Konferensi Nasional MATEMATIKA KNM 2021

PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by IndoMS

Organized by Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

“Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0”

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

e-ISSN: 2829-3770
DOI issue: https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX

Dipublikasikan online pada:
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:

Mei 2022

Editor:

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si., M.Si., Berny P. Tomasouw, S.Si., M.Si.,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si., M. I. Tilukay, S.Si., M.Si., Monalisa E. Rijoly, S.Si., M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si., M.Si, M. B. Mananggel, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si., M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si., M.Si. Vicardy Kempa, S.Si., M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si., M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si., M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si., M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumalun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

MATEMATIKA TERAPAN

STATISTIKA

https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX.143-148

PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF SIPUT DAN GRAF UBUR-UBUR

Kevin Akbar*, Kiki Ariyanti Sugeng

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia, Indonesia
*e-mail: kevin.akbar@sci.ui.ac.id

Abstrak. *Graf G mempunyai pelabelan graceful jika semua simpul dapat dilabeli oleh anggota himpunan* $\{0, 1, \ldots, m-1, m\}$ *yang menghasilkan fungsi simpul injektif dan semua busur dapat dilabeli oleh anggota himpunan* $\{1, 2, \ldots, m-1, m\}$*, dimana anggota himpunan label busur merupakan nilai mutlak dari selisih label kedua simpul ujung setiap busur, yang menghasilkan fungsi busur bijektif untuk setiap* $m \in \boldsymbol{Z}^{+}$*. Dalam penelitian ini, dicari konstruksi pelabelan graceful untuk graf siput dan graf ubur-ubur. Perbedaan dari graf siput dan graf ubur-ubur terletak pada subgraf buku dan pendant, dimana graf siput memiliki 1 subgraf buku yang diamalgamasi busur dengan* C_4*, kemudian 2 pendant dihubungkan di salah satu simpul ujung dari busur yang diamalgamasi. Graf ubur-ubur hampir serupa dengan graf siput hanya banyak pendantnya adalah* $2m$ *yang dihubungkan dengan kedua simpul ujung busur yang diamalgamasi, masing-masing* m *pendant.*

Kata kunci: pelabelan graceful, graf graceful, graf siput, graf ubur-ubur

1 LATAR BELAKANG

Pada tahun 1963 di Smolenice, pelabelan graf mulai dikembangkan saat diselenggarakannya konferensi yang disebut *Symposium on the Theory of Graph and Its Applications*. Dalam konferensi ini, Ringel dan Kotzig memperkenalkan dugaan (*conjecture*) yaitu semua graf pohon adalah *graceful* (*Graceful Tree Conjecture*) [2]. Kemudian, Rosa [1, 6] memperkenalkan 4 pelabelan simpul umum yaitu $\alpha - valuation$, $\beta - valuation$, $\sigma - valuation$, dan $\rho - valuation$. Pada tahun 1972 [2, 4], salah satu dari empat pelabelan simpul yaitu $\beta - valuation$ diperkenalkan oleh Golomb sebagai pelabelan graceful.

Misalkan f adalah *valuation* dari graf G dengan m busur, maka f disebut $\beta - valuation$ jika simpul diberi label dengan elemen $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$ dan label busur yang terinduksi adalah $1, 2, \ldots, m$ [1, 6]. Graf G mempunyai pelabelan graceful jika semua simpul dapat dilabeli oleh anggota himpunan $\{0, 1, \ldots, \mathrm{m}-1, \mathrm{m}\}$, yang menghasilkan fungsi simpul injektif dan semua busur dapat dilabeli oleh anggota himpunan $\{1, 2, \ldots, \mathrm{m}-1, \mathrm{m}\}$, dimana anggota himpunan label busur merupakan nilai mutlak dari selisih label kedua simpul ujung setiap busur menghasilkan fungsi busur bijektif untuk setiap $m \in \boldsymbol{Z}^{+}$ [2].

Karena penelitian graf graceful sangat menarik dan belum semua graf terbukti mempunyai pelabelan graceful, pada penelitian ini akan dicari konstruksi pelabelan graceful untuk graf siput dan graf ubur-ubur. Penelitian ini terinspirasi dari graf obor T_n [3, 5] dimana hasil konstruksinya adalah graf obor dengan $n \geq 3$ adalah graf graceful.

