Konferensi Nasional MATEMATIKA KNM 2021

PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by IndoMS

Organized by Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

"Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0"

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

e-ISSN: 2829-3770
DOI issue: https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX

Dipublikasikan online pada:
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:

Mei 2022

Editor:

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si., M.Si., Berny P. Tomasouw, S.Si., M.Si.,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si., M. I. Tilukay, S.Si., M.Si., Monalisa E. Rijoly, S.Si., M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si., M.Si, M. B. Mananggel, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si., M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si., M.Si. Vicardy Kempa, S.Si., M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si., M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si., M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si., M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumalun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

KOMBINATORIK

PENDIDIKAN MATEMATIKA

MATEMATIKA TERAPAN

STATISTIKA

https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX.135-142

KNM XX
Universitas Pattimura Ambon, 6-7 Juli 2021

SUKU BANYAK BERNSTEIN DAN OPERATOR KANTOROVICH UNTUK BEBERAPA FUNGSI YANG TIDAK KONTINU

Reinhart Gunadi[1], **Denny I. Hakim**[2]

[1]Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Indonesia

[2]Kelompok Keahlian Analisis dan Geometri, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Indonesia
*e-mail: reinhart.gunadi@gmail.com

Abstrak. *Teorema hampiran Weierstrass menyatakan bahwa setiap fungsi kontinu pada* $[0,1]$ *dapat dihampiri secara seragam oleh barisan suku banyak, salah satunya barisan suku banyak Bernstein. Akan tetapi, kekonvergenan suku banyak Bernstein tidak dapat ditentukan secara umum untuk fungsi yang tidak kontinu. Oleh karena itu, hampiran untuk fungsi-fungsi yang tidak kontinu memerlukan perumuman dari suku banyak Bernstein, misalnya operator Kantorovich. Salah satu kelebihan operator Kantorovich adalah bahwa barisan suku banyak yang dibentuk oleh operator ini konvergen dalam ruang* $L^1([0,1])$ *untuk sebarang fungsi yang terintegralkan. Tujuan dari penelitian ini adalah memeriksa kekonvergenan barisan suku banyak Bernstein dan operator Kantorovich untuk beberapa fungsi yang tidak kontinu seperti fungsi Dirichlet dan fungsi Thomae, khususnya kekonvergenan hampir di mana-mana dan dalam* $L^1([0,1])$. *Kedua mode kekonvergenan tersebut didemonstrasikan secara analitik dan numerik. Penelitian ini menunjukkan bahwa kekonvergenan barisan suku banyak Bernstein bergantung pada ketakkontinuan fungsi yang ditinjau. Fungsi yang tidak kontinu di mana-mana tidak konvergen dalam kedua mode kekonvergenan yang diperiksa, sementara fungsi yang kontinu hampir di mana-mana masih dapat konvergen. Di lain sisi, barisan suku banyak yang dibangun oleh operator Kantorovich senantiasa konvergen hampir di mana-mana dan dalam* $L^1([0,1])$ *untuk semua fungsi yang dikaji dalam penelitian ini.*

Kata kunci: fungsi yang tidak kontinu, kekonvergenan barisan fungsi, operator Kantorovich, suku banyak Bernstein.

1 LATAR BELAKANG

Teorema hampiran Weierstrass menyatakan bahwa setiap fungsi kontinu pada $[0,1]$ dapat dihampiri secara seragam oleh barisan suku banyak. Salah satu bukti konstruktif untuk teorema tersebut diberikan oleh Bernstein [1]. Untuk sebarang fungsi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, suku banyak Bernstein orde ke-n dari f didefinisikan oleh

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_{n,k}(x), \tag{1}$$

dengan $b_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$. Kekonvergenan suku banyak Bernstein untuk fungsi f yang kontinu diberikan sebagai berikut.

Teorema 1. [1] *Misalkan* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *terbatas. Jika* f *kontinu di* $x \in [0,1]$*, maka*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f)(x) = f(x). \tag{2}$$

Khususnya, jika f *kontinu pada* $[0,1]$*, maka* $\{B_n(f)\}$ *konvergen seragam ke* f.

