

# Konferensi Nasional MATEMATIKA 20 21



## PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX  
Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :  
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology  
e-ISSN : 2829-3770

Powered by  
IndoMS



Organized by  
Universitas Pattimura

# PROSIDING

## KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

“Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0”

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

@Hak Cipta dilindungi Undang-undang

e-ISSN: 2829-3770

DOI issue: <https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX>

Dipublikasikan online pada:

Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:



Mei 2022

## **Editor:**

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si, M.Si, Berny P. Tomasouw, S.Si, M.Si,  
Taufan Talib, S.Pd., M.Si, M. I. Tilukay, S.Si, M.Si, Monalisa E. Rijoly, S.Si, M.Sc.  
Z.A. Leleury, S.Si, M.Si, M. B. Mananggal, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si, M.Sc.,  
Y. A. Lesnussa, S.Si, M.Si. Vicardy Kempa, S.Si, M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si, M.Si.  
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si, M.Si.

## **Design cover:**

L. J. Sinay, S.Si, M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

## **Tim *Reviewer***

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumulun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

## DAFTAR ISI

Halaman Judul	i
Tim Reviewer	ii
Kata Pengantar	iii
Susunan Panitia KNM XX	iv
Daftar Isi	vii

### ALJABAR

<b>KLASIFIKASI TITIK KRITIS POLINOMIAL DUA VARIABEL BERDERAJAT TIGA</b>	1 – 8
Afif Humam	
<b>KAJIAN KEKUATAN <math>\mathbb{Z}</math> - MODUL <math>\mathbb{Q}</math> SEBAGAI INSPIRASI MUNCULNYA KONSEP DAN SIFAT DALAM TEORI MODUL</b>	9 – 14
Sri Wahyuni, Yunita Septriana Anwar, I Putu Yudi Prabhadika	
<b>GRAF PEMBAGI NOL DARI RING KOMUTATIF</b>	15 – 20
Maria Vianney Any Herawati	
<b>IDEAL TAK TEREDUKSI KUAT ATAS SEMIRING KOMUTATIF</b>	21 – 26
Fitriana Hasnani, Nikken Prima Puspita	
<b>BATAS ATAS PADA NORM – TAK HINGGA DARI INVERS MATRIKS NEKRASOV</b>	27 – 32
Eddy Djauhari	
<b>KOREPRESENTASI KOALJABAR <math>F[G]</math></b>	33 – 40
Na'imah Hijriati, Indah Emilia Wijayanti	
<b>HUBUNGAN SIFAT BERSIH PADA RING, MODUL, KOMODUL DAN KOALJABAR</b>	41 – 50
Nikken Prima Puspita, Indah Emilia Wijayanti, Budi Surodjo	
<b>KONTRAKSI PERTINGKATAN PADA PERTINGKATAN PAULI <math>\mathfrak{S}\mathfrak{L}(N, \mathbb{C})</math></b>	51 – 60
Reynald Saputra, Gantina Rachmaputri	

### ANALISIS

<b>BUKTI ALTERNATIF INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG LEBESGUE DENGAN EKSPONEN PEUBAH</b>	61 – 66
Dina Nur Amalina dan Denny Ivanal Hakim	
<b>SEGITIGA TITIK CIRCUMCENTER PADA MODIFIKASI TEOREMA NAPOLEON</b>	67 – 76
Yunisa Fadhilah Hartati, Mashadi	
<b>FUNGSI SIMETRI TERHADAP TITIK <math>(a, b)</math> DAN BEBERAPA SIFATNYA</b>	77 – 82
Firdaus Ubaidillah	
<b>INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG MORREY-ADAMS DAN OPERATOR MAKSIMAL FRAKSIONAL</b>	83 – 90
Daniel Salim, Moch. Taufik Hakiki, Denny Ivanal Hakim	
<b>PENDEKATAN KALKULUS HIDA UNTUK PROSES HERMITE</b>	91 – 98
Herry Pribawanto Suryawan	
<b>KETAKSAMAAN HARDY DI RUANG HERZ HOMOGEN</b>	99 – 106
Pebrudal Zanu, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi1	
<b>OPERATOR KANTOROVICH PADA RUANG MORREY DIPERUMUM</b>	107 – 114
Mu'afa Purwa Arsana, Denny Ivanal Hakim	
<b>PERLUASAN DEFINISI RATA-RATA VIA TEOREMA NILAI RATA-RATA</b>	115 – 124
Mochammad Idris	
<b>SISTEM EIGEN OPERATOR LAPLACE BERBASIS RUAS PADA SUATU POHON KUANTUM</b>	125 – 134
Moh. Januar I. Burhan, Yudi Soeharyadi, Wono Setya Budhi	