2 TUJUAN PENELITIAN

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah:

1. Mengkonstruksi pelabelan graceful pada graf siput.
2. Mengkonstruksi pelabelan graceful pada graf ubur-ubur.

3 METODOLOGI

Metodologi yang digunakan untuk penelitian ini adalah studi literatur mengenai teori graf, fungsi, pelabelan, dan pelabelan graceful.

4 HASIL DAN PEMBAHASAN

Lema yang digunakan untuk paper ini menyatakan untuk himpunan A dan B yang berhingga dimana jika f surjektif maka f bijektif.

Lema 1: Jika $f: A \to B$ adalah fungsi dari A ke B dimana A dan B himpunan hingga yang dinotasikan dengan $|A| = |B| < \infty$ dan f surjektif, maka f bijektif [7].

Bukti. Misalkan $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, maka $R(f) = \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$. Karena f surjektif, maka $|R(f)| = |B| = |A| = n$. Sehingga anggota $R(f) = \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ harus berbeda semua, yaitu jika $x_i \neq x_j$ maka $f(x_i) \neq f(x_j)$. Ini berarti f injektif. Karena f injektif dan surjektif, maka f bijektif. ■

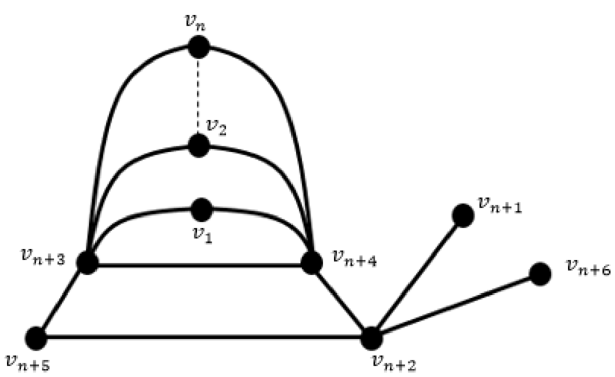
Notasi: $D(f)$ untuk *domain*, $R(f)$ untuk *range*.

4.1 Graf Siput

Graf siput Sl_n (dinotasikan dari *snail* yang berarti siput) merupakan graf hasil konstruksi dari subgraf buku segitiga B_n yang busur bersamanya diamalgamasi sisi dengan C_4, kemudian ditambahkan dua *pendant* yang dihubungkan di salah satu simpul ujung dari busur yang diamalgamasi. Perhatikan graf siput Sl_n, dimana n merupakan banyaknya pola cangkang untuk siput. Graf ini mempunyai $n + 6$ simpul dan $2n + 6$ busur. Himpunan simpul dan busur untuk graf siput Sl_n adalah

- $V(Sl_n) = \{v_i | 1 \leq i \leq n + 6\}$ dan
- $E(Sl_n) = E(Sl_n) = \{v_i v_{n+3} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{n+4} | 1 \leq i \leq n\} \cup$ $\{v_{n+2}v_{n+4}, v_{n+3}v_{n+4}, v_{n+2}v_{n+5}, v_{n+3}v_{n+5}, v_{n+1}v_{n+2}, v_{n+6}v_{n+2}\}$.

Sebagai ilustrasi, perhatikan Gambar 1 yang menjelaskan graf siput dengan penamaan simpul-simpulnya.



Gambar 1. Graf Siput Sl_n

Teorema 2: Graf siput Sl_n dengan $n \geq 1$ adalah graf graceful.
Bukti. Misalkan $V(Sl_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n+6}\}$ adalah himpunan simpul dari graf siput.
Definisikan $f: V(Sl_n) \to \{0, 1, \dots, n+6\}$ sebagai

$$f(v_i) = \begin{cases} 2i + 3; & i = 1, 2, \dots, n, n+1, \\ i - (n+2); & i = n+2, n+3, n+4, \\ 2i - 6; & i = n+5, n+6, \end{cases}$$

untuk setiap $n \geq 1$. Akan dibuktikan f adalah fungsi injektif dengan membagi kasus. Pertama dilihat nilai fungsi untuk masing-masing kelas himpunan dari indeksnya.

