Konferensi Nasional MATEMATIKA 2021

PROSIDING

Konferensi Nasional Matematika XX Tahun 2021

Dipublikasikan Online Pada :
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology
e-ISSN : 2829-3770

Powered by IndoMS

Organized by Universitas Pattimura

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XX

"Peranan Ilmu Matematika dalam Menjawab Tantangan Bangsa yang Semakin Kompleks dan Dinamis di Era Revolusi Industri 4.0"

Diterbitkan oleh Universitas Pattimura

e-ISSN: 2829-3770
DOI issue: https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX

Dipublikasikan online pada:
Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology

Terindeks Oleh:

Mei 2022

Editor:

Dr. Harmanus Batkunde, S.Si., M.Si., Berny P. Tomasouw, S.Si., M.Si.,
Taufan Talib, S.Pd., M.Si., M. I. Tilukay, S.Si., M.Si., Monalisa E. Rijoly, S.Si., M.Sc.
Z.A. Leleury, S.Si., M.Si, M. B. Mananggel, S.Pd., M.Pd., L. J. Sinay, S.Si., M.Sc.,
Y. A. Lesnussa, S.Si., M.Si. Vicardy Kempa, S.Si., M.Si. M. Yahya Matdoan, S.Si., M.Si.
Novalin C. Huwaa, S.Pd., M.Sc., D. L. Rahakbauw, S.Si., M.Si.

Design cover:

L. J. Sinay, S.Si., M.Sc

Ukuran: 29,7 x 21 cm

Tim *Reviewer*

1. Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana, M.S. (Universitas Padjajaran)
2. Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd. (Universitas Pattimura)
3. Prof. Dr. W. Mataheru (Universitas Pattimura)
4. Dr. Eka Kurnia Lestari.(Universitas Singapebangsa)
5. Dr. Yundari. (Universitas Tanjungpura)
6. Dr. Delsi Kariman (STKIP PGRI Sumatera Barat)
7. Dr. Ch. Laamena. (Universitas Pattimura)
8. Dr. Moch Idris. (Universitas Lambung Mangkurat)
9. Dr. Daniel Salim. (Universitas Parahyangan)
10. Dr. Al Azhary Masta.(Universitas Pendidikan Indonesia)
11. Dr. Risnawita. (IAIN Bukittinggi)
12. Dr. Nicky K. Tumalun.(Universitas Negeri Manado)
13. Dr. Susilawati. (Politeknik Bengkalis Riau)
14. Dr. Debi Oktia Haryeni (Universitas Pertahanan)
15. Dr. Anderson Palinussa (Universitas Pattimura)
16. Dr. Harmanus Batkunde. (Universitas Pattimura)

DAFTAR ISI

KOMBINATORIK

PENDIDIKAN MATEMATIKA

MATEMATIKA TERAPAN

STATISTIKA

https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX.171-176

SIFAT-SIFAT GRAF CAYLEY GRUP S_n

Afifan Hadi*, Kiki Ariyanti Sugeng

Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia
**e-mail: afifanhadi@sci.ui.ac.id, kiki@sci.ui.ac.id*

Abstrak. *Grup merupakan suatu struktur aljabar berupa himpunan tak kosong yang apabila didefinisikan suatu operasi biner harus memenuhi empat sifat yaitu: tertutup, berlaku aturan asosiatif, terdapat elemen identitas, serta tiap elemen memiliki elemen invers. Graf Cayley merupakan graf yang berupa representasi elemen-elemen suatu grup sebagai simpul-simpul di graf serta keberadaan busur ditentukan oleh suatu subhimpunan pembangkit dari grup yang tidak mengandung elemen identitas grup. Pada paper ini akan dibahas beberapa jenis graf Cayley yang dibentuk dari grup simetri dengan subhimpunan pembangkit berupa transposisi dan reversal, akan ditunjukkan pula konstruksinya, serta sifat-sifat dasar yang terkait graf Cayley yang dibentuk dengan tujuan untuk memberikan gambaran tentang graf Cayley dari grup simetri.*

Kata Kunci: Grup simetri, graf Cayley, transposisi, *reversal*.

