 114
<b>PERLUASAN DEFINISI RATA-RATA VIA TEOREMA NILAI RATA-RATA</b> Mochammad Idris	115 – 124
<b>SISTEM EIGEN OPERATOR LAPLACE BERBASIS RUAS PADA SUATU POHON KUANTUM</b> Moh. Januar I. Burhan, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi	125 – 134

<b>SUKU BANYAK BERNSTEIN DAN OPERATOR KANTOROVICH UNTUK BEBERAPA FUNGSI YANG TIDAK KONTINU</b> Reinhart Gunadi, Denny I. Hakim	135 – 142
<b>KETERBATASAN OPERATOR TIPE VOLTERRA PADA RUANG MORREY ANALITIK <math>L_{p,\lambda}</math></b> Moch Taufik Hakiki, Wono Setya Budhi, dan Denny Ivanal Hakim	585 - 590
<b>KOMBINATORIK</b>	
<b>PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF SIPUT DAN GRAF UBUR-UBUR</b> Kevin Akbar, Kiki Ariyanti Sugeng	143 – 148
<b>DIMENSI METRIK LOKAL PADA GRAF FLOWER DAN GRAF GEAR KORONA GRAF LINTASAN</b> Salma Fauziyah Ashim, Tri Atmojo Kusmayadi, Titin Sri Martini	149 – 154
<b>PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF LILIN</b> Rizqi Rachmadhani, Kiki Ariyanti Sugeng	155 – 160
<b>PELABELAN HARMONIS PADA GRAF SEGITIGA BELAH KETUPAT VARIASI <math>LM_n</math></b> Evi Maharani, Kurniawan Atmadja	161 – 164
<b>PEWARNAAN SIMPUL <math>r</math> – DINAMIS PADA GRAF TERATAI <math>T_n</math></b> Audi Fierera, Kiki A. Sugeng	165 – 170
<b>SIFAT-SIFAT GRAF CAYLEY GRUP <math>S_n</math></b> Afifan Hadi, Kiki Ariyanti Sugeng	171-176
<b>PENDIDIKAN MATEMATIKA</b>	
<b>LKPD BERBASIS PENEMUAN TERBIMBING BERBANTUAN ALAT PERAGA PADA MATERI LUAS PERMUKAAN DAN VOLUME PRISMA DAN LIMAS</b> Fithroh Nafa Dzillah, Latifah Mustofa Lestyanto	177 – 182
<b>PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA DARING BERBASIS MODEL PENEMUAN TERBIMBING MENGGUNAKAN LIVEWORKSHEETS PADA MATERI PRISMA DAN LIMAS</b> Sania Sururul Khususna, Latifah Mustofa Lestyanto, Eddy Budiono	183 – 188
<b>PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA BERBASIS MASALAH BERBANTUAN GOOGLE FORM UNTUK PEMAHAMAN KONSEP SISWA KELAS VII SMP PADA MATERI SEGITIGA DAN SEGIEMPAT</b> Herlin Oktavita, Latifah Mustofa Lestyanto2	189 – 194
<b>EKSPLORASI ETNOMATEMATIKA PADA GELANG MANIK-MANIK KHAS DAYAK KALIMANTAN SEBAGAI SUMBER PENYUSUNAN LKPD</b> Silvia	195 – 206
<b>ANALISIS KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIS SISWA DENGAN PEMBELAJARAN MODEL BRAIN BASED LEARNING BERBASIS LEARNING MANANGEMENT SYSTEM</b> N. R. Mumtaz, M. Asikin	207 – 214
<b>PENGEMBANGAN ASESMEN ALTERNATIF DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA KONTEKS LINGKUNGAN LAHAN BASAH UNTUK SISWA TINGKAT SMP/MTS</b> Muhammad Rizal, Noor Fajriah, Agni Danaryanti	215 – 222
<b>MATERI PENGAYAAN TEORI BILANGAN DASAR DI SEKOLAH DASAR</b> Awanga Dijayangrana, Hilda Assiyatun	223-228
<b>KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS TULIS MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH VOLUME BENDA PUTAR MELALUI MODEL PERKULIAHAN KOLABORATIF</b> Fadhila Kartika Sari, Anies Fuady	229 – 236
<b>PERAN PENULISAN JURNAL DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA SECARA DARING DI MASA PANDEMI COVID-19</b>	237 – 244