- Kasus 1: $i \in \{1,2, \dots, n, n+1\}$. Dari nilai fungsi $f(v_i) = 2i + 3$ terlihat bahwa nilai $f(v_i)$ berbeda untuk nilai i yang berbeda.
- Kasus 2: $i \in \{n+2, n+3, n+4\}$. Dari nilai fungsi $f(v_i) = i - (n+2)$ terlihat bahwa nilai $f(v_i)$ berbeda untuk nilai i yang berbeda.
- Kasus 3: $i \in \{n+5, n+6\}$. Dari nilai fungsi $f(v_i) = 2i - 6$ terlihat bahwa nilai $f(v_i)$ berbeda untuk nilai i yang berbeda.

Berikutnya akan dibandingkan label simpul untuk kelas indeks yang berbeda.

- Kasus 4: $i \in \{1,2, \dots, n, n+1\}$ dan $j \in \{n+2, n+3, n+4\}$. Karena himpunan $\{f(v_i) \big| i \in \{1,2, \dots, n, n+1\}\} = \{5, 7, \dots, 2n+3, 2n+5\}$ dan $\{f(v_j) \big| j \in \{n+2, n+3, n+4\}\} = \{0, 1, 2\}$ adalah himpunan saling lepas, maka $f(v_i) \neq f(v_j)$ untuk $v_i \neq v_j$.
- Kasus 5: $i \in \{1,2, \dots, n, n+1\}$ dan $j \in \{n+5, n+6\}$. Karena himpunan $\{f(v_i) \big| i \in \{1,2, \dots, n, n+1\}\} = \{5, 7, \dots, 2n+3, 2n+5\}$ dan $\{f(v_j) \big| j \in \{n+5, n+6\}\} = \{2n+4,\ 2n+6\}$ adalah himpunan saling lepas, maka $f(v_i) \neq f(v_j)$ untuk $v_i \neq v_j$.
- Kasus 6: $i \in \{n+2, n+3, n+4\}$ dan $j \in \{n+5, n+6\}$. Karena himpunan $\{f(v_i) \big| i \in \{n+2, n+3, n+4\}\} = \{0, 1, 2\}$ dan $\{f(v_j) \big| j \in \{n+5, n+6\}\} = \{2n+4, 2n+6\}$ adalah himpunan saling lepas, maka $f(v_i) \neq f(v_j)$ untuk $v_i \neq v_j$.

Dari semua kasus dapat disimpulkan bahwa semua simpul mempunyai label yang berbeda. Jadi, f adalah fungsi injektif dari himpunan $V(Sl_n)$ ke $\{0, 1, \dots, n+6\}$.
Definisikan $f^*: E(Sl_n) \to \{1, 2, \dots, 2n+6\}$ sebagai $f^*(xy) = |f(x) - f(y)|$ untuk $xy \in E(Sl_n)$. Akan dibuktikan f^* adalah fungsi bijektif.
Akan dibuktikan bahwa f^* adalah fungsi surjektif dari $E(Sl_n)$ ke $\{1, 2, \dots, 2n+6\}$. Perhatikan bahwa:

- Untuk $v_iv_j \in \{v_iv_j | i = 1, 2, \dots, n \ \wedge \ j = n+3\}$, $f^*(v_iv_j) = 2i + 2$
- Untuk $v_iv_j \in \{v_iv_j | i = 1, 2, \dots, n \ \wedge \ j = n+4\}$, $f^*(v_iv_j) = 2i + 1$
- Untuk $v_iv_j \in \{v_iv_j | i = n+2 \ \wedge \ j = n+4\}$, $f^*(v_iv_j) = 2$
- Untuk $v_iv_j \in \{v_iv_j | i = n+3 \ \wedge j = n+4\}$, $f^*(v_iv_j) = 1$
- Untuk $v_iv_j \in \{v_iv_j | i = n+2 \ \wedge \ j = n+5\}$, $f^*(v_iv_j) = 2n + 4$
- Untuk $v_iv_j \in \{v_iv_j | i = n+3 \ \wedge \ j = n+5\}$, $f^*(v_iv_j) = 2n + 3$
- Untuk $v_iv_j \in \{v_iv_j | i = n+1 \ \wedge \ j = n+2\}$, $f^*(v_iv_j) = 2n + 5$
- Untuk $v_iv_j \in \{v_iv_j | i = n+2 \ \wedge \ j = n+6\}$, $f^*(v_iv_j) = 2n + 6$