1 PENDAHULUAN

Teori graf aljabar merupakan ilmu tentang penggunaan teknik-teknik aljabar dalam teori graf. Orang yang dianggap sebagai pionir dalam mengasosiasikan graf dengan grup berhingga adalah Arthur Cayley. Cayley menghubungkan teori graf dengan struktur grup pada aljabar melalui *diagram warna Cayley* pada 1878. Dia membuat sebuah graf yang merepresentasikan suatu grup yang kini lebih dikenal sebagai graf Cayley. Graf Cayley merupakan subjek penelitian yang menarik dalam bidang teori graf aljabar dan memunculkan berbagai penerapan praktis pada beragam bidang ilmu contohnya ilmu komputer dan teknologi informasi memanfaatkan graf Cayley untuk membuat jaringan dengan diameter kecil serta konektivitas tinggi [1]. Selain itu, beberapa bidang ilmu lain yang memanfaatkan graf Cayley dalam penerapannya di antaranya bidang aljabar, bidang biologi seperti pada pengukuran jarak antara dua genom bakteri yang terbentuk dalam proses inversi, dan bidang teori pengkodean, dan *machine learning* [2, 3, 4].

Grup didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong G yang di dalamnya didefinisikan suatu operasi biner dan memenuhi empat sifat yaitu tertutup pada operasi di dalamnya, berlaku aturan asosiatif, terdapat suatu elemen identitas, serta tiap elemen memiliki elemen invers. Grup simetri adalah suatu grup yang anggota-anggotanya merupakan permutasi dengan operasi komposisi fungsi [5].

Suatu graf G adalah pasangan himpunan tak kosong berhingga $V(G)$ yang elemennya disebut sebagai simpul dari G, dan himpunan $E(G)$ yang berisi pasangan tak terurut dari simpul di $V(G)$ yang disebut busur dari G [6]. Diberikan sebuah grup berhingga Γ. Misal $C \subset \Gamma$ adalah himpunan pembangkit yang simetris dan tidak mengandung elemen identitas, graf Cayley pada grup Γ dengan himpunan pembangkit $C \subset \Gamma$ dinotasikan dengan $Cay(\Gamma, C)$, didefinisikan sebagai graf dengan tiap simpulnya adalah elemen dari Γ yaitu $V = \Gamma$, dan busurnya sesuai dengan operasi kanan elemen di Γ oleh elemen di C, yaitu $E = \{\{\gamma, \gamma c\}: \gamma \in \Gamma, c \in C\}$.

2 GRUP DAN GRAF: DEFINISI DAN NOTASI

Misal G suatu grup berhingga. Anggota dari suatu himpunan bagian C dari G disebut pembangkit, serta C disebut sebagai himpunan pembangkit apabila setiap anggota grup G dapat dinyatakan sebagai hasil operasi berhingga dari pembangkit-pembangkit di C, dengan kata lain G dibangkitkan oleh C. Suatu himpunan bagian C dari G disebut simetris jika $c \in C$ berakibat $c^{-1} \in C$, bisa juga dinotasikan sebagai $C = C^{-1}$ dengan $C^{-1} = \{c^{-1}: c \in C\}$ [2].

Diberikan sebarang himpunan tak kosong berhingga S, maka himpunan semua pemetaan satu-satu dari S ke S dengan operasi komposisi fungsi disebut sebagai grup simetri berderajat n dan dinotasikan sebagai S_n serta elemennya disebut permutasi dari S. Permutasi biasa dinotasikan sebagai $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ atau dalam satu baris sebagai $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ [5].

Notasi $(i_1\ i_2 \dots\ i_k)$ merepresentasikan suatu permutasi di S_n, dengan $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_j) = i_{j+1}$ untuk $j < k$, $\sigma(i_k) = i_1$, dan $\sigma(s) = s$ untuk s berbeda dari $i_1, i_2, \dots, i_k$. Notasi $(i_1\ i_2 \dots\ i_k)$ disebut sebuah k-*cycle*. Jika $k = 2$, yaitu permutasi $(i_1\ i_2)$ disebut transposisi. Dua *cycle* disebut *disjoint* apabila keduanya tidak memiliki suatu bilangan bulat yang sama. Suatu permutasi $\sigma \in S_n$ merupakan permutasi ganjil jika σ adalah hasil operasi sejumlah bilangan ganjil transposisi-transposisi, dan merupakan permutasi genap jika σ adalah hasil operasi sejumlah bilangan genap transposisi-transposisi [7].