Namun, kelemahan konstruksi Bernstein adalah barisan suku banyak tersebut tidak dapat menghampiri fungsi yang tidak kontinu dengan baik. Persisnya, barisan suku banyak Bernstein belum tentu konvergen hampir di mana-mana atau dalam norma $L^1([0,1])$ untuk fungsi-fungsi yang tidak kontinu. Meskipun demikian, suku banyak Bernstein di suatu titik ketakkontinuan masih konvergen apabila limit sepihak pada titik tersebut ada.

Teorema 2. [2] *Misalkan* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *terbatas. Jika* f *tidak kontinu di* x *tetapi* $f(x+)$ *dan* $f(x-)$ *ada, maka*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f)(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]. \tag{3}$$

Sebagai alternatif untuk suku banyak Bernstein, Kantorovich [3] mendefinisikan barisan suku banyak yang dapat menghampiri fungsi-fungsi terintegralkan pada $[0,1]$. Untuk sebarang fungsi f yang terintegralkan pada $[0,1]$, operator Kantorovich orde ke-n untuk f didefinisikan dengan

$$K_n(f)(x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\,dt. \tag{4}$$

Kekonvergenan operator Kantorovich untuk fungsi di $L^p([0,1]), 1 \le p < \infty$ diberikan sebagai berikut.

Teorema 3. [4] *Misalkan* $1 \le p < \infty$*. Jika* $f \in L^p([0,1])$*, maka* $K_n(f)$ *konvergen ke* f *dalam* $L^p([0,1])$.

Secara khusus, untuk $p = 1$, Teorema 3 menyatakan bahwa operator Kantorovich untuk fungsi terintegralkan pada $[0,1]$ senantiasa konvergen dalam $L^1([0,1])$. Kekonvergenan ini berlaku sekalipun fungsi tersebut mempunyai tak terbilang banyaknya titik-titik ketakkontinuan.

2 TUJUAN

Tujuan penelitian ini adalah menentukan suku banyak Bernstein dan operator Kantorovich untuk berbagai fungsi yang tidak kontinu dan membandingkan kekonvergenannya. Khususnya, kami meninjau perbedaan kekonvergenan suku banyak Bernstein untuk fungsi yang tidak kontinu berdasarkan jenis ketakkontinuannya.

3 SUKU BANYAK BERNSTEIN DAN OPERATOR KANTOROVICH UNTUK FUNGSI YANG TIDAK KONTINU

3.1 Fungsi yang Tidak Kontinu di Mana-Mana

Pada subbab ini, kami meninjau dua contoh fungsi yang tidak kontinu di mana-mana, serta memeriksa kekonvergenan suku banyak Bernstein dan operator Kantorovich dari kedua fungsi tersebut.

Contoh 1: Tinjau fungsi Dirichlet yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}; \\ 1, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{5}$$

Perhatikan bahwa f terintegralkan pada $[0,1]$, dengan $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx = 1$.

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $k = 0, 1, \ldots, n$, perhatikan bahwa $f(\frac{k}{n}) = 0$, sehingga $B_n(f)(x) = 0$. Akibatnya, untuk setiap $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ berlaku $|f(x) - B_n(f)(x)| = 1$. Dengan demikian, $\{B_n(f)(x)\}$ tidak konvergen ke $f(x)$ hampir di mana-mana pada $[0,1]$. Selain itu, perhatikan bahwa

$$\int_0^1 |f(x) - B_n(f)(x)|\,dx = 1. \tag{6}$$

Jadi, $\{B_n(f)\}$ tidak konvergen ke f dalam $L^1([0,1])$.

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $k = 0, 1, \ldots, n$, diperoleh $\displaystyle\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\,dt = \frac{1}{n+1}$, sehingga

$$K_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) = 1. \tag{7}$$

Akibatnya, untuk setiap $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ berlaku $|f(x) - K_n(f)(x)| = 0$. Dengan demikian, $\{K_n(f)(x)\}$ konvergen ke $f(x)$ hampir di mana-mana pada $[0,1]$. Lebih lanjut,

$$\int_0^1 |f(x) - K_n(f)(x)|\,dx = 0. \tag{8}$$

Jadi, $\{K_n(f)\}$ konvergen ke f dalam $L^1([0,1])$.