Gusti Firda Khairunnisa, Frida Siswiyanti	
<b>ANALISIS KRUSKAL WALLIS UNTUK MENGETAHUI TINGKAT KOSENTRASI BELAJAR MAHASISWA BERDASARKAN PROGRAM STUDI</b>	245 – 250
Venessa Y. A. Brabar, Grace A. V. Hikoyabi, Agustinus Langowuyo	
<b>ANALISIS PENGARUH PEMANFAATAN INTERNET TERHADAP MINAT BELAJAR MAHASISWA PRODI STATISTIKA</b>	251 – 258
Mariana Tanawani, Meilani Yarangga, dan Agustinus Langowuy	
<b>PENGARUH PROSES BELAJAR MENGAJAR LURING DAN DARING TERHADAP HASIL BELAJAR MAHASISWA JURUSAN MATEMATIKA ANGAKATAN 2018 FMIPA UNIVERSITAS CENDERAWASIH</b>	259 – 264
Dewi Rahmawati, Tiara A. Nadapdap, Agustinus Langowuyo	
<b>PENILAIAN ESAI MENGGUNAKAN MODEL PEMBELAJARAN MESIN</b>	265 – 270
Farah Qotrunnada, Marcus Wono Setya Budhi, Hilda Assiyatun	
<b>PENGEMBANGAN PERANGKAT PEMBELAJARAN BERBASIS ETNOMATEMATIKA BUDAYA MASYARAKAT NEGERI TULEHU PADA MATERI SEGIEMPAT DAN SEGITIGA UNTUK SISWA DI KELAS VII MTS NEGERI I MALUKU TENGAH.</b>	271 – 276
Heni Rahim, W. Mataheru, J. Takaria	
<b>PENERAPAN FUZZY LINEAR PROGRAMMING UNTUK OPTIMASI PRODUKSI TAHU (STUDI KASUS DI DESA TANJUNGREJO KABUPATEN JEMBER)</b>	277 – 284
Anisa Wahyu Illahi, Agustina Pradjaningsih, Abduh Riski	
<b>PENENTUAN SOLUSI FISIBEL AWAL MASALAH TRANSPORTASI DENGAN MINIMUM DEMAND METHOD</b>	285 – 292
Ulniyatul Ula, Siti Khabibah, Robertus Heri S.U	
<b>OPTIMALISASI RUTE DAN PENJADWALAN PENGANGKUTAN SAMPAH DENGAN METODE INSERTION HEURISTIC DAN INTRA- ROUTE IMPROVEMENT (STUDI KASUS: UNIVERSITAS BRAWIJAYA MALANG)</b>	293 – 298
Fara El Nandhita Pratiwi	
<b>MODEL MATEMATIS RUTE WISATA DI RIAU DENGAN MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN GOL</b>	299 – 312
Ihda Hasbiyati, Hasriati, T. P. Nababan	
<b>MATEMATIKA TERAPAN</b>	
<b>MODEL SUSCEPTIBLE INFECTED RECOVERED (SIR) PADA DEMAM BERDARAH DENGUE (DBD)</b>	313 – 320
Oscar Andhry Barata, Rahmat, Rengga Nanda Pramudya	
<b>ANALISA PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE FRAKSIONAL NUMERIK MENGGUNAKAN METODE EULER DAN APLIKASINYA</b>	321 – 326
Leli Deswita, Syamsudhuha, Asral. M	
<b>TERAPAN FUNGSI SIGMOID UNTUK MENENTUKAN NILAI MAKSIMAL KOEFISIEN GAYA ANGKAT DAN SUDUT STALL PADA KURVA LINEAR <math>C_L</math> TERHADAP <math>\alpha</math></b>	327 – 334
Angga Septiyana, Singgih Satrio W, Fuad Surastyo P, Try Kusuma Wardana, Ardian Rizaldi, Novita Atmasari, Eries Bagita Jayanti, Prasetyo Ardi P	
<b>IMPLEMENTASI DEEP LEARNING UNTUK KLASIFIKASI GAMBAR MENGGUNAKAN CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORK (CNN) PADA BATIK SASAMBO</b>	335 – 340
Muna Malika, Edy Widodo	
<b>STATISTIKA</b>	
<b>PENERAPAN MODEL SPACE TIME AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (STARI(1,1,1)) PADA DATA NTP TANAMAN PANGAN DARI TIGA PROVINSI DI PULAU JAWA</b>	341 -350
Fajriatus Sholihah, Kartika Sari, Budi Nurani Ruchjana, Toni Toharudin	
<b>ANALISIS KORESPONDENSI BERGANDA UNTUK MENGETAHUI INDIKATOR-INDIKATOR YANG MEMPENGARUHI KEJADIAN LOW BACK PAIN PADA KUSIR</b>	351 - 358

<b>KUDA/DELMAN DI KOTA CIMAH I TAHUN 2019</b>	
Dhita Diana Dewi, Fajriatus Sholihah, Rosa Rosmanah, Lucy Fitria Dewi, Mochamad Yudhi Afrizal, Irlandia Ginanjar	
<b>PROSES POISSON NON HOMOGEN DAN PENERAPANNYA PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT</b>	359 – 362
Viona Prisyella Balqis, Muhammad Herlambang Prakasa Yudha, Budi Nurani Ruchjana	
<b>PENERAPAN DISTRIBUSI STASIONER RANTAI MARKOV PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT</b>	363 – 370
Tubagus Robbi Megantara, Ayun Sri Rahmani, Budi Nurani Ruchjana	
<b>SPATIAL CLUSTER ING DENGAN METODE SKATER (K'LUSTER ANALYSIS BY TREE EDGE REMOVAL) UNTUK PENGELOMPOKAN SEBARAN COVID-19 DI KABUPATEN TULUNGAGUNG</b>	371 – 380
Danang Ariyanto, Henny Pramodyo, Novi Nur Aini	
<b>ANALISIS KLASTER KABUPATEN/KOTA INDONESIA BERDASARKAN INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DENGAN MODEL MIXTURE SKEW-T</b>	381 – 388
Kristoforus Exelsis Pratama, Irwan Susanto, Yuliana Susanti	
<b>ANALISIS INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DI KABUPATEN BURU SELATAN DENGAN MENGGUNAKAN REGRESI LINIER BERGANDA</b>	389 – 396
Muhidin Jariyah, Inayah. P. F. Solong, Juan C. S. Jamco	
<b>TINJAUAN KEPUTUSAN HIPOTESA FUZZY BERBASIS P-VALUE FUZZY (STUDI KASUS DATA COVID-19 DI NUSA TENGGARA BARAT)</b>	397 – 404
Wahidaturrahmi	
<b>PENERAPAN METODE AUTO SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS PADA PERAMALAN DATA INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DI INDONESIA</b>	405 – 410
Andreas Reza Chrisantama*, Winita Sulandari, Sugiyanto	
<b>PERAMALAN JUMLAH PRODUKSI PERIKANAN DI KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE PEMULUSAN EKSPONENSIAL</b>	411 – 418
Asrul Irfanullah, Claudia Sumanik, Romy Makatita	
<b>ANALISIS PENGARUH STRUKTUR KONSUMSI AKHIR RUMAH TANGGA BERDASARKAN KOMPONEN PENGELUARAN KABUPATEN BURU SELATAN PERIODE 2015 – 2019 DENGAN RAKL</b>	419 – 424
Nikita A. Putiray, Dea M. Tuhumury, Angel M.P. Manuputty	
<b>EKSPLORASI SISA USIA BEARING MENGGUNAKAN DISTRIBUSI WEIBULL</b>	425 – 430
Sutawanir Darwis, Nusar Hajarisman, Suliadi, Achmad Widodo	
<b>PENERAPAN MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED MOVING AVERAGE (VARIMA) UNTUK PRAKIRAAN INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DAN KURS RUPIAH TERHADAP USD</b>	431 – 442
Ani Pertiwi, Lucy Fitria Dewi, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana	
<b>PENGELOMPOKKAN JUMLAH PENDUDUK KABUPATEN BURU SELATAN BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA TAHUN 2018 DENGAN ALGORITMA K- MEANS</b>	443 – 450
Samir Radjid, Nadia Istifarin, Meylani Tuasella	
<b>PENERAPAN METODE ARIMAX PADA PERAMALAN PRODUKSI DAGING SAPI DI SUKOHARJO</b>	451 – 458
Fitrian Nur Ardyansyah, Winita Sulandari, Sugiyanto	
<b>ANALISIS KEPUASAN DAN POSITIONING SELLER E-MARKETPLACE DENGAN MENGGUNAKAN IMPORTANCE PERFORMANCE ANALYSIS DAN BILOT</b>	459 – 464
Farah Dibah, Dwi Endah Kusri	
<b>KLASTERISASI LOKASI PASAR KABUPATEN BANYUMAS GUNA MEMPERMUDAH UPTD DALAM MENGELOLA KELAS PASAR</b>	465 – 470
Pradini Nurul Safitri, Abdullah Ahmad Dzikrullah	