Teorema 2.1. [5] Semua permutasi di S_n adalah hasil operasi *disjoint cycles*.

Teorema 2.2. [5] Semua permutasi di S_n adalah hasil operasi transposisi-transposisi.

Teorema 2.3. [8] Untuk $n \geq 2$, S_n dibangkitkan oleh $(n-1)$ transposisi

$$(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n).$$

Teorema 2.4. [8] Untuk $n \geq 2$, S_n dibangkitkan oleh $(n-1)$ transposisi

$$(1\ 2), (2\ 3), \dots, ((n-1)\ n).$$

Teorema 2.5. [8] Untuk $n \geq 2$, S_n dibangkitkan oleh transposisi $(1\ 2)$ dan n-*cycle* $(1\ 2 \dots n)$.

Sebuah *reversal* $r_{i,j}$ adalah sebuah operasi yang membalikkan urutan segmen $[i, j]$, $1 \leq 1 < j \leq n$, dari suatu permutasi, yakni $[\dots, \pi_i, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{j-1}, \pi_j, \dots] r_{i,j} = [\dots, \pi_j, \pi_{j-1}, \dots, \pi_{i+1}, \pi_i, \dots]$. Diberikan dua buah grup G dan G', maka pemetaan $\varphi: G \to G'$ disebut suatu homomorfisma grup G ke grup G' jika memenuhi $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ untuk setiap $a, b \in G$, sehingga homomorfisma disebut mempertahankan operasi di G. Grup G dan G' disebut isomorfis jika terdapat suatu homomorfisma dari G ke G' yang bersifat satu-satu dan pada.

Suatu graf G adalah pasangan himpunan tak kosong berhingga $V(G)$ yang elemennya disebut sebagai simpul dari G, dan himpunan $E(G)$ yang berisi pasangan tak terurut dari simpul di $V(G)$ yang disebut busur dari G. Dua buah simpul v dan w disebut bertetangga apabila ada sebuah busur (v, w). (Untuk menyederhanakan penulisan, selanjutnya busur (v, w) juga dinotasikan sebagai vw). Dua buah busur dikatakan bertetangga apabila keduanya memiliki sebuah simpul yang sama pada ujungnya. Derajat dari suatu simpul adalah banyaknya busur yang memiliki simpul tersebut sebagai ujungnya dinotasikan $d(v)$. Derajat maksimal dan minimal dari suatu graf G berturut-turut adalah $\Delta(G)$ dan $\delta(G)$, serta G disebut k-reguler jika $\Delta(G) = \delta(G) = k$. Orde dan ukuran dari graf G berturut-turut adalah banyaknya simpul dan banyaknya busur di G. Dua graf G_1 dan G_2 isomorfis jika ada pemetaan satu-satu antara simpul-simpul di G_1 dengan simpul-simpul di G_2 sedemikian sehingga banyaknya busur yang menghubungkan sebarang pasang simpul di G_1 sama dengan banyaknya busur yang menghubungkan pasangan simpul yang berkorespondensi di G_2.

Suatu graf dikatakan terhubung jika dan hanya jika ada lintasan antara setiap pasang simpulnya. Jarak lintasan antara simpul u dan v pada suatu graf terhubung G, dinotasikan dengan $d(u,v)$ adalah banyaknya busur pada lintasan terpendek yang menghubungkan u dan v. Jarak lintasan terbesar pada suatu graf G dinotasikan dengan d(G), disebut diameter dari graf G [9].

Jika himpunan simpul pada suatu graf dapat dipisah menjadi dua himpunan yang saling lepas A dan B sedemikian sehingga setiap busur di graf menghubungkan sebuah simpul di A dengan sebuah simpul di B, maka graf tersebut adalah graf bipartit**.** Suatu graf bipartit dengan setiap simpul di A bertetangga dengan semua simpul di B dan hanya terhubung oleh satu busur disebut graf bipartit lengkap, dinotasikan sebagai $K_{r,s}$ dengan r dan s menyatakan banyaknya elemen di A dan B.