Contoh 2: Definisikan

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}; \\ x, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{9}$$

Perhatikan bahwa f terintegralkan pada $[0,1]$, dengan

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} x\,dx = \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $k = 0, 1, \ldots, n$, diperoleh bahwa $f(\frac{k}{n}) = \frac{k^2}{n^2}$, sehingga

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2}\, b_{n,k}(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}. \tag{11}$$

Perhatikan bahwa $B_n(f)$ pada contoh ini memiliki ekspresi yang tidak trivial dibandingkan dengan suku banyak Bernstein untuk fungsi Dirichlet. Untuk setiap $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ berlaku

$$|f(x) - B_n(f)(x)| = \left| x - x^2 - \frac{x(1-x)}{n} \right| = x(1-x)\left(1 - \frac{1}{n}\right). \tag{12}$$

Akibatnya, $|f(x) - B_n(f)(x)| \to x(1-x) \neq 0$ untuk setiap $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ ketika $n \to \infty$. Dengan demikian, $\{B_n(f)(x)\}$ tidak konvergen ke $f(x)$ hampir di mana-mana pada $[0,1]$. Selain itu, perhatikan bahwa

$$\int_0^1 |f(x) - B_n(f)(x)|\, dx = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_0^1 x(1-x)\, dx = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right). \tag{13}$$

Jadi,

$$\int_0^1 |f(x) - B_n(f)(x)|\, dx \to \frac{1}{6} \neq 0 \tag{14}$$

ketika $n \to \infty$, yang berarti $B_n(f)$ tidak konvergen ke f dalam $L^1([0,1])$.

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $k = 0, 1, \ldots, n$, diperoleh bahwa

$$\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\, dt = \int_{[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}] \setminus \mathbb{Q}} t\, dt = \frac{k}{(n+1)^2} + \frac{1}{2(n+1)^2} \tag{15}$$

sehingga

$$K_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)}\right) b_{n,k}(x). \tag{16}$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ berlaku

$$\begin{aligned} |f(x) - K_n(f)(x)| &= \left| x - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)}\right) b_{n,k}(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{k}{n} - \frac{k}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \right| b_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{|\frac{k}{n} - \frac{1}{2}|}{n+1} b_{n,k}(x). \end{aligned} \tag{17}$$

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $k = 0, 1, \ldots, n$, perhatikan bahwa $|\frac{k}{n} - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$, sehingga

$$|f(x) - K_n(f)(x)| \leq \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) = \frac{1}{2(n+1)}. \tag{18}$$

Karena $\frac{1}{2(n+1)} \to 0$, diperoleh bahwa $K_n(f)(x) \to f(x)$ untuk setiap $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ ketika $n \to \infty$. Dengan demikian, $\{K_n(f)(x)\}$ konvergen ke $f(x)$ hampir di mana-mana pada $[0,1]$. Lebih lanjut,

$$\int_0^1 |f(x) - K_n(f)(x)|\, dx \leq \int_0^1 \frac{1}{2(n+1)}\, dx = \frac{1}{2(n+1)}. \tag{19}$$

Jadi, $\{K_n(f)\}$ konvergen ke f dalam $L^1([0,1])$.

3.2 Fungsi yang Tidak Kontinu pada Himpunan Terbilang

Pada subbab ini, kami meninjau dua contoh fungsi yang tidak kontinu di mana-mana, serta memeriksa kekonvergenan suku banyak Bernstein dan operator Kantorovich dari kedua fungsi tersebut.

Contoh 3: Tinjau fungsi Thomae yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in (0,1] \cap \mathbb{Q}, p, q \in \mathbb{N}, \mathrm{fpb}(p,q) = 1; \\ 1, & x = 0; \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{20}$$

Perhatikan bahwa f terintegralkan pada $[0,1]$, dengan $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\, dx = 0$.