Sehingga range dari f^*adalah

$$f^*(E(Sl_n)) = f^*\{v_iv_j|i = n+3 \ \wedge j = n+4\} \cup f^*\{v_iv_j|i = n+2 \ \wedge j = n+4\}$$
$$\cup f^*\{v_iv_j|i = 1,2,\dots,n \ \wedge j = n+4\} \cup f^*\{v_iv_j|i = 1,2,\dots,n \ \wedge j = n+3\}$$
$$\cup f^*\{v_iv_j|i = n+3 \ \wedge j = n+5\} \cup f^*\{v_iv_j|i = n+2 \ \wedge j = n+5\}$$
$$\cup f^*\{v_iv_j|i = n+1 \ \wedge j = n+2\} \cup f^*\{v_iv_j|i = n+2 \ \wedge j = n+6\}$$
$$= \{1,2,3,\dots,2n+6\} = \{1,2,3,\dots,|E(Sl_n)|\}.$$

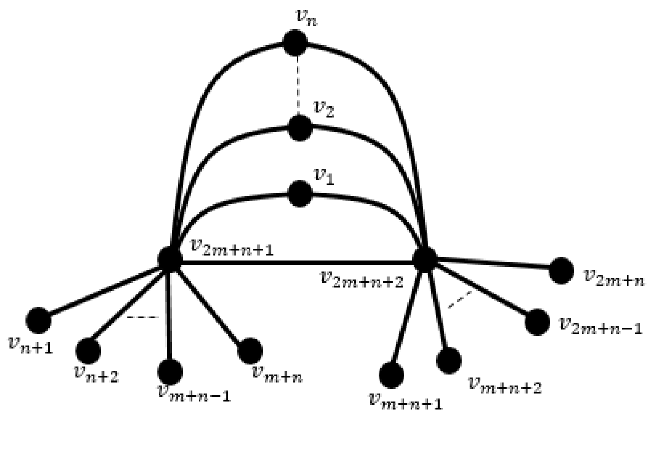
Jadi, f^* adalah fungsi surjektif dari $E(Sl_n)$ ke $\{1,2,3,\dots,|E(Sl_n)|\}$.
Karena $|D(f^*)| = |R(f^*)|$ dan f^* adalah fungsi surjektif, maka menurut Lema 1, fungsi f^* adalah fungsi bijektif dari $E(Sl_{m,n})$ ke $\{1,2,3,\dots,m+2n+6\}$.
Karena $f: V(Sl_n) \to \{0,1,2,\dots,|E(Sl_n)|\}$ adalah fungsi injektif sedemikian sehingga f menginduksi $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ dimana $f^*: E(Sl_{m,n}) \to \{1,2,3,\dots,|E(Sl_{m,n})|\}$ adalah fungsi bijektif, maka graf siput $Sl_{m,n}$ adalah graf graceful. ■

4.2 Graf Ubur-Ubur

Graf ubur-ubur $J_{m,n}$ (dinotasikan dari *jellyfish* yang berarti ubur-ubur) merupakan graf hasil konstruksi dari subgraf buku segitiga B_n yang diamalgamasi busur dengan C_4, kemudian ditambahkan $2m$ *pendant* yang terhubung dengan 2 simpul di subgraf buku B_m. Perhatikan graf ubur-ubur $J_{m,n}$, dimana m merupakan banyaknya tentakel di sisi kiri dan kanan ubur-ubur dan n merupakan banyaknya pola lapisan medusa untuk ubur-ubur. Graf ini mempunyai $2m + n + 2$ simpul dan $2m + 2n + 1$ busur. Himpunan simpul dan busur untuk graf ubur-ubur $J_{m,n}$ adalah

- $V(J_{m,n}) = \{v_i|1 \le i \le 2m+n+2\}$ dan
- $E(J_{m,n}) = \{v_iv_{2m+n+1}|1 \le i \le n\} \cup \{v_iv_{2m+n+2}|1 \le i \le n\} \cup \{v_{n+i}v_{2m+n+1}|1 \le i \le m\} \cup \{v_{m+n+i}v_{2m+n+2}|1 \le i \le m\} \cup \{v_{2m+n+1}v_{2m+n+2}\}$.