<b>SUKU BANYAK BERNSTEIN DAN OPERATOR KANTOROVICH UNTUK BEBERAPA FUNGSI YANG TIDAK KONTINU</b>	135 – 142
Reinhart Gunadi, Denny I. Hakim	
<b>KETERBATASAN OPERATOR TIPE VOLTERRA PADA RUANG MORREY ANALITIK <math>L_{p,\lambda}</math></b>	585 - 590
Moch Taufik Hakiki, Wono Setya Budhi, dan Denny Ivanal Hakim	
<b>KOMBINATORIK</b>	
<b>PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF SIPUT DAN GRAF UBUR-UBUR</b>	143 – 148
Kevin Akbar, Kiki Ariyanti Sugeng	
<b>DIMENSI METRIK LOKAL PADA GRAF FLOWER DAN GRAF GEAR KORONA GRAF LINTASAN</b>	149 – 154
Salma Fauziyah Ashim, Tri Atmojo Kusmayadi, Titin Sri Martini	
<b>PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF LILIN</b>	155 – 160
Rizqi Rachmadhani, Kiki Ariyanti Sugeng	
<b>PELABELAN HARMONIS PADA GRAF SEGITIGA BELAH KETUPAT VARIASI <math>LM_n</math></b>	161 – 164
Evi Maharani, Kurniawan Atmadja	
<b>PEWARNAAN SIMPUL <math>r</math> – DINAMIS PADA GRAF TERATAI <math>T_n</math></b>	165 – 170
Audi Fierera, Kiki A. Sugeng	
<b>SIFAT-SIFAT GRAF CAYLEY GRUP <math>S_n</math></b>	171-176
Afifan Hadi, Kiki Ariyanti Sugeng	
<b>PENDIDIKAN MATEMATIKA</b>	
<b>LKPD BERBASIS PENEMUAN TERBIMBING BERBANTUAN ALAT PERAGA PADA MATERI LUAS PERMUKAAN DAN VOLUME PRISMA DAN LIMAS</b>	177 – 182
Fithroh Nafa Dzillah, Latifah Mustofa Lestyanto	
<b>PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA DARING BERBASIS MODEL PENEMUAN TERBIMBING MENGGUNAKAN LIVEWORKSHEETS PADA MATERI PRISMA DAN LIMAS</b>	183 – 188
Sania Sururul Khususna, Latifah Mustofa Lestyanto, Eddy Budiono	
<b>PENGEMBANGAN LEMBAR KEGIATAN SISWA BERBASIS MASALAH BERBANTUAN GOOGLE FORM UNTUK PEMAHAMAN KONSEP SISWA KELAS VII SMP PADA MATERI SEGITIGA DAN SEGIEMPAT</b>	189 – 194
Herlin Oktavita, Latifah Mustofa Lestyanto2	
<b>EKSPLORASI ETNOMATEMATIKA PADA GELANG MANIK-MANIK KHAS DAYAK KALIMANTAN SEBAGAI SUMBER PENYUSUNAN LKPD</b>	195 – 206
Silvia	
<b>ANALISIS KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIS SISWA DENGAN PEMBELAJARAN MODEL BRAIN BASED LEARNING BERBASIS LEARNING MANANGEMENT SYSTEM</b>	207 – 214
N. R. Mumtaz, M. Asikin	
<b>PENGEMBANGAN ASESMEN ALTERNATIF DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA KONTEKS LINGKUNGAN LAHAN BASAH UNTUK SISWA TINGKAT SMP/MTS</b>	215 – 222
Muhammad Rizal, Noor Fajriah, Agni Danaryanti	
<b>MATERI PENGAYAAN TEORI BILANGAN DASAR DI SEKOLAH DASAR</b>	223-228
Awanga Dijayangrana, Hilda Assiyatun	
<b>KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS TULIS MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH VOLUME BENDA PUTAR MELALUI MODEL PERKULIAHAN KOLABORATIF</b>	229 – 236
Fadhila Kartika Sari, Anies Fuady	
<b>PERAN PENULISAN JURNAL DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA SECARA DARING DI MASA PANDEMI COVID-19</b>	237 – 244

Gusti Firda Khairunnisa, Frida Siswiyanti	
<b>ANALISIS KRUSKAL WALLIS UNTUK MENGETAHUI TINGKAT KOSENTRASI BELAJAR MAHASISWA BERDASARKAN PROGRAM STUDI</b>	245 – 250
Venessa Y. A. Brabar, Grace A. V. Hikoyabi, Agustinus Langowuyo	
<b>ANALISIS PENGARUH PEMANFAATAN INTERNET TERHADAP MINAT BELAJAR MAHASISWA PRODI STATISTIKA</b>	251 – 258
Mariana Tanawani, Meilani Yarangga, dan Agustinus Langowuy	
<b>PENGARUH PROSES BELAJAR MENGAJAR LURING DAN DARING TERHADAP HASIL BELAJAR MAHASISWA JURUSAN MATEMATIKA ANGAKATAN 2018 FMIPA UNIVERSITAS CENDERAWASIH</b>	259 – 264
Dewi Rahmawati, Tiara A. Nadapdap, Agustinus Langowuyo	
<b>PENILAIAN ESAI MENGGUNAKAN MODEL PEMBELAJARAN MESIN</b>	265 – 270
Farah Qotrunnada, Marcus Wono Setya Budhi, Hilda Assiyatun	
<b>PENGEMBANGAN PERANGKAT PEMBELAJARAN BERBASIS ETNOMATEMATIKA BUDAYA MASYARAKAT NEGERI TULEHU PADA MATERI SEGIEMPAT DAN SEGITIGA UNTUK SISWA DI KELAS VII MTS NEGERI I MALUKU TENGAH.</b>	271 – 276
Heni Rahim, W. Mataheru, J. Takaria	
<b>PENERAPAN FUZZY LINEAR PROGRAMMING UNTUK OPTIMASI PRODUKSI TAHU (STUDI KASUS DI DESA TANJUNGREJO KABUPATEN JEMBER)</b>	277 – 284
Anisa Wahyu Illahi, Agustina Pradjaningsih, Abduh Riski	
<b>PENENTUAN SOLUSI FISIBEL AWAL MASALAH TRANSPORTASI DENGAN MINIMUM DEMAND METHOD</b>	285 – 292
Ulniyatul Ula, Siti Khabibah, Robertus Heri S.U	
<b>OPTIMALISASI RUTE DAN PENJADWALAN PENGANGKUTAN SAMPAH DENGAN METODE INSERTION HEURISTIC DAN INTRA- ROUTE IMPROVEMENT (STUDI KASUS: UNIVERSITAS BRAWIJAYA MALANG)</b>	293 – 298
Fara El Nandhita Pratiwi	
<b>MODEL MATEMATIS RUTE WISATA DI RIAU DENGAN MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN GOL</b>	299 – 312
Ihda Hasbiyati, Hasriati, T. P. Nababan	