Akan ditunjukkan bahwa $\{B_n(f)(x)\}$ tidak konvergen ke $f(x)$ untuk setiap $x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$. Misalkan n adalah bilangan prima, sehingga $f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}$ untuk $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} B_n(f)(x) &= f(0)(1-x)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}\, b_{n,k}(x) + f(1)x^n \\ &= (1-x)^n + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) - (1-x)^n - x^n\right) + x^n \\ &= (1-x)^n + \frac{1}{n}\left(1 - (1-x)^n - x^n\right) + x^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left[(1-x)^n + x^n\right] + \frac{1}{n}. \end{aligned} \tag{21}$$

Untuk setiap $x = \frac{p}{q} \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$, perhatikan bahwa $x^n \to 0$ dan $(1-x)^n \to 0$ ketika $n \to \infty$. Akibatnya,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| = \left| \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left[(1-x)^n + x^n\right] + \frac{1}{n} - \frac{1}{q} \right| \to \frac{1}{q} \tag{22}$$

ketika $n \to \infty$, dengan n bilangan prima. Dengan demikian, $\{B_n(f)(x)\}$ tidak konvergen ke $f(x)$ pada $(0,1) \cap \mathbb{Q}$. Meskipun demikian, f kontinu di setiap $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, sehingga dalam hal ini $\{B_n(f)(x)\}$ konvergen ke $f(x)$ berdasarkan Teorema 1. Jadi, $\{B_n(f)(x)\}$ konvergen ke $f(x)$ hampir di mana-mana pada $[0,1]$.

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $k = 0, 1, \ldots, n$, diperoleh bahwa $\displaystyle\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\, dt = 0$, sehingga $K_n(f)(x) = 0$. Akibatnya, $\{K_n(f)(x)\}$ konvergen ke $f(x)$ hampir di mana-mana pada $[0,1]$. Lebih lanjut, $\displaystyle\int_0^1 |f(x) - K_n(f)(x)|\, dx = 0$. Jadi, $\{K_n(f)\}$ konvergen ke f dalam $L^1([0,1])$.

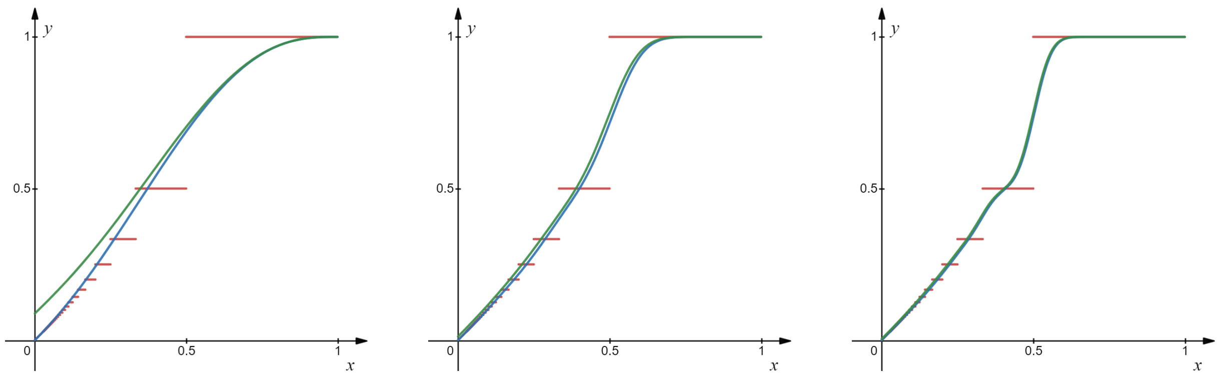
Contoh 4: Definisikan

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{[1/x]}, & x \in (0,1]; \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Definisikan pula $E = \{\frac{1}{N} : N = 2, 3, \ldots\}$. Perhatikan bahwa f kontinu di setiap $x \in [0,1] \setminus E$ tetapi tidak kontinu di setiap $x \in E$. Selain itu, f terintegralkan pada $[0,1]$ dengan $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\, dx = \frac{\pi^2}{6} - 1$.

Berdasarkan Teorema 1, $\{B_n(f)(x)\}$ konvergen ke $f(x)$ pada $[0,1] \setminus E$. Sementara itu, untuk setiap $x = \frac{1}{N}, N = 2, 3, \ldots$ berlaku $f(x+) = \frac{1}{N-1}$ dan $f(x-) = \frac{1}{N} = f(x)$. Akibatnya, $\lim_{n\to\infty} B_n(f)(x) = \frac{N-1/2}{N(N-1)} \neq f(x)$ berdasarkan Teorema 2. Karena E adalah himpunan berukuran nol, $\{B_n(f)(x)\}$ konvergen ke $f(x)$ hampir di mana-mana pada $[0,1]$.