Sebagai ilustrasi perhatikan Gambar 2 yang menjelaskan graf ubur-ubur dengan penamaan simpul-simpulnya.



Gambar 2. Graf Ubur-Ubur

Teorema 3: Graf ubur-ubur $J_{m,n}$ dengan $m \ge 1$ dan $n \ge 1$ adalah graf graceful.
Bukti. Misalkan $V(J_{m,n}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2m+n+2}\}$ adalah himpunan simpul dari graf ubur-ubur.
Definisikan $f: V(J_{m,n}) \to \{0,1,\dots,2m+2n+1\}$ sebagai

$$f(v_i) = \begin{cases} 2i-2; & i = 1, 2, \dots, n, \\ i+n-2; & i = n+1, n+2, \dots, m+n-1, m+n, \\ i+n-1; & i = m+n+1, m+n+2, \dots, 2m+n+2, \end{cases}$$

untuk setiap $m \geq 1, n \geq 1$.
Akan dibuktikan f adalah fungsi injektif dengan membagi menjadi beberapa kasus. Pertama dilihat nilai fungsi untuk masing-masing kelas himpunan dari indeks simpulnya.

- Kasus 1: $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Dari nilai fungsi $f(v_i) = 2i-2$ terlihat bahwa nilai $f(v_i)$ berbeda untuk nilai i yang berbeda.
- Kasus 2: $i \in \{n+1, n+2, \dots, m+n\}$. Dari nilai fungsi $f(v_i) = i+n-2$ terlihat bahwa nilai $f(v_i)$ berbeda untuk nilai i yang berbeda.
- Kasus 3: $i \in \{m+n+1, m+n+2, \dots, 2m+n+2\}$. Dari nilai fungsi $f(v_i) = i + n - 1$ terlihat bahwa nilai $f(v_i)$ berbeda untuk nilai i yang berbeda.

Berikutnya akan dibandingkan label simpul untuk kelas indeks yang berbeda.

- Kasus 4: $i \in \{1,2,\dots,n\}$ dan $j \in \{n+1, n+2, \dots, m+n\}$. Karena himpunan $\{f(v_i) | i \in \{1,2,\dots,n\}\} = \{0, 2, \dots, 2n-2\}$ dan $\{f(v_j) | j \in \{n+1, n+2, \dots, m+n\}\} = \{2n-1, 2n, \dots, m+2n-2\}$ adalah himpunan saling lepas, maka $f(v_i) \neq f(v_j)$ untuk $v_i \neq v_j$.
- Kasus 5: $i \in \{1,2,\dots,n\}$ dan $j \in \{m+n+1, m+n+2, \dots, 2m+n+2\}$. Karena himpunan $\{f(v_i) | i \in \{1,2,\dots,n\}\} = \{0, 2, \dots, 2n-2\}$ dan $\{f(v_j) | j \in \{m+n+1, m+n+2, \dots, 2m+n+2\}\} = \{m+2n, m+2n+1, \dots, 2m+2n+1\}$ adalah himpunan saling lepas karena $2n-2 < m+2n$. Jadi $f(v_i) \neq f(v_j)$ untuk $v_i \neq v_j$.
- Kasus 6: $i \in \{n+1, n+2, \dots, m+n\}$ dan $j \in \{m+n+1, m+n+2, \dots, 2m+n+2\}$. Karena himpunan $\{f(v_i) | i \in \{n+1, n+2, \dots, m+n\}\} = \{2n-1, 2n, \dots, m+2n-2\}$ dan $\{f(v_j) | j \in \{m+n+1, m+n+2, \dots, 2m+n+2\}\} = \{m+2n, m+2n+1, \dots, 2m+2n+1\}$ adalah himpunan saling lepas, maka $f(v_i) \neq f(v_j)$ untuk $v_i \neq v_j$.