## **MATEMATIKA TERAPAN**

<b>MODEL SUSCEPTIBLE INFECTED RECOVERED (SIR) PADA DEMAM BERDARAH DENGUE (DBD)</b>	313 – 320
Oscar Andhry Barata, Rahmat, Rengga Nanda Pramudya	
<b>ANALISA PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE FRAKSIONAL NUMERIK MENGGUNAKAN METODE EULER DAN APLIKASINYA</b>	321 – 326
Leli Deswita, Syamsudhuha, Asral. M	
<b>TERAPAN FUNGSI SIGMOID UNTUK MENENTUKAN NILAI MAKSIMAL KOEFISIEN GAYA ANGKAT DAN SUDUT STALL PADA KURVA LINEAR <math>C_L</math> TERHADAP <math>\alpha</math></b>	327 – 334
Angga Septiyana, Singgih Satrio W, Fuad Surastyo P, Try Kusuma Wardana, Ardian Rizaldi, Novita Atmasari, Eries Bagita Jayanti, Prasetyo Ardi P	
<b>IMPLEMENTASI DEEP LEARNING UNTUK KLASIFIKASI GAMBAR MENGGUNAKAN CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORK (CNN) PADA BATIK SASAMBO</b>	335 – 340
Muna Malika, Edy Widodo	

## **STATISTIKA**

<b>PENERAPAN MODEL SPACE TIME AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (STARI(1,1,1)) PADA DATA NTP TANAMAN PANGAN DARI TIGA PROVINSI DI PULAU JAWA</b>	341 - 350
Fajriatus Sholihah, Kartika Sari, Budi Nurani Ruchjana, Toni Toharudin	
<b>ANALISIS KORESPONDENSI BERGANDA UNTUK MENGETAHUI INDIKATOR-INDIKATOR YANG MEMPENGARUHI KEJADIAN LOW BACK PAIN PADA KUSIR</b>	351 - 358

<b>KUDA/DELMAN DI KOTA CIMAH I TAHUN 2019</b>	
Dhita Diana Dewi, Fajriatus Sholihah, Rosa Rosmanah, Lucy Fitria Dewi, Mochamad Yudhi Afrizal, Irlandia Ginanjar	
<b>PROSES POISSON NON HOMOGEN DAN PENERAPANNYA PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT</b>	359 – 362
Viona Prisyella Balqis, Muhammad Herlambang Prakasa Yudha, Budi Nurani Ruchjana	
<b>PENERAPAN DISTRIBUSI STASIONER RANTAI MARKOV PADA DATA BANYAKNYA ORANG TERKONFIRMASI POSITIF COVID-19 DI JAWA BARAT</b>	363 – 370
Tubagus Robbi Megantara, Ayun Sri Rahmani, Budi Nurani Ruchjana	
<b>SPATIAL CLUSTER ING DENGAN METODE SKATER (K'LUSTER ANALYSIS BY TREE EDGE REMOVAL) UNTUK PENGELOMPOKAN SEBARAN COVID-19 DI KABUPATEN TULUNGAGUNG</b>	371 – 380
Danang Ariyanto, Henny Pramodyo, Novi Nur Aini	
<b>ANALISIS KLASTER KABUPATEN/KOTA INDONESIA BERDASARKAN INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DENGAN MODEL MIXTURE SKEW-T</b>	381 – 388
Kristoforus Exelsis Pratama, Irwan Susanto, Yuliana Susanti	
<b>ANALISIS INDEKS PEMBANGUNAN MANUSIA DI KABUPATEN BURU SELATAN DENGAN MENGGUNAKAN REGRESI LINIER BERGANDA</b>	389 – 396
Muhidin Jariyah, Inayah. P. F. Solong, Juan C. S. Jamco	
<b>TINJAUAN KEPUTUSAN HIPOTESA FUZZY BERBASIS P-VALUE FUZZY (STUDI KASUS DATA COVID-19 DI NUSA TENGGARA BARAT)</b>	397 – 404
Wahidaturrahmi	
<b>PENERAPAN METODE AUTO SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS PADA PERAMALAN DATA INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DI INDONESIA</b>	405 – 410
Andreas Reza Chrisantama*, Winita Sulandari, Sugiyanto	
<b>PERAMALAN JUMLAH PRODUKSI PERIKANAN DI KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE PEMULUSAN EKSPONENSIAL</b>	411 – 418
Asrul Irfanullah, Claudia Sumanik, Romy Makatita	
<b>ANALISIS PENGARUH STRUKTUR KONSUMSI AKHIR RUMAH TANGGA BERDASARKAN KOMPONEN PENGELUARAN KABUPATEN BURU SELATAN PERIODE 2015 – 2019 DENGAN RAKL</b>	419 – 424
Nikita A. Putiray, Dea M. Tuhumury, Angel M.P. Manuputty	
<b>EKSPLORASI SISA USIA BEARING MENGGUNAKAN DISTRIBUSI WEIBULL</b>	425 – 430
Sutawanir Darwis, Nusar Hajarisman, Suliadi, Achmad Widodo	
<b>PENERAPAN MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED MOVING AVERAGE (VARIMA) UNTUK PRAKIRAAN INDEKS HARGA SAHAM GABUNGAN DAN KURS RUPIAH TERHADAP USD</b>	431 – 442
Ani Pertiwi, Lucy Fitria Dewi, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana	
<b>PENGELOMPOKAN JUMLAH PENDUDUK KABUPATEN BURU SELATAN BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA TAHUN 2018 DENGAN ALGORITMA K- MEANS</b>	443 – 450
Samir Radjid, Nadia Istifarin, Meylani Tuasella	
<b>PENERAPAN METODE ARIMAX PADA PERAMALAN PRODUKSI DAGING SAPI DI SUKOHARJO</b>	451 – 458
Fitrian Nur Ardyansyah, Winita Sulandari, Sugiyanto	
<b>ANALISIS KEPUASAN DAN POSITIONING SELLER E-MARKETPLACE DENGAN MENGGUNAKAN IMPORTANCE PERFORMANCE ANALYSIS DAN BILOT</b>	459 – 464
Farah Dibah, Dwi Endah Kusri	
<b>KLASTERISASI LOKASI PASAR KABUPATEN BANYUMAS GUNA MEMPERMUDAH UPTD DALAM MENGELOLA KELAS PASAR</b>	465 – 470
Pradini Nurul Safitri, Abdullah Ahmad Dzikrullah	