<b>PENGARUH MOTIVASI INTRINSIK DAN KEPUASAN KERJA TERHADAP ORGANIZATIONAL CITIZENSHIP BEHAVIOR</b>	471 – 476
Diya Kasih Puspitasari, Dwi Endah Kusrini	
<b>KLASTERING JUMLAH PENDUDUK BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA KECAMATAN LEKSULA TAHUN 2018 DENGAN MENGGUNAKAN METODE ALGORITMA K-MEANS</b>	477 – 484
Morensi T. Risakotta, Rensya Siwalette, Rola E. Leasa	
<b>PERAMALAN DENGAN METODE SIMPLE MOVING AVERAGE DAN DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING BROWN (STUDI KASUS: JUMLAH CURAH HUJAN DAN JUMLAH HARI HUJAN KABUPATEN BURU SELATAN)</b>	485 – 494
Apriano R. Narahawarin, Ravensky Silangen, Rahania Patiekon	
<b>PERAMALAN GARIS KEMISKINAN KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING DARI HOLT</b>	495 – 502
Ade Irma La Murdani, Intan Gainau, Unique Resiloy	
<b>ANALISIS PERBEDAAN PENDAPATAN TOKO WALET MAS SEBELUM DAN SESUDAH PANDEMI COVID-19 DENGAN METODE MANN-WHITNEY</b>	503 – 508
Marselina Ema Koten, Yunida Kurniasih, Agustinus Langowuyo	
<b>ANALISIS PENGARUH BELANJA DAERAH, JUMLAH PENDUDUK, DAN PDRB TERHADAP PENDAPATAN DAERAH DI KABUPATEN BURU SELATAN TAHUN 2013-2020</b>	509 – 516
Dephie Latumahina, Martje Riry, Olfen Sabono	
<b>UJI KECOCOKAN DISTRIBUSI RAYLEIGH BIVARIAT MENGGUNAKAN UJI KOLMOGOROV-SMIRNOV BIVARIAT PADA DATA HASIL PERTANDINGAN PERSIB BANDUNG</b>	517 – 522
Wulan Jati Nuraya, Aceng Komarudin Mutaqin	
<b>MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) UNTUK PERAMALAN BANYAKNYA KASUS TERKONFIRMASI DAN KASUS SEMBUH COVID-19 DI INDONESIA</b>	523 – 532
Sri Indra Maiyanti, Mahrudinda, Al Fataa W. Haq, Budi Nurani Ruchjana	
<b>MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) DAN PENERAPANNYA PADA DATA PERKEMBANGAN HARGA ECERAN BERAS DI TIGA IBU KOTA PROVINSI WILAYAH PULAU JAWA</b>	533 – 544
Zulfa Hidayah Satria Putri, Asri Yuniar, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana	
<b>PENERAPAN METODE REGRESI LINEAR BERGANDA UNTUK MELIHAT PENGARUH JUMLAH PENDUDUK DAN LUAS WILAYAH TERHADAP JUMLAH PENGGUNA LISTRIK DI KECAMATAN AMBALAU KABUPATEN BURU SELATAN</b>	545 – 552
Fadly Ode, Nur Statib J, Elsy Malwewar	
<b>ANALISIS TINGKAT KEGEMARAN AYAM GEPUK PAK GEMBUS DARI BERBAGAI JENIS PAKET MELALUI PENDEKATAN UJI STATISTIK</b>	553 – 558
Maharani Tiara Pramuditya, Evan Claude Boudewijn Kainama, Agustinus Langowuyo	
<b>SIMULASI PERGERAKAN HARGA SAHAM MENGGUNAKAN MODEL GERAK BROWN GEOMETRIK DENGAN R STUDIO</b>	559 – 564
Ahmad Fawaid Ridwan, Rizki Apriva Hidayana, Budi Nurani Ruchjana	
<b>PENAKSIRAN RATA-RATA <i>EXCESS CLAIM</i> PESERTA DARI PERUSAHAAN PEMBERI LAYANAN KESEHATAN PT. X</b>	565 – 572
Wildan*, Indah Permatasari, and Aceng Komarudin Mutaqin	
<b>PENGARUH SELF EFFICACY DAN MOTIVASI BELAJAR TERHADAP HASIL BELAJAR SISWA KELAS VII SMP NEGERI 3 GANTUNG</b>	573 – 584
Alperu, Nerru Pranuta Murnaka*, Indra Bayu M, Andy Wahyu H	



## INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG MORREY-ADAMS DAN OPERATOR MAKSIMAL FRAKSIONAL

Daniel Salim<sup>1,2,\*</sup>, Moch. Taufik Hakiki<sup>2</sup>, dan Denny Ivanal Hakim<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Departemen Matematika, Universitas Katolik Parahyangan, Indonesia

<sup>2</sup> Kelompok Keahlian Analisis dan Geometri, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Indonesia