Suatu permutasi σ dari himpunan simpul suatu graf Γ disebut sebuah automorfisma apabila (u, v) adalah sebuah busur di Γ jika dan hanya jika $(\sigma(u), \sigma(v))$ adalah busur di Γ. Suatu graf Γ disebut transitif simpul jika untuk sebarang 2 simpul u dan v di Γ terdapat suatu automorfisma σ yang memenuhi $\sigma(u) = v$. Suatu graf Γ disebut transitif busur jika untuk sebarang 2 busur x dan y di Γ terdapat suatu automorfisma σ yang memetakan x ke y.

3 GRAF CAYLEY

Diberikan sebuah grup berhingga Γ. Misal C adalah himpunan pembangkit yang simetris dan tidak mengandung elemen identitas. **Graf Cayley** pada grup Γ dengan himpunan pembangkit $C \subset \Gamma$ dinotasikan dengan $Cay(\Gamma, C)$ didefinisikan sebagai graf dengan tiap simpulnya adalah elemen dari Γ yaitu $V = \Gamma$ dan busurnya sesuai dengan operasi kanan elemen di Γ oleh elemen di C, yaitu $E = \{(\gamma, \gamma c) : \gamma \in \Gamma, c \in C\}$.

Teorema 3.1. [10] Misal C adalah himpunan pembangkit dari suatu grup berhingga G. Maka graf Cayley yang terbentuk, $Cay(G, C)$, memiliki sifat-sifat berikut:

1. merupakan graf terhubung $|C|$-reguler.
2. merupakan graf yang transitif simpul.

Bukti. (1) Misal G suatu grup berhingga, dengan C adalah himpunan pembangkit yang simetris dari G. Berdasarkan definisi busur pada graf Cayley, sebarang simpul γ di $Cay(G, C)$ bertetangga dengan simpul $\gamma c_1, \gamma c_2, \ldots, \gamma c_{|C|}$ sehingga setiap simpul di $Cay(G, C)$ berderajat $|C|$ sehingga $Cay(G, C)$ adalah graf $|C|$-reguler. Perhatikan juga bahwa setiap anggota G dapat dinyatakan sebagai operasi berhingga dari anggota-anggota C. Sehingga pada sembarang simpul di $Cay(G,C)$ terdapat lintasan ke simpul-simpul lainnya, dengan kata lain $Cay(G,C)$ terhubung.

(2). Untuk setiap $g \in G$, pemetaan

$$\rho_g : x \to g^{-1}x$$

adalah permutasi elemen-elemen di G. Pemetaan ρ_g adalah automorfima dari $Cay(G,C)$ karena

$$(g^{-1}y)^{-1}(g^{-1}x) = y^{-1}gg^{-1}x = y^{-1}x$$

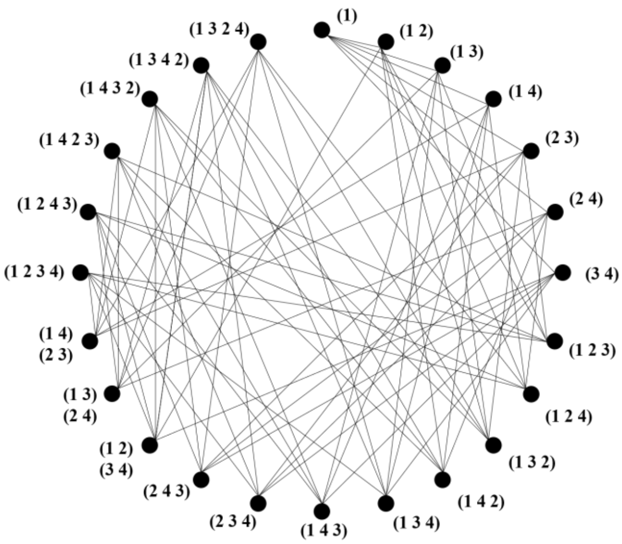
Sehingga $g^{-1}x \sim g^{-1}y$ jika dan hanya jika $x \sim y$. Pemetaan-pemetaan ρ_g membentuk subgrup dari grup automorfisma dari $Cay(G,C)$ yang isomorfis dengan G. Subgrup ini berlaku transitif dengan simpul-simpul $Cay(G,C)$ karena untuk sembarang pasang simpul g dan h, automorfisma $\rho_{gh^{-1}}$ memetakan g ke h. □

Pada subbab berikut diberikan sifat graf transposisi dari S_n dan graf *pancake* dari S_n yang dinyatakan di [6] tanpa bukti. Bukti yang diberikan untuk Teorema 3.2 dan 3.3 diberikan sebagai bukti alternatif.