<b>PENGARUH MOTIVASI INTRINSIK DAN KEPUASAN KERJA TERHADAP ORGANIZATIONAL CITIZENSHIP BEHAVIOR</b>	471 – 476
Diya Kasih Puspitasari, Dwi Endah Kusrini	
<b>KLASTERING JUMLAH PENDUDUK BERDASARKAN JENIS KELAMIN PADA KECAMATAN LEKSULA TAHUN 2018 DENGAN MENGGUNAKAN METODE ALGORITMA K-MEANS</b>	477 – 484
Morensi T. Risakotta, Rensya Siwalette, Rola E. Leasa	
<b>PERAMALAN DENGAN METODE SIMPLE MOVING AVERAGE DAN DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING BROWN (STUDI KASUS: JUMLAH CURAH HUJAN DAN JUMLAH HARI HUJAN KABUPATEN BURU SELATAN)</b>	485 – 494
Apriano R. Narahawarin, Ravensky Silangen, Rahania Patiekon	
<b>PERAMALAN GARIS KEMISKINAN KABUPATEN BURU SELATAN MENGGUNAKAN METODE DOUBLE EXPONENTIAL SMOOTHING DARI HOLT</b>	495 – 502
Ade Irma La Murdani, Intan Gainau, Unique Resiloy	
<b>ANALISIS PERBEDAAN PENDAPATAN TOKO WALET MAS SEBELUM DAN SESUDAH PANDEMI COVID-19 DENGAN METODE MANN-WHITNEY</b>	503 – 508
Marselina Ema Koten, Yunida Kurniasih, Agustinus Langowuyo	
<b>ANALISIS PENGARUH BELANJA DAERAH, JUMLAH PENDUDUK, DAN PDRB TERHADAP PENDAPATAN DAERAH DI KABUPATEN BURU SELATAN TAHUN 2013-2020</b>	509 – 516
Dephie Latumahina, Martje Riry, Olfen Sabono	
<b>UJI KECOCOKAN DISTRIBUSI RAYLEIGH BIVARIAT MENGGUNAKAN UJI KOLMOGOROV-SMIRNOV BIVARIAT PADA DATA HASIL PERTANDINGAN PERSIB BANDUNG</b>	517 – 522
Wulan Jati Nuraya, Aceng Komarudin Mutaqin	
<b>MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) UNTUK PERAMALAN BANYAKNYA KASUS TERKONFIRMASI DAN KASUS SEMBUH COVID-19 DI INDONESIA</b>	523 – 532
Sri Indra Maiyanti, Mahrudinda, Al Fataa W. Haq, Budi Nurani Ruchjana	
<b>MODEL VECTOR AUTOREGRESSIVE INTEGRATED (VARI) DAN PENERAPANNYA PADA DATA PERKEMBANGAN HARGA ECERAN BERAS DI TIGA IBU KOTA PROVINSI WILAYAH PULAU JAWA</b>	533 – 544
Zulfa Hidayah Satria Putri, Asri Yuniar, Toni Toharudin, Budi Nurani Ruchjana	
<b>PENERAPAN METODE REGRESI LINEAR BERGANDA UNTUK MELIHAT PENGARUH JUMLAH PENDUDUK DAN LUAS WILAYAH TERHADAP JUMLAH PENGGUNA LISTRIK DI KECAMATAN AMBALAU KABUPATEN BURU SELATAN</b>	545 – 552
Fadly Ode, Nur Statib J, Elsy Malwewar	
<b>ANALISIS TINGKAT KEGEMARAN AYAM GEPUK PAK GEMBUS DARI BERBAGAI JENIS PAKET MELALUI PENDEKATAN UJI STATISTIK</b>	553 – 558
Maharani Tiara Pramuditya, Evan Claude Boudewijn Kainama, Agustinus Langowuyo	
<b>SIMULASI PERGERAKAN HARGA SAHAM MENGGUNAKAN MODEL GERAK BROWN GEOMETRIK DENGAN R STUDIO</b>	559 – 564
Ahmad Fawaid Ridwan, Rizki Apriva Hidayana, Budi Nurani Ruchjana	
<b>PENAKSIRAN RATA-RATA <i>EXCESS CLAIM</i> PESERTA DARI PERUSAHAAN PEMBERI LAYANAN KESEHATAN PT. X</b>	565 – 572
Wildan*, Indah Permatasari, and Aceng Komarudin Mutaqin	
<b>PENGARUH SELF EFFICACY DAN MOTIVASI BELAJAR TERHADAP HASIL BELAJAR SISWA KELAS VII SMP NEGERI 3 GANTUNG</b>	573 – 584
Alperu, Nerru Pranuta Murnaka*, Indra Bayu M, Andy Wahyu H	