\*e-mail: daniel.salim@unpar.ac.id

**Abstrak.** *Makalah ini membahas interpolasi kompleks dari ruang Morrey-Adams. Khususnya, kami memberikan deskripsi interpolasi kompleks metode pertama dan metode kedua dari ruang ini. Bukti hasil ini menggunakan karakterisasi hasil kali Calderón dari ruang Morrey Adams. Selain itu, kami juga membahas keterbatasan operator maksimal fraksional dari hasil kali Calderón antara ruang Morrey- Adams dengan ruang Morrey ke ruang Morrey. Hasil pada makalah ini terkait dengan interpolasi ruang Morrey, interpolasi ruang  $B_w^u$ , dan aplikasi interpolasi kompleks pada keterbatasan operator maksimal fraksional di ruang Morrey.*

**Kata kunci:** hasil kali Calderón, interpolasi kompleks, ruang Morrey, ruang Morrey-Adams, operator maksimal fraksional

### 1 LATAR BELAKANG

Interpolasi kompleks ruang Morrey, perumusannya dan ruang fungsi terkait merupakan salah satu topik penelitian tentang interpolasi ruang fungsi yang banyak dikaji pada beberapa tahun terakhir [3, 4, 5, 6, 7, 10, 11]. Secara umum, terdapat perbedaan deskripsi antara metode interpolasi kompleks pertama dan kedua dari ruang Morrey, yakni ruang Morrey tidak tertutup terhadap metode kompleks pertama tetapi ruang Morrey tertutup terhadap metode kompleks kedua. Hal ini juga menunjukkan pentingnya peranan metode interpolasi kompleks kedua yang selama ini hanya dipandang sebagai alat bantu untuk metode interpolasi kompleks pertama.

Pada penelitian ini, kami mengembangkan penelitian interpolasi ruang Morrey ke penelitian ruang Morrey-Adams. Ruang Morrey-Adams merupakan suatu perluasan ruang Morrey yang natural dan pada ruang ini juga dikaji keterbatasan operator integral yang juga diteliti di ruang Morrey seperti operator maksimal Hardy-Littlewood, operator maksimal fraksional, operator integral fraksional dan operator lain. Salah satu cara yang seringkali digunakan untuk mendeskripsikan ruang interpolasi kompleks dari ruang fungsi adalah dengan perhitungan hasil kali Calderón antara dua ruang fungsi yang dikaji. Oleh karena itu, kami memulai kajian interpolasi ruang Morrey-Adams dengan meneliti hasil kali Calderón dari ruang fungsi ini.

### 2 TUJUAN PENELITIAN

Pada penelitian ini, kami memberikan deskripsi interpolasi kompleks metode pertama dan kedua dari ruang Morrey-Adams melalui karakterisasi hasil kali Calderón ruang ini. Kami

juga membuktikan bahwa operator fraksional maksimal terbatas dari hasil kali Calderón ruang Morrey dan ruang Morrey-Adams ke ruang Morrey.

### 3 PENDAHULUAN

#### 3.1 Ruang Morrey-Adams

Misalkan  $1 \leq p < \infty$  dan  $0 \leq \lambda \leq n$ . Ruang Morrey  $L^{p,\lambda} = L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ , yang pertama kali diperkenalkan di [8], adalah himpunan semua fungsi  $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$  yang memenuhi

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left( \frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} < \infty. \quad (3.1)$$

Ekspresi pada (3.1) menyatakan norma ruang Morrey. Jika  $\lambda = 0$ , maka  $L^{p,\lambda}$  adalah ruang Lebesgue  $L^p$ . Perhatikan bahwa, norma ruang Morrey dapat dituliskan sebagai

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|r^{-\lambda/p} \|f\|_{L^p(B(x,r))}\|_{L^\infty(0,\infty)}.$$

Berdasarkan pengamatan ini, ruang Morrey-Adams didefinisikan dengan mengganti peranan  $L^\infty(0, \infty)$  dengan  $L^\beta(0, \infty)$  untuk setiap  $1 \leq \beta \leq \infty$ . Persisnya, untuk  $0 \leq \lambda < \infty$  dan  $1 \leq p, \beta \leq \infty$ , ruang Morrey-Adams  $L^{p,\lambda}_\beta = L^{p,\lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$  didefinisikan sebagai himpunan fungsi yang terintegralkan lokal pada  $\mathbb{R}^n$  sedemikian hingga

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}_\beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|r^{-\lambda/p} \|f\|_{L^p(B(x,r))}\|_{L^\beta(0,\infty)} < \infty.$$

Secara khusus, dapat ditunjukkan bahwa  $L^{p,0}_\infty = L^p$  dan  $L^{p,\lambda}_\infty = L^{p,\lambda}$  untuk  $0 \leq \lambda \leq n$ . Salah satu perbedaan antara ruang Morrey dengan ruang Morrey-Adams adalah kondisi untuk parameter  $\lambda$ , yakni syarat  $0 \leq \lambda \leq n$  untuk ruang Morrey dan syarat  $\frac{p}{\beta} < \lambda < n + \frac{p}{\beta}$  untuk ruang Morrey-Adams.

#### 3.2 Metode interpolasi kompleks dan hasil kali Calderón

Pada subbab ini, kami akan mengulang kembali definisi metode kompleks yang diperkenalkan oleh Calderón di dalam [2] dengan mengikuti notasi di dalam [1]. Misalkan  $(X_0, X_1)$  menyatakan pasangan ruang Banach dengan  $X_0$  dan  $X_1$  merupakan subhimpunan dari himpunan fungsi terukur pada  $\mathbb{R}^n$ ,  $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re } z < 1\}$ , dan  $\bar{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Re } z \leq 1\}$ . Ruang  $\mathcal{F}(X_0, X_1)$  didefinisikan sebagai ruang semua fungsi kontinu dan terbatas  $F : \bar{S} \rightarrow X_0 + X_1$  yang analitik di  $S$  dan memenuhi  $t \in \mathbb{R} \mapsto F(j + it) \in X_j$  kontinu dan terbatas untuk setiap  $j = 0, 1$ . Untuk  $\theta \in (0, 1)$ , ruang interpolasi kompleks pertama  $[X_0, X_1]_\theta$  didefinisikan dengan

$$[X_0, X_1]_\theta = \{F(\theta) : F \in \mathcal{F}(X_0, X_1)\}.$$

Ruang interpolasi kompleks metode kedua  $[X_0, X_1]^\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ) didefinisikan sebagai

$$[X_0, X_1]^\theta = \{G'(\theta) : G \in \mathcal{G}(X_0, X_1)\},$$

dengan  $\mathcal{G}(X_0, X_1)$  adalah himpunan semua fungsi kontinu  $G : \bar{S} \rightarrow X_0 + X_1$  yang analitik di  $S$  dan memenuhi  $\sup_{z \in \bar{S}} \frac{\|G(z)\|_{X_0+X_1}}{1+|z|} < \infty$  dan  $\sup_{t_1 \neq t_2, j=0,1} \frac{\|G(j+it_2) - G(j+it_1)\|_{X_j}}{|t_2 - t_1|} < \infty$ .