3.1 Graf Transposisi dari S_n

Diberikan himpunan transposisi $C = \{(i_a\ i_b) \in S_n, 1 \le i_a \le i_b \le n\}$. Himpunan transposisi C mengandung semua transposisi di S_n sehingga merupakan sebuah himpunan pembangkit untuk S_n. Graf Cayley yang dibentuk dengan himpunan transposisi C disebut graf transposisi dari S_n. Berikut diberikan contoh konstruksi graf transposisi dari S_4.

Contoh 3.1. Diberikan grup simetri berderajat 4, yang dinotasikan dengan S_4. Graf transposisi dari S_4 dengan himpunan transposisi $C = \{(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4)\}$, adalah graf $Cay(S_4, C)$ dengan $V(Cay(S_4,C)) = S_4$ dan $E(Cay(S_4,C)) = \{(\gamma, \gamma c) : \gamma \in S_4, c \in C\}$. Graf ini diilustrasikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf Transposisi dari S_4

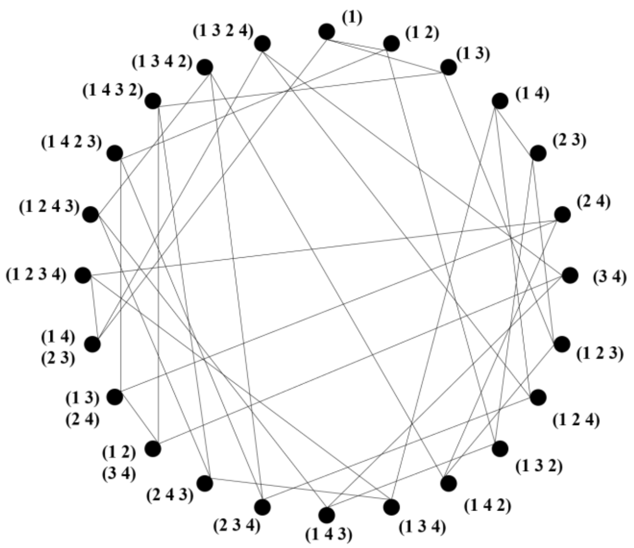
Teorema 3.2. Graf transposisi dari S_n dengan $n \geq 3$, merupakan graf bipartit $\binom{n}{2}$-reguler berorde $n!$ dan diameter $(n-1)$.

Bukti. Berdasarkan definisi graf transposisi dari S_n dengan himpunan transposisi $C = \{(i_a\ i_b) \in S_n, 1 \leq\ i_a \leq\ i_b \leq n\}$, setiap busur pada graf transposisi dari S_n menghubungkan suatu simpul $\gamma \in S_n$ dengan simpul γc dengan c anggota himpunan tranposisi C. Sehingga setiap busur menghubungkan simpul permutasi genap dengan simpul permutasi ganjil, maka grafnya bipartit. Perhatikan bahwa $|V| = |S_n| = n!$ serta himpunan transposisi C memiliki $\binom{n}{2}$ elemen, sehingga graf transposisi dari S_n berorde $n!$ serta berdasarkan Teorema 3.1. graf transposisi dari S_n adalah graf terhubung $\binom{n}{2}$-reguler. Karena paling banyak $(n-1)$ transposisi cukup untuk mengubah sembarang permutasi dengan *n* elemen menjadi permutasi lainnya maka diameter graf transposisi dari S_n adalah $(n-1)$. □

3.2 Graf *Pancake* dari S_n

Diberikan himpunan *reversal* $C = \{r_{1,i} \in S_n, 1 < i \leq n\}$. Perhatikan bahwa $r_{1,i} = (1\ i)\,(2\ (i-1))\ldots\left(\frac{i}{2}\ \frac{i+1}{2}\right)$ untuk i genap, $r_{1,i} = (1\ i)\,(2\ (i-1))\ldots\left(\frac{i-1}{2}\ \frac{i+3}{2}\right)$ untuk i ganjil, sehingga pada himpunan C terdapat transposisi-transposisi $(1\ 2),(1\ 3),\ldots,(1\ n)$. Sehingga himpunan *reversal* C merupakan pembangkit S_n. Graf Cayley yang dibentuk dengan himpunan *reversal* C disebut graf *pancake* dari S_n. Berikut diberikan contoh konstruksi graf *pancake* dari S_4.