## SUKU BANYAK BERNSTEIN DAN OPERATOR KANTOROVICH UNTUK BEBERAPA FUNGSI YANG TIDAK KONTINU

Reinhart Gunadi<sup>1</sup>, Denny I. Hakim<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Indonesia

<sup>2</sup>Kelompok Keahlian Analisis dan Geometri, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Indonesia

\*e-mail: reinhart.gunadi@gmail.com

**Abstrak.** *Teorema hampiran Weierstrass menyatakan bahwa setiap fungsi kontinu pada  $[0, 1]$  dapat dihampiri secara seragam oleh barisan suku banyak, salah satunya barisan suku banyak Bernstein. Akan tetapi, kekonvergenan suku banyak Bernstein tidak dapat ditentukan secara umum untuk fungsi yang tidak kontinu. Oleh karena itu, hampiran untuk fungsi-fungsi yang tidak kontinu memerlukan perumusan dari suku banyak Bernstein, misalnya operator Kantorovich. Salah satu kelebihan operator Kantorovich adalah bahwa barisan suku banyak yang dibentuk oleh operator ini konvergen dalam ruang  $L^1([0, 1])$  untuk sebarang fungsi yang terintegralkan. Tujuan dari penelitian ini adalah memeriksa kekonvergenan barisan suku banyak Bernstein dan operator Kantorovich untuk beberapa fungsi yang tidak kontinu seperti fungsi Dirichlet dan fungsi Thomae, khususnya kekonvergenan hampir di mana-mana dan dalam  $L^1([0, 1])$ . Kedua mode kekonvergenan tersebut didemonstrasikan secara analitik dan numerik. Penelitian ini menunjukkan bahwa kekonvergenan barisan suku banyak Bernstein bergantung pada ketakkontinuan fungsi yang ditinjau. Fungsi yang tidak kontinu di mana-mana tidak konvergen dalam kedua mode kekonvergenan yang diperiksa, sementara fungsi yang kontinu hampir di mana-mana masih dapat konvergen. Di lain sisi, barisan suku banyak yang dibangun oleh operator Kantorovich senantiasa konvergen hampir di mana-mana dan dalam  $L^1([0, 1])$  untuk semua fungsi yang dikaji dalam penelitian ini.*

**Kata kunci:** fungsi yang tidak kontinu, kekonvergenan barisan fungsi, operator Kantorovich, suku banyak Bernstein.

### 1 LATAR BELAKANG

Teorema hampiran Weierstrass menyatakan bahwa setiap fungsi kontinu pada  $[0, 1]$  dapat dihampiri secara seragam oleh barisan suku banyak. Salah satu bukti konstruktif untuk teorema tersebut diberikan oleh Bernstein [1]. Untuk sebarang fungsi  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , suku banyak Bernstein orde ke- $n$  dari  $f$  didefinisikan oleh

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_{n,k}(x), \quad (1)$$

dengan  $b_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ . Kekonvergenan suku banyak Bernstein untuk fungsi  $f$  yang kontinu diberikan sebagai berikut.

**Teorema 1.** [1] Misalkan  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  terbatas. Jika  $f$  kontinu di  $x \in [0, 1]$ , maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f)(x) = f(x). \quad (2)$$

Khususnya, jika  $f$  kontinu pada  $[0, 1]$ , maka  $\{B_n(f)\}$  konvergen seragam ke  $f$ .

Namun, kelemahan konstruksi Bernstein adalah barisan suku banyak tersebut tidak dapat menghampiri fungsi yang tidak kontinu dengan baik. Persisnya, barisan suku banyak Bernstein belum tentu konvergen hampir di mana-mana atau dalam norma  $L^1([0, 1])$  untuk fungsi-fungsi yang tidak kontinu. Meskipun demikian, suku banyak Bernstein di suatu titik ketakkontinuan masih konvergen apabila limit sepihak pada titik tersebut ada.

**Teorema 2.** [2] Misalkan  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  terbatas. Jika  $f$  tidak kontinu di  $x$  tetapi  $f(x+)$  dan  $f(x-)$  ada, maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f)(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]. \quad (3)$$

Sebagai alternatif untuk suku banyak Bernstein, Kantorovich [3] mendefinisikan barisan suku banyak yang dapat menghampiri fungsi-fungsi terintegralkan pada  $[0, 1]$ . Untuk sebarang fungsi  $f$  yang terintegralkan pada  $[0, 1]$ , operator Kantorovich orde ke- $n$  untuk  $f$  didefinisikan dengan

$$K_n(f)(x) = (n+1) \sum_{k=0}^n b_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt. \quad (4)$$

Kekonvergenan operator Kantorovich untuk fungsi di  $L^p([0, 1])$ ,  $1 \leq p < \infty$  diberikan sebagai berikut.