Secara umum,  $[X_0, X_1]_\theta \subseteq [X_0, X_1]^\theta$ . Inklusi sebaliknya juga berlaku untuk kasus  $X_0$  dan  $X_1$

adalah ruang Lebesgue, namun inklusi ini adalah inklusi sejati ketika  $X_0$  dan  $X_1$  adalah ruang Morrey.

Deskripsi ruang interpolasi kompleks seringkali dapat diperoleh dengan lebih mudah melalui deskripsi hasil kali Calderón antara  $X_0$  dan  $X_1$ . Untuk setiap  $\theta \in [0, 1]$ , hasil kali Calderón antara  $X_0$  dan  $X_1$  didefinisikan dengan

$$X_0^{1-\theta} X_1^\theta := \{f : |f| \leq |f_0|^{1-\theta} |f_1|^\theta, f_0 \in X_0, f_1 \in X_1\}.$$

Norma ruang ini didefinisikan dengan

$$\|f\|_{X_0^{1-\theta} X_1^\theta} := \inf\{\|f_0\|_{X_0}^{1-\theta} \|f_1\|_{X_1}^\theta : |f| \leq |f_0|^{1-\theta} |f_1|^\theta, f_0 \in X_0, f_1 \in X_1\}.$$

Hubungan antara hasil kali Calderón dengan ruang interpolasi kompleks diberikan pada kedua teorema berikut.

**Teorema 3.1.** [9] Untuk setiap  $\theta \in (0, 1)$  berlaku  $[X_0, X_1]_\theta = \overline{X_0 \cap X_1}^{X_0^{1-\theta} X_1^\theta}$ .

**Teorema 3.2.** [2, 7] Misalkan  $\theta \in (0, 1)$ . Jika bola satuan dari  $X_0^{1-\theta} X_1^\theta$  tutup di  $X_0 + X_1$ , maka  $[X_0, X_1]^\theta = X_0^{1-\theta} X_1^\theta$ .

## 4 HASIL DAN PEMBAHASAN

### 4.1 Hasil kali Calderón dan interpolasi kompleks ruang Morrey-Adams

Hasil awal kami mengenai interpolasi ruang Morrey-Adams adalah inklusi ruang hasil kali Calderón ruang Morrey-Adams ke ruang antara (*intermediate spaces*, lihat [1]).

**Proposisi 4.1.** Jika  $1 < p_0, \beta_0, p_1, \beta_1, p, \beta < \infty$ ,  $0 \leq \lambda < \infty$ , dan  $0 < \theta < 1$  memenuhi

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1-\theta}{\beta_0} + \frac{\theta}{\beta_1}, \quad \frac{p_0}{\beta_0} < \lambda < n + \frac{p_0}{\beta_0}, \quad \frac{p_1}{\beta_1} < \lambda < n + \frac{p_1}{\beta_1},$$

maka

$$\left(L_{\beta_0}^{p_0, \lambda}\right)^{1-\theta} \left(L_{\beta_1}^{p_1, \lambda}\right)^\theta \subseteq L_{\beta}^{p, \lambda}. \quad (4.1)$$

*Bukti.* Misalkan  $f \in \left(L_{\beta_0}^{p_0, \lambda}\right)^{1-\theta} \left(L_{\beta_1}^{p_1, \lambda}\right)^\theta$ , maka terdapat  $f_0 \in L_{\beta_0}^{p_0, \lambda}$  dan  $f_1 \in L_{\beta_1}^{p_1, \lambda}$  sedemikian hingga

$$|f| \leq |f_0|^{1-\theta} |f_1|^\theta \quad \text{dan} \quad \|f_0\|_{L_{\beta_0}^{p_0, \lambda}}^{1-\theta} \|f_1\|_{L_{\beta_1}^{p_1, \lambda}}^\theta \leq 2 \|f\|_{\left(L_{\beta_0}^{p_0, \lambda}\right)^{1-\theta} \left(L_{\beta_1}^{p_1, \lambda}\right)^\theta} < \infty.$$

Dengan menerapkan ketaksamaan Hölder, untuk setiap  $x \in \mathbb{R}^n$  berlaku

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left( \frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\beta/p} dr \\ & \leq \int_0^\infty \left( \frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f_0(y)|^{1-\theta} |f_1(y)|^\theta dy \right)^{\beta/p} dr \\ & \leq \int_0^\infty \left( \frac{1}{r^\lambda} \left( \int_{B(x,r)} |f_0(y)|^{p_0} dy \right)^{p(1-\theta)/p_0} \left( \int_{B(x,r)} |f_1(y)|^{p_1} dy \right)^{p\theta/p_1} \right)^{\beta/p} dr \\ & = \int_0^\infty \left( \frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f_0(y)|^{p_0} dy \right)^{\beta(1-\theta)/p_0} \left( \frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f_1(y)|^{p_1} dy \right)^{\beta\theta/p_1} dr. \end{aligned}$$