Gambar 1 mengilustrasikan kekonvergenan $\{B_n(f)\}$ dan $\{K_n(f)\}$ pada $[0,1]$. Terlihat bahwa seiring bertambahnya n, $B_n(f)(x)$ dan $K_n(f)(x)$ semakin mendekati $f(x)$ untuk setiap $x \in [0,1] \setminus E$. Sementara itu, di $\frac{1}{N} \in E$ tampak bahwa $B_n(f)(\frac{1}{N})$ dan $K_n(f)(\frac{1}{N})$ konvergen ke $\frac{N-1/2}{N(N-1)}$. Khususnya, grafik fungsi $B_n(f)$ dan $K_n(f)$ semakin berhimpit seiring bertambahnya n. Dengan demikian, $\{B_n(f)(x)\}$ dan $\{K_n(f)(x)\}$ memiliki perilaku yang sama ketika $n \to \infty$, yaitu konvergen ke $f(x)$ hampir di mana-mana pada $[0,1]$.



(a) $n = 5$ (b) $n = 40$ (c) $n = 120$

Gambar 1: Grafik fungsi g (merah), $B_n(g)$ (biru), dan $K_n(g)$ (hijau).

Selain konvergen hampir di mana-mana, $\{B_n(f)\}$ dan $\{K_n(f)\}$ keduanya juga konvergen ke f dalam $L^1([0,1])$. Kekonvergenan $\{K_n(f)\}$ dalam $L^1([0,1])$ merupakan akibat Teorema 3. Tabel 1 menampilkan perhitungan numerik yang mengindikasikan kekonvergenan $\{B_n(f)\}$ dan $\{K_n(f)\}$ dalam $L^1([0,1])$. Pada tabel tersebut, tampak bahwa nilai norma $L^1([0,1])$ untuk $f - B_n(f)$ dan $f - K_n(f)$ semakin mendekati nol seiring bertambahnya n.

n	$\|f - B_n(f)\|_1$	$\|f - K_n(f)\|_1$
5	0.06602	0.08856
40	0.03616	0.03733
120	0.02507	0.02531

Tabel 1: Hasil numerik untuk kekonvergenan $B_n(f)$ dan $K_n(f)$ dalam $L^1([0,1])$, dengan $\|\cdot\|_1$ menotasikan norma dalam $L^1([0,1])$.

4 KESIMPULAN

Untuk setiap fungsi yang ditinjau dalam penelitian ini, suku banyak yang dibangun oleh operator Kantorovich konvergen ke fungsi tersebut baik hampir di mana-mana maupun dalam $L^1([0,1])$. Untuk fungsi yang tidak kontinu di mana-mana seperti fungsi Dirichlet, suku banyak Bernstein tidak konvergen dalam kedua mode kekonvergenan yang ditinjau. Sementara itu, suku banyak Bernstein untuk fungsi yang tidak kontinu hanya pada himpunan terbilang masih dapat konvergen hampir di mana-mana dan dalam $L^1([0,1])$. Dengan demikian, kekonvergenan suku banyak Bernstein suatu fungsi di $L^1([0,1])$ yang tidak kontinu bergantung pada jenis ketakkontinuan fungsi tersebut. Sebagai saran penelitian selanjutnya, dapat diperiksa apakah kekonvergenan suku banyak Bernstein berlaku secara umum untuk setiap fungsi yang kontinu hampir di mana-mana.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didanai oleh Program Riset PPMI FMIPA ITB 2021.

DAFTAR PUSTAKA

[1] S. Bernstein, "Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités," *Comm. Soc. Math. Kharkov*, 13, 1-2 (1912).

[2] F. Herzog dan J. D. Hill, "The Bernstein polynomials for discontinuous functions", *Amer. J. Math*, 68, 109-124 (1946).

[3] L. V. Kantorovich, "Sur certains développements suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein I, II", *C. R. Acad. Sci. URSS*, 563-568 dan 595-600 (1930).

[4] G. G. Lorentz, *Bernstein Polynomials, 2nd Edition*, Chelsea Publishing (1986).

ISSN 2829-3770

9 772829 377007