Dari semua kasus didapat bahwa f adalah fungsi injektif dari himpunan $V(J_{m,n})$ ke $\{0, 1, \dots, 2m+2n+1\}$.
Definisikan $f^*: E(J_{m,n}) \to \{1, 2, \dots, 2n+2m+1\}$ sebagai $f^*(xy) = |f(x) - f(y)|$ untuk $xy \in E(J_{m,n})$. Akan dibuktikan bahwa f^* adalah fungsi bijektif.
Akan dibuktikan bahwa f^* adalah fungsi surjektif dari $E(J_{m,n})$ ke $\{1, 2, \dots, 2m+2n+1\}$.
Perhatikan bahwa:

- Untuk $v_i v_j \in \{v_i v_j | i = 1, 2, \dots, n \wedge j = 2m+n+1\}$, $f^*(v_i v_j) = 2m+2n-2i+2$
- Untuk $v_i v_j \in \{v_i v_j | i = 1, 2, \dots, n \wedge j = 2m+n+2\}$, $f^*(v_i v_j) = 2m+2n-2i+3$
- Untuk $v_i v_j \in \{v_i v_j | i = n+1, n+2, \dots, m+n \wedge j = 2m+n+1\}$, $f^*(v_i v_j) = 2m+n-i+2$
- Untuk $v_i v_j \in \{v_i v_j | i = m+n+1, m+n+2, \dots, 2m+n \wedge j = 2m+n+2\}$, $f^*(v_i v_j) = 2m+n-i+2$
- Untuk $v_i v_j \in \{v_i v_j | i = 2m+n+1 \wedge j = 2m+n+2\}$, $f^*(v_i v_j) = 1$

Sehingga *range* dari f^*adalah

$$f^*\left(E(J_{m,n})\right) = f^*\{v_i v_j | i = 1, 2, \dots, n \wedge j = 2m + n + 1\}$$
$$\cup f^*\{v_i v_j | i = 1, 2, \dots, n \wedge j = 2m + n + 2\}$$
$$\cup f^*\{v_i v_j | i = n + 1, n + 2, \dots, m + n \wedge j = 2m + n + 1\}$$
$$\cup f^*\{v_i v_j | i = m + n + 1, m + n + 2, \dots, 2m + n \wedge j = 2m + n + 2\}$$
$$\cup f^*\{v_i v_j | i = 2m + n + 1 \wedge j = 2m + n + 2\}$$
$$= \{1, 2, 3, \dots, 2m + 2n + 1\} = \{1, 2, 3, \dots, |E(J_{m,n})|\}.$$

Jadi, f^* adalah fungsi surjektif dari $E(J_{m,n})$ ke $\{1, 2, 3, \dots, 2m + 2n + 1\}$.
Karena $|D(f^*)| = |R(f^*)|$ dan f^* adalah fungsi surjektif, maka menurut Lema 1 fungsi f^* adalah fungsi bijektif dari $E(J_{m,n})$ ke $\{1, 2, 3, \dots, 2m + 2n + 1\}$.
Karena $f: V(J_{m.n}) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E(J_{m,n})|\}$ adalah fungsi injektif sedemikian sehingga f menginduksi $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ dimana $f^*: E(J_{m,n}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |E(J_{m,n})|\}$ adalah fungsi bijektif, maka graf ubur-ubur $J_{m,n}$ adalah graf graceful. ■

5 KESIMPULAN

Pada penelitian ini telah dibahas pelabelan graceful pada graf siput dan graf ubur-ubur. Pada Teorema 2 telah dibuktikan bahwa graf siput adalah graf graceful, sedangkan pada Teorema 3 telah dibuktikan bahwa graf ubur-ubur adalah graf graceful. Pembuktian dilakukan dengan mengkonstruksi fungsi pelabelan graceful pada masing-masing graf.

DAFTAR PUSTAKA

[1] S. Arumugam and J. Bagga, “Graceful labeling algorithm and complexity–a survey,” *Indones. Math. Soc.*, Special Edition, 1–9 (2011).

[2] G. Chartrand, C. Egan, and P. Zhang, *How to Label a Graph*, Springer, New York (2019).

[3] J. A. Gallian, “A Dynamic Survey of Graph Labelling,” *Elect. J. Combin.*, 1–553 (2020).

[4] S. W. Golomb, *How to Number a Graph*, Academic Press, New York, 23–37 (1972).

[5] J. M. Manulang and K. A. Sugeng, “Graceful labeling on torch graph,” *Indon. J. Combin.*, **2**(1), 14–19 (2018).

[6] A. Rosa, *On certain valuation of the vertices of a graph (Theory of Graph)* Gordon and Breach, New York, 349–355 (1967).

[7] K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications (8th ed.)*, McGraw-Hill, New York (2019).

ISSN 2829-3770

9 772829 377007