Dengan ketaksamaan Hölder sekali lagi, diperoleh

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \left( \frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f_0(y)|^{p_0} dy \right)^{\beta(1-\theta)/p_0} \left( \frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f_1(y)|^{p_1} dy \right)^{\beta\theta/p_1} dr \\
 & \leq \left( \int_0^\infty \left( \frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f_0(y)|^{p_0} dy \right)^{\beta_0/p_0} dr \right)^{\beta(1-\theta_0)/\beta_0} \\
 & \quad \times \left( \int_0^\infty \left( \frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f_1(y)|^{p_1} dy \right)^{\beta_1/p_1} dr \right)^{\beta(\theta_0)/\beta_1} \\
 & \leq \left( \|f_0\|_{L_{\beta_0}^{p_0,\lambda}}^{1-\theta} \|f_1\|_{L_{\beta_1}^{p_1,\lambda}}^\theta \right)^\beta.
 \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}
 \left( \int_0^\infty \left( \frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\beta/p} dr \right)^{1/\beta} & \leq \|f_0\|_{L_{\beta_0}^{p_0,\lambda}}^{1-\theta} \|f_1\|_{L_{\beta_1}^{p_1,\lambda}}^\theta \\
 & \leq 2 \|f\|_{(L_{\beta_0}^{p_0,\lambda})^{1-\theta} (L_{\beta_1}^{p_1,\lambda})^\theta} < \infty.
 \end{aligned}$$

Oleh karena itu,  $f \in L_\beta^{p,\lambda}$ . Jadi, terbukti bahwa (4.1) berlaku.  $\square$

Dengan asumsi tambahan  $\frac{\beta_0}{p_0} = \frac{\beta_1}{p_1}$ , diperoleh deskripsi hasil kali Calderón ruang Morrey-Adams sebagai berikut.

**Proposisi 4.2.** *Jika  $1 < p_0, \beta_0, p_1, \beta_1, p, \beta < \infty$ ,  $0 \leq \lambda < \infty$ , dan  $0 < \theta < 1$  memenuhi*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1-\theta}{\beta_0} + \frac{\theta}{\beta_1}, \quad \frac{\beta_0}{p_0} = \frac{\beta_1}{p_1}, \quad \frac{p_0}{\beta_0} < \lambda < n + \frac{p_0}{\beta_0}, \quad \frac{p_1}{\beta_1} < \lambda < n + \frac{p_1}{\beta_1},$$

maka

$$\left( L_{\beta_0}^{p_0,\lambda} \right)^{1-\theta} \left( L_{\beta_1}^{p_1,\lambda} \right)^\theta = L_\beta^{p,\lambda}. \quad (4.2)$$

*Bukti.* Sekarang, kita tunjukkan inklusi sebaliknya, yaitu

$$L_\beta^{p,\lambda} \subseteq \left( L_{\beta_0}^{p_0,\lambda} \right)^{1-\theta} \left( L_{\beta_1}^{p_1,\lambda} \right)^\theta.$$

Perhatikan bahwa dari hubungan

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1-\theta}{\beta_0} + \frac{\theta}{\beta_1}, \quad \frac{\beta_0}{p_0} = \frac{\beta_1}{p_1},$$

maka

$$\frac{\beta_0}{p_0} = \frac{\beta_1}{p_1} = \frac{\beta}{p}.$$

Misalkan  $f \in L_\beta^{p,\lambda}$ . Definisikan  $f_0 := |f|^{p/p_0}$  dan  $f_1 := |f|^{p/p_1}$ . Maka

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \left( \frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f_0(y)|^{p_0} dy \right)^{\beta_0/p_0} dr & = \int_0^\infty \left( \frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\beta/p} dr \\
 & \leq \|f\|_{L_\beta^{p,\lambda}}^\beta < \infty.
 \end{aligned}$$

Jadi,  $f_0 \in L_{\beta_0}^{p_0, \lambda}$  dan  $\|f_0\|_{L_{\beta_0}^{p_0, \lambda}} = \|f\|_{L_{\beta}^{p, \lambda}}^{\beta/\beta_0}$ . Dengan cara yang sama,  $f_1 \in L_{\beta_1}^{p_1, \lambda}$  dan  $\|f_1\|_{L_{\beta_1}^{p_1, \lambda}} = \|f\|_{L_{\beta}^{p, \lambda}}^{\beta/\beta_1}$ . Dengan hasil ini, maka

$$\begin{aligned} \|f_0\|_{L_{\beta_0}^{p_0, \lambda}}^{1-\theta} \|f_1\|_{L_{\beta_1}^{p_1, \lambda}}^{\theta} &= \|f\|_{L_{\beta}^{p, \lambda}}^{\beta(1-\theta)/\beta_0 + \beta\theta/\beta_1} \\ &= \|f\|_{L_{\beta}^{p, \lambda}} < \infty. \end{aligned}$$

Karena  $\|f\|_{(L_{\beta_0}^{p_0, \lambda})^{1-\theta} (L_{\beta_1}^{p_1, \lambda})^{\theta}} \leq \|f_0\|_{L_{\beta_0}^{p_0, \lambda}}^{1-\theta} \|f_1\|_{L_{\beta_1}^{p_1, \lambda}}^{\theta}$ , maka  $f \in \left(L_{\beta_0}^{p_0, \lambda}\right)^{1-\theta} \left(L_{\beta_1}^{p_1, \lambda}\right)^{\theta}$ .  $\square$

Berdasarkan Proposisi 4.2 dan Teorema 3.1 dan 3.2 diperoleh deskripsi interpolasi kompleks berikut.

**Teorema 4.3.** Misalkan  $\theta \in (0, 1)$ . Jika  $1 < p_0, \beta_0, p_1, \beta_1, p, \beta < \infty$  memenuhi

$$\frac{\beta_0}{p_0} = \frac{\beta_1}{p_1}, \quad \frac{p_0}{\beta_0} < \lambda < n + \frac{p_0}{\beta_0}, \quad \frac{p_1}{\beta_1} < \lambda < n + \frac{p_1}{\beta_1},$$

dan definisikan

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1-\theta}{\beta_0} + \frac{\theta}{\beta_1},$$

maka

$$[L_{\beta_0}^{p_0, \lambda}, L_{\beta_1}^{p_1, \lambda}]_{\theta} = \overline{L_{\beta_0}^{p_0, \lambda} \cap L_{\beta_1}^{p_1, \lambda}}^{L_{\beta}^{p, \lambda}}. \quad (4.3)$$

dan

$$[L_{\beta_0}^{p_0, \lambda}, L_{\beta_1}^{p_1, \lambda}]_{\theta} = L_{\beta}^{p, \lambda}. \quad (4.4)$$

*Bukti.* Identitas (4.3) adalah akibat dari Teorema 3.1 dan Proposisi 4.2. Identitas 4.4 diperoleh dari Teorema 3.2 dan Proposisi 4.2 serta fakta bahwa bola satuan di  $L_{\beta}^{p, \lambda}$  tutup di  $L_{\beta_0}^{p_0, \lambda} + L_{\beta_1}^{p_1, \lambda}$ .  $\square$

Untuk pembahasan keterbatasan operator maksimal fraksional pada bagian berikutnya, kami juga membuktikan inklusi hasil kali Calderón antara ruang Morrey-Adams dan ruang Morrey ke ruang Morrey-Adams yang lain.