**Teorema 3.** [4] Misalkan  $1 \leq p < \infty$ . Jika  $f \in L^p([0, 1])$ , maka  $K_n(f)$  konvergen ke  $f$  dalam  $L^p([0, 1])$ .

Secara khusus, untuk  $p = 1$ , Teorema 3 menyatakan bahwa operator Kantorovich untuk fungsi terintegralkan pada  $[0, 1]$  senantiasa konvergen dalam  $L^1([0, 1])$ . Kekonvergenan ini berlaku sekalipun fungsi tersebut mempunyai tak terbilang banyaknya titik-titik ketakkontinuan.

## 2 TUJUAN

Tujuan penelitian ini adalah menentukan suku banyak Bernstein dan operator Kantorovich untuk berbagai fungsi yang tidak kontinu dan membandingkan kekonvergenannya. Khususnya, kami meninjau perbedaan kekonvergenan suku banyak Bernstein untuk fungsi yang tidak kontinu berdasarkan jenis ketakkontinuan.

## 3 SUKU BANYAK BERNSTEIN DAN OPERATOR KANTOROVICH UNTUK FUNGSI YANG TIDAK KONTINU

### 3.1 Fungsi yang Tidak Kontinu di Mana-Mana

Pada subbab ini, kami meninjau dua contoh fungsi yang tidak kontinu di mana-mana, serta memeriksa kekonvergenan suku banyak Bernstein dan operator Kantorovich dari kedua fungsi tersebut.

**Contoh 1:** Tinjau fungsi Dirichlet yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}; \\ 1, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \quad (5)$$

Perhatikan bahwa  $f$  terintegralkan pada  $[0, 1]$ , dengan  $\int_0^1 |f(x)| dx = 1$ .

Untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$  dan  $k = 0, 1, \dots, n$ , perhatikan bahwa  $f(\frac{k}{n}) = 0$ , sehingga  $B_n(f)(x) = 0$ . Akibatnya, untuk setiap  $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  berlaku  $|f(x) - B_n(f)(x)| = 1$ . Dengan demikian,  $\{B_n(f)(x)\}$  tidak konvergen ke  $f(x)$  hampir di mana-mana pada  $[0, 1]$ . Selain itu, perhatikan bahwa

$$\int_0^1 |f(x) - B_n(f)(x)| dx = 1. \quad (6)$$

Jadi,  $\{B_n(f)\}$  tidak konvergen ke  $f$  dalam  $L^1([0, 1])$ .

Untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$  dan  $k = 0, 1, \dots, n$ , diperoleh  $\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt = \frac{1}{n+1}$ , sehingga

$$K_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n b_{n,k}(x) = 1. \quad (7)$$

Akibatnya, untuk setiap  $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  berlaku  $|f(x) - K_n(f)(x)| = 0$ . Dengan demikian,  $\{K_n(f)(x)\}$  konvergen ke  $f(x)$  hampir di mana-mana pada  $[0, 1]$ . Lebih lanjut,

$$\int_0^1 |f(x) - K_n(f)(x)| dx = 0. \quad (8)$$

Jadi,  $\{K_n(f)\}$  konvergen ke  $f$  dalam  $L^1([0, 1])$ .

**Contoh 2:** Definisikan

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}; \\ x, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \quad (9)$$

Perhatikan bahwa  $f$  terintegralkan pada  $[0, 1]$ , dengan

$$\int_0^1 |f(x)| dx = \int_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}} x dx = \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$  dan  $k = 0, 1, \dots, n$ , diperoleh bahwa  $f(\frac{k}{n}) = \frac{k^2}{n^2}$ , sehingga

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} b_{n,k}(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}. \quad (11)$$

Perhatikan bahwa  $B_n(f)$  pada contoh ini memiliki ekspresi yang tidak trivial dibandingkan dengan suku banyak Bernstein untuk fungsi Dirichlet. Untuk setiap  $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  berlaku

$$|f(x) - B_n(f)(x)| = \left| x - x^2 - \frac{x(1-x)}{n} \right| = x(1-x) \left( 1 - \frac{1}{n} \right). \quad (12)$$

Akibatnya,  $|f(x) - B_n(f)(x)| \rightarrow x(1-x) \neq 0$  untuk setiap  $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  ketika  $n \rightarrow \infty$ . Dengan demikian,  $\{B_n(f)(x)\}$  tidak konvergen ke  $f(x)$  hampir di mana-mana pada  $[0, 1]$ . Selain itu, perhatikan bahwa

$$\int_0^1 |f(x) - B_n(f)(x)| dx = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right). \quad (13)$$

Jadi,

$$\int_0^1 |f(x) - B_n(f)(x)| dx \rightarrow \frac{1}{6} \neq 0 \quad (14)$$

ketika  $n \rightarrow \infty$ , yang berarti  $B_n(f)$  tidak konvergen ke  $f$  dalam  $L^1([0, 1])$ .

Untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$  dan  $k = 0, 1, \dots, n$ , diperoleh bahwa

$$\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt = \int_{[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}] \setminus \mathbb{Q}} t dt = \frac{k}{(n+1)^2} + \frac{1}{2(n+1)^2} \quad (15)$$

sehingga

$$K_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{k}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} \right) b_{n,k}(x). \quad (16)$$

Perhatikan bahwa untuk setiap  $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  berlaku

$$\begin{aligned} |f(x) - K_n(f)(x)| &= \left| x - \sum_{k=0}^n \left( \frac{k}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} \right) b_{n,k}(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - \frac{k}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \right| b_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{|\frac{k}{n} - \frac{1}{2}|}{n+1} b_{n,k}(x). \end{aligned} \quad (17)$$

Untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$  dan  $k = 0, 1, \dots, n$ , perhatikan bahwa  $|\frac{k}{n} - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ , sehingga

$$|f(x) - K_n(f)(x)| \leq \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n b_{n,k}(x) = \frac{1}{2(n+1)}. \quad (18)$$

Karena  $\frac{1}{2(n+1)} \rightarrow 0$ , diperoleh bahwa  $K_n(f)(x) \rightarrow f(x)$  untuk setiap  $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  ketika  $n \rightarrow \infty$ . Dengan demikian,  $\{K_n(f)(x)\}$  konvergen ke  $f(x)$  hampir di mana-mana pada  $[0, 1]$ . Lebih lanjut,

$$\int_0^1 |f(x) - K_n(f)(x)| dx \leq \int_0^1 \frac{1}{2(n+1)} dx = \frac{1}{2(n+1)}. \quad (19)$$

Jadi,  $\{K_n(f)\}$  konvergen ke  $f$  dalam  $L^1([0, 1])$ .

### 3.2 Fungsi yang Tidak Kontinu pada Himpunan Terbilang

Pada subbab ini, kami meninjau dua contoh fungsi yang tidak kontinu di mana-mana, serta memeriksa kekonvergenan suku banyak Bernstein dan operator Kantorovich dari kedua fungsi tersebut.

**Contoh 3:** Tinjau fungsi Thomae yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}, p, q \in \mathbb{N}, \text{fpb}(p, q) = 1; \\ 1, & x = 0; \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \quad (20)$$

Perhatikan bahwa  $f$  terintegralkan pada  $[0, 1]$ , dengan  $\int_0^1 |f(x)| dx = 0$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $\{B_n(f)(x)\}$  tidak konvergen ke  $f(x)$  untuk setiap  $x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ . Misalkan  $n$  adalah bilangan prima, sehingga  $f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}$  untuk  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Akibatnya,

$$\begin{aligned} B_n(f)(x) &= f(0)(1-x)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} b_{n,k}(x) + f(1)x^n \\ &= (1-x)^n + \frac{1}{n} \left( \sum_{k=0}^n b_{n,k}(x) - (1-x)^n - x^n \right) + x^n \\ &= (1-x)^n + \frac{1}{n} (1 - (1-x)^n - x^n) + x^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) [(1-x)^n + x^n] + \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (21)$$

Untuk setiap  $x = \frac{p}{q} \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ , perhatikan bahwa  $x^n \rightarrow 0$  dan  $(1-x)^n \rightarrow 0$  ketika  $n \rightarrow \infty$ . Akibatnya,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| = \left| \left(1 - \frac{1}{n}\right) [(1-x)^n + x^n] + \frac{1}{n} - \frac{1}{q} \right| \rightarrow \frac{1}{q} \quad (22)$$

ketika  $n \rightarrow \infty$ , dengan  $n$  bilangan prima. Dengan demikian,  $\{B_n(f)(x)\}$  tidak konvergen ke  $f(x)$  pada  $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ . Meskipun demikian,  $f$  kontinu di setiap  $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ , sehingga dalam hal ini  $\{B_n(f)(x)\}$  konvergen ke  $f(x)$  berdasarkan Teorema 1. Jadi,  $\{B_n(f)(x)\}$  konvergen ke  $f(x)$  hampir di mana-mana pada  $[0, 1]$ .

Untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$  dan  $k = 0, 1, \dots, n$ , diperoleh bahwa  $\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt = 0$ , sehingga  $K_n(f)(x) = 0$ . Akibatnya,  $\{K_n(f)(x)\}$  konvergen ke  $f(x)$  hampir di mana-mana pada  $[0, 1]$ . Lebih lanjut,  $\int_0^1 |f(x) - K_n(f)(x)| dx = 0$ . Jadi,  $\{K_n(f)\}$  konvergen ke  $f$  dalam  $L^1([0, 1])$ .

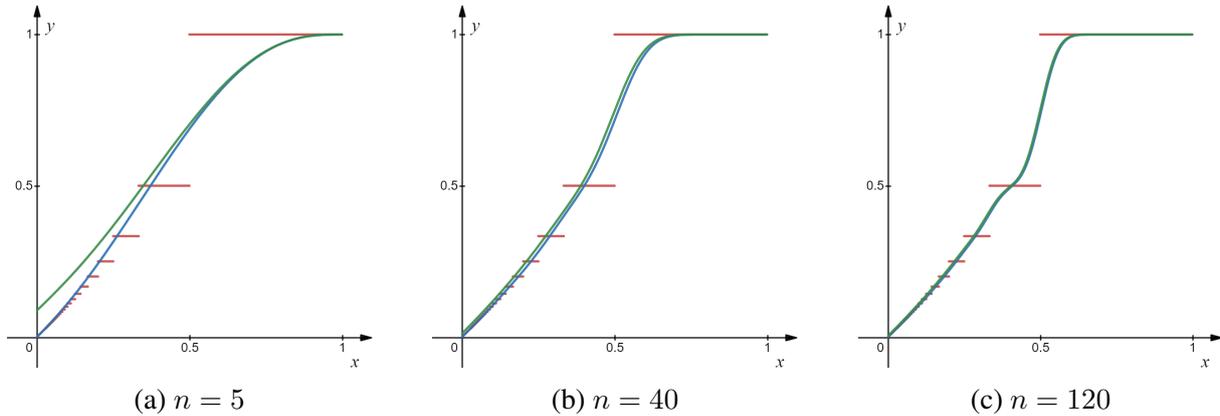
**Contoh 4:** Definisikan

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{[1/x]}, & x \in (0, 1]; \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Definisikan pula  $E = \{\frac{1}{N} : N = 2, 3, \dots\}$ . Perhatikan bahwa  $f$  kontinu di setiap  $x \in [0, 1] \setminus E$  tetapi tidak kontinu di setiap  $x \in E$ . Selain itu,  $f$  terintegralkan pada  $[0, 1]$  dengan  $\int_0^1 |f(x)| dx = \frac{\pi^2}{6} - 1$ .