Contoh 3.2. Diberikan grup simetri berderajat 4, yang dinotasikan dengan S_4. Graf *pancake* dari S_4 dengan himpunan *reversal* $C = \{r_{1,2}, r_{1,3}, r_{1,4}\} = \{(1\ 2),(1\ 3),(1\ 4)(2\ 3)\}$, adalah graf $Cay(S_4, C)$ dengan $V(Cay(S_4,C)) = S_4$ dan $E(Cay(S_4,C)) = \{(\gamma, \gamma c) : \gamma \in S_3, c \in C\}$. Ilustrasi dari graf ini dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf *Pancake* dari S_4

Teorema 3.3. Graf *pancake* dari S_n, $n \geq 3$, merupakan graf terhubung $(n-1)$-reguler berorde $n!$.

Bukti. Berdasarkan definisi graf *pancake* dari S_n dengan himpunan *reversal* $C = \{r_{1,i} \in S_n, 1 < i \leq n\}$, setiap busur pada graf *pancake* dari S_n menghubungkan suatu simpul $\gamma \in S_n$ dengan simpul γc dengan c anggota himpunan *reversal* C. Perhatikan bahwa $|V| = |S_n| = n!$ serta himpunan *reversal* C memiliki $(n-1)$ elemen, sehingga graf *pancake* dari S_n berorde $n!$ serta berdasarkan Teorema 3.1. graf *pancake* S_n adalah graf terhubung $(n-1)$-reguler. □

4 KESIMPULAN

- Graf Cayley merupakan graf yang dibentuk dari suatu grup sedemikian sehingga simpul-simpul pada graf adalah representasi elemen-elemen grup serta terbentuknya busur ditentukan suatu subhimpunan grup yang bebas elemen identitas serta membangkitkan grup tersebut.
- Jika himpunan pembangkit yang digunakan adalah himpunan pembangkit grup yang bersifat simetris, graf Cayley yang terbentuk, *Cay*(*G*,*C*), merupakan graf terhubung |C|-reguler dan merupakan graf yang transitif simpul.
- Graf transposisi dari S_n dengan $n \geq 3$, merupakan graf bipartit $\binom{n}{2}$-reguler berorde $n!$ dengan diameter $(n-1)$.
- Graf *pancake* dari S_n, $n \geq 3$, merupakan graf terhubung $(n-1)$-reguler berorde $n!$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Steinhardt, J., “Cayley Graphs Formed by Conjugate Generating Sets of Sn”, *arXiv preprint arXiv*:0711.3057 (2007).

[2] Konstantinova, E., “Some Problems on Cayley Graphs”, *Linear Algebra and its applications*, 429(11-12), 2754-2769 (2008).

[3] Bhatia, S., Egri-Nagy, A., Serdoz, S., Praeger, C. E., Gebhardt, V., & Francis, A. “A Path-deformation Framework for Determining Weighted Genome Rearrangement Distance”. *Frontiers in Genetics*, 11, 1035 (2020).

[4] Otness, K. T. “Graph Convolutions and Machine Learning” (Doctoral dissertation). [internet] (diunduh pada 8 Oktober 2021) tersedia pada http://nrs.harvard.edu/urn-3:HUL.InstRepos:38811540 (2018).

[5] Herstein, I. N., *Abstract Algebra* (3rd ed.), Prentice Hall, Inc (1996).

[6] Wilson, R. J., *Introduction to Graph Theory* (5th ed.), Pearson (2010).

[7] Gallian, J. A., *Contemporary Abstract Algebra* (9th ed.), Cengage Learning (2015).

[8] Conrad, K., “Generating sets”, [internet] (diunduh pada 21 Juni 2021), tersedia pada https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/genset.pdf

[9] Konstantinova, E., “Vertex Reconstruction in Cayley Graphs”, *Discrete Mathematics*, 309(3), 548-559 (2009).

[10] West, D. B., *Introduction to Graph Theory* (Vol. 2), Prentice Hall, Inc (2001).

ISSN 2829-3770