**Proposisi 4.4.** Misal  $p_0, p_1, \beta \in [1, \infty)$   $\theta \in [0, 1]$  dan

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Untuk  $\lambda \in \left[\frac{\max\{p_0, p_1\}}{\beta}, n\right)$ , berlaku  $\left(L_{\beta(1-\theta)}^{p_0, \lambda}\right)^{1-\theta} \left(L_{\beta_1}^{p_1, \lambda}\right)^{\theta} \subset L_{\beta}^{p, \lambda}$

*Bukti.* Misalkan  $f \in \left(L_{\beta(1-\theta)}^{p_0, \lambda}\right)^{1-\theta} \left(L_{\beta_1}^{p_1, \lambda}\right)^{\theta}$ , maka terdapat  $f_0 \in L_{\beta(1-\theta)}^{p_0, \lambda}$  dan  $f_1 \in L_{\beta_1}^{p_1, \lambda}$  dengan  $|f(x)| \leq |f_0(x)|^{1-\theta} |f_1(x)|^{\theta}$ . Berdasarkan ketaksamaan Hölder diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} r^{-\frac{\lambda\beta}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))}^{\beta} dr &\leq \int_0^{\infty} r^{-\frac{\lambda\beta(1-\theta)}{p_0} - \frac{\lambda\beta\theta}{p_1}} \|f_0\|_{L_{p_0}(B(x,r))}^{\beta(1-\theta)} \|f_1\|_{L_{p_1}(B(x,r))}^{\beta\theta} dr \\ &\leq \|f_0\|_{L_{\beta(1-\theta)}^{p_0, \lambda}}^{\beta(1-\theta)} \|f_1\|_{L_{\beta_1}^{p_1, \lambda}}^{\beta\theta}. \end{aligned}$$

Oleh karena itu,  $f \in L_{\beta}^{p, \lambda}$ .  $\square$

## 4.2 Keterbatasan operator maksimal fraksional

Pada bagian ini, kami akan membuktikan keterbatasan operator maksimal fraksional dari hasil kali Calderón antara ruang Morrey dan ruang Morrey-Adams ke ruang Morrey. Misalkan  $0 < \alpha < n$  dan  $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ . Operator maksimal fraksional didefinisikan dengan

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} r^{\alpha-n} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy.$$

Jika  $\alpha = 0$ , maka  $M_0 f = M f$  adalah fungsi maksimal Hardy-Littlewood. Hasil keterbatasan operator ini diberikan pada kedua teorema berikut.

**Teorema 4.5.** Misalkan  $\tilde{\lambda} \in (0, n)$ ,  $\alpha \in (0, n - \tilde{\lambda})$ ,  $\theta = \frac{\alpha}{n-\tilde{\lambda}}$ ,  $p \in (1, \infty)$ ,  $q = \frac{p}{1-\theta}$ ,  $\gamma \in [\frac{q}{p}, \infty)$   $\beta = \frac{p\gamma}{q}$ ,  $\mu \in (\frac{p}{\beta}, n + \frac{p}{\beta})$ , maka  $M_\alpha \left( (L_\beta^{p,\mu})^{1-\theta} (L^{1,\tilde{\lambda}})^\theta \right) \subseteq L_\gamma^{q,\mu}$ .

*Bukti.* Misalkan  $f \in (L_\beta^{p,\mu})^{1-\theta} (L^{1,\tilde{\lambda}})^\theta$ , maka terdapat  $f_0 \in L_\beta^{p,\mu}$  dan  $f_1 \in L^{1,\tilde{\lambda}}$  sedemikian hingga  $|f| \leq |f_0|^{1-\theta} |f_1|^\theta$ . Misalkan  $x \in \mathbb{R}^n$ . Berdasarkan ketaksamaan Hölder dengan eksponen  $\frac{\alpha}{n-\tilde{\lambda}}$ , diperoleh

$$r^{\alpha-n} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \lesssim (M f_0(x))^{1-\theta} \|f_1\|_{L^{1,\tilde{\lambda}}}^\theta.$$

Notasi  $A \lesssim B$  menyatakan ketaksamaan  $A \leq CB$  untuk suatu konstanta  $C > 0$  yang tidak bergantung dari  $A$  dan  $B$ . Akibatnya,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{-\frac{\mu\gamma}{q}} \|M_\alpha f\|_{L_q(B(x,r))}^\gamma dr &\lesssim \|f_1\|_{L^{1,\tilde{\lambda}}}^{\theta\gamma} \int_0^\infty r^{-\frac{\mu\beta}{p}} \|M f_0^{1-\theta}\|_{L_q(B(x,r))}^\gamma dr \\ &= \|f_1\|_{L^{1,\tilde{\lambda}}}^{\theta\gamma} \int_0^\infty r^{-\frac{\mu\beta}{p}} \|M f_0\|_{L_p(B(x,r))}^\beta dr \\ &\leq \|f_0\|_{L_\beta^{p,\mu}}^{(1-\theta)\gamma} \|f_1\|_{L^{1,\tilde{\lambda}}}^{\theta\gamma}. \end{aligned}$$

Karena ketaksamaan di atas berlaku untuk setiap  $x \in \mathbb{R}^n$ , maka  $M_\alpha f \in L_\gamma^{q,\mu}$ .  $\square$

**Teorema 4.6.** Misalkan  $\tilde{\lambda} \in (0, n)$ ,  $\alpha \in (0, n - \tilde{\lambda})$ ,  $\theta = \frac{\alpha}{n-\tilde{\lambda}}$ ,  $p \in (1, \infty)$ ,  $q = \frac{1}{1-\theta}$ ,  $\gamma \in [q, \infty)$   $\beta = \frac{\gamma}{q}$ ,  $\lambda \in (\frac{p}{\beta}, n + \frac{p}{\beta})$ ,  $\mu = n - \frac{n-\lambda}{p}$  sedemikian hingga  $\mu \in (\frac{q}{\gamma}, n + \frac{q}{\gamma})$ , maka  $M_\alpha \left( (L_\beta^{p,\lambda})^{1-\theta} (L^{1,\tilde{\lambda}})^\theta \right) \subseteq L_\gamma^{q,\mu}$ .