Berdasarkan Teorema 1,  $\{B_n(f)(x)\}$  konvergen ke  $f(x)$  pada  $[0, 1] \setminus E$ . Sementara itu, untuk setiap  $x = \frac{1}{N}, N = 2, 3, \dots$  berlaku  $f(x+) = \frac{1}{N-1}$  dan  $f(x-) = \frac{1}{N} = f(x)$ . Akibatnya,  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f)(x) = \frac{N-1/2}{N(N-1)} \neq f(x)$  berdasarkan Teorema 2. Karena  $E$  adalah himpunan berukuran nol,  $\{B_n(f)(x)\}$  konvergen ke  $f(x)$  hampir di mana-mana pada  $[0, 1]$ .

Gambar 1 mengilustrasikan kekonvergenan  $\{B_n(f)\}$  dan  $\{K_n(f)\}$  pada  $[0, 1]$ . Terlihat bahwa seiring bertambahnya  $n$ ,  $B_n(f)(x)$  dan  $K_n(f)(x)$  semakin mendekati  $f(x)$  untuk setiap  $x \in [0, 1] \setminus E$ . Sementara itu, di  $\frac{1}{N} \in E$  tampak bahwa  $B_n(f)(\frac{1}{N})$  dan  $K_n(f)(\frac{1}{N})$  konvergen ke  $\frac{N-1/2}{N(N-1)}$ . Khususnya, grafik fungsi  $B_n(f)$  dan  $K_n(f)$  semakin berhimpit seiring bertambahnya  $n$ . Dengan demikian,  $\{B_n(f)(x)\}$  dan  $\{K_n(f)(x)\}$  memiliki perilaku yang sama ketika  $n \rightarrow \infty$ , yaitu konvergen ke  $f(x)$  hampir di mana-mana pada  $[0, 1]$ .



Gambar 1: Grafik fungsi  $g$  (merah),  $B_n(g)$  (biru), dan  $K_n(g)$  (hijau).

Selain konvergen hampir di mana-mana,  $\{B_n(f)\}$  dan  $\{K_n(f)\}$  keduanya juga konvergen ke  $f$  dalam  $L^1([0, 1])$ . Kekonvergenan  $\{K_n(f)\}$  dalam  $L^1([0, 1])$  merupakan akibat Teorema 3. Tabel 1 menampilkan perhitungan numerik yang mengindikasikan kekonvergenan  $\{B_n(f)\}$  dan  $\{K_n(f)\}$  dalam  $L^1([0, 1])$ . Pada tabel tersebut, tampak bahwa nilai norma  $L^1([0, 1])$  untuk  $f - B_n(f)$  dan  $f - K_n(f)$  semakin mendekati nol seiring bertambahnya  $n$ .

$n$	$\ f - B_n(f)\ _1$	$\ f - K_n(f)\ _1$
5	0.06602	0.08856
40	0.03616	0.03733
120	0.02507	0.02531

Tabel 1: Hasil numerik untuk kekonvergenan  $B_n(f)$  dan  $K_n(f)$  dalam  $L^1([0, 1])$ , dengan  $\|\cdot\|_1$  menotasikan norma dalam  $L^1([0, 1])$ .

#### 4 KESIMPULAN

Untuk setiap fungsi yang ditinjau dalam penelitian ini, suku banyak yang dibangun oleh operator Kantorovich konvergen ke fungsi tersebut baik hampir di mana-mana maupun dalam  $L^1([0, 1])$ . Untuk fungsi yang tidak kontinu di mana-mana seperti fungsi Dirichlet, suku banyak Bernstein tidak konvergen dalam kedua mode kekonvergenan yang ditinjau. Sementara itu, suku banyak Bernstein untuk fungsi yang tidak kontinu hanya pada himpunan terbilang masih dapat konvergen hampir di mana-mana dan dalam  $L^1([0, 1])$ . Dengan demikian, kekonvergenan suku banyak Bernstein suatu fungsi di  $L^1([0, 1])$  yang tidak kontinu bergantung pada jenis ketakkontinuan fungsi tersebut. Sebagai saran penelitian selanjutnya, dapat diperiksa apakah kekonvergenan suku banyak Bernstein berlaku secara umum untuk setiap fungsi yang kontinu hampir di mana-mana.

## UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didanai oleh Program Riset PPMI FMIPA ITB 2021.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] S. Bernstein, “Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités,” *Comm. Soc. Math. Kharkov*, 13, 1-2 (1912).
- [2] F. Herzog dan J. D. Hill, “The Bernstein polynomials for discontinuous functions”, *Amer. J. Math*, 68, 109-124 (1946).
- [3] L. V. Kantorovich, “Sur certains développements suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein I, II”, *C. R. Acad. Sci. URSS*, 563-568 dan 595-600 (1930).
- [4] G. G. Lorentz, *Bernstein Polynomials, 2nd Edition*, Chelsea Publishing (1986).



ISSN 2829-3770



9

772829

377007