*Bukti.* Misalkan  $x \in \mathbb{R}^n$ . Misalkan  $|f| \leq |f_0|^{1-\theta} |f_1|^\theta$  dengan  $f_0 \in L_\beta^{p,\lambda}$  dan  $f_1 \in L^{1,\tilde{\lambda}}$ . Berdasarkan ketaksamaan Hölder dengan eksponen  $\frac{\alpha}{n-\tilde{\lambda}}$ , diperoleh

$$r^{\alpha-n} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \lesssim (M f_0(x))^{1-\theta} \|f_1\|_{L^{1,\tilde{\lambda}}}^\theta.$$

Ketaksamaan terakhir, ketaksamaan Hölder dan keterbatasan operator maksimal Hardy-Littlewood mengakibatkan

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{-\frac{\mu\gamma}{q}} \|M_\alpha f\|_{L_q(B(x,r))}^\gamma dr &\lesssim \|f_1\|_{L^{1,\tilde{\lambda}}}^{\theta\gamma} \int_0^\infty r^{-\frac{\mu\gamma}{q}} \|M f_0\|_{L^1(B(x,r))}^{\frac{\gamma}{q}} dr \\ &\lesssim \|f_1\|_{L^{1,\tilde{\lambda}}}^{\theta\gamma} \int_0^\infty r^{\frac{(n-\mu)\gamma}{q} - \frac{n\gamma}{pq}} \|M f_0\|_{L_p(B(x,r))}^\beta dr \\ &= \|f_1\|_{L^{1,\tilde{\lambda}}}^{\theta\gamma} \int_0^\infty r^{-\frac{\lambda\beta}{p}} \|M f_0\|_{L_p(B(x,r))}^\beta dr \\ &\leq \|f_0\|_{L_\beta^{p,\lambda}}^{(1-\theta)\gamma} \|f_1\|_{L^{1,\tilde{\lambda}}}^{\theta\gamma}. \end{aligned}$$

Dengan mengambil supremum atas  $x \in \mathbb{R}^n$ , diperoleh  $M_\alpha f \in L_\gamma^{q,\mu}$ . □

Berdasarkan Teorema 4.6, jika  $\tilde{\lambda} = \lambda$ ,  $\delta = \frac{\beta}{(1-\theta)}$ , maka  $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \theta$ , sehingga

$$\frac{n-\mu}{q} + \frac{1}{\gamma} = \frac{n-\lambda}{r} + \frac{1}{\delta} - \alpha.$$

Kondisi ini merupakan kondisi keterbatasan operator  $M_\alpha$  dari  $L_\delta^{r,\lambda}$  ke  $L_\gamma^{q,\mu}$  dan berdasarkan Proposisi 4.4 berlaku  $(L_\beta^{p,\lambda})^{1-\theta} (L^{1,\lambda})^\theta \subseteq L_\delta^{r,\lambda}$ .

## 5 KESIMPULAN DAN RENCANA PENELITIAN

Ruang interpolasi kompleks metode pertama dari ruang Morrey-Adams dibuktikan sama dengan tutupan dari irisan dua ruang Morrey-Adams relatif terhadap ruang antara yang berupa Morrey-Adams. Ruang Morrey-Adams juga dibuktikan tertutup terhadap interpolasi kompleks metode kedua. Selain kedua hasil ini, keterbatasan operator maksimal fraksional dengan daerah asal berupa hasil kali Calderón antara ruang Morrey dan ruang Morrey-Adams juga berhasil dibuktikan. Salah satu rencana penelitian selanjutnya yang terkait dengan topik ini adalah penggunaan interpolasi kompleks ruang Morrey-Adams dalam keterbatasan operator integral fraksional dan perumumannya.

## UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didanai oleh program PPMI FMIPA ITB 2021.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] J. Bergh and J. Löfström, Interpolation spaces. An introduction, Grundlehren Math. Wiss. **223**, Springer, New York (1976).
- [2] A.P. Calderón, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math. **24**, no.2, 113–190 (1964).
- [3] D.I. Hakim and Y. Sawano, Interpolation of generalized Morrey spaces, Rev. Mat. Complut. **29**, 295–340 (2016).
- [4] D.I. Hakim and Y. Sawano, Calderón's first and second complex interpolations of closed subspaces of Morrey spaces, J. Fourier Anal. Appl. **23**, no. 5, 1195–1226 (2017).

- [5] P. G. Lemarié-Rieusset, Erratum to: Multipliers and Morrey spaces, *Potential Anal.* **41**, no.4, 1359–1362 (2014).
- [6] Y. Lu, D. Yang, and W. Yuan, Interpolation of Morrey spaces on metric measure spaces, *Canad. Math. Bull.* **57**, 598–608 (2014).
- [7] M. Mastylo and Y. Sawano, Complex interpolation and Calderón-Mityagin couples of Morrey spaces, *Anal. PDE.* **12**, 1711–1740 (2019).
- [8] C.B. Morrey, On the solutions of quasi linear elliptic partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **43**, 126–166 (1938).
- [9] V.A. Sestakov, On complex interpolation of Banach space of measurable functions, *Vestnik Leningrad*, **19** (4), 64–68 (1974).
- [10] W. Yuan, Complex interpolation for predual spaces of Morrey-type spaces, *Taiwan. J. Math.* **18**(5), 1527–1548 (2014).
- [11] W. Yuan, W. Sickel and D. Yang, Interpolation of Morrey–Campanato and related smoothness spaces, *Sci. China Math.* **58** (9), 1835–1908 (2015).



ISSN 2829-3770



9 772829 377007